آموزش و کتاب کار

ریاضی (۲) پایه یازدهم

(ویژه‌ی دکترها)

مؤلفان:

علی صدری، پوریا علی‌نقی

انتشارات خوشخوان

سرشناسه	: صدری، علی
عنوان و نام پدیدآور	: آموزش و کتاب کار ریاضی (۲) پایه یازدهم (ویژه‌ی دکترها)
مشخصات نشر	: تهران: خوشخوان، ۱۳۹۸.
مشخصات ظاهری	: ۲۲۴ ص.؛ ۲۲×۲۹ س م.
شابک	: ۳-۲۵-۸۷۹۲-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپای مختصر
یادداشت	: فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی: opac.nlai.ir قابل دسترسی است.
شناسه افزوده	: علی‌نقی، پوریا
شماره کتابشناسی ملی	: ۵۶۵۴۸۷۴

انتشارات خوشخوان

عنوان	: آموزش و کتاب کار ریاضی (۲) پایه یازدهم (ویژه‌ی دکترها)
ناشر	: خوشخوان
مؤلفین	: علی صدری، پوریا علی‌نقی
رسام	: احمد علیخانی، مهران شریفی
صفحه‌آرایی	: فریده مرادزاده
طراحی جلد	: محمد وزیرزاده
نوبت چاپ	: اول- بهار ۱۳۹۸
تیراژ	: ۵۰۰ نسخه
قیمت	: ۳۵۰۰۰ تومان
شابک	: ۳-۲۵-۸۷۹۲-۶۰۰-۹۷۸

تهران- خیابان انقلاب- خیابان فخررازی- بین روانمهر و لبافی نژاد- کوچه انوری- پلاک ۱۹- انتشارات خوشخوان

تلفن: ۶۶۴۹۴۰۲۰-۰۲۱

سامانه پیامکی: ۰۲۱۶۶۴۹۴۰۲۰

www.khoshkhan.ir

info@khoshkhan.ir

khoshkhan

@khoshkhan

پیشگفتار ناشر

یادم باشد

حرفی نزنم که به کسی بر بخورد

نگاهی نکنم که دل کسی بلرزد

راهی نروم که بی‌راه باشد

خطی ننویسم که آزار دهد کسی را

یادم باشد که روز و روزگار خوش است

همه چیـز رو به راه و بر وفق مراد است و خوب!

تنها! ... دل ما، دل نیست.

"مجتبی معظمی"

شاید چند سال دیگه وقتی این مقدمه رو بخونیم خیلی چیزا تغییر کرده باشه.

مثلاً هزینه‌های چاپ کم شده باشه و یا رسانه‌های دیجیتال جای هزینه‌های سنگین چاپ رو گرفته باشن. البته می‌دونم هیچ چی جای کتابای چاپی رو نمی‌گیره. لذت گرفتن کتاب تو دست و یا پهن کردن کتابای درسی و کمک درسی روی زمین، دست گرفتن ماژیک فسفری، خط کشیدن زیر جملات مهم و یا حل کردن مسائل گوشه‌ی کتاب یه چیزی دیگه‌اس. هر چند که الان حتی می‌شه با گوشی جملات فایل متن رو هایلایت کرد یا این‌که کنار یه پاراگراف نوت نوشت.

شده خاطره یا دلنوشته‌هاتونو کنار کتاب بنویسید؟ آره، همون کتاب می‌شه یه دنیا خاطره برای سال‌های آینده.

یه روزی یادمه شعار یکی از همکاران این بود "کم‌رنگ‌ترین مدادها از قوی‌ترین حافظه‌ها ماندگارترن" واقعا همین‌طوره.

بگذریم!

شاید خیلی‌ها تو این دوران با توجه به شرایط اقتصادی کشور روزگار سختی داشته باشن، که مقدمه‌ی این کتاب جای این حرفا نیست. شاید تهیه‌ی یه کتاب با این قیمت برای همه‌ی دانش‌آموزان مقدور نباشه، ولی ما سعی می‌کنیم با تغییر شرایط باز هم در کنار شما باشیم و تا حد امکان قیمت‌ها رو کاهش بدیم تا بتوونیم لذت حل کردن مسائل رو تو روزهایی که علاقه به تحصیل کم شده تو شما زنده نگهداریم.

واقعا تو این دوران باید دست‌به‌دست هم بدیم تا بتوونیم شرایط رو برای همدیگه تغییر بدیم. باید امیدوار باشیم، گام‌های آینده رو محکم‌تر برداریم. به ردپاهایی که روی برفای خاطره‌هامون مونده توجه کنیم. ردپاها روی برف، عمر کوتاهی دارن، و همون قدر خاطره‌ها و تجربیات تو ذهن ما موندگارن. اگر به موقع تصویر اون خاطره و تجربه رو تو ذهنمون حک نکنیم فراموشش می‌کنیم. یادمون باشه با اولین تابش پرتو خورشید جای ردپاها پاک می‌شه.

یادمون باشه که می‌شه از سختی به موفقیت رسید. این روزها که به مرز پنجاه سالگی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شم و به فراز و نشیب‌های گذشته نگاه می‌کنم می‌بینم در تک‌تک نشیب‌ها درسی بوده برای یادگیری و در تمام فرازها امتحانی بوده که با موفقیت از پسش براومدم، و وقتی به آینده نگاه می‌کنم می‌دونم این فراز و نشیب‌ها ادامه خواهند داشت و در پس روزای سخت روزای آروم و در پس هر غم شادی می‌رسه.

لازم می‌دونم قبل از هر چیز از تک‌تک عزیزانی که برای این کتاب زحمت کشیدن تشکر کنم. تشکر ویژه از دو دوست جوون آقایان علی صدری و پوریا علی‌تقی که کتاب پیش رو به رشته‌ی تحریر درآوردن و در تالیف کتاب سعی کردن تا گامی کوچک جهت رفع نیازهای شما دوست تجربی بردارن.

کتاب حاضر برای دانش‌آموز علاقه‌مند به ریاضی رشته‌ی تجربی تألیف شده، و سعی شده تا با آخرین ویرایش کتاب درسی منطبق باشه. این کتاب با نگاه ویژه به دانش‌آموزان ممتاز تألیف شده، پس از دوستان عزیز خواهشمندم این موضوع را در معرفی کتاب به دانش‌آموزان در نظر بگیرن.

امیدوارم در این سال‌های چیزی نگفته باشم که به کسی برخورده باشه و چیزی ننوشته باشم که کسی رو آزرده باشه، که این موضوع کار خیلی سختیه و از عهده‌ی هر کسی برنمیاد، پس لازم می‌دونم از شما دوست عزیز به خاطر نواقص و کمبودها در تمامی این موارد طلب عفو داشته باشم.

رسول حاجی‌زاده
مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفین

به نام خدا

کتاب درسی ریاضی ۲ ویژه‌ی رشته تجربی، شامل ۷ فصل با موضوعات پراکنده و بی‌ارتباط با هم است. این پراکندگی و تعدّد موضوعات، دانش‌آموزان را با چالش‌هایی روبه‌رو کرده است. به‌عنوان نمونه توجه کنید که دانش‌آموزان نظام قدیم، هندسه و آمار را در کتاب‌های مجزایی می‌خواندند و در نتیجه فرصت بیشتری برای تجزیه و تحلیل و کسب مهارت در حل مسئله داشتند. اما این دو درس در کنار چند فصل دیگر همه در قالب یک کتاب قرار گرفته‌اند.

با توجه به این تغییر، کتاب‌های کمک آموزشی متعلقی تألیف و منتشر شده‌اند. این کتاب‌ها اهداف متعلقی را دنبال می‌کنند. اما اکثر آنها به نیّت آماده کردن دانش‌آموزان برای آزمون سراسری، بیشتر به سؤالات تستی پرداخته‌اند.

