ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

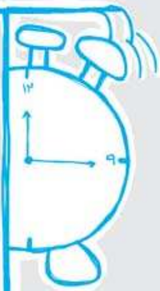
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. آزمون‌های شمارهٔ ۹، ۱۰ و ۱۱ به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۹۸، شهریور ۹۸ و دی ۹۷ است.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۳) نیاز دارید، تنها در ۱۴ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

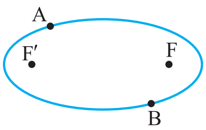
بارم‌بندی درس هندسه (۳)

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
فصل اول		۱۰	۴
فصل دوم	تا صفحهٔ ۴۶	۱۰	۳
	بعد از صفحهٔ ۴۶	–	۵
فصل سوم		–	۸
جمع		۲۰	۲۰

هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک	مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه	kheilisabz.com
	آزمون شمارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم	

ردیف	سؤال	راهنما	نمره
	فصل اول		
۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه .... = $(A^{-1})^{-1}$.		۰/۲۵
۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر A ، B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$. ب) اتحادهای جبری دربارهٔ ماتریس‌ها برقرار هستند. پ) ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر است. ت) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $\|BA\|=\|AB\|=\|A\|\|B\|$.		۱
۳	ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij}=2i+3j$ را به صورت آرایهٔ مستطیلی بنویسید. سپس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی را بیابید.	با توجه به سطر و ستون باید اعداد داخل ماتریس را مشخص کنی.	۱
۴	اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ ، نشان دهید: $A^2-4A-5I_3=\bar{O}$.	حواست باشه I_3 یعنی $I_{3\times 3}$.	۱/۵
۵	دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\bar{O}$ و $B\neq\bar{O}$ ولی $AB=\bar{O}$.	دقت کن که باید تمام درایه‌های ماتریس AB، صفر شوند.	۱/۵
۶	اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر از مرتبهٔ ۲×۲ باشد و $\|A\|=-2$ ، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید. $\|A^4\|-4\|A^{-1}\|+3$	دقت کن ضریب ۴ بیرون از دترمینان است ولی توان ۴ داخل دترمینان.	۱
۷	اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت $5A^{-1}+B^{-1}$ را به دست آورید.	ضریب ۵ فقط برای A^{-1} است.	۱/۲۵
۸	دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & -2\end{bmatrix}$ را یک بار به روش ساروس و یک بار برحسب ستون اول محاسبه کنید.	حواست باشه حاصل دترمینان از هر دو روش باید یکسان شود.	۱/۵
۹	مقدار a را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases}2x+3y=4\\ ax-y=2a\end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد.	بی‌شمار جواب برای دستگاه، یعنی منطبق‌بودن دو خط.	۱
	فصل دوم		
۱۰	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر .... ب) رابطهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر .... پ) اگر در معادلهٔ تقاطع خط و دایره داشته باشیم $\Delta>0$ ، آن‌گاه خط و دایره		۰/۷۵
۱۱	یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P عمود بر محور رویهٔ مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید.	دقت کن که صفحهٔ P از رأس مخروط نگذشته.	۰/۷۵
۱۲	مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ ثابت ۱ واحد باشند.»	خط L از طرفین نامحدود است.	۰/۷۵
۱۳	خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ L واحد باشد. (در تعداد جواب‌ها بحث کنید.)		۱/۵
۱۴	الف) دایره به معادلهٔ $4(x-1)^2+(2y+1)^2=1$ را رسم کنید. ب) مساحت این دایره چه‌قدر است؟	برای محاسبهٔ مساحت دایره فقط به شعاع نیاز داری.	۱/۵
۱۵	به روش مربع کامل کردن، شعاع و مرکز دایرهٔ $x^2+y^2+2x-4y=0$ را بیابید.	راه‌حل تشریحی لازمه نه استفاده از فرمول.	۱/۵

ردیف	آزمون شماره ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره
۱۶	مقدار a را چنان بیابید که خط $y + ۳x = a$ بر دایرهٔ $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + y = ۰$ مماس باشد.	*به ضریب ۲ برای $x^۲$ و $y^۲$ دقت کن.*	۱/۵
۱۷	وضعیت دو دایرهٔ روبه‌رو را نسبت به هم بررسی کنید.	$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۱ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y + ۱ = ۰ \end{cases}$	۱/۷۵
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

