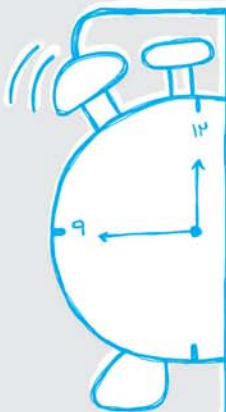


ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی و آمار (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

- (۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
 - (الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.
 - (ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.
- (۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
 - (الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند؛ در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.
 - (ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. آزمون‌های شماره ۹، ۱۰ و ۱۱ به ترتیب امتحان نهایی خرداد ۹۸، شهریور ۹۸ و دی ۹۷ هستند.
- (۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همه آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.
- (۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت، برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت، همه آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی و آمار (۳) نیاز دارید، در ۱۳ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذت‌ش را ببرید! **راهکار:** موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

نوبت	صفحه آزمون	صفحه پاسخ‌نامه	آزمون شماره	طبقه‌بندی شده / نهایی
اول	۳	۲۳	۱	(طبقه‌بندی‌شده)
اول	۵	۲۴	۲	(طبقه‌بندی‌شده)
اول	۷	۲۵	۳	(طبقه‌بندی‌نشده)
اول	۹	۲۷	۴	(طبقه‌بندی‌نشده)
دوم	۱۱	۲۸	۵	(طبقه‌بندی‌شده)
دوم	۱۳	۲۹	۶	(طبقه‌بندی‌شده)
دوم	۱۵	۳۰	۷	(طبقه‌بندی‌شده)
دوم	۱۷	۳۲	۸	(طبقه‌بندی‌شده)
دوم	۱۹	۳۳	۹	(طبقه‌بندی‌نشده)
نهایی - خرداد ۹۸				
دوم	۲۰	۳۴	۱۰	(طبقه‌بندی‌نشده)
نهایی - شهریور ۹۸				
دوم	۲۱	۳۵	۱۱	(طبقه‌بندی‌نشده)
نهایی - دی ۹۷				
دوم	۲۲	۳۶	۱۲	(طبقه‌بندی‌نشده)

بازم‌بندی درس ریاضی و آمار ۳

فصل	نوبت اول	نوبت دوم
۱	۱۵	۵
۲	۵	۵/۵
	—	—
۳	—	۹/۵
جمع	۲۰	۲۰

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)
نمره	آزمون شماره ۱			ردیف
فصل اول				
۲		<p>۱ الف) مطابق شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم و برگردیم به طوری که در مسیر برگشت، از شهری که گذشته‌ایم عبور کنیم ولی از مسیر رفته شده استفاده نکنیم؟ (تمام جاده‌ها دوطرفه هستند). ب) جای خالی را پر کنید. اگر در بین داده‌ها، داده‌ی دورافتاده‌ی داشته باشیم بهتر است از شاخص مرکزی استفاده کنیم.</p>		
۱	الف) $\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!}$	ب) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$	۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:	
۱	۳ مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟			
۱/۵	در سافتن اعداد به شرایط و محدودیت‌های سؤال توجه کنید. آگه مسئله شرط قاضی نداشت برگردن فانه‌ها رو از هپ به راست انجام بدین.	۴ با ارقام ۰، ۱، ۳، ۵، ۶، ۷، ۸ و بدون تکرار ارقام: الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟ ب) چند عدد پنج‌رقمی فرد می‌توان ساخت؟ پ) چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت که یکان آن ۷ و صدگان آن صفر است؟		
۱	۵ با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ ب) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ی» ختم شود؟			
۱		۶ در هر قسمت، پیشامد مطلوب را رنگ کنید: الف) A رخ دهد ولی B یا C رخ ندهند. (نه B رخ دهد نه C) ب) A، B و C رخ دهند.		
۱/۵	۷ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» ظاهر شد آن‌گاه تاسی را می‌ریزیم در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم: الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. ب) پیشامد A را که در آن، عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید با اعضا مشخص کنید.			
۲	در حل مسائل احتمال، اولین قدم مناسبه $n(S)$ است و باید دقت کنید که در مناسبه $n(S)$ هیچ محدودیتی رو برای انتخاب افراد یا اشیاء در نظر نمی‌گیریم.	۸ از جعبه‌ای که شامل ۱۰ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال این‌که: الف) هر ۳ سیب سالم باشند. ب) ۲ سیب خراب باشند. پ) تعداد سیب‌های سالم یکی بیشتر از لکه‌دارها باشد.		
۲	۹ در یک بازی ۱۱ نفره به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس دو تاس را پرتاب می‌کنیم شخصی برنده است که شماره او با مجموع اعداد برآمده از تاس‌ها برابر باشد. الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟ ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کم‌تر است؟ پ) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آن‌ها را بنویسید. سپس نمودار میله‌ای مناسب را رسم کنید.			
۲	۱۰ گام‌های مختلف چرخه آمار در حل مسائل را فقط نام ببرید.			

