

فصل اول

جبر و معادله

۱- در یک دنباله حسابی اگر جمله اول را a_1 و قدر نسبت را d و تعداد جملات را n فرض کنیم داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

جمله عمومی یا جمله n ام

$$s_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad \text{یا} \quad s_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

مجموع جملات

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

مثال: اگر جمله اول و صدم یک دنباله حسابی به ترتیب -100 و 100 باشند، مجموع جملات این دنباله را محاسبه کنید

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{100}{2} (-100 + 100) = 0$$

حل:

مثال: جمله چهارم دنباله حسابی $s_n = 6n^2 + 5n$ را به دست آورید

$$a_4 = s_4 - s_3 = 6(4)^2 + 5(4) - [6(3)^2 + 5(3)] = 96 + 20 - 54 - 15 = 47$$

حل:

۲- در یک دنباله هندسی اگر جمله اول را a_1 و قدر نسبت را q و تعداد جملات را n فرض کنیم، داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad s_n - s_{n-1} = a_n$$

جمله عمومی

۳- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \quad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

۴- معادله درجه دومی که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها معلوم باشد به صورت $x^2 - sx + p = 0$ می‌باشد.

۵- نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ به صورت یک سهمی است که اگر $a > 0$ آن‌گاه سهمی دارای Min و اگر $a < 0$ سهمی دارای

Max است. معادله محور تقارن سهمی از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید.

۶- کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار تابع $y = ax^2 + bx + c$ از رابطه $-\frac{\Delta}{4a}$ به دست می‌آید.

مثال: کم‌ترین مقدار عبارت $y = 3x^2 + 4x + 1$ را به دست آورید

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 \quad \text{کم‌ترین مقدار} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

حل:

۷- **تعریف قدر مطلق:** قدر مطلق هر عدد حقیقی x را به صورت $|x|$ نوشته و به صورت روبه‌رو تعریف می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

- ۸- خواص قدرمطلق:
- ۱) $|x| \geq 0$
 - ۲) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ اگر n زوج باشد
 - ۳) $|-x| = |x|$
 - ۴) $|x^n| = |x|^n$
 - ۵) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
 - ۶) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
 - ۷) $-|x| \leq x \leq |x|$
 - ۸) $|x| + |y| \geq |x+y|$ و نامساوی قدرمطلق $|x| + |y| \geq |x-y|$
 - ۹) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a \quad a \geq 0$ اگر
 - ۱۰) $|x| \geq a \Rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases} \quad a \geq 0$ اگر
 - ۱۱) $|x| < a \Rightarrow -a < x < a \quad a > 0$ اگر
 - ۱۲) $|x| > a \Rightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} \quad a > 0$ اگر
 - ۱۳) $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$ اگر $a > 0$

مثال: نامعادلات و معادلات زیر را که شامل قدرمطلق است، حل کنید:

الف) $|x+4| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x+4 \leq 5 \Rightarrow -9 \leq x \leq 1$

ب) $|x+2|+4=10 \Rightarrow |x+2|+4=\pm 10 \Rightarrow \begin{cases} |x+2|+4=10 \Rightarrow |x+2|=6 \Rightarrow x+2=\pm 6 \\ |x+2|+4=-10 \Rightarrow |x+2|=-10 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ x=-8 \end{cases}$
 غ ق ق

پ) $|x+3|+|2x-4|=6$

	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	-	o	+	+
$2x-4$	-	-	o	+

برای حل معادله‌ی روبه‌رو باید تعیین علامت کنیم:

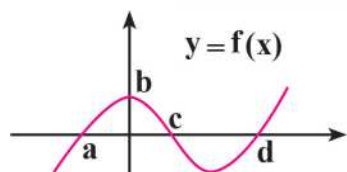
$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$2x-4=0 \Rightarrow x=2$

$x \leq -3 \Rightarrow -(x+3)-(2x-4)=6 \Rightarrow -3x+1=6 \Rightarrow -3x=5 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$ غ ق ق