ردیف	آزمون شمارهٔ ۹ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم - نهایی خرداد ۹۸	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) شرط لازم و کافی برای این‌که ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A .... باشد. ب) مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک .... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد. پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک .... می‌شود. ت) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر .... است.	۱
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم، $AB = AC$ ، آن‌گاه لزوماً $B = C$ است. ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (l) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، فصل‌مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود. پ) نقطهٔ $A = (۲,-۳,۰)$ روی صفحهٔ xoy قرار دارد.	۰/۷۵
۳	اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\|A^۳\|$ را محاسبه کنید.	۱
۴	در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳x & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ مقدار x را بیابید.	۱/۲۵
۵	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + ۳y = -۳ \\ ۴x + (m+۴)y = ۲ \end{cases}$ جواب <u>نداشته باشد</u>.	۱/۲۵
۶	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x + ۳y = -۵$ بر آن مماس باشد.	۱/۵
۷	در نقطهٔ $A = (۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳$ مماسی رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.	۱
۸	اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصلهٔ کانونی آن را به دست آورید.	۱/۵
۹	دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF' = BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند. 	۱/۲۵
۱۰	سهمی $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ مفروض است. الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید. ب) نمودار آن را رسم کنید.	۲
۱۱	به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A = (۲,۳,۴)$ بگذرد و با صفحهٔ xoy موازی باشد. ب) معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟ پ) در فضای $\mathbb{R}^۳$، نقطهٔ A به طول ۲ روی محور طول‌ها و نقطهٔ $B = (-۴,۶,-۳)$ مفروض‌اند، مختصات وسط AB را بیابید.	۱/۵
۱۲	اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (۱,۲,۱)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - ۲\vec{b}$ را به دست آورید.	۱
۱۳	بردارهای $\vec{a} = (۱,-۳,۲)$ و $\vec{b} = (-۲,۱,-۵)$ را در نظر بگیرید. الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.	۱/۷۵
۱۴	ثابت کنید: دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.	۱
۱۵	مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (۱,m,-۱۱)$ ، $\vec{b} = (۲,۳,-۱)$ و $\vec{c} = (۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند.	۱
۱۶	اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b} = ۱۲$ باشد، مساحت مثلث بناشده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.	۱/۲۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- A

۲- الف) درست. خاصیت توزیع‌پذیری در ماتریس‌ها برقرار است.

ب) نادرست. زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. در نتیجه اتحادهای جبری برقرار نیستند.

پ) نادرست. زیرا $|A|=۱۲-۱۲=۰$. می‌دانیم شرط وارون‌پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A|\neq ۰$ باشد.

ت) درست. دترمینان روی ضرب ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باز می‌شود.

۳- i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است. $۱\leq i,j\leq ۳$.

$a_{۱۱}=۲(۱)+۳(۱)=۵$ $\qquad a_{۱۲}=۲(۱)+۳(۲)=۸$

$a_{۱۳}=۲(۱)+۳(۳)=۱۱$ $\qquad a_{۲۱}=۲(۲)+۳(۱)=۷$

$a_{۲۲}=۲(۲)+۳(۲)=۱۰$ $\qquad a_{۲۳}=۲(۲)+۳(۳)=۱۳$

$a_{۳۱}=۲(۳)+۳(۱)=۹$ $\qquad a_{۳۲}=۲(۳)+۳(۲)=۱۲$

$a_{۳۳}=۲(۳)+۳(۳)=۱۵$

در نتیجه ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix}۵&۸&۱۱\\۷&۱۰&۱۳\\۹&۱۲&۱۵\end{bmatrix}$ خواهد بود. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی یعنی:

$$a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}=۵+۱۰+۱۵=۳۰$$

۴- $A^۲$ یعنی A را دو بار در خودش ضرب کنیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}$$

۴A یعنی عدد ۴ را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$۴A=۴\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}$$

$I_۳$ ماتریس همانی مرتبهٔ ۳×۳، $\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ است و $۵I_۳$ برابر است با $\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}$

در نتیجه:

$$A^۲-۴A-۵I_۳=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}$$

اگر عملیات تفریق را روی درایه‌های نظیر به نظیر انجام دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A^۲-۴A-۵I_۳=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{o}$$

۵- برای دو ماتریس غیرصفر $A=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}$، حاصل‌ضرب AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۲&-۳&-۵\\-۱&۴&۵\\۱&-۳&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۳&۵\\۱&-۳&-۵\\-۱&۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{o}$$

یعنی از حاصل‌ضرب دو ماتریس غیرصفر، امکان دارد به ماتریس صفر برسیم.