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)
نمره	نوبت اول پایه دوازدهم			ردیف
آزمون شماره ۱				
فصل دوم				
۱	<p>جاهای خالی را پر کنید.</p> <p>الف) یک دنباله، نوعی تابع است که دامنه آن می باشد.</p> <p>ب) رابطه بازگشتی دنباله $1, -1, 2, -4, 8, \dots$ برابر با است.</p>			۱۱
۱/۲۵	<p>اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آن‌ها را مشخص کنید.</p> <p>الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین</p> <p>ب) میزان ساعات مطالعه دانش آموزان یک کلاس براساس شماره هر دانش آموز در لیست کلاس</p> <p>پ) حجم مکعبی به ضلع x سانتی متر</p> <p>ت) تغییرات سطح آب یک دریاچه در ۱۰ سال اخیر</p> <p>ث) میزان مصرف ماهانه برق آپارتمان‌های با شماره ۱ تا ۱۰۰ یک مجتمع</p> <p>زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/></p> <p>زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/></p> <p>زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/></p> <p>زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/></p> <p>زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/></p>			۱۲
۱/۷۵	<p>الف) برای دنباله $2, 7, 12, 17, \dots$ هم ضابطه تابعی و هم رابطه بازگشتی بنویسید.</p> <p>ب) برای دنباله $16, 3, 16, 3, 16, \dots$ یک رابطه دوضابطه‌ای بنویسید.</p>			۱۳
۱	<p>اگر $a_n = \frac{n^2}{(-1)^n}$، $b_n = 4$ و $c_n = 4 + (-1)^n$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) $a_1 + b_8 - c_7 = ?$</p> <p>ب) $\frac{2a_7 \times \sqrt{b_1}}{ 3 - c_6 } = ?$</p>			۱۴
۲۰	جمع نمرات موفق باشید			

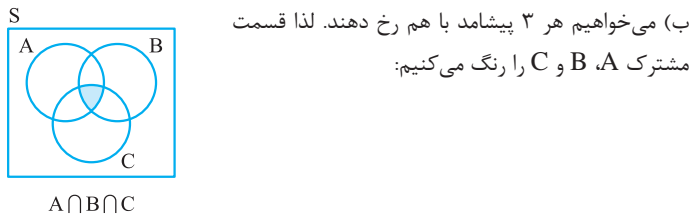
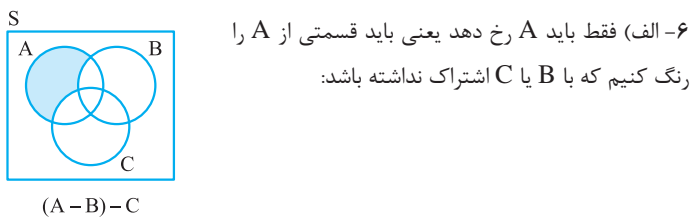
ردیف	آزمون شماره ۹	رشته: ادبیات و علوم انسانی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف) اگر در داده‌ها، داده دورافتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی مناسب است. ب) داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم، گام چرخه آمار است. پ) در دنباله $1, -4, -9, \dots$ ، ضابطه این دنباله می‌باشد. ت) جمله چهارم دنباله $a_n = \frac{1}{4}n - \frac{5}{4}$ ، برابر می‌باشد.	۱	نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۹۸		۱
۲	مجموعه هشت‌عضوی $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ، چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد؟	۱			۱
۳	تاسی را پرتاب می‌کنیم، پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف) پیشامد این که عدد رو شده، زوج و اول باشد. ب) پیشامد این که عدد رو شده اول باشد، ولی زوج نباشد.	۱			۱
۴	از جعبه‌ای که شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب لکه‌دار است، ۴ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال این که سه سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.	۱			۱
۵	خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است: الف) فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده بنویسید. ب) احتمال آن که هر دو فرزند از یک جنس باشد را به دست آورید. پ) احتمال آن که حداکثر یک فرزند پسر باشد را به دست آورید.	۱/۵			۱/۵
۶	با توجه به دنباله‌های $b_n = (-\frac{1}{3})^{n-1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ و $d_n = n^2 + 1$ ، حاصل عبارت $b_4 + d_4 - c_4$ را به دست آورید.	۱/۵			۱/۵
۷	مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.	۱/۵			۱/۵
۸	یازدهمین جمله یک دنباله حسابی برابر ۵۲ و جمله نوزدهم آن برابر ۹۲ است. جمله بیست و ششم این دنباله حسابی را به دست آورید.	۲			۲
۹	با توجه به دنباله روبه‌رو به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) نوع دنباله را مشخص کنید. ب) ضابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. پ) جمله عمومی دنباله را بنویسید. ت) جمله یازدهم این دنباله را بنویسید.	۲			۲
۱۰	در یک دنباله هندسی جمله اول ۱۵۳۶ و نسبت مشترک دنباله $\frac{1}{4}$ است. الف) چندمین جمله دنباله برابر ۶ می‌باشد؟ ب) مجموع ده جمله اول این دنباله را به دست آورید.	۲			۲
۱۱	عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. الف) $(\frac{1}{31})^{\frac{1}{2}}$ ب) $\sqrt[4]{47}$	۱			۱
۱۲	حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند). الف) $(m^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}}$ ب) $8^{\frac{2}{7}} \times (\frac{3}{4})^{\frac{2}{7}}$	۲			۲
۱۳	نمودار مختصاتی تابع نمایشی $y = 3^x$ را رسم کنید.	۱			۱
۱۴	جمعیت یک روستا، در سال ۱۳۹۶ حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟	۱/۵			۱/۵
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید			۲۰

