



Peter Scholze

پتر شولتسه
متولد ۱۹۸۷

آزمون اول: مجموعه
آزمون دوم: الگو و دنباله

1

CHAPTER

Set, Pattern & Sequence

مجموعه

آزمون اول I gaj

صفحه ۲ تا ۱۳

ریاضی دهم

1 کدام گزینه صحیح است؟

$$\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R} \quad (۲)$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{N} \quad (۱)$$

$$(\mathbb{R} - \mathbb{Q}') \subseteq \mathbb{W} \quad (۴)$$

$$(\mathbb{Z} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{N} \quad (۳)$$

2 اگر $A = (-۳, ۶]$, $B = (۰, ۸]$, $C = (-\infty, ۳]$, $D = (۲, +\infty)$ باشد، حاصل $(A \cup C) - (B \cap D)$ برابر با کدام بازه است؟

$$(-\infty, ۲] \quad (۲)$$

$$(-۲, ۲] \quad (۱)$$

$$(۰, \infty) \quad (۴)$$

$$(-\infty, ۲) \quad (۳)$$

3 کدام مجموعه متناهی است؟

(۲) مثلث‌هایی با مساحت ۶

(۱) اعداد صحیح کمتر از ۲۵

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{N}\} \quad (۴)$$

(۳) اعداد گویای موجود در بازه $(۱, ۳)$

4 اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیر تهی است؟

$$B - A \quad (۲)$$

$$A - B \quad (۱)$$

$$A - (A \cup B) \quad (۴)$$

$$A \cap B \quad (۳)$$

5 کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر مجموعه $A \cup B$ نامتناهی و مجموعه B نیز نامتناهی باشد، مجموعه A متناهی است.

(۲) اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، مجموعه $A \cap B$ هم نامتناهی است.

(۳) اگر \mathbb{N} مجموعه مرجع و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعه A' متناهی است.

(۴) اگر مجموعه A متناهی و مجموعه B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

6 اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد و $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۴, ۵, ۶, ۷\}$ باشند، متمم مجموعه $B' - A$ چند عضو دارد؟

$$۵ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

$$۸ \quad (۴)$$

$$۷ \quad (۳)$$

7 اگر $A = (-۲, ۳]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۱\}$ باشد، مجموعه $A' \cup B'$ کدام است؟

$$(-\infty, ۱] \cup (۳, +\infty) \quad (۲)$$

$$(۱, ۳] \quad (۱)$$

$$(-\infty, ۱) \cup (۳, +\infty) \quad (۴)$$

$$\mathbb{R} - (۱, ۳) \quad (۳)$$

8 اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، ساده شده مجموعه $(A - B) - (B \cap A')$ برابر کدام است؟

$$\emptyset \quad (۲)$$

$$B' \quad (۱)$$

$$A - B \quad (۴)$$

$$A \cap B \quad (۳)$$

NOTE



10

خرید آفلاین در gajmarket.com

بازار جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۱. مجموعه، الگو و دنباله

9 اگر $n(A) = 4$, $n(B) = 7$, $n(A - B) = 3$ مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۳

10 اگر مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای ۵ و ۷ عضو باشند، در کدام حالت زیر تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ حداکثر خواهد بود؟

- (۱) A زیرمجموعه B باشد.
(۲) B زیرمجموعه A باشد.
(۳) A و B جدا از هم باشند.
(۴) بستگی به مجموعه مرجع دارد.

11 فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U باشند و $n(U) = 80$, $n(A) = 20$, $n(B') = 55$, $n(A \cup B) = 37$ تعداد اعضای که فقط

در مجموعه B قرار دارند کدام است؟

- (۱) ۱۴
(۲) ۱۵
(۳) ۱۶
(۴) ۱۷

12 در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزشی هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ یک از این دو

(داخل - ۹۸)

گروه نیستند؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۱۶
(۳) ۱۷
(۴) ۱۸

13 در یک کلاس ۲۰ نفره، ۸ نفر عینکی و ۴ نفر چپ دست هستند و ۱۰ نفر نه چپ دست هستند و نه عینکی، تعداد دانش‌آموزانی که هم عینک زده‌اند و هم

چپ دست هستند کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۸
(۴) ۶

14 اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ،

۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

- (۱) ۲۲
(۲) ۲۳
(۳) ۲۴
(۴) ۲۶

الگو و دنباله

آزمون دوم IGAJ

صفحه ۱۴ تا ۲۷

ریاضی دهم

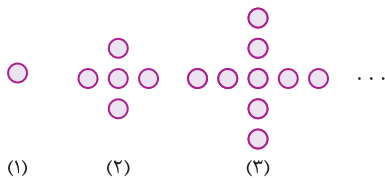
15 در الگوی مقابل، تعداد پاره‌خط‌ها در شکل دوازدهم کدام است؟

- (۱) ۵۳
(۲) ۴۹
(۳) ۴۵
(۴) ۴۴



16 با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل پنجم برابر ۲۹ است؟

- (۱) هفتم
(۲) هشتم
(۳) نهم
(۴) دهم



NOTE



11



ولادیمیر وایودسکی
متولد ۱۹۶۶

Vladimir Voevodsky

آزمون: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

2

CHAPTER

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

آزمون سوم



صفحه ۴۸ تا ۶۸

ریاضی دهم

41 ساده شده عبارت $6^4 \times (\frac{3}{4})^{-3} \times (\frac{5}{25})^4$ کدام است؟

۶ (۱) ۸ (۲)

۱۲ (۳) ۱۸ (۴)

42 اگر $A = \frac{2}{3}\sqrt{18} + 2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 0/3\sqrt{200}$ باشد، A^2 برابر کدام است؟

۳۲ (۱) ۴۵ (۲)

۴۸ (۳) ۵۰ (۴)

43 حاصل عبارت $\sqrt[4]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2^4/6}$ کدام است؟

۶ (۱) $6\sqrt[4]{2}$ (۲)

$3\sqrt[3]{32}$ (۳) $2\sqrt[3]{9}$ (۴)

44 اگر $A = \sqrt[4]{4^3/16} \times (\frac{1}{3})^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $\frac{1}{3}(2A)$ کدام است؟

۰/۲۵ (۱) ۰/۷۵ (۳)

۱ (۴) ۱ (۲)

45 اگر $xy^2 = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $(x-3y^2)^2 - (x+3y^2)^2$ کدام است؟

۸ (۱) ۱۲ (۲)

۱۶ (۳) ۱۸ (۴)

46 اگر $2x + \frac{5}{x} = 9$ باشد، حاصل $4x^2 + \frac{25}{x^2}$ کدام است؟

۴۳ (۱) ۵۱ (۲)

۵۷ (۳) ۶۱ (۴)

47 اگر $A = (x^2 - 6x^2 + 12x - 8)(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2})$ باشد، حاصل $\frac{x-2}{A}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴)

48 در تجزیه عبارت $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟

x-۴ (۱) x-۲ (۲)

x+۲ (۳) x+۳ (۴)

NON



(خارج - ۹۵)

15

(داخل - ۹۸)

فهرست آزمون در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۲. توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

49 ساده شده عبارت $(x + \frac{2}{x-3}) \times (1 - \frac{1}{x-2})$ کدام است؟

(1) $x-1$ (2) $x+1$

(3) $x+2$ (4) $2x+1$

50 حاصل عبارت بامعنی $\frac{2x^2-x}{4x^2-1} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}$ به صورت $\frac{P(x)}{4x^2-1}$ است. کدام است P(x)؟

(1) $-8x$ (2) $-4x$

(3) $-4x+1$ (4) $2x-3$

51 حاصل عبارت $(\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2}+\sqrt{3}) \times \sqrt[3]{2}\sqrt{2}$ کدام است؟

(1) $\sqrt{3}$ (2) 2

(3) $1+\sqrt{3}$ (4) $2\sqrt{3}$

52 حاصل عبارت $\sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}$ کدام است؟

(1) $6\sqrt{3}$ (2) $4\sqrt{3}$

(3) 6 (4) 10

53 حاصل $\frac{2}{2+\sqrt{6}} + (2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ کدام است؟

(1) -2 (2) -1

(3) 1 (4) 2

54 حاصل عبارت $\frac{2}{3-\sqrt{7}} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} - \sqrt{28} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

(1) $\sqrt{2}$ (2) 3

(3) 4 (4) $2+\sqrt{7}$

55 حاصل عبارت $\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} + \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} - \sqrt{80}$ کدام است؟

(1) -4 (2) -3

(3) $-1-2\sqrt{5}$ (4) $3-2\sqrt{5}$

56 حاصل کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ پس از گویا شدن مخرج کدام است؟

(1) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{8}$ (2) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$

(3) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}$ (4) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4}$

57 اگر $x = 5 + \sqrt{17}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x-1}{16}} + \frac{1}{2x}$ کدام است؟

(1) $0/5$ (2) $0/75$

(3) $1/25$ (4) $1/5$

(داخل - 93)



NOTE



استانیسلاف اسمیرنوف
متولد ۱۹۷۰

Stanislav Smirnov

آزمون اول: قدر مطلق و جزء صحیح
آزمون دوم: معادلات گویا و رادیکالی، نامعادله

3

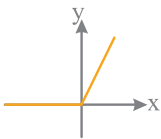
CHAPTER

قدر مطلق و جزء صحیح

آزمون چهارم I gaj

دهم + یازدهم

Elementary Operations



(داخل - ۹۰)



17

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۳. اعمال مقدماتی

58 اگر $x < y < 0$ و $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} - |x - y| + \frac{y}{\sqrt{y^2}} - \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 8$ باشد، مقدار y کدام است؟

(۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

59 شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع است؟

(۱) $y = x - |x|$
(۲) $y = x + |x|$
(۳) $y = |x - 1| - 1$
(۴) $y = 1 - |x - 1|$

60 مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x) = |2x - 1|$ و محور x ها و دو خط $x = 1$ و $x = -1$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$
(۲) ۲
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) ۳

61 مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟

(۱) ۲
(۲) $\frac{7}{3}$
(۳) $\frac{8}{3}$
(۴) ۳

62 نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2|$ و خط $y = 1$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

63 حاصل عبارت $[\sqrt{10}] + [\sqrt{11}] + [\sqrt{12}] + \dots + [\sqrt{24}]$ کدام است؟

(۱) ۴۵
(۲) ۴۸
(۳) ۵۰
(۴) ۵۴

64 به‌ازای چه مقادیری از x رابطه $[x - 2] + [x + 1] = 3$ برقرار است؟

(۱) $[2, 3]$
(۲) $[1, 2]$
(۳) $(0, 3)$
(۴) $[2, 4]$

65 مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = [\frac{x}{3}] + 1$ و محور x ها در بازه $[0, 6]$ کدام است؟

(۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۹
(۴) ۱۱

NOTE



پی‌یر دلین
متولد ۱۹۴۴

آزمون اول: معادله درجه دوم

آزمون دوم: نمودار تابع درجه دوم (سهمی)

4

CHAPTER

Quadratic

Pierre Deligne

معادله درجه دوم

آزمون ششم



دهم + یازدهم

دهم: صفحه ۷۰ تا ۷۷ - یازدهم: صفحه ۱۱ تا ۱۵

(خارج - ۸۹)

92 به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

(۱) $-3 < m < 5$

(۲) $-3 < m < 4$

(۳) $-2 < m < 4$

(۴) $-1 < m < 5$

93 به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m - \frac{3}{4} = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

(۱) $m < 2$ یا $m > 6$

(۲) $m < 3$ یا $m > 4$

(۳) $2 < m < 6$

(۴) $3 < m < 4$

94 اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 7$

(۲) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{5}$

(۳) $\alpha^3 + \beta^3 = 125$

(۴) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{21}{2}$

95 اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $4\sqrt{2}$

96 اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{\beta}{3}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{3}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{5}$

(۴) -1

97 به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ معکوس یکدیگرند؟

(۱) -2

(۲) -1

(۳) ۲

(۴) ۱

98 به ازای کدام مقدار m مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

99 به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

(۱) $-\frac{9}{5}$

(۲) ۱

(۳) 1 و $-\frac{9}{5}$

(۴) $-\frac{9}{5}$ و -1

NOTE



21

فهرست آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۴. معادله درجه ۲

(داخل - ۹۶)

(داخل - ۹۳)



آکشی و نکاتش
متولد ۱۹۶۴

Akshay Venkatesh

آزمون اول: مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع

آزمون دوم: انتقال، توابع صعودی و نزولی

آزمون سوم: اعمال جبری روی توابع، ترکیب توابع

آزمون چهارم: تابع یک به یک و تابع وارون

5

CHAPTER

Functions & Their Graphs

مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع

آزمون هشتم

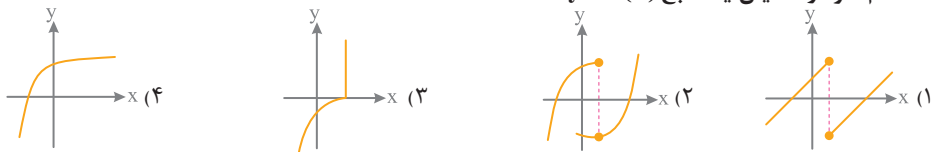
دهم: صفحه ۹۵ تا ۱۱۳ - یازدهم: صفحه ۴۸ تا ۵۳

دهم + یازدهم

118 اگر رابطه $f = \{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

119 کدام نمودار، نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟



120 اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & ; x \leq 2 \\ ax - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۴
(۴) ۱۶