۶- می‌دانیم توان از دترمینان خارج می‌شود، یعنی $|A^۴|=|A|^۴$. همچنین $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$

در نتیجه: $|A^۴|-۴|A^{-۱}|+۳=|A|^۴-۴\times\frac{۱}{|A|}+۳$

$$=(-۲)^۴-۴\times\frac{۱}{-۲}+۳=۱۶+۲+۳=۲۱$$

۷-

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۳-(-۲)=۵\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}\Rightarrow ۵A^{-۱}=\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۱&۱\\۳&۴\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=۴-۳=۱\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۴&-۱\\-۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۱\\-۳&۱\end{bmatrix}$$

$$۵A^{-۱}+B^{-۱}=\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴&-۱\\-۳&۱\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{درایه‌ها}]{\text{جمع نظیر به نظیر}}\begin{bmatrix}۷&-۳\\-۲&۲\end{bmatrix}$$

۸- ساروس:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}۱&۵&۷&۱&۵\\۲&-۱&۳&۲&-۱\\۴&۵&-۲&۴&۵\end{array}\right.$$

$$=(+۲+۶۰+۷۰)-(-۲۸+۱۵-۲۰)=۱۳۲-(-۳۳)=۱۳۲+۳۳=۱۶۵$$

بسط ستون اول:

$$|A|=۱\times(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}-۱&۳\\۵&-۲\end{vmatrix}+۲\times(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix}۵&۷\\۵&-۲\end{vmatrix}+۴\times(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix}۵&۷\\-۱&۳\end{vmatrix}$$

$$=۱(۲-۱۵)-۲(-۱۰-۳۵)+۴(۱۵+۷)=-۱۳+۹۰+۸۸=۱۶۵$$

۹- برای این‌که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید نسبت ضرایب با هم برابر باشند یعنی:

$$\frac{۲}{a}=\frac{۳}{-۱}=\frac{۴}{۲a}$$

از حل تناسب اول داریم: $۳a=-۲\Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}$

با جای‌گذاری $a=-\frac{۲}{۳}$ هر سه کسر با هم برابرند.

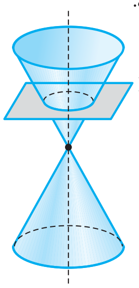
$$\frac{۲}{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{-۱}=\frac{۴}{۲(-\frac{۲}{۳})}\Rightarrow -۳=-۳=-۳$$

بنابراین به ازای $a=-\frac{۲}{۳}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

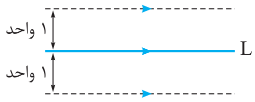
۱۰- الف) از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

ب) $a^۲+b^۲>۴c$ $\qquad$ پ) در دو نقطه متقاطع‌اند.

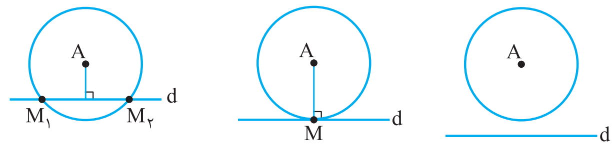
۱۱- دایره



۱۲- دو خط موازی با خط L و به فاصلهٔ ۱ واحد از آن‌که در دو طرف خط L هستند.



۱۳- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم L باشد دایره‌ای به مرکز A و شعاع L است. اگر این دایره خط d را در دو نقطه قطع کند، آن دو نقطه، نقطه‌های مطلوب هستند و مسئله دارای دو جواب است. اگر این دایره بر خط d مماس باشد، نقطهٔ تماس، نقطهٔ مطلوب است و مسئله دارای یک جواب است. اگر این دایره، خط d را قطع نکند، مسئله دارای جواب نیست.

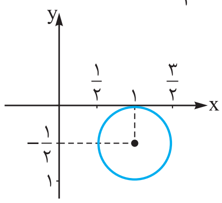


(مسئله جواب ندارد.) (M تنها جواب مسئله است.) (M_1 و M_2 دو جواب مسئله هستند.)

۱۴- الف) ابتدا معادلهٔ دایره را استاندارد می‌کنیم، در پرانتز دوم از ضریب y فاکتور می‌گیریم:

$$۴(x-۱)^۲+۴(y+\frac{۱}{۲})^۲=۱ \xrightarrow{\div ۴} (x-۱)^۲+(y+\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

ریشهٔ داخل پرانتزها، مرکز دایره را تشکیل می‌دهند و جذر مقدار ثابت، همان شعاع دایره خواهد بود.



$$O(۱,-\frac{۱}{۲}) \quad , \quad R=\frac{۱}{۲}$$

ب) $$S_{\text{دایره}}=\pi R^۲=\pi(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{\pi}{۴}$$

۱۵- x ها را کنار هم و y ها را کنار هم قرار می‌دهیم. سپس هر پرانتز را مربع کامل می‌کنیم:

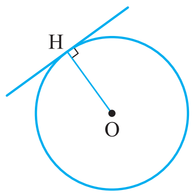
$$(x^۲+۲x)+(y^۲-۴y)=۰ \Rightarrow (\underbrace{x^۲+۲x+۱}_{\text{اتحاد}}-۱)+(\underbrace{y^۲-۴y+۴}_{\text{اتحاد}}-۴)=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲-۱+(y-۲)^۲-۴=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۵$$

ریشهٔ داخل پرانتزها مرکز و جذر مقدار ثابت، شعاع دایره است.

$$\left.\begin{array}{l} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ y-۲=۰ \Rightarrow y=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow O(-۱,۲) \quad , \quad R=\sqrt{۵}$$

۱۶- برای این‌که خط بر دایره مماس شود، باید فاصلهٔ خط تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، یعنی $OH=R$.



$$۲x^۲+۲y^۲-۳x+y=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}y=۰$$

$$O=(-\frac{-\frac{۳}{۲}}{۲},-\frac{\frac{۱}{۲}}{۲})=(\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۴}) \quad , \quad R=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}-۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

$$OH=\text{فاصلهٔ مرکز دایره تا خط}=\frac{|۳(\frac{۳}{۴})-\frac{۱}{۴}-a|}{\sqrt{۹+۱}}=\frac{|۲-a|}{\sqrt{۱۰}}$$

باید $\frac{|۲-a|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$، پس: $|۲-a|=\frac{۱۰}{۴}$؛ در نتیجه $|۲-a|=\frac{۵}{۲}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲-a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \\ ۲-a=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow a=\frac{۹}{۲} \end{cases}$$

۱۷- ابتدا باید مرکز و شعاع دو دایره را مشخص کنیم. در دایرهٔ اول:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱=۰$$

قرینهٔ نصف ضریب x و ضریب y مرکز را تشکیل می‌دهند:

$$O=(-\frac{(-۲)}{۲},-\frac{۴}{۲})=(۱,-۲)$$

همچنین شعاع دایرهٔ اول برابر است با: $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۴}=\sqrt{۶}$

برای دایرهٔ دوم نیز داریم: $O'(-\frac{۴}{۲},-\frac{۲}{۲})=(-۲,-۱)$

$$R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴-۴}=۲$$

اکنون طول پاره‌خط OO' را محاسبه می‌کنیم:

$$OO'=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

چون $\sqrt{۶}-۲<\overbrace{OO'}^{\sqrt{۱۰}}<۲+\sqrt{۶}$ است پس دو دایره متقاطع‌اند.

$$\Rightarrow m(m+۴)=۱۲ \Rightarrow m^{۲}+۴m-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (m+۶)(m-۲)=۰ \Rightarrow m=-۶, m=+۲$$

به ازای □ = −۶ داریم: $\frac{-۶}{۴}=\frac{۳}{-۲}=\frac{-۳}{۲}$

هر سه کسر برابرند. پس □ = −۶ غیرقابل‌قبول است.

به ازای □ = ۲ داریم: $\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۶}\neq\frac{-۳}{۲}$

۶- محل برخورد دو قطر، مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲, y=-۱$$

در نتیجه $O(۲,-۱)$ مرکز دایره است.

فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس نیز شعاع دایره است.

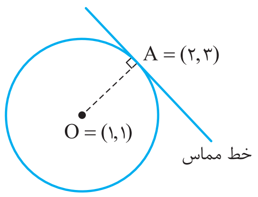
$$r=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}}=\frac{|۸-۳+۵|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$\begin{cases} O=(۲,-۱) \\ r=۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴$$

۷- ابتدا مرکز دایره را پیدا می‌کنیم. $O=(۱,۱)$

برای فهم بیشتر به شکل مقابل دقت کنید.

معادلهٔ خط مماس را از ما می‌خواهند. باید شیب پاره‌خط OA را بیابیم. چون شعاع و خط مماس در نقطهٔ تماس بر هم عمودند پس شیب پاره‌خط OA را معکوس و قرینه می‌کنیم تا شیب خط مماس حاصل شود.



$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲ \Rightarrow m_{\text{خط مماس}}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ خط مماس}} y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$$

$$\Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۴$$

۸- طبق فرض: $\text{خروج از مرکز}=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow c=\frac{۳a}{۵}$

$\text{قطر کوچک}=۲□=۱۶ \Rightarrow □=۸$

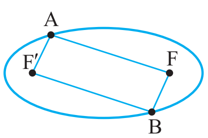
از طرفی در بیضی رابطهٔ $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$ برقرار است.

$$\Rightarrow a^{۲}=۸^{۲}+(\frac{۳a}{۵})^{۲} \Rightarrow a^{۲}=۶۴+\frac{۹a^{۲}}{۲۵} \Rightarrow a^{۲}-\frac{۹a^{۲}}{۲۵}=۶۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶a^{۲}}{۲۵}=۶۴ \Rightarrow a^{۲}=\frac{۶۴\times ۲۵}{۱۶} \Rightarrow a=۱۰ \Rightarrow c=۶$$

$$\Rightarrow \text{قطر بزرگ}=۲a=۲۰ \ , \ \text{فاصلهٔ کانونی}=۲c=۱۲$$

۹- نقاط A و □ را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم.