در سال‌های اخیر، گرایش دانش‌آموزان به رشته تجربی افزایش چشمگیری داشته‌است. تجربه‌ی ما نشان می‌دهد در این شرایط رقابتی شدید، دانش‌آموزانی می‌توانند به نتیجه دلخواه برسند که در درس‌های مختلف مفاهیم را عمیقاً درک کرده باشند و ضمناً مهارت زیادی در حل مسئله کسب کرده باشند. این هدف جز با حل سؤالاتِ چالش برانگیزِ تشریحی به دست نمی‌آید. صرف پرداختن به مسائل و نکات تستی مانع رسیدن به درک عمیق می‌شود. در واقع ابتدا باید تسلط کافی روی مسائل تشریحی پیدا کرد و سپس سراغ مهارت‌های تستی رفت. با این توضیحات، هدف اصلی این کتاب، عمق‌بخشی به آموخته‌ها به کمک مسائل تشریحی و چالش برانگیز می‌باشد.

مخاطب کتب انتشارات خوشخوان از ابتدا دانش آموزان ممتاز بوده‌اند. درست است که این کتاب برای دانش‌آموزان رشته تجربی نوشته شده‌است، اما از آنجا که چند سالی است که بسیاری از دانش آموزان ممتاز و مستعد، رشته تجربی را انتخاب می‌کنند، خلأ کتابی که حاوی مسائل جدی‌تر و دشوارتر باشد، احساس می‌شد. برخی از دانش‌آموزانِ ممتازِ رشته تجربی علاقه زایدالوصفی به ریاضی دارند و از حل مسائل آن لذت می‌برند. تلاش شده این کتاب تا حدی کمبود موجود در این زمینه را برطرف سازد. ضمن اینکه مسائلِ اکثر بخش‌های از این کتاب برای دانش‌آموزان ممتاز و علاقه‌مند رشته ریاضی نیز قابل استفاده است.

در انتها از همه کسانی که زمینه نوشتن این کتاب را فراهم کردند، تشکر می‌کنیم. خصوصاً از مدیر دوست‌داشتنی و دغدغه‌مند انتشارات خوشخوان، جناب آقای رسول حاجی‌زاده که حق معلمی بر گردن ما دارند.

امیدواریم حاصل تلاش‌های ما مورد قبول درگاه حق تعالی واقع شود و برای شما دانش‌آموزان عزیز قابل استفاده باشد. ما را از نظرات خود برای بهبود کتاب محروم نکنید.

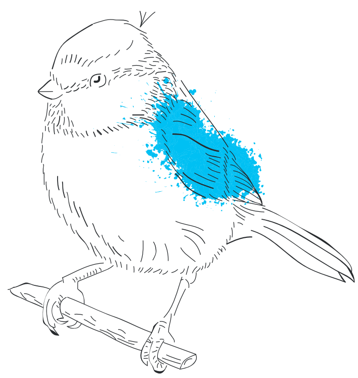
اردیبهشت ۱۳۹۸

علی صدری - پوریا علینقی

فهرست مطالب

فصل اول

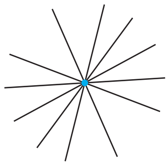
هندسه تحلیلی و جبر



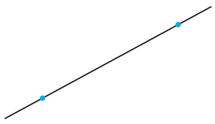
درس اول: هندسه تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادله خط (۱-۱-۱)

این درس را با یادآوری نکته‌ای بدیهی در مورد خط و نقطه آغاز می‌کنیم. نقطه‌ای را در صفحه در نظر بگیرید. واضح است که بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد که از آن نقطه عبور کند.



اکنون دو نقطه متمایز در صفحه در نظر بگیرید. بدیهی است که از این دو نقطه تنها یک خط عبور می‌کند.



از این مطلب، دو نتیجه می‌گیریم:

نتیجه ۱ با داشتن معادله خط می‌توانیم به کمک مشخص کردن ۲ نقطه، خط را رسم کنیم.

نتیجه ۲ با داشتن دو نقطه از یک خط می‌توانیم معادله خط را بنویسیم.

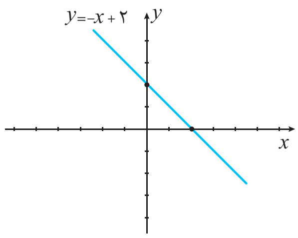
مثال‌های بعدی کاربرد این نتایج را نشان می‌دهند.

مثال ۱. نمودار خطوط به معادلات $y=۲x-۳$ و $y=-x+۲$ و $y=۳$ را رسم کنید.

پاسخ: برای رسم این خطوط، دو نقطه دلخواه از هرکدام را مشخص می‌کنیم و به کمک آن‌ها خط را رسم می‌کنیم. توجه کنید که مشخص کردن دو نقطه کافی است.

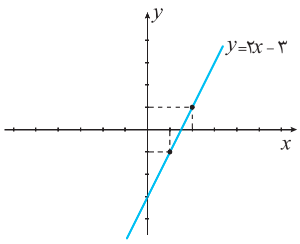
$y=-x+۲$

x	۰	۲
y	۲	۰



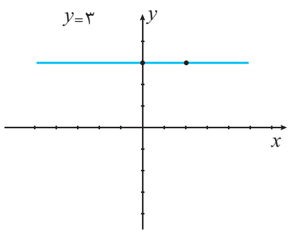
$y=۲x-۳$

x	۱	۲
y	-۱	۱



$y=۳$

۰	۰	۲
y	۳	۳

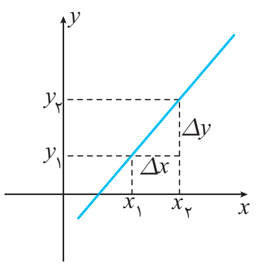


شیب خط (۱-۱-۱-۱)

در سال نهم با تعریف شیب خط آشنا شدیم. دیدیم که $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ شیب خط نامیده می‌شود.

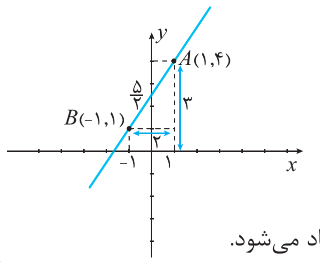
به شکل زیر دقت کنید:

شیب خط در واقع بیان می‌کند که به ازای هر واحد جلو رفتنِ x، y چقدر بالا یا پایین می‌رود. به عنوان مثال اگر خطی با شیب ۳ داشته باشیم، به این معنی است که اگر یک واحد در جهت محور x ها جلو برویم، مجبوریم ۳ واحد در جهت محور y ها حرکت کنیم تا روی خط بمانیم.



مثال ۲. **شیب خط گذرا از $A(۱,۴)$ و $B(-۱,۱)$ را بیابید.**

پاسخ:



$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-۱}{۱-(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

در شکل نیز مشخص است که اگر روی خط حرکت کنیم به‌طوری که x دو واحد زیاد شود، y نیز سه واحد زیاد می‌شود.

در یک کلام نسبت جابجایی عمودی به جابجایی افقی، شیب خط نام دارد. $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

معادله خط (۱-۱-۱-۲)

با معادله‌ی خط از گذشته آشنا هستیم. می‌دانیم معادله خط به صورت $y=mx+h$ است که در آن m شیب و h عرض از مبدأ نام دارد.

مثال ۳. **معادله‌ی خط مثال ۲ را بنویسید.**

پاسخ: شیب خط را $m=\frac{۳}{۲}$ به‌دست آوردیم. بنابراین معادله‌ی آن به صورت $y=\frac{۳}{۲}x+h$ است. ضمناً می‌دانیم نقطه‌ی $A(۱,۴)$ در آن صدق می‌کند. پس:

$$۴=\frac{۳}{۲}+h\Rightarrow h=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین معادله‌ی خط به صورت $y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ است.

اگر به شکل مثال ۲ دقت کنید، می‌بینید که $\frac{۵}{۲}$ عرض نقطه‌ی برخورد خط با محور y هاست. به همین دلیل به آن «عرض از مبدأ» می‌گویند.

برای به‌دست آوردن معادله خط گذرا از ۲ نقطه، روش دیگری نیز وجود دارد.