121 کدام رابطه نشان دهنده یک تابع است؟

- (۱) $|x| + |y| = 4$
(۲) $y = \sqrt{x^2 - 1}$
(۳) $y^2 = 5x - 1$
(۴) $y(x-2) = 0$

122 اگر $f = \{(1, m+n), (2^0, n^2+n), (n^2-3n, 4)\}$ یک تابع همانی باشد، m کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) -۳
(۳) -۲
(۴) ۶

123 نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر a و b به ترتیب تعداد اعضای صحیح دامنه و بُرد تابع f باشند، مقدار $a - b$ کدام است؟

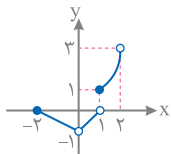
- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۱

124 دامنه تابع $f(x) = \frac{x+5}{x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{3\}$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) -۶

125 اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
(۲) $[0, 3]$
(۳) $[1, 2]$
(۴) $[1, 3]$



(داخل - ۹۴)



24

خرید آنلاین در gajmarket.com

ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۵. تابع

NOTE



Artur Avila

آرتور آویلا
متولد ۱۹۷۹

آزمون اول: توابع نمایی
آزمون دوم: لگاریتم

6

CHAPTER

توابع نمایی

آزمون دوازدهم I gaj

صفحه ۹۶ تا ۱۰۴

ریاضی یازدهم

Exponential functions & Logarithms

206 اگر $f(x) = \left(\frac{3}{a+2}\right)^x$ ضابطه یک تابع نمایی باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(-2, +\infty)$ (۲) $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$
 (۳) $[-2, 2]$ (۴) $\mathbb{R} - (-2, 1)$

(داخل - ۹۱)

207 در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸
 (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

208 اگر $2^A = \left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2$ باشد، مقدار A کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$
 (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $12\sqrt{2}$

209 از معادله $(8\sqrt{2})^{3x} = \frac{8^x}{32}$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

(داخل - ۹۵)

210 دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

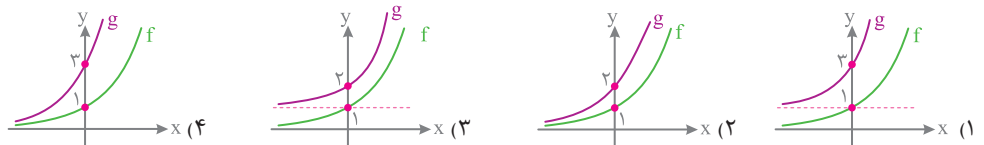
- (۱) -3 (۲) -2
 (۳) ۱ (۴) ۳

211 نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$ ، نمودار تابع $y = x^2 - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

(داخل - ۹۸)

- (۱) ۳ (۲) ۴
 (۳) ۵ (۴) ۶

212 در کدام گزینه نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^x$ و $g(x) = 3^{x+1}$ به درستی رسم شده است؟



NOTE



33

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۶. لگاریتم و تابع نمایی



Timothy Gowers

آزمون اول: نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
آزمون دوم: تناوب و تانژانت، توابع مثلثاتی، معادلات مثلثاتی

7

CHAPTER

نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی **آزمون چهاردهم**

دهم + یازدهم + دوازدهم **دهم:** صفحه ۲۹ تا ۴۶ - یازدهم: صفحه ۷۲ تا ۸۷ - دوازدهم: صفحه ۴۲ تا ۴۳

242 اگر مجموع دو زاویه برابر $\frac{5\pi}{12}$ رادیان و تفاضل آن‌ها 5° باشد، زاویه بزرگ‌تر چند درجه است؟

40° (۱) 30° (۲)

35° (۳) 45° (۴)

243 اگر یک زاویه مرکزی به اندازه $\frac{6}{5}$ rad کمانی به طول ۱۲ سانتی‌متر را روی محیط دایره جدا کند، قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

10 (۱) $\frac{10}{3}$ (۲)

$\frac{20}{3}$ (۳) 20 (۴)

244 ناظری به فاصله ۳۵ متری از دیواری ایستاده است که مجسمه‌ای روی آن قرار دارد. اگر ناظر پایین‌ترین و بالاترین قسمت مجسمه را با زاویه‌های 40° و 45° رؤیت کند، ارتفاع مجسمه چقدر است؟

45° رؤیت کند، ارتفاع مجسمه چقدر است؟

6 (۱) $6/4$ (۲)

7 (۳) $7/2$ (۴)

245 در متوازی‌الاضلاع دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویه بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

18 (۱) 24 (۲)

32 (۳) 36 (۴)

246 در مثلث مقابل، طول ضلع BC کدام است؟

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۱) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ (۲)

$\sqrt{2} + \sqrt{6}$ (۳) $2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ (۴)

247 در دایره مثلثاتی مقابل مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴)

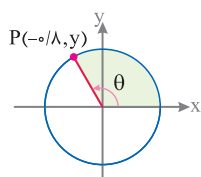
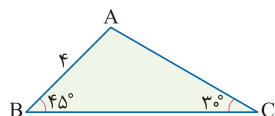
248 کدام گزینه نادرست است؟

$\sin 14^\circ > \cos 14^\circ$ (۱)

$\sin 55^\circ < \tan 55^\circ$ (۲)

$\cot 30^\circ > \tan 30^\circ$ (۳)

$\cot 15^\circ < \cos 15^\circ$ (۴)



(داخل - ۹۲)



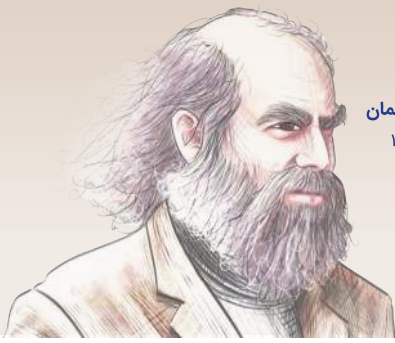
37

فهرست آشنایی در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۷. مثلثات

NOTE



گریگوری پرلمان
متولد ۱۹۶۶

آزمون اول: قواعد محاسبه مشتق، خط مماس

آزمون دوم: مشتق پذیری، مشتق چپ و راست و آهنگ تغییر

Differentiation

9

CHAPTER

Grigori Perelman

قواعد محاسبه مشتق، خط مماس

آزمون بیستم I gaj

صفحات ۶۶ تا ۷۶ و ۸۲ تا ۸۸

ریاضی دوازدهم

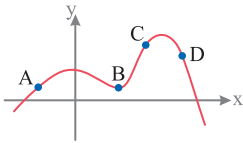
342 با توجه به نمودار تابع f ، کدام رابطه میان شیب نقاط مشخص شده برقرار است؟

(۱) $m_B < m_A < m_C < m_D$

(۲) $m_A < m_B < m_D < m_C$

(۳) $m_A < m_C < m_B < m_D$

(۴) $m_D < m_B < m_A < m_C$



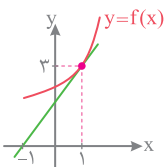
343 در شکل مقابل حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲



344 اگر $f'(4) = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-h)}{h}$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۱۲

345 با توجه به نمودار توابع f و g حاصل $(3f + 2g)'(1)$ کدام است؟

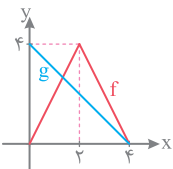
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

(بر گرفته از کتاب درسی)



346 اگر شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(-2, -3)$ برابر $\frac{1}{4}$ باشد، آنگاه مشتق $y = x^2 f(x)$ در $x = -2$ کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۱۰

347 اگر $f(x) = (3x^2 - 7)(2x - 5)^3$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

(۱) -۱۲

(۲) ۲۴

NOTE



49

خرید آنلاین در gajmarket.com

ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۹ مشتق



مریم میرزاخانی
۱۳۵۶-۱۳۹۶

آزمون: کاربرد مشتق [اکستریم‌های تابع و بهینه‌سازی]

10

CHAPTER

Applications of Derivatives

Maryam Mirzakhani

اکستریم‌های تابع و بهینه‌سازی

آزمون بیست و دوم I gaj

صفحه ۱۰۲ تا ۱۲۰

ریاضی دوازدهم

395 تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

(۱) $(-2, 0)$

(۲) $(-\infty, -2)$

(۳) $(0, 2)$

(۴) \mathbb{R}

396 تابع با ضابطه $f(x) = mx^3 + 2x^2 + \frac{m}{3}x - 1$ همواره صعودی است. حدود m کدام است؟

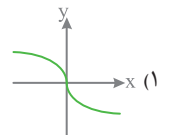
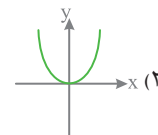
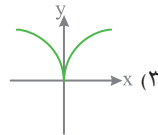
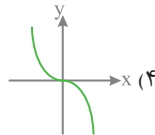
(۱) $[-2, 2]$

(۲) $(-\infty, -2)$

(۳) $[-2, 0)$

(۴) $[2, +\infty)$

397 نمودار تابع $y = x^{\frac{1}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟



398 نمودار تابع f به صورت مقابل است، مجموعه طول نقاط بحرانی تابع f کدام است؟

(۱) $\{-1, 1, 4\}$

(۲) $\{-2, -1, 2, 3, 4\}$

(۳) $\{-1, 3, 4\}$

(۴) $\{-2, -1, 3, 4, 5\}$

399 نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^2 - 2x|$ رؤوس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

400 مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \times \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

(۱) $\{-2, 2\}$

(۲) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

(۳) $\{-2, 0, 2\}$

(۴) $\{-7, 0, 1\}$

401 تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ در بازه $(-2, 1)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

402 تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x) = |\sin x|$ با ضابطه $f(x) = |\sin x|$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

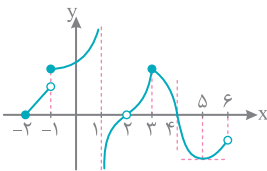
(۴) ۵

NOTE



(داخل - ۹۱)

55



خرید آسان در گاج‌مارکت
gajmarket.com

نوبه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۱۰ کاربرد مشتق

433 اگر در یک جلسه، سه ردیف صندلی و در هر ردیف ۴ صندلی باشد، آنگاه به چند طریق ۳ دانش آموز سال اول، ۲ دانش آموز سال دوم و ۲ دانش آموز سال سوم می‌توانند روی آن‌ها بنشینند که اولی‌ها در ردیف اول و دومی‌ها در ردیف دوم باشند؟

- ۱) ۱۲۰۹۶
۲) ۸۶۴۰
۳) ۳۴۵۶
۴) ۹۶۵۴

434 به چند طریق می‌توان سه مهره متمایز به رنگ‌های آبی، قرمز و سبز را در ۴ ظرف مختلف قرار داد، به طوری که مهره آبی در ظرف اول **نباشد**؟

- ۱) ۴۸
۲) ۱۶
۳) ۳۶
۴) ۶۴

435 از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند تابع می‌توان نوشت به طوری که $f(a) = 1$ و $f(b) \neq 2$ باشد؟

- ۱) ۲۵
۲) ۲۰
۳) ۵
۴) ۱۲۰

436 حاصل $\frac{6! + 5! + 4!}{4!3!2!}$ کدام است؟

- ۱) ۷
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۵

437 شش گلدان مختلف را به چند طریق می‌توان در دو کناره هر یک از سه پله چید به طوری که در هر کناره فقط یک گلدان قرار گیرد؟

- ۱) ۷۲۰
۲) ۳۶
۳) ۷۲
۴) ۱۲۰

438 با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند جایگشت ۶ رقمی می‌توان ساخت که ارقام زوج و فرد یک در میان قرار بگیرند؟

- ۱) ۳۶
۲) ۷۲
۳) ۷۲۰
۴) ۱۴۴

439 با حروف کلمه «باستان‌شناسی» چند کلمه یازده حرفی ساخته می‌شود که به کلمه «شناسی» ختم شود؟

- ۱) ۲۴۰
۲) ۱۲۰
۳) ۷۲۰
۴) ۳۶۰

440 هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ را در یکی از ۶ خانه هم ردیف قرار می‌دهیم. در چند حالت این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم فرد در کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ۱) ۷۲۰
۲) ۴۸
۳) ۹۶
۴) ۱۲۰

441 تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «SYSTEM» به طوری که Sها کنار هم **نباشند**؟

- ۱) ۱۲۰
۲) ۱۸۰
۳) ۲۴۰
۴) ۳۶۰

442 ۳ فیزیک‌دان و ۲ ریاضی‌دان به چند طریق می‌توانند در یک جلسه سخنرانی کنند به طوری که هیچ دو فیزیک‌دانی متوالیاً سخنرانی **نکنند**؟

- ۱) ۶۰
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۲۴

443 سارا، دریا، زارا، جاسمین و لئون می‌خواهند در یک صف سوار اتوبوس شوند. در چند حالت دریا زودتر از لئون و لئون زودتر از زارا سوار می‌شود؟

- ۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۲۰
۴) ۴۰

NOTES





وندلن ورنر
متولد ۱۹۶۸

آزمون اول: مبانی احتمال

آزمون دوم: احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل و احتمال کل

12

CHAPTER

Probability

Wendelin Werner

مبانی احتمال

آزمون بیست و چهارم I gaj

صفحه ۱۴۲ تا ۱۵۱

ریاضی دهم

453 سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم، اگر «رو» بیاید دو سکه دیگر و اگر «پشت» بیاید، یک تاس می‌اندازیم. فضای نمونه این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