نقطهٔ A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی:

$AF+AF'=۲a \ (۱)$

نقطهٔ □ روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی:

$BF+BF'=۲a \ (۲)$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF'=BF)$ نتیجه می‌شود: $AF=BF'$

بنابراین در چهارضلعی $AFBF'$ اضلاع روبه‌رو دوبه‌دو برابرند. پس چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است. می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند در نتیجه: $AF \parallel BF'$

۱۰- الف) ابتدا سهمی را مربع کامل می‌کنیم (توجه کنید که چون $y^{۲}$ داریم، سهمی افقی است.) $y^{۲}-۲y+۱-۱+۸x+۹=۰$

$$\Rightarrow (y^{۲}-۲y+۱)+۸x+۸=۰ \Rightarrow (y-۱)^{۲}=-۸x-۸$$

$$\Rightarrow (y-۱)^{۲}=-۸(x+۱)$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) $|A|\neq ۰$ یا مخالف صفر   ب) ویژگی مشترک

پ) دایره   ت) صفر یا $\vec{a}.\vec{b}=۰$

۲- الف) نادرست. زیرا قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها لزوماً برقرار نیست.

ب) درست   پ) درست

۳- ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم.

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۳ & ۴ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۰ & ۱ \end{array}\right| \overset{\text{ساروس}}{=} (۸+۰+۰)-(۰+۶+۰)=۸-۶=۲$$

$$|A^{۳}|=|A|^{۳}=۲^{۳}=۸$$

۴- ابتدا حاصل $\begin{bmatrix} ۳x & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۳x & ۲ \end{bmatrix}_{۱\times \cancel{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}_{\cancel{۲}\times ۲}=\begin{bmatrix} ۳x-۶ & -۶x+۱۲ \end{bmatrix}_{۱\times ۲}$$

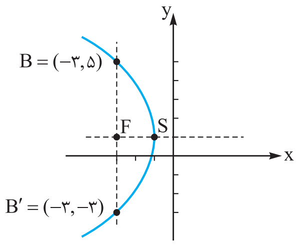
اکنون حاصل را در $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم. $\begin{bmatrix} ۳x-۶ & -۶x+۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$

$$\Rightarrow -۳x+۶-۶x+۱۲=۰ \Rightarrow -۹x=-۱۸ \Rightarrow x=۲$$

۵- شرط جواب نداشتن: $\underbrace{\frac{□}{۴}=\frac{۳}{□+۴}}_{\text{طرفین‌وسطین}}\neq\frac{-۳}{۲}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{رأس}\ S=(-۱,۱) \\ ۴a=-۸ \Rightarrow a=-۲<۰ \Rightarrow \text{دهانهٔ سهمی به سمت چپ است.} \\ \text{کانون}\ F=(h+a,k)=(-۱-۲,۱)=(-۳,۱) \\ \text{خط هادی}: x=h-a=-۱+۲=۱ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

ب)



۱۱- الف) معادلهٔ صفحهٔ x□y، □=۰ است. پس معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از A و موازی □=۰، برابر □=۴ است.

ب) محور yها

پ) نقطهٔ $A=(۲,۰,۰)$ و مختصات وسط A□ برابر است با:

$$M=(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲})$$

$$=(\frac{۲-۴}{۲},\frac{۰+۶}{۲},\frac{۰-۳}{۲})=(-۱,۳,\frac{-۳}{۲})$$

۱۲- $\vec{a}-۲\vec{b}=(۲,۰,-۱)-(۲,۴,۲)=(۰,-۴,-۳)$

$$|\vec{a}-۲\vec{b}|=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

۱۳- الف) $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{-۲-۳-۱۰}{۴+۱+۲۵}(-۲,۱,-۵)$

$$=\frac{-۱}{۲}(-۲,۱,-۵)=(۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$$

ب) بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{b}\times\vec{a}$ جواب مسئله است:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۱,-۳,۲)\times(-۲,۱,-۵)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&-۳&۲\\ -۲&۱&-۵\end{vmatrix}=(۱۳,۱,-۵)$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(-۲,۱,-۵)\times(۱,-۳,۲)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ -۲&۱&-۵\\ ۱&-۳&۲\end{vmatrix}=(-۱۳,-۱,۵)$$