در یک کلام معادله‌ی خط گذرا از $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$: $y-y_۱=m(x-x_۱)$ و $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

مثال ٤. **معادله خط گذرا از نقاط $A(۲,۳)$ و $B(۴,۱)$ را به‌دست آورید.**

پاسخ:

$$m=\frac{۳-۱}{۲-۴}=-۱$$

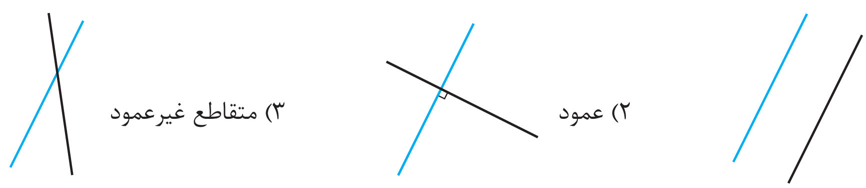
روش اول: $y-۳=-۱\,(x-۲)\Rightarrow y=-x+۵$

روش دوم: $y=-x+h\xrightarrow{B(۴,۱)}۱=-۴+h\Rightarrow h=۵\Rightarrow y=-x+۵$

وضعیت دو خط نسبت به هم (۱-۱-۱-۳)

دو خط در یک صفحه نسبت به هم سه وضعیت دارند.

۱) موازی ۲) عمود ۳) متقاطع غیرعمود



اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند موازی هستند. اگر همدیگر را قطع کنند در صورتی که زاویه‌شان ۹۰° باشد، عمود و در غیر این صورت متقاطع غیرعمود نامیده می‌شوند.

دو خط موازی (۱-۱-۱-۳-۱)

در یک کلام دو خط موازی، شیب‌های برابری دارند و برعکس.

مثال ۵. **معادله خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(۳\,,-۱)$ بگذرد و با خط $y=۳x-۱$ موازی باشد.**

پاسخ:

روش اول: $m=۳ \Rightarrow y=۳x+h$

در معادله صدق می‌کند $(۳\,,-۱) \Rightarrow -۱=۹+h \Rightarrow h=-۱۰ \Rightarrow y=۳x-۱۰$

روش دوم: $y-(-۱)=۳(x-۳) \Rightarrow y+۱=۳x-۹ \Rightarrow y=۳x-۱۰$

دو خط عمود برهم (۱-۱-۱-۳-۲)

مثال ۶. **دو خط $y=۲x+۱$ و $y=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.**

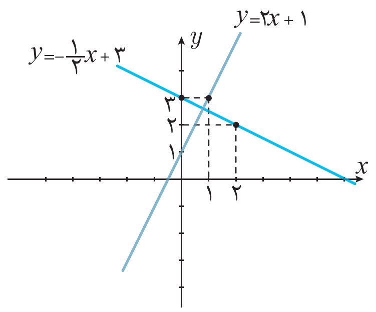
پاسخ:

$y=-\frac{۱}{۲}x+۳$

x	۰	۲
y	۳	۲

$y=۲x+۱$

x	۰	۱
y	۱	۳



اگر شکل را دقیق رسم کنیم، می‌بینیم که این دو برهم عمود هستند. این موضوع اتفاقی نیست بلکه از روی شیب آن‌ها می‌توانیم این موضوع را بفهمیم.

در یک کلام شیب دو خط عمود برهم، قرینه و معکوس یکدیگرند. به عبارت دیگر $m.m'=-۱$

بنابراین در مثال بالا می‌توانستیم بدون رسم شکل نیز بگوییم این دو خط برهم عمود هستند. اثبات این مطلب را به عنوانِ تمرین به خودتان واگذار می‌کنیم.

مثال ۷. **معادله خط گذرا از نقطه‌ی $(۱\,,۱)$ و عمود بر خط $y=\frac{۲}{۳}x+۵$ را بنویسید.**

پاسخ: شیب خط $=\frac{۲}{۳} \Rightarrow$ شیب خط عمود بر آن $=-\frac{۳}{۲}$

معادله خط با شیب $-\frac{۳}{۲}$ و گذرا از $(۱,۱)$: $y-۱=-\frac{۳}{۲}(x-۱) \Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲}$

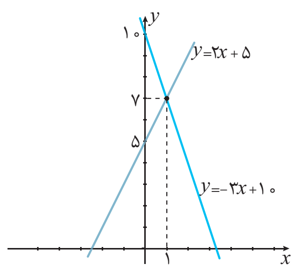
دو خط متقاطع (۱-۱-۱-۳-۳)

مثال ۸. **نقطه‌ی برخورد دو خط $y=۲x+۵$ و $y=-۳x+۱۰$ را به‌دست آورید.**

پاسخ: ویژگی نقطه‌ی برخورد دو خط این است که مختصات آن روی هر دو خط صدق می‌کند. بنابراین معادله این دو خط را در یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل می‌کنیم.

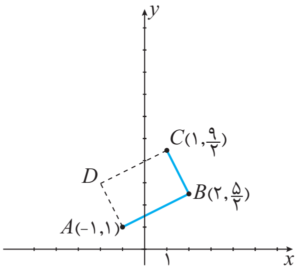
$$\begin{cases} y=۲x+۵ \\ y=-۳x+۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x+۵=-۳x+۱۰ \Rightarrow ۵x=۵ \Rightarrow x=۱\,,\ y=۷$$

بنابراین محل تقاطع این دو خط نقطه‌ی $(۱\,,۷)$ است. شکل روبه‌رو این موضوع را تأیید می‌کند.



مثال ۹. مستطیل $ABCD$ با مختصاتِ رئوس $A(-1,1)$ و $B(2,\frac{5}{2})$ و $C(1,\frac{9}{2})$ را در نظر بگیرید. معادله‌ی ضلع AD و مختصات رأس D را بیابید.

پاسخ:



ابتدا به کمک سه رأس داده شده، مستطیل را رسم می‌کنیم. اضلاع AB و BC کاملاً معلوم هستند. زیرا دو نقطه از هر کدام را داریم.

ابتدا شیب خط AB را به‌دست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{5}{2}-1}{2-(-1)}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$$

چون BC بر AB عمود است، نتیجه می‌گیریم که $m_{BC}=-2$. اگرچه شیب BC را به کمک نقاط B و C نیز می‌توانیم به‌دست آوریم.

می‌دانیم در مستطیل، اضلاع روبه‌رو موازی هستند. بنابراین شیب خط AD نیز مانند شیب BC برابر (۲-) است. حال به کمک نقطه‌ی A معادله‌ی AD را می‌نویسیم.

$$\text{معادله‌ی } AD: y-1=-2(x+1)\Rightarrow y=-2x-1$$

برای یافتن مختصات رأس D، معادله‌ی CD را نیز می‌نویسیم و تقاطع آن با AD را به‌دست می‌آوریم.

خط CD موازی AB است و از C می‌گذرد.

$$\text{معادله‌ی } CD: y-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+4$$

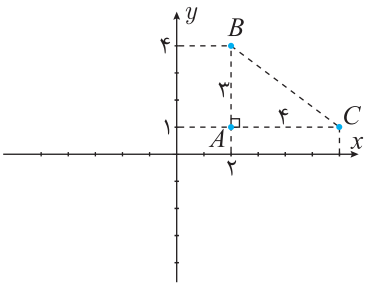
$$\begin{aligned}CD:&\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+4\\ y=-2x-1\end{cases}\\ AD:&\end{aligned}\Rightarrow\frac{1}{2}x+4=-2x-1\Rightarrow x=-2,y=3$$

بنابراین مختصات رأس D، $(-2,3)$ است.

توجه داشته باشید که یافتن مختصاتِ D روشی سریع‌تر نیز دارد که در قسمتِ «مختصات نقطه وسط پاره‌خط» به آن می‌پردازیم.

فاصله دو نقطه (۱-۱-۲)

مثال ۱۰. فاصله‌ی نقاط $A(2,1)$ و $B(2,4)$ و $C(6,1)$ از هم چقدر است؟



پاسخ: فاصله‌ی A و B به سادگی به‌دست می‌آید. زیرا این ۲ نقطه x یکسان دارند. به عبارت دیگر هر دو روی خطی عمود قرار دارند بنابراین فاصله‌ی آن‌ها برابر اختلاف y هایشان است.

فاصله‌ی C و A نیز به همین صورت به‌دست می‌آید. زیرا این دو نقطه، عرض یکسانی دارند. بنابراین فاصله‌ی آن‌ها برابر اختلاف طول‌هایشان است.