۱۰ (۱) ۲۴ (۲)

۱۲ (۳) ۱۲ (۴)

454 یک تاس آبی و یک تاس قرمز را پرتاب می‌کنیم. پیشامد این که «تفاضل اعداد ظاهر شده در دو تاس، کم‌تر از ۲ باشد»، دارای چند عضو است؟

۱ (صفر) ۸ (۲)

۱۰ (۳) ۱۶ (۴)

455 در پرتاب دو تاس با هم اگر A پیشامد «اعداد روشده متوالی» و B پیشامد «مجموع اعداد روشده برابر ۱۱» باشد، پیشامد $A - B$ چند عضو دارد؟

۱۰ (۱) ۹ (۲)

۸ (۳) ۷ (۴)

456 در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی و بدون جای‌گذاری از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌های فرد، متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

۰/۱ (۱) ۰/۱۵ (۲)

۰/۲۵ (۳) ۰/۲ (۴)

457 هریک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم، با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل، مضرب ۳ می‌باشد؟

۰/۳ (۱) ۰/۴ (۲)

۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴)

458 در پرتاب یک تاس سالم، احتمال آن‌که عدد ظاهر شده کم‌تر از ۳ نباشد یا زوج نباشد، کدام است؟

۵/۶ (۱) ۱/۳ (۲)

۱/۳ (۳) ۲/۳ (۴)

459 دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ باشد، کدام است؟

۱/۴ (۱) ۱/۳ (۲)

۲/۹ (۳) ۵/۱۸ (۴)

NOTE

(داخل - ۹۷)



61

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۱۲ • احتمال



ژان-کریستوف یوکوز
۱۹۵۷-۲۰۱۶

آزمون اول: جامعه و نمونه، معیارهای گرایش به مرکز

آزمون دوم: معیارهای پراکندگی

13

CHAPTER

Descriptive Statistics

Jean-Christophe Yoccoz

جامعه و نمونه، معیارهای گرایش به مرکز

آزمون بیست و ششم I gaj

دهم: صفحه ۱۵۲ تا ۱۷۰ - یازدهم: صفحه ۱۵۳ تا ۱۵۵

دهم + یازدهم

495 مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است، نوع آن کدام است؟

- | | |
|---------------|-----------------|
| (۱) کمی گسسته | (۲) کمی پیوسته |
| (۳) کیفی اسمی | (۴) کیفی ترتیبی |

496 نوع کدام یک از متغیرهای زیر با بقیه فرق دارد؟

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| (۱) زمان مکالمات تلفنی | (۲) خسارت مالی تصادف |
| (۳) رنگ شلوار کارمندان اداره | (۴) مقاومت ترانزیستور |

497 نوع آلاینده‌ی هوا چه نوع متغیری است؟

- | | |
|---------------|-----------------|
| (۱) کمی گسسته | (۲) کمی پیوسته |
| (۳) کیفی اسمی | (۴) کیفی ترتیبی |

498 میزان آلاینده‌ی هوا، کدام نوع متغیر است؟

- | | |
|---------------|-----------------|
| (۱) کمی گسسته | (۲) کمی پیوسته |
| (۳) کیفی اسمی | (۴) کیفی ترتیبی |

499 اگر میانگین داده‌های $20, 23, a, 24, 14, 24$ برابر با ۱۹ باشد، a کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| (۱) ۹ | (۲) ۸ |
| (۳) ۷ | (۴) ۶ |

500 اگر انحراف از میانگین ۷ داده آماری، برابر $2, a, a, -2, -1, -3, -2$ باشد، مقدار a کدام است؟

- | | |
|-------|-----------|
| (۱) ۳ | (۲) $2/5$ |
| (۳) ۲ | (۴) $1/5$ |

501 میانگین چند داده آماری ۵۷ است. ابتدا از هر داده ۱۲ واحد کم کرده و سپس حاصل را ۳ برابر کرده‌ایم. میانگین داده‌های نهایی کدام است؟

- | | |
|---------|---------|
| (۱) ۴۵ | (۲) ۷۰ |
| (۳) ۱۳۵ | (۴) ۱۵۹ |

502 میانگین ۱۰ داده آماری $32/5$ است. اگر دو داده ۴۰، ۳۵ را از میان داده‌ها کنار بگذاریم، میانگین ۸ داده حاصل کدام است؟

- | | |
|-------------|-------------|
| (۱) $31/25$ | (۲) $31/5$ |
| (۳) $31/75$ | (۴) $32/75$ |

503 در ۴۵ داده آماری مقدار میانگین ۱۱۲۴ محاسبه شده است. در بررسی مجدد داده‌ها، متوجه شدیم که به جای داده ۱۰۲۴، عدد ۱۲۰۴ در محاسبه منظور شده است. با رفع اشتباه میانگین واقعی کدام است؟

- | | |
|----------|----------|
| (۱) ۱۱۱۹ | (۲) ۱۱۲۰ |
| (۳) ۱۱۲۱ | (۴) ۱۱۴۴ |

NOTE



66

خرید آفلاین در gajmarket.com

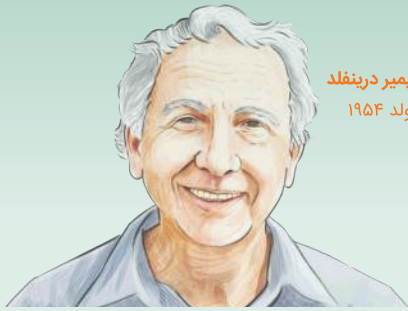
ویژه جمع‌بندی سریع

PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۱۳. آمار توصیفی

(خارج - ۹۱)

(داخل - ۹۰)



ولادیمیر درینفلد
متولد ۱۹۵۴

Vladimir Drinfeld

آزمون: هندسه پایه

14

CHAPTER

هندسه پایه

I ♥ گاج
آزمون بیست و هشتم

صفحه ۲۶ تا ۴۶

ریاضی یازدهم

528 فاصله نقطه A تا مرکز دایره‌ای به شعاع $2x + 1$ برابر با $3x - 5$ است. اگر نقطه A خارج این دایره باشد، حدود x کدام است؟

(۱) $x \leq 6$

(۱) $1 < x < 3$

(۲) $1 \leq x < 6$

(۳) $x > 6$

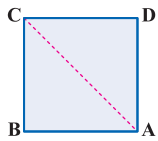
529 در مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$ چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله آن‌ها از قطر AC برابر $1/5$ واحد باشد؟

(۱) ۲

هیچ

(۲) بی‌شمار

(۳) ۴



530 دو نقطه A و B به فاصله $7/5$ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله $5/1$ واحد از A و به فاصله $2/6$ واحد از B باشد؟

(۱) دو

یک

(۲) هیچ

چهار

531 پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است. در رسم عمود منصف AB دهانه پُرگار را به اندازه $3a - 1$ باز کرده‌ایم تا به مراکز A و B کمان‌هایی رسم کنیم.

برای این‌که ترسیم به درستی انجام گیرد، حدود a کدام باید باشد؟

(۱) $\frac{1}{3} < a < 2$

(۱) $0 < a < 2$

(۲) $a > \frac{11}{3}$

(۳) $a > 2$

532 در رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط، از کدام ترسیم استفاده می‌شود؟

(۱) ترسیم خطی موازی یک خط

(۲) ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن

(۳) ترسیم عمود منصف یک پاره خط

(۴) ترسیم نیمساز

533 زاویه XOY مطابق شکل مفروض است. اگر OP نیمساز زاویه XOY باشد، اندازه OA کدام است؟

(۱) ۳

(۱) ۲

(۲) $2\sqrt{5}$

(۳) ۵

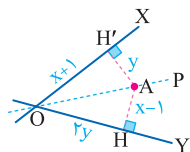
534 چند مثلث دویه دو ناهم‌نهشت به اضلاع ۱۵، ۱۱، ۸ می‌توان رسم کرد؟

(۱) ۱

صفر

(۲) ۴

(۳) ۲



535 نقطه A به فاصله ۸ واحد از خط Δ قرار دارد. چند مثلث متساوی‌الساقین ناهم‌نهشت به رأس A وجود دارد که قاعده آن‌ها منطبق بر خط Δ بوده و مساحت آن‌ها برابر ۴۸ باشد؟

(۱) ۲

(۱) ۱

(۲) بی‌شمار

(۳) هیچ

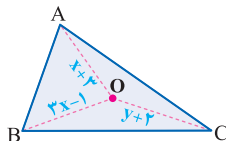
536 در مثلث ABC مطابق شکل، نقطه O روی محل تلاقی عمود منصف‌های اضلاع AB و AC قرار دارد. $x+y$ کدام است؟

(۱) $5/5$

(۱) $4/5$

(۲) ۵

(۳) ۶



70

خرید آنلاین در gajmarket.com

نواره جمع‌بندی سریع

PLUS
AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۱۴ • هندسه پایه

NOTE



الن كُن
متولد ۱۹۴۷

آزمون اول: هندسه تحلیلی
آزمون دوم: مقاطع مخروطی

15

CHAPTER

Analytic geometry

Alain Connes

هندسه تحلیلی

آزمون بیست و نهم

صفحه ۲ تا ۱۰

ریاضی یازدهم

584 خط d با شیب ۲، محور x ها را در نقطه A به طول ۳ و محور y ها را در نقطه B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۳ (۱) $4/5$ (۲)

۶ (۳) ۹ (۴)

585 معادله خطی که از نقطه $(2, -3)$ موازی خط گذرنده بر دو نقطه $(1, 4)$ و $(-1, 5)$ رسم شود، کدام است؟

$x + 2y = 4$ (۱) $x + 2y = -4$ (۲)

$2x - y = 4$ (۳) $2x - y = -4$ (۴)

(داخل - ۹۵)

586 عرض از مبدأ خط گذرا بر نقطه $(5, -1)$ و عمود بر خط $y = 2x + 1$ کدام است؟

۱ (۱) $1/5$ (۲)

۲ (۳) $2/5$ (۴)

587 سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ ، $AC: y - 2x = 5$ ، $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث مفروض کدام است؟

$6y - 4x = 15$ (۱) $9y - 6x = 17$ (۲)

$3y - 2x = 7$ (۳) $3y + 2x = 9$ (۴)

588 به ازای کدام مقدار a نقاط $A(2, 4)$ ، $B(a, 5)$ ، $C(2 - a, 1)$ در یک راستا قرار می‌گیرند؟

۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴)

589 اگر نقاط $A(2, 4)$ و $B(-1, 8)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، مساحت این مربع کدام است؟

۱۶ (۱) ۲۰ (۲)

۲۴ (۳) ۲۵ (۴)

590 نقاط $A(-1, 0)$ ، $B(3, 5)$ ، $C(4, -4)$ سه رأس یک مثلث هستند. نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی الساقین (۱) متساوی الاضلاع (۲)

۳) قائم الزاویه (۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین (۴)

591 اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $x + y = 0$ ، $y = x + 1$ ، $y = -2x + 2$ هستند. مساحت مثلث کدام است؟

$7/6$ (۱) $25/6$ (۲)

$7/12$ (۳) $25/12$ (۴)

NOTE



76

خرید آنلاین در gajmarket.com

ویژه جمع‌بندی سریع

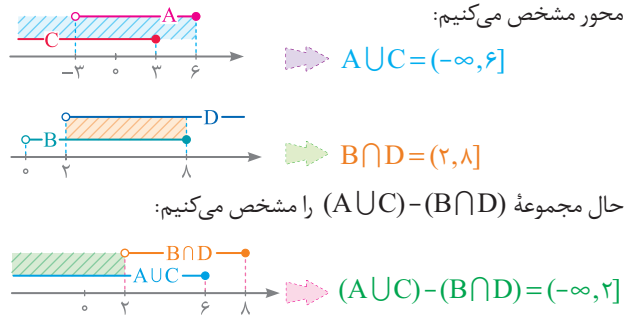
PLUS AZMOON

ریاضیات تجربی | فصل ۱۵. هندسه تحلیلی

1 بررسی گزینه‌ها:

- 1 هیچ عددی وجود ندارد که هم طبیعی باشد و هم گنگ، پس: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$
- 2 از آن جایی که $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، در نتیجه: $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$
- 3 چون $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، پس $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \emptyset$ در نتیجه: $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$
- 4 می‌دانیم $\mathbb{Q} - \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ ولی \mathbb{Q} زیرمجموعه \mathbb{W} نیست، بلکه $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$

2 با استفاده از نمایش هندسی، مجموعه‌های $A \cup C$ و $B \cap D$ را روی محور مشخص می‌کنیم:



3 بررسی گزینه‌ها:

- 1 این مجموعه به صورت $\{23, 24, 25, \dots\}$ است که نامتناهی است.
- 2 با تغییر مقدار ارتفاع و قاعده، بی‌شمار مثلث با مساحت 6 می‌توان ساخت.
- 3 در بازه $(1, 2)$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.
- 4 مجموعه اعداد طبیعی که عدد 10 بر آن‌ها بخش پذیر باشد، به صورت زیر است. پس این مجموعه، متناهی است. $A = \{1, 2, 5, 10\}$

4 ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- 1 $A - B = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$ نامتناهی و غیر تهی
- 2 $B - A = \{2\}$ متناهی و غیر تهی
- 3 $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, \dots\}$ نامتناهی و غیر تهی
- 4 $A - (A \cup B) = \emptyset$ تهی

5 بررسی گزینه‌ها:

1 در این حالت مجموعه A می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A \cup B = \{0, 1, 2, \dots\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \{0, 2, 4, \dots\} \\ A_2 = \{0\} \end{cases}$

2 در این حالت مجموعه $A \cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $B_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\Rightarrow A_1 \cap B_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$

$A_2 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $B_2 = \{\dots, -2, -1, 0\}$ $\Rightarrow A_2 \cap B_2 = \{0\}$

3 اگر A نامتناهی باشد، A' می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1 = \{1, 3, 5, \dots\} \Rightarrow A'_1 = \{2, 4, 6, \dots\}$

$A_2 = \{2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A'_2 = \{1\}$

4 اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

6 مجموعه مرجع به صورت $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ است، پس:

$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

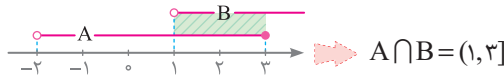
بنابراین مجموعه $B' - A$ برابر است با:

$B' - A = \{1, 2, 3, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{8, 9\}$

پس متمم مجموعه $B' - A$ به صورت $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ است که 7 عضودارد.