پاسخنامه تشریحی

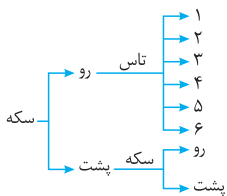
۵- الف) بهتر است خانه‌ها را از راست به چپ پُر کنیم چون کلمه «ولایت» به زبان فارسی است:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ب) $\begin{matrix} \text{«و»} & & & & \text{«ی»} \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$



۷- الف) بهتر است یک نمودار درختی برای این مسئله رسم کنیم:



فضای نمونه $S = \{(r, 1), (r, 2), \dots, (r, 6), (p, r), (p, p), (p, 2), (p, 4), (p, 6), (r, p), (r, r), (r, 6)\}$ پیشامد مطلوب A = $\{(r, 2), (r, 4), (r, 6), (r, p), (r, r), (r, 6)\}$

۸- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{11! \times 3!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 3 \times 2 \times 1} = 364$$

الف) $n(A) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{364}$$

ب) وقتی ۲ سیب خراب است پس سیب سوم سالم است؛ لذا داریم:

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{1}{1} = 6 \times 1 = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{364}$$

ب) باید ۲ سیب سالم و ۱ سیب خراب انتخاب شود:

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{364}$$

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) مسیر رفت $\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow C : \text{تعداد حالتها} = 2 \times 4 = 8 \\ \text{یا} \\ A \rightarrow D \rightarrow C : \text{تعداد حالتها} = 4 \times 3 = 12 \end{cases}$

\Rightarrow تعداد کل حالت‌های مسیر رفت = $8 + 12 = 20$

مسیر برگشت $\begin{cases} C \rightarrow B \rightarrow A : \text{تعداد حالتها} = 3 \times 1 = 3 \\ \text{یا} \\ C \rightarrow D \rightarrow A : \text{تعداد حالتها} = 2 \times 3 = 6 \end{cases}$

\Rightarrow تعداد کل حالت‌های مسیر برگشت = $3 + 6 = 9$

تعداد کل حالت‌های رفت و برگشت = $20 \times 9 = 180$

ب) میانه

۲- الف)

$$\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!} = \frac{8 \times \cancel{7} \times \cancel{6!}}{2 \times 1 \times \cancel{7} \times \cancel{6!}} = \frac{8}{2} = 4$$

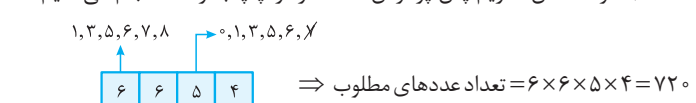
ب) $(n+3)$ بزرگتر از $(n+1)$ است، پس آن را باز می‌کنیم تا به $(n+1)$ برسیم:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2)$$