فاصله‌ی B و C نیز با دانستن فاصله AB و AC و به کمک قضیه‌ی فیثاغورس قابل محاسبه است.

$$BC^2=3^2+4^2=25\Rightarrow BC=5$$

در این مثال، فاصله‌ی C و A که ۲ نقطه‌ی هم عرض بودند، از رابطه‌ی x_C-x_A به‌دست آمد.

همچنین فاصله‌ی B و A که ۲ نقطه‌ی هم طول بودند، از رابطه‌ی y_B-y_A به‌دست آمد.

در یک کلام

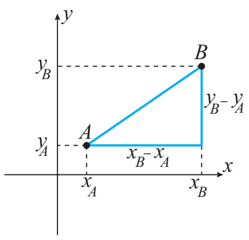
اگر A و B دو نقطه‌ی هم عرض در صفحه باشند، آنگاه $AB=|x_A-x_B|$

اگر C و D دو نقطه‌ی هم طول در صفحه باشند، آنگاه $CD=|y_C-y_D|$

به‌دلیل این‌که فاصله همیشه مثبت است، در روابط فوق از قدرمطلق استفاده می‌کنیم.

حال می‌خواهیم در حالت کلی فاصله‌ی دو نقطه را به‌دست آوریم.

دو نقطه‌ی دلخواهِ A و B را در صفحه‌ی مختصاتی در نظر بگیرید. این دو نقطه لزوماً هم عرض یا هم طول نیستند.



از روی شکل به کمک قضیه فیثاغورس به سادگی مشخص است که:

$$AB^{۲}=(x_B-x_A)^{۲}+(y_B-y_A)^{۲}$$

و در نتیجه:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^{۲}+(y_B-y_A)^{۲}}$$

در یک کلام فاصله‌ی دونقطه‌ی $A(x_A\ ,\ y_A)$ و $B(x_B\ ,\ y_B)$ برابر است با $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^{۲}+(y_A-y_B)^{۲}}$

توجه کنید که در رابطه‌ی فوق به دلیل وجود توانِ ۲، فرقی ندارد که x_A را منهای x_B کنیم یا x_B را منهای x_A.

مثال ۱۱. فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(۲\ ,\ ۳)$ و $B(-۲,\ ۸)$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$AB=\sqrt{(۲-(-۲))^{۲}+(۳-۸)^{۲}}=\sqrt{۴۱}$$

مثال ۱۲. نقاط $A(۱\ ,\ ۱)$ و $B(۵\ ,\ ۲)$ و $C(-۱,\ ۹)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلثی قائم الزاویه است.

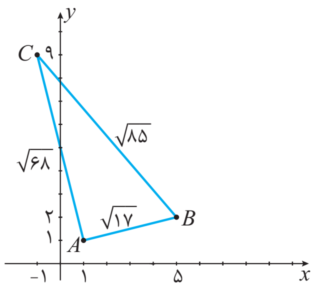
پاسخ:

روش اول: نشان می‌دهیم طول اضلاع این مثلث در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کنند.

$$AB=\sqrt{۴^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۱۷}$$

$$AC=\sqrt{۲^{۲}+۸^{۲}}=\sqrt{۶۸}$$

$$BC=\sqrt{۶^{۲}+۷^{۲}}=\sqrt{۸۵}$$



از آن‌جایی که $(\sqrt{۸۵})^{۲}=(\sqrt{۶۸})^{۲}+(\sqrt{۱۷})^{۲}$ بنابراین $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلثی قائم الزاویه است. در واقع این‌جا از عکس قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کردیم.

روش دوم: به کمک شیب‌ها نشان می‌دهیم دو خط AB و AC برهم عمودند.

$$m_{AC}=\frac{۹-۱}{-۱-۱}=-۴ \qquad m_{AB}=\frac{۲-۱}{۵-۱}=\frac{۱}{۴}$$

(-۴) و $\frac{۱}{۴}$ قرینه و معکوس هم هستند. بنابراین این دو خط برهم عمودند.

مثال ۱۳. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۳,\ ۵)$ از مبدأ چقدر است؟

پاسخ: فاصله‌ی $A(۳\ ,\ ۵)$ از نقطه‌ی $O(۰\ ,\ ۰)$ را به‌دست می‌آوریم.

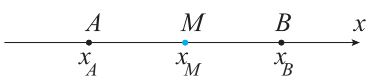
$$OA=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۵-۰)^{۲}}=\sqrt{۳۴}$$

از این مثال، نتیجه‌ی کلی زیر را می‌گیریم.

در یک کلام فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_A\ ,\ y_A)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $OA=\sqrt{x_A^{۲}+y_A^{۲}}$

مختصات نقطه وسط پاره خط (۱-۱-۳)

نقاط $A(x_A\ ,\ ۰)$ و $B(x_B\ ,\ ۰)$ را در نظر بگیرید. این نقاط هر دو روی محور x ها هستند.



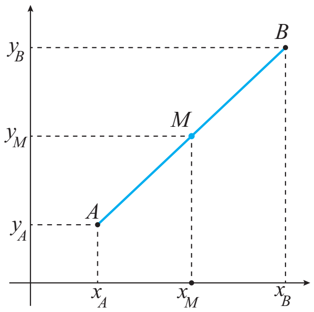
نقطه‌ی M وسط A و B است. یعنی فاصله‌ی M تا A برابر فاصله‌ی M تا B است. بنابراین:

$$x_M-x_A=x_B-x_M \Rightarrow ۲x_M=x_A+x_B \Rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

بنابراین طول نقطه‌ی M، میانگین طول نقاط A و B است. عرض آن نیز صفر است.

به‌طور مشابه می‌توان برای دو نقطه‌ای که روی محور y ها هستند، نتیجه گرفت که عرض نقطه وسط دو نقطه‌ی C و D، میانگین عرض نقاط C و D است.

اکنون می‌خواهیم برای دو نقطه‌ی دلخواه در صفحه، مختصات نقطه وسط را به‌دست آوریم. دو نقطه‌ی $A(x_A\,,\,y_A)$ و $B(x_B\,,\,y_B)$ را در نظر بگیرید.



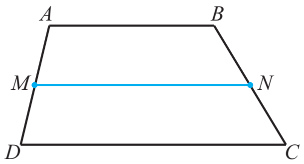
فرض کنید M وسط پاره خط AB است. در نتیجه x_M نیز وسط x_A و x_B است. پس:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

مشابهاً برای y_M نیز نتیجه می‌شود:

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

توجه کنید که در اینجا از یک قضیه هندسی استفاده کردیم. این قضیه بیان می‌دارد که اگر از وسط یک ساقِ ذوزنقه به موازات قاعده‌ها رسم کنیم، خط رسم شده از وسط ساق دیگر عبور می‌کند. این قضیه را که به «میان خط ذوزنقه» مشهور است در فصل بعد می‌بینیم.



فرض	$AM=DM\ ,\ MN \parallel DC$
حکم	$BN=CN$

در یک کلام

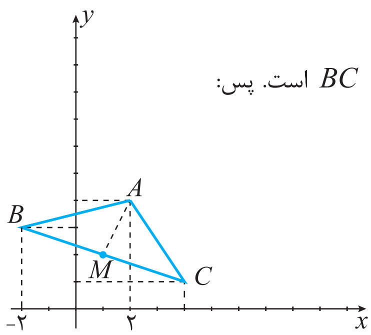
اگر M وسط پاره خط AB باشد، آنگاه $y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$ و $x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$. به عبارت دیگر M میانگینِ A و B است.

مثال ۱۴. **مثلثی با رئوس $A(۲,۴)$ ، $B(-۲,۳)$ و $C(۴,۱)$ را در نظر بگیرید. طول میانه AM را به‌دست آورید و معادله‌ی آن را بنویسید.**

پاسخ:

می‌دانیم میانه پاره خطی است که از یک رأس به وسط ضلع مقابل آن رسم می‌شود. بنابراین M وسط BC است. پس:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{-۲+۴}{۲}=۱ \qquad , \qquad y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲$$



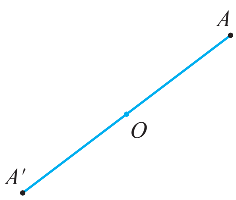
مختصات M به صورت $(۱,۲)$ است. طول میانه AM، فاصله‌ی A و M است.

$$AM=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$$

برای نوشـتن معادله‌ی AM، کافی اسـت معادله خطی را بنویسیم که از دو نقطه‌ی A و M عبور می‌کند.