7 نمایش بازه‌ای مجموعه B به صورت $B = (1, +\infty)$ است. چون می‌دانیم:

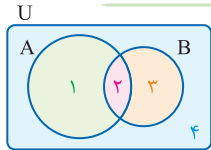
$A' \cup B' = (A \cap B)'$ ، پس ابتدا مجموعه $A \cap B$ را مشخص می‌کنیم:



متمم مجموعه $A \cap B$ به صورت $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ است، پس:

$A' \cup B' = (A \cap B)' = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$

8 نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$(A - B) - (B \cap A') = (\{1, 2\} - \{2, 3\}) - (\{2, 3\} \cap \{3, 4\}) = \{1\}$

با توجه به نمودار، ناحیه $\{1\}$ مجموعه $A - B$ را نشان می‌دهد.

9 برای به دست آوردن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه A و B ، به

تعداد اعضای اشتراک آن‌ها نیاز داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow 3 = 4 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

بنابراین $n(A \cup B)$ برابر است با:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 7 - 1 = 10$

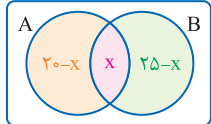
10 می‌دانیم $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ است، بنابراین

هنگامی $n(A \cup B)$ ما کسیم می‌شود که $n(A \cap B) = 0$ باشد، یعنی دو مجموعه جدا از هم باشند.

11 ابتدا تعداد عضوهای مجموعه B را به دست می‌آوریم:

$n(B) = n(U) - n(B') \Rightarrow n(B) = 80 - 55 = 25$

از طرفی $n(A \cup B) = 37$ است، حال اگر فرض



کنیم $x = n(A \cap B)$ خواهیم داشت:

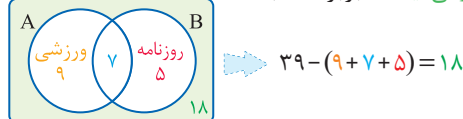
$(20 - x) + x + (25 - x) = 37 \Rightarrow x = 8$

بنابراین تعداد اعضایی که فقط در مجموعه B هستند، برابر است با:

$25 - x = 25 - 8 = 17$

12 مطابق نمودار ون روبه‌رو تعداد افرادی که عضو هیچ‌یک از گروه‌های

روزنامه دیواری و ورزشی نیستند برابر است با:





41 همه اعداد را ساده و به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & (\frac{0}{25})^4 \times (\frac{3}{4})^{-2} \times 6^4 = (\frac{1}{4})^4 \times (\frac{3^{-2}}{4^{-2}}) \times (2^2 \times 3^2) \\ & = \frac{1}{4^4} \times \frac{3^{-2}}{2^{-2}} \times 2^2 \times 3^2 = \frac{3 \times 2^2}{2^2} = 3 \times 2^2 = 12 \end{aligned}$$

42 اعداد زیر رادیکال‌ها را باز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{18}{2 \times 9}} + 2 \sqrt{\frac{27}{2 \times 9}} - \sqrt{\frac{108}{2 \times 26}} + \frac{0}{3} \sqrt{\frac{200}{2 \times 100}} \\ \text{حال اعداد مربع کامل را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم:} \\ A &= \frac{2}{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \\ \Rightarrow A^2 &= (5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50 \end{aligned}$$

43 می‌دانیم: $\sqrt{2} \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ حال همه اعداد زیر رادیکال را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \sqrt{12} \times \sqrt{54} \times \sqrt{24} = \sqrt{3 \times 2^2} \times \sqrt{2 \times 3^3} \times \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{3 \times 2^2 \times 2 \times 3^3 \times 2^2 \times 3} \\ & \text{چون فرجه رادیکال‌ها متفاوت است، همه فرجه‌ها را به ک.م.م اعداد ۱۲، ۴، ۶ یعنی عدد ۱۲ تبدیل می‌کنیم:} \\ & \sqrt{3 \times 2^2} \times \sqrt{2 \times 3^3} \times \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{3^2 \times 2^4} \times \sqrt{2^3 \times 3^6} \times \sqrt{2^4 \times 3} \\ & = \sqrt{2^{12} \times 3^{12}} = \sqrt{6^{12}} = 6 \end{aligned}$$

44 همه اعداد زیر رادیکال را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{4 \sqrt{16}} \times (\frac{1}{2})^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2 \sqrt{2^4}} \times 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2 \times 2^2} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \\ &= \sqrt[3]{2^4} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{8}{3}} = 2^2 \times 2^{\frac{2}{3}} = 4 \\ \Rightarrow (2A)^{-\frac{1}{3}} &= 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

45 با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (x + 3y^2)^2 - (x - 3y^2)^2 &= (x^2 + 6xy^2 + 9y^4) - (x^2 - 6xy^2 + 9y^4) \\ &= 12xy^2 = 12 \times \frac{1}{3} = 4 \end{aligned}$$

اتحاد مربع مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$1 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad 2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

46 طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{5}{x} = 9 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x + \frac{5}{x})^2 = 81 \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} + 2(2x)(\frac{5}{x}) = 81 \\ \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} + 20 = 81 \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} = 61 \end{aligned}$$

47 با استفاده از اتحاد‌های مربع و مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - 6x^2 + 12x - 8) \left(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2} \right) \\ &= (x-2)^2 \left(\frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} \right) = x(x-2) - (x-2)^2 \\ &= (x-2)(x - (x-2)) = (x-2) \times 2 \Rightarrow \frac{x-2}{A} = \frac{x-2}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$1 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$2 \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

48 در جمله‌های X^4 و $8X$ از X در جمله‌های -24 و $-3X^3$ از -3 فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + 8x - 24 &= x(x^3 - 3x^2 + 8) - 3(x^3 + 8) \\ &= (x-3)(x^3 + 8) = (x-3)(x+2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

اتحادهای زیر به اتحاد چاق و لاغر معروف هستند:

$$1 \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$2 \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

49 در هریک از برانتزها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left(x + \frac{2}{x-3}\right) \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x-3}\right) \left(\frac{x-3}{x-2}\right) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x-1$$

50 کافیسست مخرج مشترک بگیریم و صورت کسر را ساده کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1} &= \frac{2x^2 - x + (x-1)(2x-1) - (2x+1)(2x+1)}{4x^2 - 1} \\ &= \frac{2x^2 - x + 2x^2 - 3x + 1 - 4x^2 - 4x - 1}{4x^2 - 1} = \frac{-8x}{4x^2 - 1} \Rightarrow P(x) = -8x \end{aligned}$$

51 می‌دانیم $\sqrt{2} \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2$ پس اگر عبارت داده شده را فرض کنیم با مربع کردن آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \times \sqrt{2} \Rightarrow A^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \times 2 \\ &= 2(2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}) \times 2 \\ &= 2(4 + 2\sqrt{4-3}) \times 2 = (4+2) \times 2 = 12 \Rightarrow A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

52 می‌دانیم $2\sqrt{3} \times 5^2 = 2\sqrt{75} = 10\sqrt{3}$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}} &= \sqrt{28+2\sqrt{75}} + \sqrt{28-2\sqrt{75}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{25} + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{25} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{25} + \sqrt{3}| + |\sqrt{25} - \sqrt{3}| \\ &= 5 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} = 10 \end{aligned}$$

53 مخرج کسر را گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2+\sqrt{6}} \times \frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ = \frac{2(2-\sqrt{6})}{4-6} + 6 - \sqrt{6} - 6 = \frac{2(2-\sqrt{6})}{-2} - \sqrt{6} = \sqrt{6} - 2 - \sqrt{6} = -2 \end{aligned}$$

54 مخرج کسر اول را گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3-\sqrt{7}} \times \frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} - \sqrt{4 \times 7} + \frac{\sqrt{4 \times 2}}{\sqrt{2}} \\ = \frac{2(3+\sqrt{7})}{9-7} + |2-\sqrt{7}| - 2\sqrt{7} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ = 3 + \sqrt{7} + \sqrt{7} - 2 - 2\sqrt{7} + 2 = 3 \end{aligned}$$



68 عبارت $[X] + [-X]$ به ازای تمام اعداد صحیح برابر صفر و به ازای تمام اعداد غیر صحیح برابر 1 است. از آن جایی که این عبارت زیر رادیکال قرار دارد پس دامنه تابع f برابر اعداد صحیح است. یعنی $D_f = \mathbb{Z}$.

69 ابتدا بازه X را مشخص می‌کنیم:

$$[X-2] = 1 \Rightarrow [X] - 2 = 1 \Rightarrow [X] = 3 \Rightarrow 3 \leq X < 4$$

در بازه $3 \leq X < 4$ ضابطه f برابر است با:

$$f(x) = |x-3| - |x-4| = (x-3) + (x-4) = 2x-7$$

حال نقاط تلاقی f و g را در بازه (3, 4) مشخص می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$(2x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \frac{5}{2}$$

باتوجه به بازه X، جواب‌های به دست آمده قابل قبول نیستند.

🍏 برای تجزیه عبارت‌های درجه 2 که ضریب x^2 عددی غیر یک است، می‌توان ضریب x^2 را در عدد ثابت ضرب کرد و پس از تجزیه آن، ضریب x^2 را یک بار در یکی از پرانتزها، در X ضرب کرده و در پرانتز دیگر، عدد ثابت را بر آن تقسیم می‌کنیم تا تجزیه عبارت اولیه به دست آید.

$$2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+\frac{4}{2}) = 0$$

70 ابتدا مخارج مشترک می‌گیریم و سپس با تجزیه، ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$\frac{x}{2-x} + \frac{2}{x} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 2(2-x)}{(2-x)x} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{2x - x^2} = -\frac{3}{2}$$

$$2x^2 - 4x + 8 = -6x + 3x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4, -2$$

هیچ یک از دو جواب فوق، مخارج کسرها را صفر نمی‌کنند، پس جواب‌های این معادله $x = 4$ و $x = -2$ هستند.

71 در طرف اول معادله مخارج مشترک می‌گیریم:

$$x + \frac{2x-1}{x-4} = -2 \Rightarrow \frac{x(x-4) + 2x-1}{x-4} = -2 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{x-4} = -2$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 - 2x - 1 = -2x + 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

72 در سمت اول معادله مخارج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \Rightarrow \frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

با شرط $x \neq 1$ عبارت $(x-1)$ را از مخارج کسرها حذف می‌کنیم:

$$\frac{4x-2}{x+1} = \frac{2-x}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4x^2 - 2x = -x^2 + x + 2 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0$$

با توجه به این که مجموع ضرایب در این معادله صفر است، یکی از ریشه‌ها 1 و دیگری $\frac{c}{a}$ است. یعنی:

$$x = 1, x = -\frac{2}{5}$$

🍏 در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

- اگر $a+b+c = 0$ باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر 1 و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ است.
- اگر $b = a+c$ باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر 1- و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

73 چون $x = 3$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} \xrightarrow{x=3} \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2}{2} \Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a}{2}$$

$$3a^2 - 5a = 2 \Rightarrow 3a^2 - 5a - 2 = 0$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $3a^2 - 5a - 2 = 0$ ، عدد 3 را در 2 ضرب می‌کنیم:

$$3a^2 - 5a - 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow (3a+1)(a-\frac{6}{3}) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, 2$$

74 با فرض $t = \frac{3x}{x-1}$ معادله به صورت $2t + \frac{1}{t} = 3$ در می‌آید:

$$2t + \frac{1}{t} = 3 \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} t = 1, t = \frac{1}{2}$$

$$1 \quad \frac{3x}{x-1} = 1 \Rightarrow 3x = x-1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ریشه بزرگ‌تر $= -\frac{1}{5}$

$$2 \quad \frac{3x}{x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6x = x-1 \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

75 اگر بهروز کل کار را در X ساعت انجام دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{X}$ کار را انجام می‌دهد. حال چون بهروز کار را 9 ساعت زودتر از فرهاد انجام می‌دهد، پس فرهاد کل کار را در $X+9$ ساعت انجام می‌دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{X+9}$ کار را انجام می‌دهد. از طرفی اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در 20 ساعت انجام می‌شود، پس:

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{9+X} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{(X+9)+X}{X(X+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2X+9}{X^2+9X} = \frac{1}{20}$$

$$20X^2 + 9X = 40X + 180 \Rightarrow X^2 - 21X - 180 = 0 \Rightarrow X = 36, X = -5$$