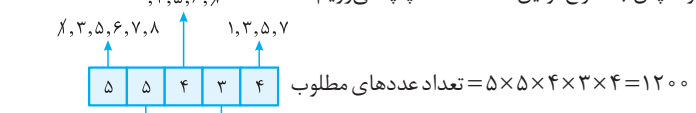
۳- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$ مجموعه A دارای ۶ عضو است، پس خواهیم نوشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6!}{(3! \times 3!)} = \frac{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3!}}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20$$

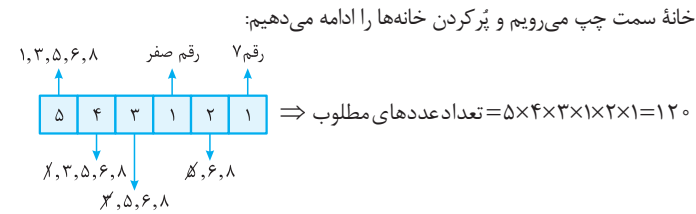
۴- الف) شرط خاص نداریم پس پُر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:



ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس ابتدا خانهٔ مربوط به یکان را پُر می‌کنیم و سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:



ب) یکان فقط باید ۷ باشد پس برای آن فقط یک انتخاب وجود دارد. در مورد صدگان نیز فقط یک انتخاب (رقم صفر) داریم، پس ابتدا این دو خانه را پُر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پُر کردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم:





$$\Rightarrow a_1 + b_8 - c_7 = (-1) + 4 - 5 = -2$$

$$\text{ب) } a_7 = \frac{3^7}{(-1)^7} = \frac{9}{-1} = -9, \quad b_1 = 4, \quad c_7 = 4 + (-1)^7 = 4 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow \text{کسر} = \frac{2(-9) \times \sqrt{4}}{|3-5|} = \frac{-18 \times 2}{|-2|} = \frac{-36}{2} = -18$$

۹- الف و ب) بهتر است از جدول استفاده کنیم: $(n(S) = 6^2 = 36)$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$



مجموع دو تاس (A)	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
فراوانی (n(A))	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

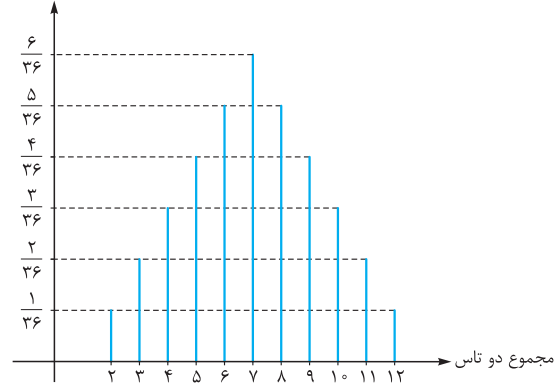
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

از روی جدول معلوم است که احتمال برنده شدن فرد با شماره ۷ بیشتر از بقیه است و احتمال برنده شدن دو فرد با شماره‌های ۲ و ۱۲ از همه کم‌تر است. (خودتان احتمال برنده شدن بقیه افراد را به کمک جدول محاسبه کنید.)

احتمال برنده شدن فرد

(پ)



۱۰- گام اول: بیان مسئله (فهم مسئله، تعریف دقیق مسئله)

گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی (روش اندازه‌گیری، روش نمونه‌گیری، روش انجام کار)

گام سوم: گردآوری، سامان‌دهی و پاک‌سازی داده‌ها

گام چهارم: تحلیل داده‌ها (مرتب‌کردن داده‌ها، استفاده از شاخص‌های مرکزی و پراکندگی، استفاده از نمودارها و جدول‌ها)

گام پنجم: بحث و نتیجه‌گیری و تفسیر نتایج (نتیجه‌گیری، نقد و بررسی، ایده‌های جدید)

۱۱- الف) مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N})

$$\text{ب) } a_{n+1} = \frac{-1}{3} a_n, a_1 = 8$$

۱۲- هر قسمت را به شکل (هم‌دامنه \rightarrow دامنه) می‌نویسیم سپس دامنه را بررسی می‌کنیم:

کاهش دما \rightarrow ارتفاع از سطح زمین (الف)

زیرمجموعه \mathbb{R} : دامنه

میزان ساعات مطالعه \rightarrow شماره هر دانش‌آموز در کلاس (ب)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

حجم مکعب \rightarrow اندازه ضلع مکعب (پ)

زیرمجموعه \mathbb{R} : دامنه

تغییرات سطح آب \rightarrow شماره سال‌های اخیر (۱۰ سال اخیر) (ت)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

میزان مصرف برق \rightarrow شماره آپارتمان‌ها (۱ تا ۱۰۰) (ث)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