از آن‌جایی که هم در A و هم در M ، y دو برابر x است، معادله AM به‌صورت $y=۲x$ است.

قرینه نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی O (۱-۱-۳-۱)

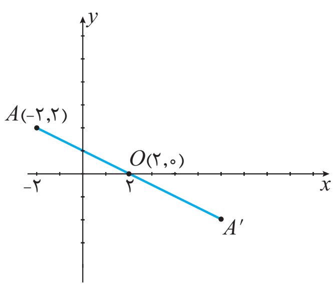


می‌دانیم برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به O، از A به O وصل می‌کنیم و در همان جهت و به همان اندازه (OA) امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی A' برسیم. در نتیجه O وسط AA' قرار می‌گیرد.

مثال ۱۵. **قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۲,۲)$ را نسبت به نقطه‌ی $(۲,۰)$ به‌دست آورید.**

پاسخ: می‌دانیم $(۲,۰)$ وسط نقاط $(-۲,۲)$ و A' است.

پس:



$$\frac{x_{A'}+(-۲)}{۲}=۲ \Rightarrow x_{A'}=۶$$

$$\frac{y_{A'}+۲}{۲}=۰ \Rightarrow y_{A'}=-۲$$

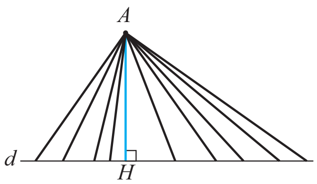
مختصات A' نقطه‌ی $(۶\,,-۲)$ است.

با همین روش می‌توانیم به نتیجه کلی زیر برسیم:

> **در یک کلام** قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha\,,\,\beta)$ نسبت به $O(x_0\,,y_0)$ نقطه‌ی P' است به طوری‌که
>
> $x_{P'} = 2x_0 - \alpha \qquad\qquad y_{P'} = 2y_0 - \beta$

و در حالت خاص قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha\,,\,\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ی $P'(-\alpha\,,-\beta)$ است.

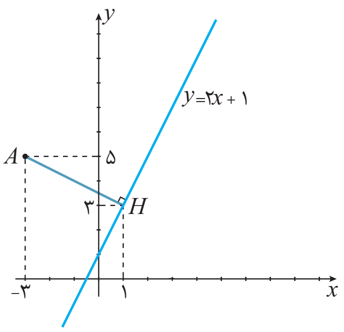
فاصله‌ی نقطه از خط (۱-۱-۴)



منظور از فاصله‌ی نقطه از خط، طول پاره خطی است که از نقطه به خط عمود می‌شود. این فاصله کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین نقطه و نقاط خط قابل تصور است.

فاصله‌ی A از d، طول پاره خط AH است.

مثال ۱۶. فاصله نقطه $(-3, 5)$ از خط $y = 2x + 1$ را به‌دست آورید.



پاسخ:

ابتدا معادله خط AH را به‌دست می‌آوریم. AH بر خط $y = 2x + 1$ عمود است. پس شیب آن $-\frac{1}{2}$ است. ضمناً از $A(-3, 5)$ عبور می‌کند.

$$AH \text{ معادله‌ی } : y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

اکنون دو خط $y = 2x + 1$ و $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ را تقاطع می‌دهیم تا مختصاتِ H را به‌دست آوریم.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow x = 1\,,\ y = 3$$

پس H نقطه‌ای به مختصات $(1\,,3)$ است.

در انتها برای به‌دست آوردن طول پاره خط AH، کافی است فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و H را به‌دست آوریم. $AH = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

روشی که در مثال فوق به کار بردیم، نیاز به هیچ فرمول یا مطلب جدیدی نداشت. به عبارت دیگر با دانسته‌های قبلی خود مسأله را حل کردیم. اما به دلیل طولانی بودنِ این روش، رابطه‌ای کلی برای فاصله‌ی نقطه از خط معرفی می‌کنیم.

> **در یک کلام** فاصله نقطه $(x_0\,,\,y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:
>
> $$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اثبات این رابطه به کمک تشابه مثلث‌ها صورت می‌گیرد.

در استفاده از این رابطه ابتدا باید معادله خط را به فرم $ax + by + c = 0$ تبدیل کنیم. این یعنی همه عبارات را به یک سمت ببریم و سمت دیگر معادله خط صفر شود.

اکنون مثال ۱۶ را به کمک این رابطه حل می‌کنیم.

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y - 2x - 1 = 0$$

$$d = \frac{|5 - 2(-3) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

توجه کنید که در رابطه‌ی فوق a و b ضرایب x و y در معادله خط و $ax_0 + by_0 + c$ یعنی مختصات نقطه را در معادله خط قرار دهیم.

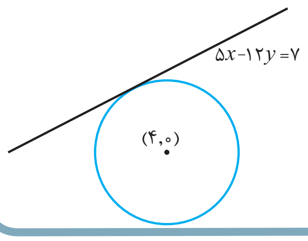
مثال ۱۷. فاصله نقطه‌ی $(۲\,,-۱)$ را از خط $۳x=۴y-۳$ به‌دست آورید.

پاسخ:

$$۳x=۴y-۳\Rightarrow ۳x-۴y+۳=۰$$

$$d=\frac{|۳\times۲-۴(-۱)+۳|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۳}{۵}$$

مثال ۱۸. خط $۵x-۱۲y=۷$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۴\,,۰)$ مماس است. قطر دایره را بیابید.



پاسخ: می‌دانیم شعاعی که به نقطه مماس وصل می‌شود بر خط مماس عمود است. بنابراین فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس همان شعاعِ دایره است.

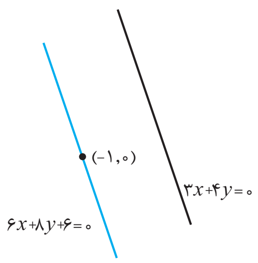
$$R=\frac{|۵\times۴-۱۲\times۰-۷|}{\sqrt{۵^۲+(-۱۲)^۲}}=\frac{۱۳}{۱۳}=۱$$

پس قطر دایره ۲ واحد است.

فاصله دو خط موازی (۱-۱-٤-۱)

می‌دانیم فاصله‌ی دو خط موازی همواره ثابت است و تغییر نمی‌کند. در مثال زیر به کمک دانسته‌های قبلی فاصله دو خط موازی را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱۹. فاصله‌ی دو خط $۶x+۸y+۶=۰$ و $۳x+۴y=۰$ را به‌دست آورید.



پاسخ: نقطه‌ای به دلخواه روی یکی از خطوط در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی آن نقطه از خط دیگر، فاصله‌ی دو خط است.

مثلاً نقطه‌ی $(-۱\,,۰)$ روی خط اول قرار دارد. فاصله‌ی $(-۱\,,۰)$ از $۳x+۴y=۰$ فاصله‌ی این دو خط است.

$$d=\frac{|۳(-۱)+۴(۰)|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۳}{۵}$$

فاصله‌ی دو خط موازی نیز رابطه‌ای دارد که ما را از روشِ مثالِ فوق بی‌نیاز می‌کند.

در یک کلام فاصله‌ی دو خط $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با: $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

توجه کنید که در استفاده از رابطه‌ی فوق باید ضریب x در دو معادله خط برابر و ضریب y نیز در دو معادله برابر باشند. مثلاً اگر بخواهیم مثال ۱۹ را با این رابطه حل کنیم ابتدا باید ضرایب را متناظراً یکسان کنیم.

$$۳x+۴y=۰\quad,\quad ۶x+۸y+۶=۰\Rightarrow ۳x+۴y+۳=۰$$

$$d=\frac{|۳-۰|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۳}{۵}$$

هم‌چنین توجه کنید که اثبات رابطه‌ی فوق به همان روشی صورت می‌گیرد که مثال ۱۹ را حل کردیم.

