

اتحاد مربع دو جمله ای

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

الف) مربع مجموع دو جمله ای

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ب) مربع تفاضل (تفریق) دو جمله ای

$$(\Delta x + 2)^2 = (\Delta x)^2 + 2 \times \Delta x \times 2 + 2^2 = 2\Delta x^2 + 20x + 4$$

مثال ۱: 

$$\left(-7x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - 7x\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times 7x + (7x)^2 = \frac{9}{4} - 21x + 49x^2$$

مثال ۲: 

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

$$\left(\Delta x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}y + \Delta x\right) = \left(\Delta x - \frac{1}{2}y\right)\left(\Delta x + \frac{1}{2}y\right) = (\Delta x)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 2\Delta x^2 - \frac{1}{4}y^2$$

مثال: 

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک

$$\begin{aligned} (-\Delta y + 2x)(2x + 9y) &= (2x - \Delta y)(2x + 9y) = (2x)^2 + (-\Delta y + 9y)(2x) + (-\Delta y \times 9y) \\ &= 4x^2 + 8xy - 4\Delta y^2 \end{aligned}$$

مثال: 

اتحاد مکعب دو جمله ای

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

الف) مکعب مجموع دو جمله ای

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ب) مکعب تفاضل (تفریق) دو جمله ای

$$\left(3a + \frac{b}{2}\right)^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2 \times \frac{b}{2} + 3(3a)\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^3 = 27a^3 + \frac{27}{2}a^2b + \frac{9}{4}ab^2 + \frac{b^3}{8}$$

مثال ۱: 

$$\left(2a^2 - \frac{1}{3}\right)^3 = (2a^2)^3 - 3(2a^2)^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3(2a^2)\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 8a^6 - 4a^4 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{27}$$

مثال ۲: 

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله ای

$$(3a - 1)(9a^2 + 3a + 1) = (3a)^3 - 1^3 = 27a^3 - 1$$

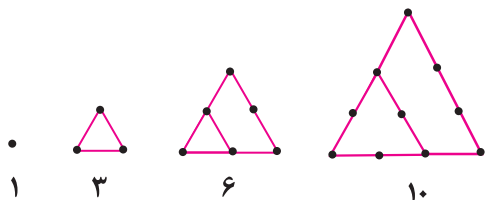
مثال: 

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله ای

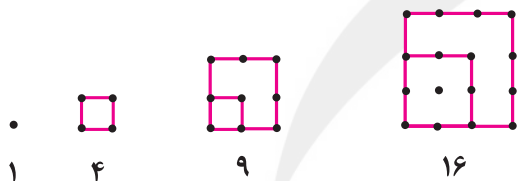
$$\left(\sqrt{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)\left(2 - b + \frac{b^2}{2}\right) = (\sqrt{2})^3 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2} + \frac{b^3}{2\sqrt{2}}$$

مثال:



$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اعداد مثلثی



$$b_n = n^2$$

اعداد مربعی



$$c_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

اعداد مخمسی

$$b_n = a_n + a_{n-1}, \quad b_1 = 1$$

رابطه بین اعداد مربعی و اعداد مثلثی

$$c_n = a_n + b_n - n$$

رابطه بین اعداد مخمسی و اعداد مربعی و اعداد مثلثی

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معناست که مخرجش صفر نباشد؛ یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود،

آن گاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است.

برای مثال عبارت گویا $\frac{3x^2(x+1)}{x+1}$ به ازای $x = -1$ تعریف نشده است؛ زیرا با قرار دادن $x = -1$ در آن، مخرج کسر برابر

با صفر می شود. (کاری به صورت کسر گویا نداریم) در واقع قبل از ساده کردن کسر باید مخرج کسر را برابر با صفر قرار دهیم.