۱۳- الف) جملات دنباله ۵ تا ۵ تا زیاد می‌شوند، لذا خواهیم داشت:

$$a_n = 5n - 3 \quad \text{ضابطه تابعی (جمله عمومی)}$$

$$\text{رابطه بازگشتی: } a_{n+1} = a_n + 5, \quad a_1 = 2$$

ب) جملات دنباله، به صورت یک‌درمیان ۱۶ و ۳ هستند لذا چنین می‌نویسیم:

$$a_n = \begin{cases} 16 & \text{فرد } n \\ 3 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$\text{الف) } a_1 = \frac{1^2}{(-1)^1} = \frac{1}{-1} = -1, \quad b_8 = 4, \quad c_7 = 4 + (-1)^7 = 4 + 1 = 5 \quad -14$$

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) دامنه میان چارکی

ب) سوم یا گردآوری و پاکسازی داده‌ها

پ) $a_n = -n^2$

توضیح: اگر اعداد طبیعی را به توان ۲ برسانیم و یک علامت منفی به هر یک بدهیم، به دنباله $1, -4, -9, \dots$ می‌رسیم پس ضابطه این دنباله $a_n = -n^2$ می‌باشد.

ت) $a_4 = -\frac{1}{2}$

توضیح: $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2} \xrightarrow{n=4} a_4 = \frac{1}{2} \times 4 - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$



۱۱- می‌دانیم اگر a عددی مثبت باشد، داریم:

$$\frac{m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$$

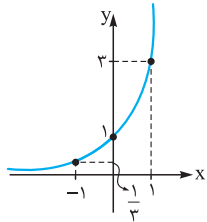
(الف) $\sqrt[5]{\frac{31}{3}}$ (ب) $(47)^{\frac{1}{3}}$

۱۲- $m^{\frac{r}{s}} \times n^{\frac{1}{s}} \times m^{\frac{r}{s}} \times n^{\frac{1}{s}} = (m^{\frac{r}{s}} n)^{\frac{1}{s}} (mn)^{\frac{r}{s}}$ (الف)

$$= m^{\frac{r}{s}} n^{\frac{1}{s}} = (mn)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{(mn)^{\frac{1}{s}}}$$

(ب) توان‌ها مساوی‌اند پس یکی از توان‌ها را نوشته پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(8 \times \frac{r}{s})^{\frac{1}{s}} = 12^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{(12)^{\frac{1}{s}}} = \sqrt[12]{144}$$



۱۳- بهتر است برای رسم دقیق‌تر، از چند نقطه کمکی استفاده کنیم:

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{3}$	1	3

۱۴- $f(t) = c(1-r)^t$ $\frac{c=2000, t=2}{r=0.05}$

$$f(t) = 2000(1-0.05)^2 = 1960.2$$

۲- در مجموعه‌ها، جابه‌جایی اعضا با هم، مجموعه جدیدی ایجاد نمی‌کند پس از

فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم: $C(8, 3) = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 6} = 56$

۳- (الف) $A = \{2\}$ (ب) $B = \{3, 5\}$

۴- $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{9}{3} \times \binom{2}{1}}{\binom{11}{4}} = \frac{84 \times 2}{330} = \frac{84}{165}$

خراب سالم

تذکر: محاسبات مربوط به ترکیب‌ها به صورت زیر است:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2 \quad \text{و} \quad \binom{11}{4} = \frac{11!}{7!4!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$$

۵- (الف) $S = \{(د, د), (پ, پ), (د, پ), (پ, د)\}$

(ب) هر دو فرزند باید پسر یا هر دو دختر باشند، لذا داریم:

$$A = \{(پ, پ), (د, د)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(پ) می‌خواهیم حداکثر یک فرزند پسر باشد یعنی یا ۱ پسر و ۱ دختر باشند و یا هر دو فرزند دختر باشند، لذا داریم:

۶- $B = \{(د, پ), (د, د), (پ, د)\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

۷- $d_r = r^2 + 1 = 5$, $c_1 = \frac{1}{3(1)-1} = \frac{1}{2}$, $b_4 = (-\frac{1}{2})^{\frac{4}{2}-1} = (-\frac{1}{2})^1 = -\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow -\frac{1}{2} + 5 - \frac{1}{2} = 4$

۷- اعداد طبیعی فرد، یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک ۲ ایجاد می‌کنند:
 $1, 3, 5, 7, 9, \dots \Rightarrow d = 2$

ضمناً برای یافتن مجموع جملات از فرمول $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ استفاده کرده و خواهیم داشت:
 $d = 2$, $a_1 = 1$, $S_{30} = \frac{30}{2}[2 \times 1 + 29 \times 2] = 900$