مسائل نمونه درس اول

۱. مساحت مثلث با رئوس $A(۰,-۴)$ و $B(۲,۱)$ و $C(-۱\ ,\ ۲)$ را به‌دست آورید.

۲. طول نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث با رئوس $A(-۱,۱)$ و $B(۲\ ,\ ۰)$ و $C(-۱\ ,-۱)$ را به‌دست آورید.

۳. خط $۴x+۳y=۵$ بر دایره‌ای به مرکز $(-۱,\ ۲)$ مماس است. مساحت دایره را به‌دست آورید.

٤. $A(۳\ ,\ -۱)$ و $B(۲\ ,\ ۰)$ و M روی خط گذرا از A و B است به‌طوری که داریم، $۲MA=۳MB$. مختصات M را بیابید.

۵. خطی با شیب m از نقطه‌ی $(۲\ ,\ ۱)$ گذشته و محورهای مختصات را در A و B قطع می‌کند. مقدار m را طوری به‌دست آورید که مساحت OAB برابر ۴ شود (O: مبدأ مختصات)

۶. مرکز دایره‌ای را که از سه نقطه‌ی $A(-۱۲,۷)$ و $B(۴,۳)$ و $C(-۳,-۸)$ عبور می‌کند، به‌دست آورید.

۷. مقدار a را طوری به‌دست آورید که دو خط زیر باهم موازی باشند. به ازای چه مقادیری از a دو خط بر هم منطبق هستند؟

$$\begin{cases}(۲a-۳)x+ay-۲=۲y+۳\\(۳a-۱)y+۲(۳a+۱)x=a-۱\end{cases}$$

۸. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱\ ,\ ۱)$ را نسبت به خط $y=-۳x-۱$ به‌دست آورید.

۹. نقاط $A(۲\ ,\ ۳)$ و $B(۶\ ,\ -۵)$ را در نظر بگیرید. مختصات نقطه‌ی C واقع بر محور عرض‌ها را چنان بیابید که مثلث ABC در رأس A قائمه باشد.

۱۰. نقاطی روی نیمساز ربع اول و سوم بیابید که فاصله‌ی آن‌ها از $A(۴\ ,\ -۱)$ برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد.

۱۱. نقطه‌ی $A(۴\ ,\ ۲)$ یک رأس متوازی الاضلاعی است که دو ضلعش به معادلات $۲x-۳y+۱=۰$ و $۴x+۳y=۷$ می‌باشند. مطلوب است تعیین:

الف) معادلات دو ضلع دیگر از متوازی الاضلاع

ب) مختصات مرکز متوازی الاضلاع

ج) مساحت متوازی الاضلاع

۱۲. دو خط به معادلات $y=۲x+۱$ و $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$ را در نظر بگیرید. اگر $a+b=۵$ باشد، مقادیر a و b را چنان بیابید که این دو خط برهم عمود باشند.

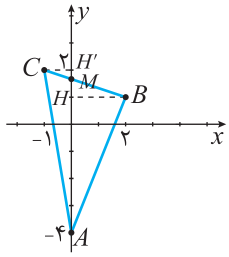
۱۳. دو نقطه‌ی $A(m-۱\ ,\ ۳m+۷)$ و $B(۲m+۳\ ,-m+۴)$ را در نظر بگیرید. مقدار m را چنان تعیین کنید که وسط پاره‌خط AB روی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

۱٤. نقاط $A(۳\ ,\ ۴)$ و $B(۰\ ,\ ۲)$ دو رأس مثلثی هستند که محل تلاقی ارتفاع آن‌ها $N(۲\ ,\ ۱)$ است. مختصات رأس C را به‌دست آورید.

۱۵. نقطه‌ی M روی نیمساز ربع اول به چه فاصله‌ای از مبدأ مختصات باشد تا مجموع فواصل M از دو نقطه‌ی $A(-۱,۴)$ و $B(-۳,۲)$ کم‌ترین مقدار ممکن باشد؟

پاسخ مسائل نمونه درس اول

۱. روش ۱) برای به‌دست آوردن مساحت مثلث ABC، مساحت مثلث‌های ABM و ACM را به‌دست می‌آوریم:



برای مساحت $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$S_{\overset{\Delta}{ABM}}=\frac{۱}{۲}\times AM\times BH$$

برای به‌دست آوردن AM نیاز پیدا می‌کنیم که مختصات نقطه‌ی M را به‌دست آوریم. نقطه‌ی M روی خط BC است:

$$y-۱=\frac{۱-۲}{۲-(-۱)}(x-۲)\Rightarrow y-۱=-\frac{۱}{۳}(x-۲)$$

$\Rightarrow$ عرض از مبدأ $=\frac{۵}{۳}$ مختصات M: $(۰,\frac{۵}{۳})$

$$\Rightarrow AM=\frac{۵}{۳}+۴=\frac{۱۷}{۳}\ ,\ BH=۲$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABM}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۷}{۳}\times ۲=\frac{۱۷}{۳}$$

برای مساحت $\overset{\Delta}{ACM}$:

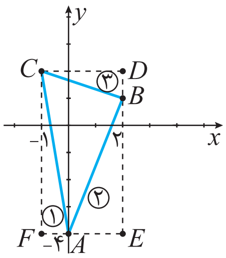
$$S_{\overset{\Delta}{ACM}}=\frac{۱}{۲}\times AM\times CH'$$

$$AM=\frac{۱۷}{۳}\ ,\ CH'=۱$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ACM}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۷}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۷}{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{AMC}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۷}{۳}+\frac{۱۷}{۳}=\frac{۳}{۲}\times\frac{۱۷}{۳}=\frac{۱۷}{۲}$$

روش ۲) با توجه به شکل مساحت ۳ مثلث را از مستطیل بزرگ کم می‌کنیم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\underset{CDEF}{\square}}-(S_۱+S_۲+S_۳)$$

$$=۳\times ۶-(\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۶+\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۳+\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۵)$$

$$=۱۸-(۳+\frac{۳}{۲}+۵)=\frac{۱۷}{۲}$$

روش ۳) در حالت کلی مساحت هر مثلث ABC به مختصات رئوس $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_B\\y_B\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}x_C\\y_C\end{vmatrix}$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ x_A & x_B & x_C\\ y_A & y_B & y_C\end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|M|$$

به $|M|$ می‌گویند «دترمینان M» که حاصل آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}(x_By_C-x_Cy_B+x_Cy_A-x_Ay_C+x_Ay_B-x_By_A)$$

برخی از دانش‌آموزان این رابطه را این‌گونه حساب می‌کنند.

$$\begin{matrix}x_A & x_B & x_C & x_A\\ y_A & y_B & y_C & y_A\end{matrix}$$

$$S=\frac{۱}{۲}[(x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A)-(x_Ay_C+x_Cy_B+x_By_A)]$$

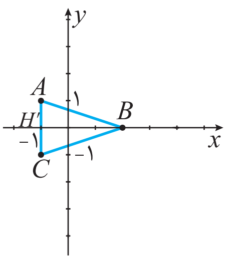
مثلاً برای حساب کردن $S_{\overset{\Delta}{ABC}}$ در این مثال

$$\begin{matrix}A & B & C & A\\ ۰ & ۲ & -۱ & ۰\\ -۴ & ۱ & ۲ & -۴\end{matrix}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}[(۰\times ۱+۲\times ۲+(-۱)(-۴))-(۰\times ۲+(-۱)\times ۱+۲(-۴))]$$

$$=\frac{۱}{۲}[۴+۴+۱+۸]=\frac{۱۷}{۲}$$

۲. چون ABC یک مثلث متساوی الساقین به رأس B است حتماً BH' یکی از ارتفاع‌های مثلث ABC می‌باشد.