76 اگر سرعت آب برابر 7 باشد، هنگامی که قایق در جهت آب حرکت می‌کند سرعت آن برابر $10+7$ و هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند، سرعتش برابر $10-7$ می‌شود. حال از آن جایی که اختلاف زمان رفت و برگشت 5 دقیقه است، پس:

$$\frac{1200}{100-7} - \frac{1200}{100+7} = 5 \xrightarrow{+5} \frac{240}{100-7} - \frac{240}{100+7} = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری گزینیه}} v = 20$$

سرعت متوسط برابر است با جابه‌جایی تقسیم بر زمان سپری شده است

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

یعنی: v_{av} بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{av}}$$

77 وزن خالص ماده حل شده در هر حالت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{11} = \frac{40}{100} \Rightarrow \text{وزن ماده حل شده} = 4/4$$

$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{4} = \frac{70}{100} \Rightarrow \text{وزن ماده حل شده} = 2/8$$

حال با مخلوط کردن رنگ‌ها، $11+4 = 15$ کیلوگرم رنگ ایجاد می‌شود. می‌خواهیم غلظت محلول را به 50 درصد برسانیم. اگر فرض کنیم X کیلوگرم از محلول تبخیر می‌شود؛ پس خواهیم داشت:

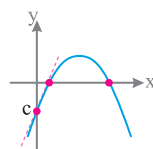
$$\frac{\text{وزن ماده حل شده}}{\text{وزن کل}} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{4/4 + 2/8}{15-X} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15-X} = \frac{1}{2}$$

$$15-X = 14/4 \Rightarrow X = 0/6$$



106 **۲** با توجه به نمودار داده شده، علامت Δ ، c ، b ، a به صورت زیر است:

- دهانه سهمی رو به پایین باز شده است، پس: $a < 0$
- محل برخورد با محور y ها منفی است، پس: $c < 0$
- شیب نمودار در نقطه $(0, c)$ مثبت است، پس: $b > 0$
- سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع کرده، پس: $\Delta > 0$



107 **۴** می‌دانیم طول رأس سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ از رابطه $x_s = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. از آن جایی که طول رأس سهمی برابر ۱ است، پس:

$$x_s = -\frac{b}{2(-2)} = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4$$

از طرفی منحنی محور x ها را در نقطه‌ای با طول -1 قطع می‌کند، پس:

$$0 = -2(-1)^2 + 4(-1) + b \Rightarrow 0 = -6 + b \Rightarrow b = 6$$

108 **۴** چون تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن است، پس طول رأس سهمی برابر $x = 2$ است:

$$x_s = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2(a-1)} = 2 \Rightarrow 4(a-1) = -1 \Rightarrow a-1 = -\frac{1}{4}$$

پس معادله درجه دوم به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0$ است. حال محل‌های برخورد منحنی با محور x ها را به دست می‌آوریم:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6, x = -2$$

109 **۲** یک ضلع زمین که به رودخانه مجاور است، نیاز به طناب‌کشی ندارد. پس با توجه به شکل $2y + x = 88$ و در نتیجه $y = \frac{88-x}{2}$ است. بنابراین

مساحت زمین برابر است با:

$$S = xy = x \left(\frac{88-x}{2} \right) = 44x - \frac{x^2}{2}$$

بیشترین مساحت زمین، برابر عرض رأس سهمی $S = 44x - \frac{x^2}{2}$ است:

$$\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(44)^2 - 4(-\frac{1}{2})(0)}{4(-\frac{1}{2})} = 968$$

110 **۱** می‌دانیم اگر نمودار سهمی محور x ها را در نقاط α و β قطع کند، برای مشخص کردن ضابطه سهمی، آن را به صورت $y = k(x-\alpha)(x-\beta)$ در نظر می‌گیریم و به کمک عرض از مبدأ یا هر نقطه دیگری از سهمی، مقدار k را به دست می‌آوریم. چون نمودار سهمی در نقطه‌های 1 و 3 با محور x ها برخورد کرده، پس ضابطه سهمی به صورت $y = k(x-1)(x-3)$ است. حال با توجه به این‌که نمودار، محور y ها را در نقطه 6 قطع کرده است، بنابراین نقطه $(0, 6)$ روی سهمی است:

پس ضابطه سهمی به صورت $y = 2(x-1)(x-3)$ است:

$$y = 2(x-1)(x-3) = 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 8x + 6$$

$$\Rightarrow a - b + c = (2) - (-8) + (6) = 16$$

111 **۱** برای این‌که نمودار سهمی $y = ax^2 + (a+3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طول منفی قطع کند، باید معادله $ax^2 + (a+3)x - 1 = 0$ دو ریشه منفی داشته باشد، پس:

$$1 \quad \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4a(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < -9 \\ a > -1 \end{cases}$$

$$2 \quad S < 0 \Rightarrow -\frac{a+3}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a+3}{a} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < -3 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$3 \quad P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0$$

بنابراین اشتراک بازه‌های به دست آمده برابر بازه $(-\infty, -9)$ است.

112 **۲** چون می‌خواهیم سهمی فقط از ناحیه دوم عبور نکند، باید به صورت مقابل باشد:

$$1 \quad a < 0 \Rightarrow -1 < 0 \quad \checkmark$$

$$2 \quad \Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(-1)(-4) > 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4m - 12}{(m-6)(m+2)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases}$$

$$3 \quad P \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-4}{-1} = 4 > 0 \quad \checkmark$$

$$4 \quad S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{m-2}{-1} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

بنابراین اشتراک بازه‌های به دست آمده از 2 و 4 برابر است با: $(6, +\infty)$

113 **۱** چون منحنی محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند، پس دارای یک ریشه حقیقی مثبت و یک ریشه حقیقی منفی است. پس حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow \frac{m}{m+2} \quad \begin{array}{c} -2 \\ | \\ - \\ | \\ 1 \end{array} \quad \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$$

ممکن بود طراح به جای این که بگوید «منحنی محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند...» سؤال را به شکل «منحنی از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد...» مطرح کند.

114 **۲** برای این‌که سهمی همواره پایین محور x ها باشد، باید داشته باشیم:

$$1 \quad \Delta < 0: (2(m-3))^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \Rightarrow 4(m-3)^2 - 4(m-1) < 0$$

$$\Rightarrow (m-3)^2 - (m-1) < 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 - m + 1 < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5$$

$$2 \quad a < 0: 1-m < 0 \Rightarrow 1 < m$$

$$2 < m < 5 \quad \text{داریم:}$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده از 1 و 2 داریم:

115 **۳** برای این‌که نمودار تابع درجه دوم بالای محور x ها و مماس بر آن باشد، باید ضریب x^2 مثبت و Δ برابر صفر باشد:

$$1 \quad a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2$$

$$2 \quad \Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(a-2)(a+2) = 0 \Rightarrow 9 - 4(a^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow -4a^2 + 16 + 9 = 0 \Rightarrow 4a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$$

فقط $a = \frac{5}{2}$ قابل قبول است، زیرا به ازای $a = -\frac{5}{2}$ ضریب x^2 منفی می‌شود.



151 اگر پایه تابع نمایشی $y = \left(\frac{a+3}{a^2+1}\right)^x$ بزرگ‌تر از یک باشد، در این صورت تابع صعودی اکید خواهد بود:

$$\frac{a+3}{a^2+1} > 1 \Rightarrow a+3 > a^2+1 \Rightarrow a^2-a-2 < 0 \Rightarrow -1 < a < 2$$

$$(a-2)(a+1)$$

پس به ازای مقادیر بازه $(-1, 2)$ ، تابع y اکیداً صعودی است.

152 برای به دست آوردن $2g$ به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های (x, y) ، همه مؤلفه‌های دوم g را برابر کرده و برای به دست آوردن f^{-1} از همه مؤلفه‌های دوم f ، یک واحد کم می‌کنیم:

$f^{-1} = \{(3, 1), (1, -1), (2, 0), (5, 0)\}$ ، $\frac{2g}{f^{-1}}$ به ازای مؤلفه‌های اول مشترک، مؤلفه‌های دوم تابع $2g$ را بر مؤلفه‌های دوم تابع f^{-1} تقسیم می‌کنیم. بنابراین:

$$D_{\frac{2g}{f^{-1}}} = D_{2g} \cap D_{f^{-1}} - \{x \mid (f^{-1})(x) \neq 0\} = \{1, 3, 5\} - \{2, 5\} = \{1, 3\}$$

$$\frac{2g}{f^{-1}} = \{(3, \frac{1}{1}), (1, \frac{-1}{-1})\} = \{(3, 1), (1, -1)\}$$

زوج مرتب \Rightarrow

153 ابتدا تابع $g \circ f^{-1}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2 &\xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g} x \\ 5 &\xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g} 3 \\ 4 &\xrightarrow{f^{-1}} 3 \xrightarrow{g} 1 \\ 6 &\xrightarrow{f^{-1}} 4 \xrightarrow{g} 2 \end{aligned}$$

$$g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

حال باید تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ را تشکیل دهیم. دامنه مشترک تابع‌های g و $g \circ f^{-1}$ برابر $\{4, 5\}$ است، پس:

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(4, \frac{2}{1}), (5, \frac{6}{3})\} = \{(4, 2), (5, 2)\}$$

154 ابتدا تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} 2 &\xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g^{-1}} 4 \\ 3 &\xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g^{-1}} 1 \\ 4 &\xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g^{-1}} 2 \\ 1 &\xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g^{-1}} x \end{aligned}$$

$$g^{-1} \circ f = \{(2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$$

حال تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ را تشکیل می‌دهیم. با توجه به این که دامنه مشترک تابع‌های $g^{-1} \circ f$ و f برابر $\{2, 3, 4\}$ است، پس:

$$(g^{-1} \circ f) - f = \{(2, 4-5), (3, 1-4), (4, 2-6)\} = \{(2, -1), (3, -3), (4, -4)\}$$

155 با توجه به نمودار داده شده، ضابطه توابع f و g و دامنه‌های آن‌ها به صورت زیر است:

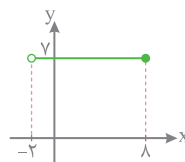
$$f(x) = 5, D_f = (-\infty, 8] \quad , \quad g(x) = -2, D_g = (-2, 10)$$

پس دامنه و ضابطه تابع $f - g$ به صورت زیر خواهد بود:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 5 - (-2) = 7$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 8] \cap (-2, 10) = (-2, 8]$$

بنابراین نمودار تابع $(f - g)(x) = 7$ را باید با دامنه $(-2, 8]$ رسم کنیم:



156 با توجه به شکل، نمودار تابع $f + g$ از دو نقطه $(0, 8)$ و $(-3, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$1 \quad (f + g)(0) = 8 \Rightarrow f(0) + g(0) = 8 \Rightarrow (2(0) + \sqrt{0+4}) + g(0) = 8$$

$$\Rightarrow 2 + g(0) = 8 \Rightarrow g(0) = 6$$

$$2 \quad (f + g)(-3) = 0 \Rightarrow f(-3) + g(-3) = 0 \Rightarrow (-6 + \sqrt{-3+4}) + g(-3) = 0$$

$$\Rightarrow -5 + g(-3) = 0 \Rightarrow g(-3) = 5$$

$$\frac{g(0)}{g(-3)} = \frac{6}{5} = 1/2 \quad \text{بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:}$$

157 برای به دست آوردن $f(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3}))$ ابتدا $f(\sqrt{3})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2(1) = 1$$

$$f(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3})) = f(-\frac{1}{4} \times 1) = (-\frac{1}{4})^2 - 2[-\frac{1}{4}] = \frac{1}{16} - 2(-\frac{1}{4}) = \frac{9}{4}$$

158 ابتدا $g(f(a)) = 5$ را با فلش نمایش می‌دهیم:

$$a \xrightarrow{f} \bigcirc \xrightarrow{g} 5 \quad (a, \bigcirc) \in f, (\bigcirc, 5) \in g$$

حال چون زوج مرتب $(6, 5)$ در تابع g وجود دارد، پس $\bigcirc = 6$ بوده و در نتیجه

$$f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$$

159 با توجه به صورت سؤال داریم:

$$(f, 2) \in fog \Rightarrow \bigcirc \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} \bigcirc \Rightarrow (\bigcirc, 2) \in f, (f, \bigcirc) \in g$$

چون $(3, 2) \in f$ ، پس $\bigcirc = 3$ است. بنابراین $(f, 3) \in g$ و در نتیجه $a = 4$ خواهد بود. از طرفی:

$$(f, 1) \in g \circ f \Rightarrow \bigcirc \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} \bigcirc \Rightarrow (f, \bigcirc) \in f, (\bigcirc, 1) \in g$$

با توجه به این که $(4, 5) \in f$ ، پس $\bigcirc = 5$ است؛ بنابراین $(5, 1) \in g$ و در نتیجه $b = 5$ خواهد بود. در نتیجه دوتایی (a, b) به صورت $(4, 5)$ است.

160 در تابع g ، به جای همه x ها، $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-(\frac{2x-1}{x+1})} = \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{\frac{2(x+1)-(2x-1)}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

$$g(f(x)) = \frac{4x-2+2x+2}{x+1} = \frac{6x}{3} = 2x$$

با جایگذاری $x = 2$ در تابع $g \circ f$ داریم:

تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 2$ برابر 4 می‌شود، گزینه 3 است.