۸- ابتدا اختلاف مشترک دنباله را از فرمول $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ به دست می‌آوریم (البته به جای استفاده از این فرمول، می‌توانید هر یک از جملات را باز کرده و دستگاه حاصل را حل کنید.) لذا با توجه به آن که $a_{11} = 52$ و $a_{19} = 92$ می‌باشند، خواهیم نوشت:

$$d = \frac{92 - 52}{19 - 11} = 5$$

$$a_{11} = a_1 + (11-1) \times 5 \Rightarrow 52 = a_1 + 50 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_{26} = 2 + (26-1) \times 5 \Rightarrow a_{26} = 127$$

۹- (الف) هندسی است، چون هر جمله در عددی ثابت $(\frac{1}{5})$ ضرب شده است.

(ب) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

(پ) $a_n = ar^{n-1} = 1 \times (\frac{1}{5})^{n-1}$

(ت) به جای n در جمله عمومی عدد ۱۱ را قرار می‌دهیم لذا خواهیم داشت: $a_{11} = (\frac{1}{5})^{10}$

۱۰- (الف) $a_n = ar^{n-1} \Rightarrow 6 = 1536(\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256} = (\frac{1}{2})^{n-1}$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2})^4 = (\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

(ب) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{1536(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1536(1-\frac{1}{1024})}{\frac{1}{2}} = 3069$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

ب) این فرد می‌خواهد از A به C برود و حتماً از B هم عبور کند، لذا فقط یک مسیر وجود دارد.
 $A \rightarrow B \rightarrow C$

تعداد حالت‌های مسیر $= 3 \times 4 = 12$

◀ **نماد فاکتوریل** ▶ فاکتوریل را با نماد «!» نشان می‌دهیم؛ اگر n عدد طبیعی باشد n! به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

یعنی برای محاسبه n! عدد n را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب می‌کنیم. مثلاً: $1! = 1, 2! = 2 \times 1 = 2, 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

ضمناً توجه کنید که $0! = 1$ می‌باشد. هم‌چنین اگر بخواهیم کسری مانند $\frac{10!}{8!}$ را حساب کنیم لزومی ندارد $10!$ را تا ۸ یا ۱ باز کنیم، چون وقت‌گیر خواهد بود بلکه بهتر است $10!$ را تا ۸ باز کنیم، فقط حواستان باشد موقع باز کردن یک عدد هر جا متوقف شدیم، باید علامت! بگذاریم:

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$$

◀ **مثال** ▶ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید:

الف) $5! - 3! = ?$

ب) $\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = ?$

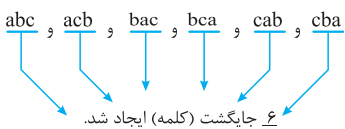
◀ **پاسخ** ▶ الف) $5! - 3! = 120 - 6 = 114$ ب) $\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = \frac{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1}{(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1} = \frac{1}{14}$

دقت کنید که $(5! - 3!) \neq 2!$ برابر نمی‌شود.

ب) $\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = \frac{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1}{(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1} = \frac{1}{14}$

در این سؤال، دیدیم ۸ به ۵ نزدیک‌تر است تا ۸ نسبت به ۴. پس ۸ را تا ۵ باز کردیم.

◀ **جایگشت** ▶ به هر یک از حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز، یک جایگشت آن n شیء می‌گوییم و تعداد آن‌ها برابر با n! می‌باشد. مثلاً با حروف a, b و c می‌توانیم کلمات زیر را بسازیم (بدون توجه به بامعنی یا بی‌معنی بودن کلمات):



البته اگر فقط تعداد جایگشت‌ها را بخواهیم، می‌گوییم چون ۳ حرف متمایز داریم، تعداد جایگشت‌ها (کلمات) برابر با $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ می‌باشد.

روش کلی ساختن اعداد و کلمات: معمولاً برای ساختن اعداد و کلمات از روش پرکردن خانه‌ها استفاده می‌کنیم. اگر بخواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم، ولی اگر بخواهیم کلمات لاتین یا اعداد را بسازیم، خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم. البته باید به شرایط و محدودیت‌های سؤال، حتماً توجه کنیم؛ مثلاً اگر گفته شود عدد زوج بسازید، در جایگاه یکان (اولین خانه سمت راست) باید رقم‌های زوج قرار دهیم، سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می‌رویم و پرکردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم.