BH' هم روی محور x ها می‌باشد. کافی است معادله‌ی ارتفاع AH را به‌دست بیاوریم و حاصل تقاطع آن با محور x ها را به‌دست آوریم: برای معادله‌ی خط AH که عمود بر ضلع BC است، به شیب آن و یک نقطه روی آن نیاز داریم:

$$m_{AH}=-\frac{۱}{m_{BC}}\ ,\ AH\ \text{نقطه‌ی روی}:A$$

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۰-(-۱)}{۲-(-۱)}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow m_{AH}=-۳\ ,\ A(-۱,۱)$$

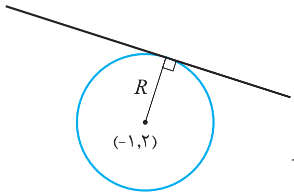
$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۱=-۳(x-(-۱))$$

$$y-۱=-۳x-۳\Rightarrow y=-۳x-۲:AH$$

$$۰=-۳x-۲\Rightarrow -۳x=۲\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

محل تلاقی : $(-\frac{۲}{۳},۰)$

۳. فاصله‌ی نقطه‌ی $(-۱,۲)$ از خط $۴x+۳y-۵=۰$ برابر اندازه‌ی شعاع دایره می‌باشد. لذا داریم:



$$R=\frac{|۴(-۱)+۳(-۲)-۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\Rightarrow S=\pi R^۲=۹\pi$$

٤. معادله‌ی خط گذرنده از $A(۳,-۱)$ و $B(۲,۰)$ را می‌نویسیم:

$$y-۰=m(x-۲) \quad \text{و} \quad m=\frac{۰-(-۱)}{۲-۳}=-۱$$

$$\Rightarrow y=-x+۲$$

مجموعه‌ی نقاط روی خط $y=-x+۲$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$M(\alpha\,,\,-\alpha+۲)$$

$$\Rightarrow ۳MB=۲MA$$

$$\Rightarrow ۳\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲-\alpha)^۲}=۲\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(-\alpha+۳)^۲}$$

$$\Rightarrow ۳|\alpha-۲|\cancel{\sqrt{۲}}=۲|\alpha-۳|\cancel{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow ۳|\alpha-۲|=۲|\alpha-۳|$$

$$۳\le\alpha \Rightarrow ۳\alpha-۶=۲\alpha-۶ \Rightarrow \alpha=۰ \Rightarrow M(۰,۲)$$

$$۲\le\alpha<۳ \Rightarrow ۳\alpha-۶=۶-۲\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{۱۲}{۵} \Rightarrow M(\frac{۱۲}{۵},-\frac{۲}{۵})$$

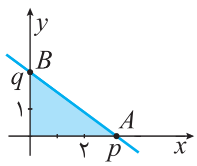
$$\alpha<۲ \Rightarrow ۶-۳\alpha=۶-۲\alpha \Rightarrow \alpha=۰ \Rightarrow M(۰,۲)$$

پس نقاط M $(۲,۰)$ و $(\frac{۱۲}{۵},-\frac{۲}{۵})$ می‌تواند باشد.

۵. معادله‌ی خطی که دارای طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q می‌باشد این‌گونه است:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$$

همان‌طور که در شکل می‌بینیم مساحت مثلث OAB برابر $\frac{۱}{۲}pq$ می‌باشد. پس $\frac{۱}{۲}pq=۴$ و $pq=۸$.



از طرفی نقطه‌ی $(۲,۱)$ روی خط $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$ قرار دارد، پس

$$\frac{۲}{p}+\frac{۱}{q}=۱ \Rightarrow p+۲q=pq$$

$$\begin{cases} p+۲q=pq \\ pq=۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+۲q=۸ \Rightarrow p=۸-۲q \\ pq=۸ \end{cases}$$

$$(۸-۲q)q=۸ \Rightarrow (۴-q)q=۴$$

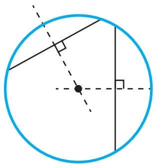
$$q^۲-۴q+۴=۰ \Rightarrow (q-۲)^۲=۰$$

$$q=۲\,,\,p=۴$$

خط $:\frac{x}{۴}+\frac{y}{۲}=۱ \Rightarrow ۲x+۴y-۸=۰$

$$m=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

۶. می‌دانیم عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره می‌گذرد. بنابراین مرکز دایره از برخورد عمودمنصف AB و AC به‌دست می‌آید.



برای به‌دست آوردن عمودمنصف پاره خط AB، به شیب آن و یک نقطه روی آن نیاز داریم. شیب عمودمنصف AB که قرینه و معکوس شیب AB است. یک نقطه روی آن هم وسط پاره خط AB است و اینگونه معادله خط عمودمنصف AB به‌دست می‌آید. اما در اینجا راه دیگری را برای به‌دست آوردن عمودمنصف AB بکار می‌گیریم:

عمودمنصف AB به مجموعه نقاطی گفته می‌شود که فاصله‌ی آن‌ها از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است. لذا داریم:

فاصله‌ی $(x\,,\,y)$ از A $=d_۱$

$$=\sqrt{(x+۱۲)^۲+(y-۷)^۲}$$

فاصله‌ی $(x\,,\,y)$ از B $=d_۲$

$$=\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۳)^۲}$$

$$d_۱=d_۲ \Rightarrow \cancel{x^۲}+۲۴x+۱۴۴+\cancel{y^۲}-۱۴y+۴۹$$

$$=\cancel{x^۲}-۸x+۱۶+\cancel{y^۲}-۶y+۹$$

$$\Rightarrow ۳۲x-۸y+۱۶۸=۰ \Rightarrow ۴x-y+۲۱=۰$$

برای عمودمنصف AC :

$$(x+۱۲)^۲+(y-۷)^۲=(x+۳)^۲+(y+۸)^۲$$

$$\cancel{x^۲}+۲۴x+۱۴۴+\cancel{y^۲}-۱۴y+۴۹=$$

$$\cancel{x^۲}+۶x+۹+\cancel{y^۲}+۱۶y+۶۴$$

$$۱۸x-۳۰y+۱۲۰=۰ \Rightarrow ۳x-۵y+۲۰=۰$$

حال این دو خط را تقاطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} ۴x-y+۲۱=۰ \Rightarrow y=۴x+۲۱ \\ ۳x-۵y+۲۰=۰ \Rightarrow ۳x-۵(۴x+۱)+۲۰=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۷x=-۸۵ \Rightarrow x=-۵\,,\,y=۱$$

۷. اگر دو خط $\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ a'x+b'y+c'=۰ \end{cases}$ را داشته باشیم، دو خط موازی هستند هرگاه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ و دو خط منطبق هستند هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

لذا داریم:

برای موازی بودن دو خط:

$$\frac{۲a-۳}{۶a+۲}=\frac{a-۲}{۳a-۱}$$

$$\cancel{۶a^۲}-۹a-۲a+۳=\cancel{۶a^۲}-۱۲a+۲a-۴$$

$$-۱۱a+۳=-۱۰a-۴ \Rightarrow a=۷$$

برای انطباق دو خط:

$$\frac{۲a-۳}{۶a+۲}=\frac{a-۲}{۳a-۱}=\frac{۵}{a-۱}$$

$$\frac{a-۲}{۳a-۱}=\frac{۵}{a-۱}\Rightarrow a^{۲}-۳a+۲=۱۵a-۵$$

$$a^{۲}-۱۸a+۷=۰\Rightarrow a=۹\pm\sqrt{۷۴}$$

که چون این جواب با جواب $a=۷$ اشتراکی ندارد، پس حالت انطباق برای این دو خط نداریم.