161 با در نظر گرفتن $g(x) = t$ داریم:

$$2x+1 = t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 = 8\left(\frac{t^2-2t+1}{4}\right) + 3(t-1) + 5$$

با ساده کردن عبارت به دست آمده $f(t) = 2t^2 - t + 4$ خواهد شد که با جایگذاری x به جای t ، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ خواهد بود.

در تابع مرکب $x = 0$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$f(g(0)) = 8(0)^2 + 6(0) + 5 \Rightarrow f(1) = 5$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 1$ برابر 5 می‌شود گزینه 3 است.

218 ابتدا با استفاده از تعریف لگاریتم مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\log_7(\epsilon + \log_7 x) = 3 \Rightarrow \epsilon + \log_7 x = 7^3 = 8 \Rightarrow \log_7 x = 2$$

$$\Rightarrow x = 7^2 = 49 \Rightarrow \log_7(x-1) = \log_7 48 = \log_7 2^3 = 3$$

219 ابتدا A را به دست می‌آوریم:

$$A = \log_8 2^{\sqrt{10}/25} = \log_8 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{25}} = \log_8 2 \times (2^{-2})^{\frac{1}{25}}$$

$$= \log_8 2 \times 2^{-\frac{2}{25}} = \log_8 2^{\frac{1}{25}} = \frac{1}{25} \log_8 2 = \frac{1}{25}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\log_{\frac{1}{A}} \left(\frac{1}{A} - 1\right) = \log_{\frac{1}{A}} (A - 1) = \log_{\frac{1}{A}} 8 = \log_{\frac{1}{A}} 2^3 = \frac{3}{\frac{1}{A}} = 3A$$

$$\log_{\sqrt{7}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{7})^{\frac{4}{3}} = (7^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{2}{3}} \quad \text{220}$$

$$\Rightarrow \log_8(a^7 + 7) = \log_8((7^{\frac{2}{3}})^7 + 7) = \log_8(7^{\frac{14}{3}} + 7)$$

$$= \log_8 16 = \log_8 2^4 = \frac{4}{3}$$

221 از $\log_7 12 = a$ نتیجه می‌گیریم $7^a = 12$ است. پس:

$$4^{a-2} = \frac{4^a}{4^2} = \frac{(7^a)^2}{16} = \frac{12^2}{16} = \frac{144}{16} = 9$$

222 روش اول:

$$\log_7 9A^2 = \log_7 9 + \log_7 (3^a)^2 = \log_7 3^2 + \log_7 3^{2a} = 2 + 2a$$

روش دوم: از $3^a = A$ نتیجه می‌گیریم $\log_7 A = a$ است، بنابراین:

$$\log_7 9A^2 = \log_7 9 + \log_7 A^2 = 2 + 2 \log_7 A = 2 + 2a$$

223 ابتدا لگاریتم خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log 1/6 - \log 1) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1)$$

حال از آن جایی که $\log 2 = 1 - 3k$ پس $\log 2 = 1 - \log 5$ ، بنابراین:

$$\frac{1}{3} (4(1 - 3k) - 1) = \frac{1}{3} (4 - 12k - 1) = \frac{1}{3} (3 - 12k) = 1 - 4k$$

224 از آنجایی که $\log 3 = a$ و $\log 2 = 1 - \log 5 = 1 - b$ است، داریم:

$$\log 24 = \log 3 \times 2^3 = \log 3 + \log 2^3 = \frac{\log 3}{a} + 3 \frac{\log 2}{1-b} = a - 3b + 3$$

225 اگر یک لگاریتم در مبنایی داده شود و حاصل یک لگاریتم در مبنای دیگری خواسته شود، به طوری که مبنایها به یکدیگر قابل تبدیل نباشند، از قانون تغییر مبنای استفاده می‌کنیم. چون یک لگاریتم در مبنای 10 داده شده و حاصل یک لگاریتم دیگر در مبنای 5 را می‌خواهیم، پس:

$$\log_5 16 = \frac{\log 16}{\log 5} = \frac{\log 2^4}{\log 5} = \frac{4 \log 2}{\log 5} \xrightarrow{\log 5 = 1 - \log 2} \frac{4 \log 2}{1 - \log 2}$$

$$\Rightarrow \log_5 16 = \frac{4 \times 0/3}{1 - 0/3} = \frac{1/2}{0/7} = \frac{12}{7}$$

226 با توجه به قانون اعداد با توان لگاریتمی، خواهیم داشت:

$$\sqrt[10]{\log 5 + 2 \log 2} = \sqrt[10]{\log 5 + \log 8} = \sqrt[10]{\log 40} = \sqrt[10]{40} = 2\sqrt[10]{5}$$

227 ضرب پشت لگاریتم را به توان عبارت جلوی لگاریتم منتقل می‌کنیم:

$$\log(\epsilon - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5}) = \log(\epsilon - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2$$

$$= \log(\epsilon - 2\sqrt{5}) + \log(1 + 2\sqrt{5} + 5) = \log(\epsilon - 2\sqrt{5}) + \log(\epsilon + 2\sqrt{5})$$

$$= \log(\epsilon - 2\sqrt{5})(\epsilon + 2\sqrt{5}) = \log(\epsilon^2 - (2\sqrt{5})^2)$$

$$= \log(36 - 20) = \log 16 = 4 \log 2 = 4k$$

228 برای تعیین دامنه تابع $f(x) = \log_{(x-5)}(14-x)$ داریم:

$$14 - x > 0 \Rightarrow 14 > x$$

$$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5 \Rightarrow x \in (5, 6) \cup (6, 14)$$

$$x - 5 \neq 1 \Rightarrow x \neq 6$$

دامنه این تابع شامل 7 عدد صحیح است که عبارتند از: 7, 8, ..., 13

229 ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1) + \log \sqrt{x^2} = \log 3$$

$$\Rightarrow \log(2x-1) + \log |x| = \log 3$$

حال چون دامنه معادله $x > \frac{1}{2}$ است، پس $|x| = x$ و داریم:

$$\log(2x-1) + \log x = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1)x = \log 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{b=a+c} x = \frac{3}{2}, x = -1$$

$$\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 \frac{3/2}{3} = \log_7 \frac{1}{2} = \log_7 2^{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 2) = \log(2x - 5) \quad \text{230}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 2}\right) = \log(2x - 5) \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x-2} = 2x - 5$$

$$\Rightarrow x + 2 = 2x - 5 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow \log_5 \sqrt[3]{x+1} = \log_5 \sqrt[3]{7+1} = \log_5 \sqrt[3]{8} = \log_5 2 = \frac{1}{3}$$

$$\log(y+2) = 1 \Rightarrow y+2 = 10 \Rightarrow y = 8 \quad \text{231}$$

$$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \Rightarrow \log(\lambda-x) + \log(4x+\lambda) = 2$$

$$\Rightarrow \log(\lambda-x)(4x+\lambda) = 2 \Rightarrow 4(\lambda-x)(x+2) = 10^2 = 100$$

$$\Rightarrow (\lambda-x)(x+2) = 25 \Rightarrow \lambda x + 16 - x^2 - 2x = 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

232 از معادله $\log_7 x + \log_7 y = 2$ داریم:

$$\log_7 xy = 2 \Rightarrow xy = 7^2 = 49$$

از طرفی $x^2 + y^2 = 46$ است، بنابراین با استفاده از اتحاد زیر عبارت $(x+y)$ را به دست می‌آوریم:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 46 + 2 \times 49 = 144 \Rightarrow x+y = 12 \text{ یا } -12$$

$$\log_5(x+y) = \log_5 12 = \log_5 2^2 \times 3 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \frac{1}{5}$$





311 با جای گذاری عدد صفر در تابع به ابهام می‌رسیم. از آن جایی که X به سمت + میل می‌کند برای رفع ابهام می‌توانیم عبارتهای کم‌توان صورت و مخرج

lim_{x to 0+} (sqrt(x) + 3*sqrt(x) + sqrt(x)) / sqrt(6x) = lim_{x to 0+} (sqrt(x) + 3*sqrt(x) + sqrt(x)) / (sqrt(6)*sqrt(x)) = 1/2

312 صورت کسره به ازای X=2 برابر صفر می‌شود. اما از آن جایی که حاصل حد برابر عدد 1/4 است، پس کسر دارای ابهام 0/0 است. بنابراین X=2 ریشه مخرج کسر نیز است:

lim_{x to 2} (x - sqrt(3x-2)) / (ax+b) = lim_{x to 2} (1 - 3/(2*sqrt(3x-2))) / a = 1/4 = 1/(4a) = 1/4 => a = 1/4

2(1/4) + b = 0 => b = -1/2

313 مخرج مشترک می‌گیریم و صورت کسر را ساده می‌کنیم:

lim_{x to 2} (6 - x + 1) / (x^2 - 2x - x + 2) = lim_{x to 2} (6 - x(x+1)) / (x(x-2)) = lim_{x to 2} (-x^2 - x + 6) / (x(x-2)) = lim_{x to 2} -(x-2)(x+3) / (x(x-2)) = -5/2

طرح این تست خارج از برنامه کتاب درسی و کنکور نظام جدید است اما به دلیل مطرح شدن تست کنکور سراسری سال 98 این سوال را در این کتاب مطرح کردیم.

314 با جای گذاری X=pi می‌رسیم. برای رفع ابهام و به صورت زیر

lim_{x to pi} sin^2 x / (1 + cos^2 x) = lim_{x to pi} (1 - cos^2 x) / (1 + cos^2 x)

lim_{x to pi} ((1 + cos x)(1 - cos x)) / ((1 + cos x)(1 - cos x + cos^2 x)) = (1 - cos pi) / (1 - cos pi + cos^2 pi) = 2/3

315 با جای گذاری X=pi/4 در کسره به ابهام 0/0 می‌رسیم:

lim_{x to pi/4} (1 - tan x) / cos 2x = lim_{x to pi/4} (1 - sin x / cos x) / (cos^2 x - sin^2 x) = lim_{x to pi/4} (cos x - sin x) / (cos x + sin x) = 1/2

316 وقتی X -> 1+ ، مقدار [X] برابر با 1 است، پس:

lim_{x to 1+} sin^2 pi x / ([x] + cos pi x) = lim_{x to 1+} (1 - cos^2 pi x) / (1 + cos pi x) = (1 - cos pi) / (1 + cos pi) = 2

307 با جای گذاری X=3 به ابهام 0/0 می‌رسیم. برای رفع ابهام صورت کسر را گویا می‌کنیم:

lim_{x to 3} (sqrt(3x-5) - 2) / (x^2 - 9) * (sqrt(3x-5) + 2) / (sqrt(3x-5) + 2) = lim_{x to 3} (3x-5) - 4 / ((x^2-9)(sqrt(3x-5)+2)) = 3/24 = 1/8

می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده کنیم:

lim_{x to 3} (sqrt(3x-5) - 2) / (x^2 - 9) Hop = lim_{x to 3} (3/(2*sqrt(3x-5))) / (2x) = 3/(6*3) = 1/6

308 با جای گذاری X=-8 در کسر داده شده به ابهام 0/0 می‌رسیم. برای رفع ابهام مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

lim_{x to -8} (x^2 + 10x + 16) / (12 + 6*sqrt(x)) = lim_{x to -8} ((x+8)(x+2)) / (6(sqrt(x)+2)) * (sqrt(x)-2) / (sqrt(x)-2) = -12

می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

lim_{x to -8} (x^2 + 10x + 16) / (12 + 6*sqrt(x)) Hop = lim_{x to -8} (2x+10) / (3*sqrt(x)) = -12

309 با جای گذاری X=-1 در کسر داده شده به ابهام 0/0 می‌رسیم. برای رفع ابهام مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

lim_{x to -1} (2x^2 + 5x + 3) / (2 - sqrt(2+sqrt(3-x))) = lim_{x to -1} (2x^2 + 5x + 3) / (2 - sqrt(2+sqrt(3-x))) * (2 + sqrt(2+sqrt(3-x))) / (2 + sqrt(2+sqrt(3-x))) = 16

310 با جای گذاری X=2 در کسر داده شده به ابهام 0/0 می‌رسیم. بنابراین خواهیم داشت:

lim_{x to 2+} (2 - sqrt(x+6)) / (sqrt(x^2 - 4x + 4)) = lim_{x to 2+} (2 - sqrt(x+6)) / sqrt((x-2)^2) = lim_{x to 2+} (2 - sqrt(x+6)) / (x-2) Hop = -1/4

بعد از برداشتن قدر مطلق، می‌توانستیم صورت کسر را گویا کنیم و ...

$$x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow 2x^2 > 4 \Rightarrow [2x^2] = 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 2x^2 - 4 \Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 - 4 = 2$$

375 حاصل حد خواسته شده برابر مشتق راست تابع f در $x=1$ است، پس:

$$x > 1 \Rightarrow |x| = x, [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - [x] + |x|} = \sqrt{x^2 + x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{2(1)+1}{2\sqrt{1^2+1-1}} = \frac{3}{2}$$

376 می‌دانیم حاصل حد داده شده برابر مشتق تابع f در $x=2$ است. پس:

$$f'(2) = -\frac{1}{3} \text{ از طرفی در اطراف } x = -1 \text{ عبارت داخل } |x| \text{ منفی است،}$$

بنابراین $|x| = -x$ بوده و داریم:

$$y = f(\sqrt{|x+3|}) \xrightarrow{\text{در اطراف } x=-1} y = f(\sqrt{-x+3})$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{-x+3}} \times f'(\sqrt{-x+3}) \xrightarrow{x=-1} y' = \frac{-1}{2\sqrt{4}} \times f'(\sqrt{4})$$

$$y' = -\frac{1}{4} f'(2) = -\frac{1}{4} \times -\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

377 از آن جایی که در هر دو تابع f و g ، عبارت شامل قدر مطلق وجود دارد،

ابتدا توابع را به‌ازای ریشه داخل قدر مطلق به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x| = \begin{cases} \frac{3}{5}x & ; x \geq 0 \\ x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 4x + |x| = \begin{cases} 5x & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases}$$

حال ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \frac{3}{5}(\Delta x) & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (f \circ g)(x) = 3x$$

ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ همواره برابر $3x$ است، پس مشتق پذیر بوده و مشتق

آن برابر 3 است.