فصل: آمار و احتمال

◀ **درس: شمارش**

◀ **اصل جمع و اصل ضرب**

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که نتوان این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت این دو عمل را به $(m+n)$ طریق می‌توان انجام داد. حرف «یا» نشان‌دهنده این است که باید از اصل جمع استفاده کنیم. (اصل جمع برای بیشتر از ۲ عمل هم برقرار است.) مثلاً اگر علی بتواند برای رفتن به دانشگاه از ۳ خط تاکسی یا ۴ خط اتوبوس یا ۲ خط مترو استفاده کند، تعداد حالت‌های رفتن او به دانشگاه برابر است با: $3 + 4 + 2 = 9$

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله متوالی اول و دوم انجام شود، به طوری که مرحله اول به m طریق و هر یک از حالت‌های مرحله اول به n طریق انجام شود، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق، قابل انجام است. حرف «و» نشان می‌دهد که باید از اصل ضرب استفاده کنیم. توجه کنید که در اصل ضرب، ما دو یا چند عمل را به طور متوالی انجام می‌دهیم. یعنی همه کارها (عمل‌ها) با هم انجام می‌شوند.

مثلاً فرض کنید امیر ۲ جفت کفش، ۳ پیراهن و ۵ شلوار دارد. تعداد حالت‌هایی که او می‌تواند از کفش‌ها و پوشاک خود استفاده کند طبق اصل ضرب برابر است با:

تعداد حالت‌ها $= 2 \times 3 \times 5 = 30$

◀ **مثال** ▶ مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۲۶ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۶ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۶ نفر مشورت بگیرد؟
 ب) او به چند طریق می‌تواند از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرطی که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند؟

◀ **پاسخ** ▶ الف) باید از اصل جمع استفاده کنیم. چون مدیرعامل فقط می‌تواند ۱ نفر را از گروه A یا B انتخاب کند: $16 + 10 = 26$

ب) باید از اصل ضرب استفاده کنیم. چون مدیر می‌خواهد هم با گروه A و هم با گروه B مشورت کند؛ یعنی دو عمل را با هم انجام می‌دهد (به طور متوالی):

تعداد حالت‌ها $= 16 \times 10 = 160$

◀ **استفاده از اصل جمع و اصل ضرب به طور هم‌زمان** ▶ در بعضی از سؤالات،

مخصوصاً سؤالات مربوط به سفر از یک شهر به یک شهر دیگر، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

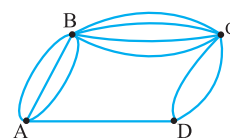
◀ **مثال** ▶ فردی می‌خواهد از شهر A به شهر C برود. او به چند طریق (حالت) می‌تواند این کار را انجام دهد به شرطی که:

الف) محدودیت خاصی نداشته باشد.
 ب) حتماً از شهر B بگذرد.

◀ **پاسخ** ▶ الف) برای رفتن از A به C دو مسیر کلی وجود دارد:

$$\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow C & \text{مسیر ۱: تعداد حالت‌ها: } 3 \times 4 = 12 \\ A \rightarrow D \rightarrow C & \text{مسیر ۲: تعداد حالت‌ها: } 1 \times 2 = 2 \end{cases}$$

طبق اصل جمع \rightarrow تعداد کل حالت‌ها $= 12 + 2 = 14$



مثال: در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر، تعداد اعضای فضای نمونه را به دست آورید. (در قسمت‌های الف، ب و پ اعضای S را نیز بنویسید.)
 الف) پرتاب یک تاس و پرتاب یک سکه
 ب) پرتاب یک تاس و یک سکه
 ت) پرتاب ۳ تاس
 ث) انتخاب ۳ نفر از بین ۵ معلم و ۲ دانشجو

پاسخ: الف) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

ب) $S = \{ر, پ\} \Rightarrow n(S) = 2$

پ) $S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), \dots, (ر, ۶), (پ, ۱), (پ, ۲), \dots, (پ, ۶)\} \Rightarrow n(S) = ۱۲$

ت) $n(S) = ۶ \times ۶ \times ۶ = ۲۱۶$

ث) $n(S) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۴! \times ۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۳۵$

پیشامد تصادفی: به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه S یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با حروف A، B و C نمایش می‌دهیم و تعداد اعضای آن‌ها را با $n(A)$ ، $n(B)$ و $n(C)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر و تعداد اعضایشان را مشخص کنید:

الف) عدد ظاهر شده، اول باشد. (پیشامد A)

ب) عدد ظاهر شده، حداقل ۴ باشد. (پیشامد B)