۱	۱- به کمک اتحادها حاصل را به دست آورید : $(2a - 2)^2 =$ الف) $201 \times 199 =$ ب)												
۱	۲- تجزیه کنید : الف) $x^y - x =$ ب) $a^2 - x^2 =$												
۱	۳- به کمک مثلث خیام - پاسکال حاصل را بیابید : $(x + y)^4 =$												
۱	۴- معادله روبهرو را به روش کلی (Δ) حل کنید : $3x^2 - 5x + 2 = 0$												
۱	۵- اگر یکی از جواب های معادله $4x^2 - ax + 20 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر معادله را پیدا کنید.												
۱	۶- به ازای چه مقدار k معادله $\frac{3}{x+8} + \frac{x+5}{k+1} = \frac{-5x+4}{15}$ دارای جواب $x = -3$ است؟												
۲	۷- برای یک تابع خطی می دانیم $f(0) = 2$ و $f(4) = 10$. ابتدا ضابطه تابع را بیابید سپس حاصل $f(5)$ را محاسبه کنید.												
۱	۸- با توجه به ضابطه تابع f ، برد را مشخص کنید : $f: A \rightarrow B$ $f(x) = \frac{1}{x}$; $A = \{1, 2, 3, \dots\}$												
۲	۹- اگر $f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$ باشد حاصل $f(-2)$ چیست؟												
۱	۱۰- نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید : الف) میزان تحصیلات کارمندان ب) رنگ اتومبیل های نمایشگاه												
۱	۱۱- اگر در داده های ۱۲ و ۱۷ و ۱۱ و $2a - b$ و $a + b$ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۰ و ۱۲ مد برابر ۱۵ باشد، حاصل $a - b$ چیست؟												
۲	۱۲- واریانس و انحراف معیار داده های ۱۶ و ۱۰ و ۱۴ و ۸ و ۷ را بیابید.												
۲	۱۳- با توجه به جدول روبهرو نمودار مستطیلی و نمودار خط شکسته را رسم نمایید : <table border="1" data-bbox="191 1456 542 1758"> <thead> <tr> <th>فراوانی</th> <th>دسته بندی</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۴</td> <td>۱-۵</td> </tr> <tr> <td>۱۰</td> <td>۵-۹</td> </tr> <tr> <td>۸</td> <td>۹-۱۳</td> </tr> <tr> <td>۱۲</td> <td>۱۳-۱۷</td> </tr> <tr> <td>۵</td> <td>۱۷-۲۱</td> </tr> </tbody> </table>	فراوانی	دسته بندی	۴	۱-۵	۱۰	۵-۹	۸	۹-۱۳	۱۲	۱۳-۱۷	۵	۱۷-۲۱
فراوانی	دسته بندی												
۴	۱-۵												
۱۰	۵-۹												
۸	۹-۱۳												
۱۲	۱۳-۱۷												
۵	۱۷-۲۱												
۱/۵	۱۴- برای داده های زیر نمودار جعبه ای رسم کنید : ۱۰ و ۶ و ۳ و ۴ و ۱۰ و ۸ و ۲ و ۳ و ۵ و ۹ و ۷ و ۵ و ۴												
۱/۵	۱۵- پرتاب های یک پرتابگر دیسک به صورت زیر است. نمودار راداری را رسم کنید : <table border="1" data-bbox="191 1915 1500 2027"> <thead> <tr> <th>پنجم</th> <th>چهارم</th> <th>سوم</th> <th>دوم</th> <th>اول</th> <th>شماره پرتاب</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۵۸</td> <td>۵۳</td> <td>۷۲</td> <td>۶۰</td> <td>۶۸</td> <td>متراژ پرتاب</td> </tr> </tbody> </table>	پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول	شماره پرتاب	۵۸	۵۳	۷۲	۶۰	۶۸	متراژ پرتاب
پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول	شماره پرتاب								
۵۸	۵۳	۷۲	۶۰	۶۸	متراژ پرتاب								
۲۰	جمع												

الف) $(2a - 2)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(2) + 2^2 = 4a^2 - 8a + 4$ -۱

ب) $201 \times 199 = (200 + 1)(200 - 1) = (200)^2 - 1^2 = 40000 - 1 = 39999$

الف) $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$ -۲

ب) $a^2 - x^2 = (a - x)(a + x)$

-۳

$1 \rightarrow (x + y)^0$

$1 \quad 1 \rightarrow (x + y)^1$

$1 \quad 2 \quad 1 \rightarrow (x + y)^2$

$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \rightarrow (x + y)^3$

$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \rightarrow (x + y)^4 \quad (x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a = 3, b = -5, c = 2$ -۴

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(3)(2) = 1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \times 3} \rightarrow x_1 = \frac{5+1}{2 \times 3} = 1, x_2 = \frac{5-1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$

۵- ابتدا جواب را در معادله قرار می دهیم تا a را به دست آوریم:

$4x^2 - ax + 20 = 0 \xrightarrow{x=-4} 4(-4)^2 - a(-4) + 20 = 0 \rightarrow 64 + 4a + 20 = 0 \rightarrow 4a = -84 \rightarrow a = -21$

اکنون $a = -21$ را در معادله قرار می دهیم.