۱۴- $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{o}|$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\times\sin\theta=۰ \xleftrightarrow{|\vec{a}|\neq۰,|\vec{b}|\neq۰} \sin\theta=۰$$

$$\Leftrightarrow \theta=۰ \text{ یا } \theta=\pi \Leftrightarrow \vec{a}\,||\,\vec{b}$$

۱۵- شرط هم‌صفحه‌بودن سه بردار آن است که $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$.

$$\vec{b}\times\vec{c}=(۲,۳,-۱)\times(۱,-۱,۳)=\begin{vmatrix}i&j&k\\ ۲&۳&-۱\\ ۱&-۱&۳\end{vmatrix}=(۸,-۷,-۵)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$$

$$\Rightarrow (۱,m,-۱۱).(۸,-۷,-۵)=۸-۷m+۵۵=۰ \Rightarrow m=۹$$

۱۶- روش اول: $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳}$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

روش دوم: $|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲$

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(۱۲)^۲=(۴)^۲(۶)^۲ \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|^۲=۵۷۶-۱۴۴=۴۳۲$$

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۴۳۲} \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=۱۲\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=۶\sqrt{۳}$

درس نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: ماتریس و کاربرد

درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، □، □ و ... نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$B=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ \sqrt{۲} & ۰/۵\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۵\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}-۲\\ ۰\\ \sqrt{۳}\end{bmatrix}$$

تعریف مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم «A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ است». مثلاً ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۳\\ ۵ & \sqrt{۲}\end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳ سطری و ۲ ستونی است، بنابراین مرتبه‌اش ۳×۲ است.

تذکر: نمایش کلی ماتریس A به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است، که a_{ij}ها درایهٔ واقع در سطر i و ستون j هستند. m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها می‌باشد.

مثلاً:

$$A_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}$$

$$A_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{bmatrix}\qquad A_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=۲i-j$ تعریف شده است. ماتریس A را با درایه‌هایش بنویسید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{bmatrix}$$

برای درایهٔ $a_{۱۱}$ داریم: $i=۱, j=۱$ پس: $a_{۱۱}=۲(۱)-۱=۱$

برای درایهٔ $a_{۱۲}$ داریم: $i=۱, j=۲$ پس: $a_{۱۲}=۲(۱)-۲=۰$

و به همین ترتیب: $a_{۲۱}=۲(۲)-۱=۳$ ، $a_{۱۳}=۲(۱)-۳=-۱$

$a_{۲۳}=۲(۲)-۳=۱$ ، $a_{۲۲}=۲(۲)-۲=۲$

در نتیجه ماتریس A به صورت مقابل است: $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$

معرفی چند ماتریس خاص

۱ **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. مانند $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۱\end{bmatrix}_{۱\times ۳}$.

۲ **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مانند $A=\begin{bmatrix}-\sqrt{۲}\\ ۳\\ ۱\end{bmatrix}_{۳\times ۱}$.

۳ **ماتریس مربعی:** ماتریسی که تعداد سطرهای آن با تعداد ستون‌های آن برابر باشد را ماتریس مربعی مرتبهٔ n می‌نامیم. مانند $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ یا $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۷ & ۸ & ۹\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$.

نکته: در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که سطر و ستون برابر دارند $(a_{۱۱}, a_{۲۲}, a_{۳۳}, \ldots)$ را قطر اصلی ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس‌های مربعی بالا، به‌ترتیب قطرهای اصلی $\begin{matrix}۲ & \\ & ۱\end{matrix}$ و $\begin{matrix}۱ & & \\ & ۵ & \\ & & ۹\end{matrix}$ هستند.

۴ **ماتریس قطری:** ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند (درایه‌های روی قطر اصلی دلخواه هستند) را ماتریس قطری می‌نامیم. مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۲\end{bmatrix}_{۳\times ۳}\qquad A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

۵ **ماتریس اسکالر:** ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامیم. مانند:

$$A=\begin{bmatrix}-۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۵\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

نکتهٔ مهم: در حالت خاص اگر درایه‌های روی قطر اصلی همه برابر ۱ باشند، آن ماتریس را همانی نامیده و با I نشان می‌دهیم.

$$I_{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times ۳}\qquad I_{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

۶ **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. مانند: $\bar{O}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند، یعنی برای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$ باشد.

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & ۲+b\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱-b & ۱\\ a+b & -۱\end{bmatrix}$ با هم برابر باشند.