$-3 \leq x \leq 2 \Rightarrow x+3-2x+4=6 \Rightarrow -x+7=6 \Rightarrow x=1$

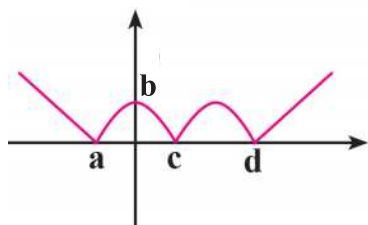
$x \geq 2 \Rightarrow x+3+2x-4=6 \Rightarrow 3x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$



(الف)

۹- برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کرده سپس قرینه‌ی آن نمودار را که زیر محور x ها قرار می‌گیرد، نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.

مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت شکل الف باشد نمودار $y=|f(x)|$ را رسم کنید.



حل:

۱	۱- مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی روبه‌رو را بیابید: $\dots, -1, -5$
۱	۲- در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m را به دست آورید.
۱	۳- اگر $A(2, 3)$ رأس یک مربع باشد و $6 = 5x - 12y$ معادله یک ضلع آن باشد. محیط مربع چقدر است؟
۱	۴- معادله $\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{2x-4}$ چند جواب دارد؟ (به روش جبری)
۱	۵- اگر $f = \{(0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0)\}$ و $g = \{(2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{4})\}$ را در نظر بگیرید: الف) تابع $2f - g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید. ب) مقدار $(\frac{f}{g})(1)$ را محاسبه کنید.
۱	۶- آیا دو تابع زیر مساویند. برای پاسخ خود دلیل ارائه نمایید: $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases}$
۱	۷- نامعادله $3^{2x-1} > \frac{1}{729}$ را حل کنید.
۱/۵	۸- نمودار تابع $y = (-\log \frac{x}{4}) + 2$ را رسم کنید.
۱	۹- اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ باشد. آنگاه لگاریتم $4a + 1$ در مبنای ۴ را به دست آورید.
۱	۱۰- معادله $\log(4-x) = \log(6-x) - \log x$ را حل کنید.
۱/۵	۱۱- نمودار $y = 2 \sin x - 1$ را رسم کنید. $[0, 2\pi]$
۱/۵	۱۲- اگر $\cot 20^\circ = 0.36$ مقدار $\frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ}$ کدام است.
۱	۱۳- مقدار $\sin 75^\circ$ را محاسبه کنید.
۱	۱۴- نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی عدد یک تعریف شده باشد. حد چپ با مقدار تابع برابر باشد اما در نقطه $x = 1$ حد نداشته باشد.
۳	۱۵- حدهای زیر را حساب کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{2x^3 - 3x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1}}{x^2 - 1}$ پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot x}{\sin x - \cos x}$ ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$
۱/۵	۱۶- مقدار a را چنان پیدا کنید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4ax + 2 & x \geq 1 \\ x - 3a & x < 1 \end{cases}$
۲۰	جمع

$$-5, -1, 3, \dots \quad a = -5 \quad d = -1 - (-5) = 4 \quad -1$$

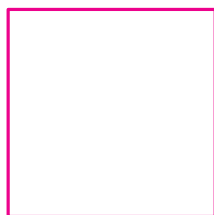
$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} [2(-5) + 19(4)] = 10(-10 + 76) = 10(66) = 660$$

$$x_7 = \frac{x_1}{7} + 5 \Rightarrow 2x_7 = x_1 + 10 \Rightarrow 2x_7 - x_1 = 10$$

$$x_1 \cdot x_7 = \frac{c}{a} = m \rightarrow 2(6) = m \rightarrow m = 12$$

$$\begin{cases} x_1 + x_7 = 8 \\ 2x_7 - x_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow 3x_7 = 18 \rightarrow x_7 = 6, x_1 = 2 \quad -2$$

$$A(2, 3) \quad AB = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow AB = \frac{|\Delta(2) - 12(3) - 6|}{\sqrt{\Delta^2 + (-12)^2}} = \frac{32}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{32}{13} \quad -3$$