$4x^2 - (-21)x + 20 = 0 \rightarrow 4x^2 + 21x + 20 = 0 \rightarrow a = 4, b = 21, c = 20, \Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (21)^2 - 4(4)(20) = 121, x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-21 \pm \sqrt{121}}{2 \times 4}$

$x_1 = \frac{-21+11}{2 \times 4} = -\frac{5}{4}, x_2 = \frac{-21-11}{2 \times 4} = -4$

۶- جواب $x = -3$ را در معادله قرار می دهیم:

$\frac{3}{-3+8} + \frac{-3+5}{k+1} = \frac{-5(-3)+4}{15} \rightarrow \frac{3}{5} + \frac{2}{k+1} = \frac{19}{15} \rightarrow \frac{2}{k+1} = \frac{19}{15} - \frac{3}{5}$

$\frac{2}{k+1} = \frac{19}{15} - \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{10}{15} \rightarrow \frac{2}{k+1} = \frac{2}{3} \rightarrow k+1 = 3 \rightarrow k = 2$

۷- ضابطه یک تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$f(0) = 2 \rightarrow 2 = a \times 0 + b \rightarrow b = 2$$

$$f(4) = 10 \rightarrow 10 = a \times 4 + 2 \rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2x + 2 \xrightarrow{x=5} f(5) = 2 \times 5 + 2 = 12$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(1) = \frac{1}{1} = 1, f(2) = \frac{1}{2}, f(3) = \frac{1}{3} \rightarrow B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \quad -8$$

$$f(x) = \frac{3x-5}{x+1}, x = -2 \rightarrow f(-2) = \frac{3(-2)-5}{-2+1} = \frac{-11}{-1} = 11 \quad -9$$

(ب) کیفی، اسمی

۱۰- الف) کیفی، ترتیبی

۱۱- مد داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد. با توجه به این که ۱۲، دو بار تکرار شده است، پس ۱۵ باید سه بار تکرار شده باشد.

$$\begin{cases} 2a - b = 15 \\ a + b = 15 \end{cases} \rightarrow 2a + a = 15 + 15 \rightarrow 3a = 30 \rightarrow a = 10$$

$$a + b = 15 \xrightarrow{a=10} 10 + b = 15 \rightarrow b = 5 \qquad a - b = 10 - 5 = 5$$

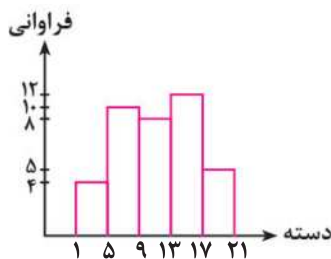
۱۲- ابتدا میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow \bar{x} = \frac{7 + 8 + 14 + 10 + 16}{5} = 11$$

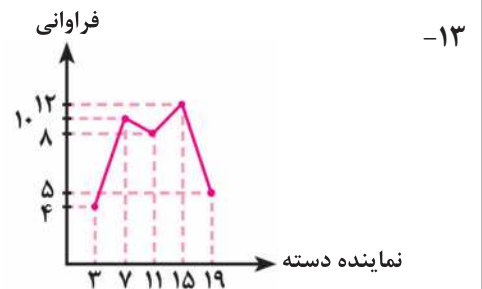
$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\rightarrow \sigma^2 = \frac{(7-11)^2 + (8-11)^2 + (14-11)^2 + (10-11)^2 + (16-11)^2}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\text{واریانس} = 12 \rightarrow \text{انحراف معیار} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



$$\begin{aligned} \frac{1+5}{2} &= 3 \\ \frac{5+9}{2} &= 7 \\ \frac{9+13}{2} &= 11 \\ \frac{13+17}{2} &= 15 \\ \frac{17+21}{2} &= 19 \end{aligned}$$



میانه



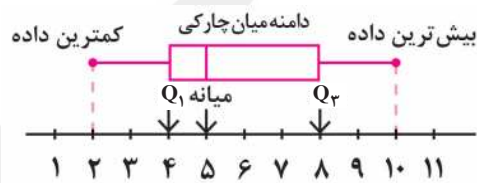
۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۰