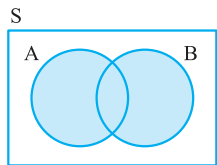
پ) عدد ظاهر شده، حداکثر ۴ باشد. (پیشامد C)

پاسخ: الف) $A = \{۲, ۳, ۵\} \Rightarrow n(A) = ۳$

ب) $B = \{۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(B) = ۳$

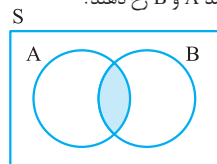
پ) $C = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \Rightarrow n(C) = ۴$

اعمال روی پیشامدها: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، آن‌گاه اجتماع و اشتراک A و B، تقاض A از B و متمم مجموعه A به صورت زیر تعریف می‌شوند. (قسمت‌های رنگی)



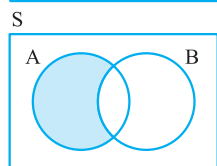
اجتماع A و B $\rightarrow A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$

حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند.



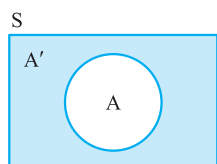
و اشتراک A و B $\rightarrow A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$

A و B هر دو با هم رخ دهند.



تفاضل A از B $\rightarrow A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

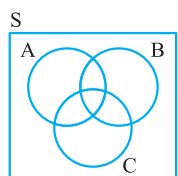


در واقع برای محاسبه $A - B$ عضوهای مشترک A و B را از A حذف می‌کنیم، آن‌چه باقی می‌ماند $A - B$ است.

متمم A $\rightarrow A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$

A رخ ندهد.

مثال: A، B و C سه پیشامد فضای نمونه S هستند. پیشامدهای خواسته شده را رنگ کنید.



الف) فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهند.

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ می‌باشد.

مثلاً در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A برابر است با:

$$\binom{۶}{۴} = \frac{۶!}{۲! \times ۴!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۲ \times ۱ \times ۴!} = ۱۵$$

نکته: برای یافتن تعداد وترها و تعداد مثلث‌های ساخته شده با تعدادی نقطه که روی محیط یک دایره قرار دارند، باز هم از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم.

مثال: ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. با آن‌ها چند وتر و چند مثلث متمایز می‌توان ساخت؟

پاسخ: هر وتر روی دایره دارای ۲ نقطه ابتدایی و انتهایی است، لذا:

$$\text{تعداد وترها} = \binom{۱۰}{۲} = \frac{۱۰!}{۸! \times ۲!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۸! \times ۲ \times ۱} = ۴۵$$

هر مثلث دارای ۳ رأس است؛ بنابراین:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۷! \times ۳!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷! \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۰$$

انتخاب اجباری: اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم به شرطی که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، آن‌گاه تعداد حالت‌های ممکن برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد.

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که همگی آن‌ها شامل g باشند؟

پاسخ: می‌خواهیم g در تمام زیرمجموعه‌ها باشد، پس یک انتخاب اجباری داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{۷-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۴! \times ۲!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۲ \times ۱} = ۱۵$$

درس ۲: احتمال

پدیده‌های قطعی و تصادفی

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گوییم. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از این‌که کدام نتیجه، قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، یک برآمد می‌گوییم. ضمناً به مجموعه شامل تمام نتایج ممکن، فضای نمونه آزمایش می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم. تعداد عضوهای S را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً لازم نیست تمام اعضای S را بنویسیم، چون عملی وقت‌گیر است. فقط کافی است $n(S)$ را به دست آوریم.

مثال: قطعی یا تصادفی بودن پدیده‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ۱۰ سال باشد در کلاس دوازدهم یک مدرسه روزانه

ب) پرتاب سکه در مسابقه فوتبال توسط داور برای تعیین مالکیت توپ

پ) خارج شدن ۱ مهره سفید از کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید (با چشم بسته یک مهره را انتخاب کرده‌ایم).

ت) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش «رو» و تاسش زوج بیاید، برنده است. تعیین برنده، قبل از بازی، پدیده‌ای قطعی است یا تصادفی؟

پاسخ: الف) پدیده قطعی است، چون تمام دانش‌آموزان کلاس دوازدهم این مدرسه بالای ۱۰ سال سن دارند.

ب) پدیده تصادفی است؛ چون نمی‌دانیم سکه «رو» می‌آید یا «پشت».

پ) پدیده قطعی است؛ چون مهره انتخابی حتماً سفید است و از قبل قابل پیش‌بینی است.

ت) پدیده تصادفی است؛ چون نمی‌توانیم بگوییم حتماً سکه «رو» و تاس «زوج» می‌آید.