اندازه یک ضلع مربع

$$\Delta x - 12y - 6 = 0$$

$$\text{محیط مربع} = 4 \left(\frac{32}{13} \right) = \frac{128}{13}$$

$$\Delta x - 12y = 6 \quad B$$

$$\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{2x-4} \quad \text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم} \quad -4$$

$$2x+1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$2x-4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 4 \rightarrow x \geq 2$$

دامنه جواب $x \geq 2$

$$4 = 2\sqrt{2x-4}$$

$$16 = 8x - 16$$

$$x = \frac{32}{8} = 4 \quad \text{معادله یک جواب دارد که با توجه به دامنه ق ق است.}$$

$$f = \{(0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0)\} \quad g = \{(2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{2})\} \quad -5$$

$$2f = \{(0, 4), (1, -2), (3, -\frac{1}{2}), (-2, 6), (-1, 0)\} \quad 2f - g = \{(1, \frac{-\sqrt{2}}{2}), (-1, -2)\}$$

$$\text{ب) } \frac{f}{g} = \{(1, \frac{-1}{3}), (-1, \frac{0}{2})\} = \{(1, -\frac{2}{3}), (-1, 0)\} \Rightarrow \frac{f}{g}(1) = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases} \quad -6$$

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

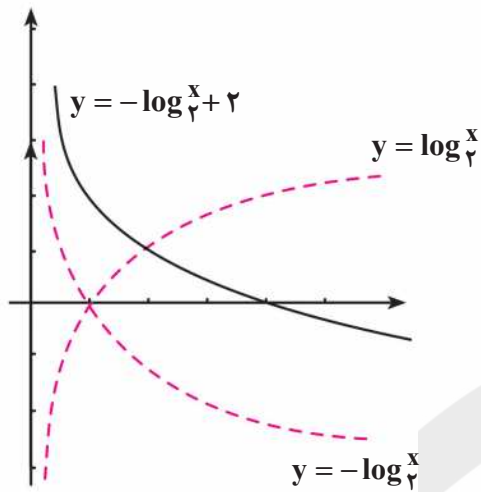
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	-	+	+
	ج		ج	

$$D_f : x \leq 0 \quad \text{یا} \quad x \geq 1 \quad (1)$$

$$g \text{ دامنه : } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow D_g : x \geq 1 \quad (2)$$

دو تابع f و g با هم مساوی نیستند زیرا دامنه آن‌ها با هم برابر نمی‌باشد.

$$3^{2x-1} > \frac{1}{729} \Rightarrow 3^{2x-1} > \frac{1}{3^6} \Rightarrow 3^{2x-1} > 3^{-6} \Rightarrow 2x-1 > -6 \Rightarrow 2x > -5 \Rightarrow x > -\frac{5}{2} \quad -7$$



$$y = -\log_3^x + 2$$

-۸

ابتدا نمودار $y = \log_3^x$ را رسم می‌کنیم.

x	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹
y	-۱	۰	۱	۲

$$y = \log_3^x \Leftrightarrow x = 3^y$$

سپس آن نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -\log_3^x$ به دست آید.

پس از آن در جهت محور yها ۲ واحد به سمت بالا نمودار را انتقال می‌دهیم.