۱۴- ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

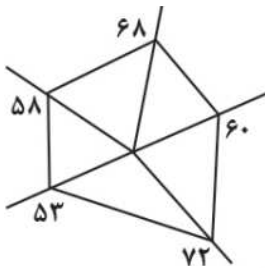
تعداد داده‌ها فرد است. بنابراین میانه برابر است با $\frac{n+1}{2}$ امین داده:

$$\frac{13+1}{2} = 7 \quad \text{میانه} = \text{هفت امین داده} = 5$$

$$Q_1 = 4 = \text{میانه هفت داده اول} = \text{چارک اول} = Q_1$$



۱۵- چون این ورزش کار پنج پرتاب انجام داده است، از یک نقطه پنج محور رسم می‌کنیم. متناسب با طول پرتاب‌ها روی محور نقطه‌ها را مشخص کرده و به هم دیگر وصل می‌کنیم.



وقتی یک ساله بودم پدرم ۳۱ سالش بود یعنی سنش ۳۱ برابر من بود.

وقتی ۲ ساله شدم پدرم ۳۲ ساله بود یعنی ۱۶ برابر من .

وقتی ۵ ساله شدم پدرم ۳۵ ساله بود یعنی ۷ برابر من .

وقتی ۱۰ ساله شدم پدرم ۴۰ سالش بود یعنی ۴ برابر من .

وقتی ۳۰ ساله شدم پدرم ۶۰ سال داشت یعنی ۲ برابر من .

می ترسم اگر همینطور ادامه دهیم پدرم از من کوچکتر شود !!!

۱- اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟

- ۲۱۶ (۱) ۲۲۸ (۲) ۲۴۴ (۳) ۲۶۴ (۴)

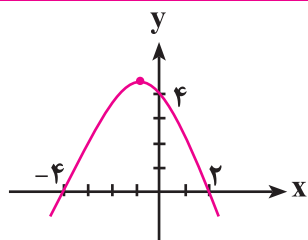
۲- مدل سازی ریاضی چیست؟

- (۱) بیان مسئله به زبان ریاضی
(۲) تقسیم بندی متغیرها
(۳) روش محاسبه
(۴) نمونه‌ای از سرشماری

۳- در نمودار جعبه‌ای داده‌های آماری ۱۸، ۲۰، ۲۳، ۱۶، ۱۴، ۱۷، ۱۱، ۹، ۱۲، ۱۰، ۵، ۱۹، ۲۱، ۷، ۸، دامنه تغییرات داده‌های داخل جعبه کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

۴- معادله سهمی شکل روبه‌رو، کدام است؟



- (۱) $y = 2x^2 - x + 2$
(۲) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
(۳) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$
(۴) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

۵- در یک نقطه زمین اگر ۲۰ درخت میوه با فاصله‌های مساوی کاشته شود پس از رشد کافی از هر درخت به طور متوسط ۶۰ کیلوگرم میوه برداشت می‌شود، به ازای هر درخت اضافی که کاشته شود ۲ کیلوگرم از متوسط محصول آن کم می‌شود. حداکثر برداشتی، با این فرضیه کدام است؟

- ۱۲۰۰ (۱) ۱۲۴۰ (۲) ۱۲۵۰ (۳) ۱۲۸۰ (۴)

۶- در آرایه مربعی روبه‌رو، تفاضل صفرهای توپر در دو جمله دهم و یازدهم کدام است؟

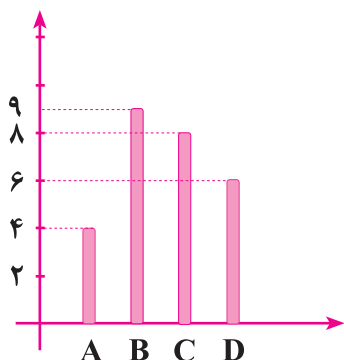


- صفر (۱)
۱۷ (۲)
۱۹ (۳)
۲۱ (۴)

۷- حاصل $\left(\frac{49}{25}\right)^3 \times (0.4)^{-6} \times \left(\frac{2}{7}\right)^6$ کدام است؟

- $\frac{2}{5}$ (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۸- شکل روبه‌رو نمودار میله‌ای داده‌ها، در ۴ دسته است. در نمودار دایره‌ای، زاویه مرکزی دسته D چند درجه است؟



- ۶۰ (۱) ۷۵ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۹- اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ مقدار $\frac{1+f(-2)}{g(2)}$ کدام است؟

- $\frac{5}{2}$ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)