پاسخ: هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۲ هستند (پس هم‌مرتبه‌اند). اکنون باید درایه‌های نظیربه‌نظیر را برابر هم قرار دهیم:

$$\left\{\begin{matrix}۱-b=a \Rightarrow a+b=۱\\ ۱=۲+b \Rightarrow b=-۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=۲$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع و تفریق دو ماتریس اولاً باید دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، ثانیاً: درایه‌ها را نظیربه‌نظیر با هم جمع یا تفریق می‌کنیم. مانند:

$$\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۰\\ ۱ & ۳ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۱\\ ۲ & -۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۱\\ ۳ & ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد حقیقی□ و ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب عدد□ در ماتریس A را با نماد rA نمایش می‌دهیم که□ در همهٔ درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود.

$$rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $2A+3B$ را به دست آورید.

پاسخ: عدد ۲ را در تمام درایه‌های ماتریس A و عدد ۳ را در تمام درایه‌های ماتریس □ ضرب می‌کنیم.

$$2A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix} \qquad 3\square=\begin{bmatrix}9 & 0\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

$$2A+3B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 0\\ -3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A_{m\times n}$، آن‌گاه قرینهٔ ماتریس A، از ضرب عدد ۱− در ماتریس A به وجود می‌آید و آن را با $-A$ نمایش می‌دهیم.

توجه شود که $A+(-A)=\bar{O}$.

تذکر: به کمک قرینهٔ یک ماتریس می‌توان تفاضل دو ماتریس را به صورت زیر تعریف کرد:

$$A-B=A+(-B)$$

خواص جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A و □ و C سه ماتریس هم‌مرتبهٔ $m\times n$ بوده،□ و□ دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی جمع)

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (عضو قرینه)

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۷) $A=B \Rightarrow rA=rB$

۸) $\begin{cases}rA=rB\\ r\neq 0\end{cases} \Rightarrow A=B$

اثبات خاصیت‌های (۵) و (۶):

اثبات (۵): فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$.

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r([a_{ij}\pm b_{ij}])=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]$$

$$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]=rA\pm rB$$

اثبات (۶): فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]$.

$$(r\pm s)A=(r\pm s)[a_{ij}]=[(r\pm s)a_{ij}]=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[sa_{ij}]$$

$$=r[a_{ij}]\pm s[a_{ij}]=rA\pm sA$$

ضرب ماتریس‌ها: دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ را در نظر می‌گیریم.

حاصل‌ضرب A در □، یعنی A□ زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای □ برابر باشد. آن‌گاه ماتریس A□ از مرتبهٔ $m\times p$ است. نکتهٔ مهم این‌که، برای پیداکردن درایهٔ سطر i و ستون j از حاصل‌ضرب A□، باید درایه‌های سطر iام ماتریس A را نظیربه‌نظیر در درایه‌های ستون jام ماتریس □ ضرب کنیم.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ ماتریس BA را محاسبه کنید.

پاسخ: تعداد ستون‌های □ (۳تا) با تعداد سطرهای A (۳تا) برابر است، پس ضرب A□ تعریف شده است. برای محاسبهٔ ماتریس A□، باید سطرهای □ را در ستون‌های A ضرب کنیم:

$$BA=\begin{bmatrix}\boxed{1 \quad 0 \quad 2}\\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 3}\end{bmatrix}_{2\times\cancel{3}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}_{\cancel{3}\times 3}=\begin{bmatrix}7 & -5 & 2\\ 8 & -5 & 3\end{bmatrix}_{2\times\cancel{3}}$$

مثلاً درایهٔ سطر اول و ستون اول A□ به صورت زیر محاسبه شده است:

$$1\times 1+0\times 2+2\times 3=7$$

تذکر: توجه شود که در مثال بالا ماتریس A□ تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های A (۳تا) با تعداد سطرهای □ (۲تا) برابر نیست.

سه خاصیت مهم ضرب ماتریس‌ها

۱) ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی: $A\times B\neq B\times A$

اما در حالت خاص ضرب ماتریس I (همانی) در هر ماتریس مربعی دلخواه (با شرط هم‌مرتبه بودن با I) خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی: $A\times I=I\times A=A$

در واقع ماتریس همانی I، در عملیات ضرب ماتریس‌ها عضو خنثی است.

۲) ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

۳) ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

دو نکتهٔ مهم دربارهٔ ضرب ماتریس‌ها

۱) اگر A و □ دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند و $AB=\bar{O}$، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$. به بیان دیگر می‌توان دو ماتریس ناصفر A و □ یافت، به طوری که ضرب آن‌ها برابر ماتریس صفر شود.

مثال: دو ماتریس ناصفر ۲×۲ مثال بزنید که ضرب آن‌ها ماتریس صفر شود.

پاسخ: اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ و $\square=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$، آن‌گاه A□ برابر است با:

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\bar{O}$$

۲) قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

مثلاً اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$، $\square=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$،

آن‌گاه $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ و $AC=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ اما $B\neq C$.