378 هریک از ضابطه‌ها در بازه خود پیوسته و مشتق پذیرند، بنابراین در نقطه

مرزی $x = -2$ باید:

1 تابع پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax^2 + bx + c) = 4a - 2b + c = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - x) = (-2)^2 - (-2) = -8 + 2 = -6$$

$$4a - 2b + c = -6 \Rightarrow 4a - 2b = -10$$

2 مشتق چپ و راست برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2 \\ 2x - 1 & ; x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(-2) = -4a + b \\ f'_-(-2) = 2(-2) - 1 = -5 \end{cases}$$

$$-4a + b = -5$$

از معادلات 1 و 2 مقادیر $a = -3$ و $b = -1$ به دست می‌آیند. بنابراین:

$$f(1) = a(1) + b(1) + c = (-3) + (-1) + 4 = 0$$

379 برای این که مشتق تابع f در $x=2$ موجود باشد، باید:

1 تابع در $x=2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a}{ax+b} = \frac{a}{2a+b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 6x) = -8 + 12 = 4 = f(2)$$

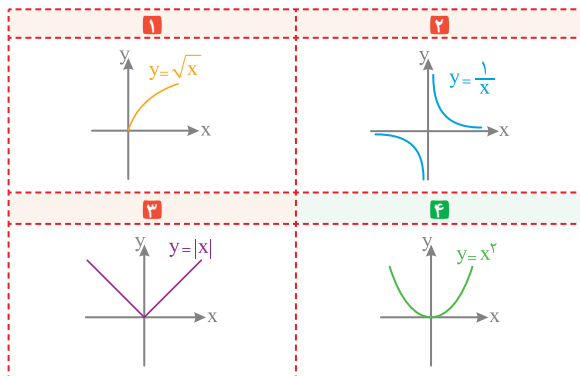
$$\frac{a}{2a+b} = 4 \Rightarrow 2a + b = 2$$

2 مشتق چپ و راست برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} & ; x > 2 \\ -2x^2 + 6 & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(2) = \frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} \\ f'_-(2) = -2(2)^2 + 6 = -6 \end{cases}$$

$$\frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} = -6 \Rightarrow \frac{-\lambda a}{(2)^2} = -6 \Rightarrow -\lambda a = -24 \Rightarrow a = 3$$

380 نمودار هریک از توابع را رسم می‌کنیم:



تابع $y = \sqrt{x}$ در $x=0$ فقط پیوستگی راست دارد، پس در این نقطه ناپیوسته

و مشتق ناپذیر است. تابع $y = \frac{1}{x}$ نیز به دلیل ناپیوستگی در مبدأ مختصات

مشتق ناپذیر است. مشتق تابع $y = |x|$ در راست و چپ نقطه $x=0$ وجود

دارد اما باهم برابر نیست پس این تابع نیز در $x=0$ مشتق ناپذیر است.

381 همه نقاط مشخص شده را بررسی می‌کنیم. تابع f :

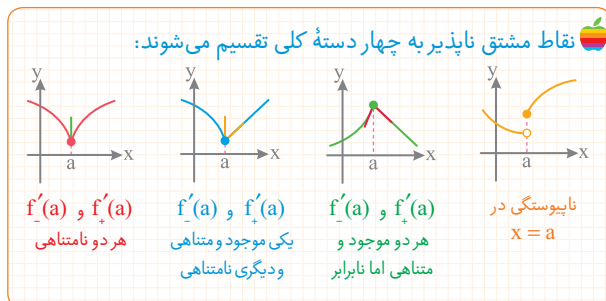
1 در $x = a$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

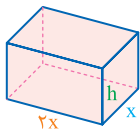
2 در $x = b$ مشتق چپ و راست هر دو نامتناهی‌اند. (نقطه بازگشتی) پس

مشتق ناپذیر است.

3 در $x = c$ شیب خط مماس موازی محور x ‌ها است، پس $f'(c) = 0$ است.

4 در $x = d$ مشتق چپ و راست موجود و متناهی اما نابرابرند (نقطه گوشه). در نتیجه مشتق ناپذیر است.





424 ۲ تابع هزینه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$C(x) = \underbrace{50(x)(2x)}_{300x^2} + \underbrace{160(2xh + 2(x)h)}_{640xh} = 300x^2 + 960xh \quad 1$$

حال از آن جایی که حجم مخزن برابر $10m^3$ است، داریم:

$$V = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2} \quad 2$$

با جای گذاری 2 در 1 تابع هزینه را بر حسب x می‌نویسیم:

$$C(x) = 300x^2 + 960x \left(\frac{5}{x^2}\right) = 300x^2 + \frac{4800}{x}$$

حال برای به دست آوردن مینیمم تابع، مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 600x - \frac{4800}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{600x^3 - 4800}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 600x^3 - 4800 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{4800}{600} = 8 \Rightarrow x = 2(m)$$

425 ۱ منظور از اتومبیل غیر برقی، بنزینی یا گازوئیلی است. بنابراین طبق

اصل ضرب تعداد انواع اتومبیل برابر است با:

حجم موتور رنگ مدل
 $4 \times 8 \times 3 \times 1 \times 2 = 192$
 غیر برقی حتماً اتومات

426 ۲ مسیرهایی که از A به B می‌توان رفت به صورت $(A \rightarrow C, C \rightarrow B)$

یا به صورت $(A \rightarrow D, D \rightarrow B)$ است. بنابراین تعداد راه‌های ممکن طبق

$$3 \times 1 + 2 \times 4 = 11$$

اصل ضرب و اصل جمع برابر است با:

427 ۱ رقم ۷ را کنار می‌گذاریم یعنی ارقام $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ را در

اختیار داریم و چون صحبتی از غیر مجاز بودن تکرار به میان نیامده بنابراین

تکرار ارقام مجاز است:

$$8 \times 9 \times 5 = 360$$

همه به جز صفر $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

428 ۳ ارقامی که در اختیار داریم $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ و رقم سمت چپ «۱»

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

نمی‌تواند باشد:

429 ۱ تعداد کل کدهای سه رقمی را به دست می‌آوریم و تعداد کدهایی که

$$6 \times 6 \times 6 - 4 \times 4 \times 4 = 152$$

هر سه رقم آن‌ها زوج است را کنار می‌گذاریم:

430 ۴ ارقام فرد عبارتند از $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ بنابراین تعداد پلاک‌ها برابر است با:

$$5 \times 4 \times 3 \times 4 \times 2 \times 1 = 480$$

431 ۱ برای طبقه اول هر یک از سه رنگ را می‌توان استفاده کرد ولی برای

سایر طبقه‌ها تنها ۲ انتخاب وجود دارد چون با طبقه قبل خود نباید هم‌رنگ

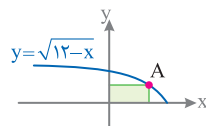
$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

باشند:

432 ۴ برای هر یک از ۳ سؤال اول، ۳ انتخاب و برای هر یک از ۲ سؤال بعدی،

$$3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 675$$

۵ انتخاب وجود دارد:



420 ۳ مطابق شکل، نقطه $A(x, \sqrt{12-x})$

یک رأس مستطیل است. بنابراین مساحت

مستطیل برابر است با: $S(x) = x\sqrt{12-x}$

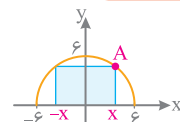
حال برای به دست آوردن بیشترین مساحت مستطیل، باید مشتق $S(x)$ را

برابر صفر قرار دهیم، اما قبل از آن بهتر است تابع مساحت را کمی ساده کنیم

و سپس مشتق بگیریم، بنابراین x را به زیر رادیکال منتقل می‌کنیم:

$$S(x) = \sqrt{12x^2 - x^3} \Rightarrow S'(x) = \frac{24x - 3x^2}{2\sqrt{12x^2 - x^3}} = 0 \Rightarrow 24x - 3x^2 = 0$$

$$x = 8 \Rightarrow S_{\max} = 8\sqrt{12-8} = 8 \times 2 = 16$$



421 ۴ معادله نیم دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۶ به

صورت $y = \sqrt{36-x^2}$ است. مطابق شکل نقطه

$A(x, \sqrt{36-x^2})$ یک رأس مستطیل است. بنابراین

$$S(x) = 2x\sqrt{36-x^2}$$

مساحت مستطیل برابر است با:

حال برای به دست آوردن بیشترین مساحت مستطیل، باید مشتق $S(x)$ را

برابر صفر قرار دهیم، اما قبل از آن بهتر است تابع مساحت را کمی ساده کنیم

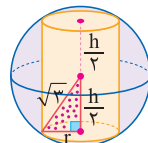
و سپس مشتق بگیریم، بنابراین x را به زیر رادیکال منتقل می‌کنیم:

$$S(x) = 2\sqrt{36x^2 - x^4} \Rightarrow S'(x) = \frac{72x - 4x^3}{\sqrt{36x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 72x - 4x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} \Rightarrow S_{\max} = 2\sqrt{18}\sqrt{36-18} = 2 \times 18 = 36$$

422 ۱ اگر ارتفاع استوانه برابر h و شعاع قاعده آن r باشد، طبق رابطه فیثاغورس

در مثلث مشخص شده داریم:



$$\left(\frac{h}{r}\right)^2 + r^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{h^2}{r^2} + r^2 = 3 \quad 1$$

از طرفی حجم استوانه برابر با $V = \pi r^2 h$ است. در فرمول حجم، به جای r^2

از رابطه 1 عبارت $3 - \frac{h^2}{r^2}$ را قرار می‌دهیم و سپس از تابع به دست آمده

نسبت به h مشتق می‌گیریم:

$$V(h) = \pi \left(3 - \frac{h^2}{r^2}\right)h = 3\pi h - \frac{\pi h^3}{r^2} \Rightarrow V'(h) = 3\pi - \frac{3\pi h^2}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3\pi - \frac{3\pi h^2}{r^2} = 0 \Rightarrow h^2 = r^2 \Rightarrow h = r$$

423 ۲ نقطه‌ای از ساحل که علی پیاده می‌شود را، D می‌نامیم. اگر x مسافت

طی شده با سرعت v و در مدت زمان t باشد، طبق رابطه $x = vt$ یا همان

$$t = \frac{x}{v} \quad \text{داریم:} \quad t_1 = \frac{PD}{v} = \frac{1}{v}\sqrt{x^2 + 9}$$

$$t_2 = \frac{BD}{v} = \frac{\lambda - x}{v} = 2 - \frac{1}{v}x$$

زمان کل رسیدن از P به B برابر با $t_1 + t_2$ یعنی $t_1 + 2 - \frac{1}{v}x$ است.

برای این که ببینیم مینیمم مطلق این تابع به ازای چه مقدار x به دست

می‌آید، معادله $t' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{x}{v\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{v} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = 1 \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$\Rightarrow 4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$



471 می‌دانیم مجموع اعداد رول شده کم‌تر از ۶ است، پس فضای نمونه

جدید برابر است با:

$$S_{\text{New}} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

در این فضای نمونه جدید، برآمدهایی که در آن‌ها یکی از اعداد رول شده ۲ است را با آبی مشخص کرده‌ایم. بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

با توجه به سؤالات مطرح شده در کنکور سال‌های گذشته، هرگاه در سؤالات احتمال شرطی از واژه‌های یکی از تاس‌ها، یکی از فرزندان، یکی از سکه‌ها، یک تاس، یک سکه، یک فرزند و... استفاده می‌شود، منظور حداقل یکی است.

472 چون می‌دانیم فرزند بزرگ‌تر دختر و فرزند کوچک‌تر پسر است، پس

فضای نمونه جدید به صورت زیر است:

$$S = \{(پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (پ, د, د), (د, د, د)\}$$

در این فضای نمونه جدید پیشامد این‌که تعداد پسرها و دخترها برابر باشد، به صورت زیر است:

$$A = \{(پ, پ, د), (د, د, پ)\}$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

473 چون می‌دانیم مهره خارج شده سبز نیست، پس باید مهره را از میان

۴ مهره قرمز و ۴ مهره آبی انتخاب کنیم. بنابراین احتمال آبی بودن مهره

$$P(A) = \frac{4}{4+4} = \frac{1}{2}$$

انتخابی برابر است با:

474 در این تیب تست‌ها وقتی $P(B|A)$ یا $P(A|B)$ داده می‌شود،

معمولاً باید آن را باز کنیم و به وسیله آن $P(A \cap B)$ را پیدا کنیم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.14$$

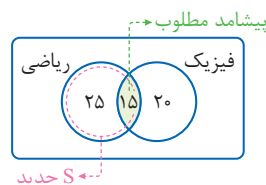
حال با معلوم شدن $P(A \cap B)$ به سراغ محاسبه $P(B'|A')$ می‌رویم:

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(A)} = \frac{1 - (0.2 + 0.22 - 0.14)}{1 - 0.2} = \frac{0.72}{0.8} = 0.9$$

475 بهتر است یک نمودار ون رسم کنیم و داده‌های مسئله را روی نمودار

مشخص کنیم، حال باید (قبولی ریاضی | قبولی فیزیک) را حساب کنیم:



$$P(A) = \frac{15}{25+15} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

جدید S

476 اگر احتمال شرکت کردن در مسابقه علمی امیر را با $P(A)$ و بهرور را

با $P(B)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$1 \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.3} = 0.5 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15$$

$$2 \quad P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.6 - 0.15}{1 - 0.3}$$

$$\Rightarrow P(A|B') = \frac{0.45}{0.7} = \frac{9}{14}$$

477 احتمال موفقیت در آزمون اول را $P(A)$ و احتمال موفقیت در آزمون

دوم را $P(B)$ در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.56$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.56 = 0.74$$

478 طبق صورت سؤال $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{1}{7}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$ است.