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2(2^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \quad -9$$

$$4a + 1 = 4\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$\log_4 4a + 1 = \log_4 4 = 1$$

$$\log(4-x) = \log(6-x) - \log x \quad -10$$

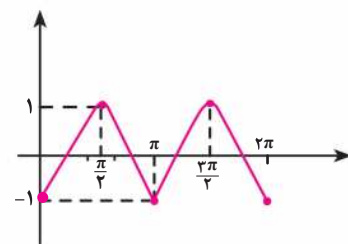
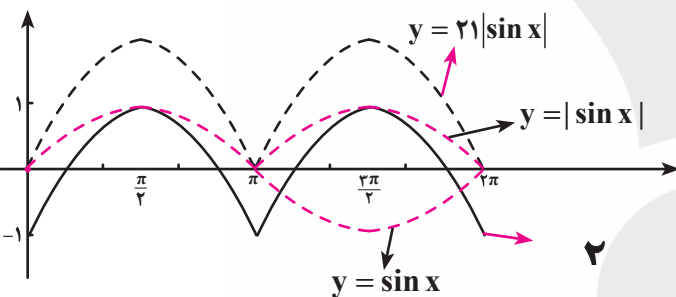
$$\log(4-x) = \log \frac{6-x}{x} \Rightarrow 4-x = \frac{6-x}{x} \Rightarrow x(4-x) = 6-x \Rightarrow 4x - x^2 = 6-x$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x-3=0 \rightarrow x=3 \quad \text{و} \quad x-2=0 \rightarrow x=2$$

با توجه به دامنه جواب‌ها قابل قبول می‌باشند. $4-x > 0 \rightarrow -x > -4 \rightarrow x < 4$ و $6-x > 0 \rightarrow -x > -6 \rightarrow x < 6$

۱۱- روش اول:

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	۰	۱	۰	-۱	۰
sin x	۰	۱	۰	۱	۰
۲ sin x	۰	۲	۰	۲	۰
۲ sin x - ۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱



روش دوم: ابتدا نمودار $y = \sin x$ را رسم کرده سپس برای

رسم $y = |\sin x|$ قرینه آن قسمت از نمودار که در زیر محور

xها می‌باشد نسبت به محور xها به دست آورده عرض نقاط را

دو برابر می‌کنیم سپس یک واحد در جهت محور yها به سمت

پایین انتقال می‌دهیم

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	۰	۱	۰	-۱	۰

$$\frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ}$$

$$\sin 16^\circ = \sin (18^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ \quad -12$$

$$\cos 20^\circ = \cos (18^\circ + 2^\circ) = -\cos 2^\circ$$

$$\cos 11^\circ = \cos (9^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

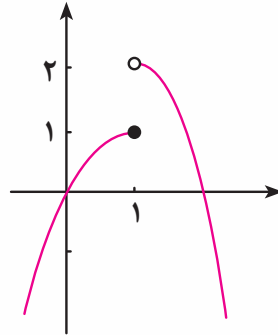
$$\sin 7^\circ = \sin (9^\circ - 2^\circ) = \cos 2^\circ$$

صورت و مخرج عبارت روبه‌رو را بر $\sin 2^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{-\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}$$

$$\frac{\frac{\sin 2^\circ}{\sin 2^\circ} + \frac{\cos 2^\circ}{\sin 2^\circ}}{-\frac{\sin 2^\circ}{\sin 2^\circ} + \frac{\cos 2^\circ}{\sin 2^\circ}} = \frac{1 + \cot 2^\circ}{-1 + \cot 2^\circ} = \frac{1 + 0/36}{-1 + 0/36} = \frac{1/36}{-0/64} = \frac{-136}{64} = \frac{-68}{32} = \frac{-17}{8}$$

$$\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad -13$$



-14

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{2x^2-3x-1} = \frac{1-(-1)^2}{2(-1)^2-3(-1)-1} = \frac{2}{2+3-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

-15

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-(2x+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1})} = \frac{1}{2(\sqrt{3}+\sqrt{3})} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\cot x}{\sin x - \cos x} = \frac{1-\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \right) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4ax + 2 & x \geq 1 \\ x - 3a & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3(1)^2 - 4a(1) + 2 = 3 - 4a + 2 = 5 - 4a \quad -16$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - 3a$$

$$f(1) = 5 - 4a \rightarrow 5 - 4a = 1 - 3a \rightarrow a = 4$$