تذکر: **توان در ماتریس:** منظور از ماتریس A^n این است که ماتریس A را n بار در خودش ضرب کنیم. طبیعی است ماتریسی قابل ضرب‌کردن در خودش است که مربعی باشد. پس توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.

$$A^2=A\times A$$

$$A^3=A\times A\times A$$

$$\vdots$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^2-2A را بیابید.

پاسخ:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$2A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=-I$$

درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان

تعریف: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند □ است، به طوری که $AB=BA=I$. در این صورت □ را وارونِ A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

تذکر: وارون ماتریس A در صورت وجود منحصر به فرد است.

نحوهٔ محاسبهٔ وارون ماتریس ۲×۲

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مقدار $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A نامیده و با $|A|$ نشان می‌دهیم.

$$|A|=ad-bc$$

توجه شود که محاسبات بالا، فقط برای ماتریس‌های ۲×۲ است.

تذکر مهم: مقدار $|A|$ در محاسبهٔ A^{-1} در مخرج کسر ظاهر می‌شود، پس شرط وارون‌پذیری ماتریس A، آن است که $|A|\neq ۰$.

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود محاسبه کرده، سپس پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

پاسخ: ابتدا دترمینان A را محاسبه می‌کنیم: $|A|=۳-(-۲)=۵\neq ۰$

پس ماتریس A وارون‌پذیر است. $A^{-1}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

برای امتحان‌کردن پاسخ باید $A^{-1}A$ و AA^{-1} برابر با ماتریس همانی I شود:

$$A^{-1}A=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\times\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را محاسبه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ: باید از A دو بار وارون بگیریم. حدس ما این است که ماتریس اولیه حاصل شود.

$$|A|=۴-۳=۱ \Rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

حال وارونِ A^{-1} را محاسبه می‌کنیم: $|A^{-1}|=۴-۳=۱$

$$(A^{-1})^{-1}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=A$$

در نتیجه: $(A^{-1})^{-1}=A$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس وارون

یک دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت: $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

فرمِ ماتریسی دستگاه به صورت زیر است:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مجهولات}}=\underbrace{\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جواب}}$$

نماد ماتریس ضرایب = A

نماد ماتریس مجهولات = □

نماد ماتریس جواب = □ □

$\Rightarrow AX=B$ □

برای حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول به روش ماتریس وارون، ابتدا فرم ماتریسی دستگاه را می‌نویسیم: $AX=B$

سپس وارونِ A را از سمت چپ در □ ضرب می‌کنیم: $X=A^{-1}B$

مثال: دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=-۳ \\ x+۳y=۱ \end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ: ماتریس ضرایب $=A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

ماتریس جواب $=\begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix}=$ □ ماتریس مجهولات $=X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

فرم ماتریسی دستگاه: $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

بنابراین باید وارون A را محاسبه کنیم: $|A|=۶-۱=۵$

$$A^{-1}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵} \\ \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix}$$

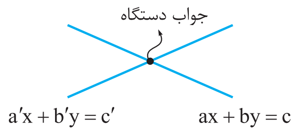
$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵} \\ \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-۱۰}{۵} \\ \frac{۵}{۵} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow x=-۲, y=۱$$

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول

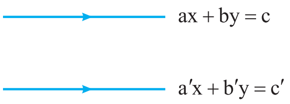
یک دستگاه دو معادله دو مجهول، از دو معادله تشکیل می‌شود، هر معادله یک خط است. منظور از حل دستگاه، بررسی وضعیت نسبی این دو خط است که سه حالت خواهد داشت: موازی، منطبق و متقاطع.

دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد، آن‌گاه دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب دارد که همان محل تقاطع دو خط است.



ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط با هم موازی‌اند و دستگاه فاقد جواب است.



پ) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط بر هم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

نکتهٔ مهم: اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله دو مجهول را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

اگر $|A|\neq ۰$ باشد، آن‌گاه دستگاه یک جواب دارد (دو خط متقاطع‌اند).

اگر $|A|=۰$ باشد، آن‌گاه دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی) یا دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط منطبق‌اند).

مثال: بررسی کنید دستگاه $\begin{cases} ۳x-۲y=۳ \\ ۶x-۴y=۱ \end{cases}$ دارای چند جواب است؟

پاسخ: کافی است نسبت‌ها را تشکیل دهیم: $\frac{۳}{۶}=\frac{-۲}{-۴}\neq\frac{۳}{۱}$

حالت موازی‌بودن رخ می‌دهد، پس دستگاه فاقد جواب است.

توجه شود که در این حالت دترمینان ماتریس ضرایب صفر است.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۶ & -۴ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-۱۲+۱۲=۰$$