چون سؤال گفته حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان دهد، لذا باید $P(A \cup B)$ را به دست آوریم، با توجه به این‌که $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

پس به $P(A \cap B)$ نیاز داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{20} = \frac{28 + 20 - 7}{140} = \frac{41}{140}$$

در نتیجه:

479 احتمال رخ دادن حداقل یکی از پیشامدهای A یا B برابر با $P(A \cup B)$

است. بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A)P(B|A)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{10}\right) = \frac{10 + 8 - 3}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

480 برای تشخیص «ناسازگار بودن» یا «مستقل بودن» دو پیشامد باید

ابتدا $P(A \cap B)$ را حساب کنیم:

$$P(A \cup B) = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{0.44} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.06$$

$P(A \cap B)$ صفر نیست، پس A و B ناسازگار نیستند، یعنی A و B با هم اشتراک

دارند. حالا باید حاصل $P(A) \times P(B)$ را حساب کنیم و آن را با $P(A \cap B)$

مقایسه کنیم:

$$P(A) \times P(B) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 \Rightarrow P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

بنابراین پیشامدهای A و B مستقل اند.

481 در حالت‌هایی که دو مهره هم‌رنگ هستند، شامل هر دو قرمز یا هر

دو زرد یا هر دو سبز می‌باشند:

$$P = \underbrace{\left(\frac{4}{10} \times \frac{2}{8}\right)}_{\text{هر دو سبز}} + \underbrace{\left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{8}\right)}_{\text{هر دو قرمز}} + \underbrace{\left(\frac{2}{10} \times \frac{1}{8}\right)}_{\text{هر دو زرد}} = \frac{22}{80} = \frac{11}{40}$$

515 ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$23, 25, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 31, 33$$

بنابراین باید واریانس داده‌های قرمز رنگ را پیدا کنیم:

$$1 \quad \bar{x} = \frac{26+27+29+30}{4} = \frac{112}{4} = 28$$

$$2 \quad \sigma^2 = \frac{(26-28)^2 + (27-28)^2 + (29-28)^2 + (30-28)^2}{4}$$

$$\sigma^2 = \frac{4+1+1+4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

516 ابتدا داده‌های بین Q_1 و Q_3 را مشخص می‌کنیم:

نیمه دوم: ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸ $\Rightarrow Q_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5, Q_3 = \frac{6+7}{2} = 6.5$

داده‌های بین چارک اول و سوم عبارتند از ۲, ۳, ۵, ۶ که میانگین آن‌ها برابر $\bar{x} = \frac{2+3+5+6}{4} = 4$ است و خواهیم داشت:

$$\sigma^2 = \frac{(2-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2}{4} = \frac{4+1+1+4}{4} = 2.5$$

$$517 \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{2200}{11} - (14)^2 = 200 - 196 = 4$$

اگر در یک تست عباراتی نظیر مجذورات داده‌ها یا مجموع مربعات داده‌ها یا میانگین مساحت مربع‌ها یا ... به کار رفته بود، بهتر است واریانس را از رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$518 \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 5 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (12)^2 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = 149$$

$$519 \quad \sigma_{2x+1}^2 = 2\sigma_x^2 = 2 \times 3 = 6$$

520 مقدار داده حذف شده با میانگین برابر است، پس واریانس داده‌های جدید به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$1 \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = n\sigma^2 = 26 \times 4 = 104$$

$$2 \quad \sigma_{new}^2 = \frac{104 - 0}{26 - 1} = 4/16$$

521 میانگین داده‌های اضافه شده برابر ۲۵ است. که با میانگین داده‌ها برابر است. بنابراین:

$$1 \quad \sum_{i=1}^{18} (x_i - \bar{x})^2 = n\sigma^2 = 18 \times 3^2 = 162$$

حال مربعات انحراف از میانگین داده‌های ۲۰, ۲۷, ۲۸ را به آن‌ها اضافه می‌کنیم:

$$2 \quad \sum_{i=1}^{21} (x_i - \bar{x})^2 = 162 + (20-25)^2 + (28-25)^2 + (27-25)^2 = 200$$

بنابراین واریانس جدید داده‌ها برابر است با: $\sigma_{new}^2 = \frac{200}{21} = 9.52$

522 چون واریانس ۱۱ داده آماری برابر صفر است، پس همه آن‌ها با یکدیگر برابرند. حال فرض می‌کنیم همه داده‌ها a باشند. چون با اضافه شدن داده‌های

۱۶, ۲۴, ۲۶ میانگین تغییر نمی‌کند، پس a برابر است با میانگین این اعداد یعنی

$$a = \frac{24+16+26}{3} = 22$$

$$\sigma^2 = \frac{11 \times (22-22)^2 + (24-22)^2 + (16-22)^2 + (26-22)^2}{14}$$

$$\sigma^2 = \frac{0+4+36+16}{14} = \frac{56}{14} = 4 \Rightarrow \sigma = \sqrt{4} = 2$$

523 میانگین دو گروه از داده‌ها با هم برابر است، بنابراین:

$$\sigma^2 = \frac{n\sigma_A^2 + m\sigma_B^2}{m+n} = \frac{12 \times 12/6 + 24 \times 7/2}{36}$$

$$\sigma^2 = \frac{151/2 + 172/8}{36} = \frac{224}{36} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

اگر میانگین یک گروه m تایی و یک گروه n تایی از داده‌ها برابر واریانس آن‌ها σ_A^2 و σ_B^2 باشد، واریانس $m+n$ داده را می‌توانیم از رابطه زیر به دست آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{m\sigma_A^2 + n\sigma_B^2}{m+n}$$

$$524 \quad 2, 3, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 11, 12, 12, 13$$

بنابراین چارک اول $Q_1 = 5$ و چارک سوم $Q_3 = 11/5$ خواهد بود و در نتیجه داده‌های ۶, ۶, ۸, ۸, ۹, ۱۱ بین چارک اول و سوم قرار می‌گیرند. که برای سهولت در محاسبه واریانس از همه داده‌ها ۸ واحد کم می‌کنیم:

$$1 \quad \bar{x} - 8 = \frac{(-2) + (-2) + 0 + 0 + 1 + 3}{6} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 8$$

$$2 \quad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - 8)^2}{n} = \frac{4+4+0+0+1+9}{6} = 3 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3}$$

$$3 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1/7}{8} = 0.021$$

$$1 \quad CV_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{CV_2}{CV_1} = \frac{2\sigma}{\sigma} = \frac{24}{12} = \frac{2}{1}$$

$$2 \quad CV_2 = \frac{2\sigma}{2 \times 12 + 3} = \frac{2\sigma}{27}$$

526 می‌دانیم هرچه جامعه‌ای ضریب تغییرات کمتری داشته باشد، عملکرد و دقت کاری بالاتری خواهد داشت. پس:

$$1 \quad CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\sqrt{25}}{10} = \frac{1}{2}$$

دومی بهتر از اولی $\Rightarrow CV_1 > CV_2$

$$2 \quad CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{\sqrt{16}}{12} = \frac{1}{3}$$





595 $\sqrt{2}$ اولاً چون دو خط موازی اند، پس شیب‌های برابر دارند:

$$\begin{cases} d_1: 2y - x = 7 \xrightarrow{-x} 4y - 2x = 14 \\ d_2: 4y - ax = 2 \end{cases} \rightarrow a = 2$$

ضرایب x در دو معادله باید با هم برابر باشد

سیس فاصله دو خط را، که همان قطر دایره است، به دست می‌آوریم:

$$2r = \frac{|14 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{20}} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت دایره برابر است با:

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = \pi \left(\frac{9}{5}\right) = 1.8\pi$$

فاصله دو خط موازی $ax + by = c$ و $ax + by = c'$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

596 فاصله نقطه A از ضلع برابر نصف طول ضلع است:

$$AH = \frac{|3 - 2(-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{a}{2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = 4\sqrt{5} \Rightarrow S = a^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$$

597 چون شیب خط‌های $x + 2y - 6 = 0$ و $2x - y - 7 = 0$ عکس و

قرینه یکدیگر است، پس دو ضلع داده شده مجاورند. از طرفی رأس $A(8, 5)$ روی این خط‌ها قرار ندارد، پس فاصله نقطه A از این دو ضلع برابر اندازه طول

عرض مستطیل است:

$$AH_1 = \frac{|2(8) - 5 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$AH_2 = \frac{|8 + 2(5) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

پس مساحت مربع برابر است با:

$$S = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9.6$$

598 با فرض این که طول نقطه B برابر a است، داریم:

$$x = a \xrightarrow{\text{نیمساز ربع دوم}} y = -x \rightarrow B(a, -a)$$

پس طول پاره خط AB برابر است با:

$$\sqrt{(a-1)^2 + (-a-0)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \underbrace{a^2 - 2a + 1}_{a^2 - a - 2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

پس فاصله هر دو نقطه $(-1, 1)$ و $(2, -2)$ از نقطه $A(1, 0)$ برابر با $\sqrt{5}$ است. دقت کنید نقطه $(2, -2)$ روی نیمساز ربع چهارم قرار دارد و در نتیجه قابل قبول نیست.

599 نقطه $M(x, y)$ را روی عمودمنصف پاره خط AB به عنوان نماینده

همه نقاط عمودمنصف در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است. بنابراین:

$$AM = BM \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+2)^2}$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4$$

$$\rightarrow 6x - 10y = 22 \Rightarrow d: 3x - 5y = 11$$

600 می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع این زاویه به یک

فاصله است. بنابراین اگر نقطه $M(x, y)$ روی نیمساز باشد خواهیم داشت:

$$\frac{|2x + 3y - 2|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|3x + 2y - 8|}{\sqrt{9+4}} \Rightarrow 2x + 3y - 2 = \pm(3x + 2y - 8)$$

$$\begin{cases} d_1: 2x + 3y - 2 = 3x + 2y - 8 \Rightarrow d_1: x - y = 6 \\ d_2: 2x + 3y - 2 = -3x - 2y + 8 \Rightarrow d_2: x + y = 2 \end{cases}$$

d_1 و d_2 نیمسازهای دو زاویه حاصل از تقاطع دو خط داده شده هستند که معادله خط d_1 در \square آمده است.

601 تعداد پرتقال در بالاترین ردیف 1 و در ردیف بعدی 2×2 و در ردیف

بعدی 3×3 و ... و در ردیف آخر 10×10 است. بنابراین تعداد آن‌ها برابر است با:

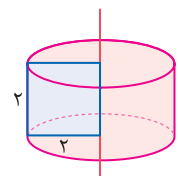
$$1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 5 \times 11 \times 7 = 385$$

602 باید مساحت بین دو دایره، به شعاع‌های 4 و 1 را پیدا کنیم:

$$s = \pi(4)^2 - \pi(1)^2 = 16\pi - \pi = 15\pi$$

603 مطابق شکل از دوران یک مربع به ضلع

2 حول یک ضلع، استوانه‌ای به شعاع قاعده 2 و ارتفاع 2 حاصل می‌شود:



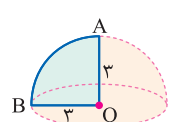
604 مثلث به اضلاع 3، 4، 5 مثلثی قائم

الزاویه است و از دوران آن حول ضلع به طول 4، یک مخروط به ارتفاع 4 و شعاع قاعده 3 به دست می‌آید و حجم آن برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$$

605 از دوران ربع دایره حول یکی از شعاع‌ها،

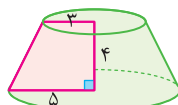
نیم‌کره به وجود می‌آید و حجم آن برابر است با:



$$V = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3} \pi R^3\right) = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \times 3^3 = 18\pi$$

606 جسم حاصل یک مخروط ناقص مطابق

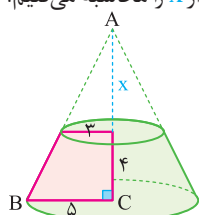
شکل مقابل است:



حال با کمک تالس جزء به جزء در مثلث ABC مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{3}{5} \Rightarrow \underbrace{5x = 3x + 12}_{2x=12} \Rightarrow x = 6$$

حال حجم مخروط کوچک با ارتفاع 6 را از حجم مخروط بزرگ با ارتفاع 10 کم می‌کنیم تا حجم مخروط ناقص به دست‌آید:



$$V = \left(\frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 10\right) - \left(\frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 6\right) = \frac{250\pi}{3} - \frac{54\pi}{3} = \frac{196\pi}{3}$$