۸. برای به‌دست آوردن قرینه نقطه‌ی A نسبت به خط $y=-۳x-۱$ گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام ۱: معادله‌ی خط عمود بر خط $y=-۳x-۱$ و گذرنده از A را می‌نویسیم:

$$m=-\frac{۱}{-۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۳}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}$$

گام ۲: تقاطع دو خط $y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}$ و $y=-۳x-۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}=-۳x-۱$$

$$x+۲=-۹x-۳\Rightarrow ۱۰x=-۵\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

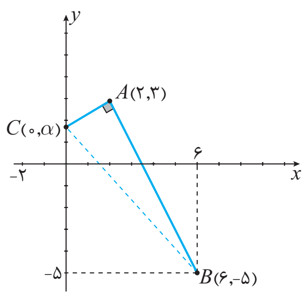
$$y=-۳(-\frac{۱}{۲})-۱=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

نقطه‌ی تقاطع: $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$

گام ۳: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱,۱)$ را نسبت به $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم:

$$A'(x,y)=(۲(-\frac{۱}{۲})-۱,\ ۲(\frac{۱}{۲})-۱)\Rightarrow A'(-۲,۰)$$

۹. مختصات نقطه‌ی C را به شکل $(۰,\alpha)$ می‌نویسیم، در شکل هم می‌بینیم خط AC بر خط AB عمود است پس حاصل ضرب شیب AB در شیب AC برابر(۱-) است:



$$m_{AB}\times m_{AC}=-۱$$

$$m_{AB}=\frac{-۵-۳}{۶-۲}=-۲\ ,\ m_{AC}=\frac{\alpha-۳}{-۲}$$

$$\frac{\alpha-۳}{-۲}\times(-۲)=-۱\Rightarrow \alpha-۳=-۱\Rightarrow \alpha=۲$$

$$C(۲,۰)$$

۱۰. مختصات نقاط روی نیمساز ربع اول و سوم را می‌توان به شکل (α,α) در نظر گرفت، لذا داریم:

$$\sqrt{(\alpha-۴)^{۲}+(\alpha+۱)^{۲}}=\sqrt{۱۳}$$

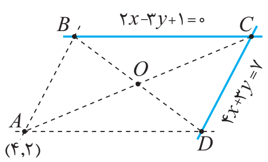
$$\alpha^{۲}-۸\alpha+۱۶+\alpha^{۲}+۲\alpha+۱=۱۳$$

$$۲\alpha^{۲}-۶\alpha+۴=۰\Rightarrow \alpha^{۲}-۳\alpha+۲=۰$$

$$(\alpha-۱)(\alpha-۲)=۰\Rightarrow \alpha=۱\ ,\ \alpha=۲$$

نقاط: $(۱,۱)\ ,\ (۲,۲)$

۱۱. اگر به صورت شماتیک داده‌های سؤال را رسم کنیم خواهیم داشت:



الف) معادلات دو ضلع دیگر، موازی دو ضلع داده شده‌ی متوازی الاضلاع هستند، یعنی شیب آن‌ها را می‌دانیم و نقطه‌ی $A(۴,۲)$ هم روی آن‌ها هستند:

ضلع AB: $۴x+۳y=c\ ,\ (۴,۲)$

$$۴\times۴+۳\times۲=c\Rightarrow c=۲۲$$

معادله‌ی ضلع AB: $۴x+۳y=۲۲$

ضلع AD: $۲x-۳y=c'\ ,\ (۴,۲)$

$$۲\times۴-۳\times۲=c'\Rightarrow c'=۲$$

معادله‌ی ضلع AD: $۲x-۳y=۲$

ب) طبق شکل می‌بینیم که مرکز متوازی الاضلاع (O)، بین دو نقطه‌ی A و C می‌باشد. (در متوازی الاضلاع، اقطار همدیگر را نصف می‌کنند.) پس کافی است مختصات C که حاصل تقاطع دو خط CD و BC می‌باشد را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases}۲x-۳y+۱=۰\\ ۴x+۳y=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴x-۶y+۲=۰ & (۱)\\ ۴x+۳y-۷=۰ & (۲)\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۹y-۹=۰\Rightarrow y=۱$$

$$۴x-۶+۲=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow C(۱,۱)$$

$$O\text{ مختصات}:\left|\begin{matrix}\frac{x_A+x_C}{۲}\\ \frac{y_A+y_C}{۲}\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}\frac{۴+۱}{۲}\\ \frac{۲+۱}{۲}\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}۲/۵\\ ۱/۵\end{matrix}\right.$$

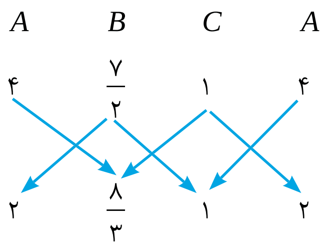
ج) برای محاسبه مساحت متوازی الاضلاع کافی است مساحت مثلث ABC را به‌دست بیاوریم و حاصل آن را دو برابر کنیم. برای به‌دست آوردن مساحت ABC ابتدا باید مختصات B را به‌دست آوریم:

برای یافتن B باید خط BC و AB را باهم تقاطع بدهیم:

$$\begin{cases} 4x+3y=22 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow 6x=21 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

$$7-3y+1=0 \Rightarrow y=\frac{8}{3}$$

حال برای مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}[(\frac{32}{3}+\frac{7}{2}+2)-(4+\frac{8}{3}+7)]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{24}{3}-9+\frac{7}{2}]=\frac{1}{2}[-1+\frac{7}{2}]=\frac{5}{4}$$

مساحت متوازی الاضلاع، دو برابر مساحت مثلث ABC می‌باشد.

$$S=2(\frac{5}{4})=\frac{5}{2}$$

۱۲. $bx+ay=ab \Rightarrow$ شیب $=-\dfrac{b}{a}$

$$-\frac{b}{a}=2 \Rightarrow 2a+b=0$$

$$a+b=5 \Rightarrow b=5-a$$

$$2a+(5-a)=0 \Rightarrow a=-5 \Rightarrow b=10$$

۱۳. اگر وسط AB را M بگیریم:

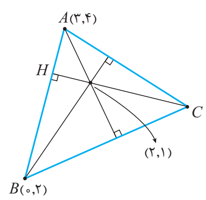
$$x_M=\frac{(m-1)+(2m+3)}{2}=\frac{3m+2}{2}$$

$$y_M=\frac{(3m+7)+(-m+4)}{2}=\frac{2m+11}{2}$$

اگر M روی نیمساز ربع اول و سوم باشد، داریم: $x_M=y_M$؛ لذا داریم:

$$\frac{3m+2}{2}=\frac{2m+11}{2} \Rightarrow 3m+2=2m+11 \Rightarrow m=9$$

۱۴. برای به‌دست آوردن مختصات C با توجه به شکل گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



امتداد AN ارتفاع وارد بر ضلع BC و امتداد BN ارتفاع وارد بر ضلع AC می‌باشند:

$$AN: y-1=\frac{4-1}{3-2}(x-2) \Rightarrow y-3x+5=0$$

$$BN: y-1=\frac{2-1}{0-2}(x-2) \Rightarrow 2y+x-4=0$$

BC خطی است که از B گذشته و بر AN عمود است:

$$m_{AN}=3 \Rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{3} \Rightarrow BC: y=-\frac{1}{3}x+h$$

$$B\in BC \Rightarrow 2=-\frac{1}{3}(0)+h \Rightarrow h=2$$

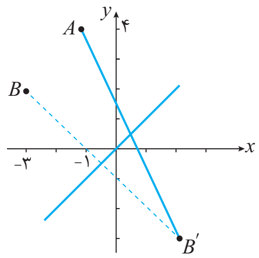
$$BC: y=-\frac{1}{3}x+2$$

به همین روش معادله‌ی AC به صورت $y=2x-2$ به‌دست می‌آید.

نقطه‌ی C محل تلاقی دو خط AC و BC می‌باشد:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+2 \\ y=2x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_C=\frac{12}{7} \\ y_C=\frac{10}{7} \end{matrix}$$

۱۵. اگر شکل را به صورت شماتیک رسم کنیم به این صورت می‌شود: برای این‌که $AM+MB$ حداقل شود، از خواص بازتاب استفاده می‌کنیم.



ابتدا قرینه‌ی نقطه‌ی B نسبت به خط را به‌دست می‌آوریم یعنی B'. از آن‌جا که کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه خط راست بین آن‌ها می‌باشد از A به B' وصل می‌کنیم. تقاطع AB' با خط اصلی را M می‌نامیم. سپس از M به B وصل می‌کنیم. لذا $AM+MB$، با این M به کم‌ترین مقدار می‌رسد.

پس گام‌های زیر را باید طی کنیم:

گام ۱: قرینه‌ی B نسبت به نیمساز ربع اول و سوم را به‌دست می‌آوریم:

برای این کار ابتدا خط عمود بر نیمساز ربع اول و سوم و گذرنده از نقطه‌ی $(-3, 2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=-x+c \Rightarrow 2=3+c \Rightarrow c=-1 \Rightarrow y=-x-1$$

تقاطع این خط با $y=x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-x-1=x \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

گام ۲: به‌دست آوردن B':

$$\begin{matrix} x_{B'}=2(-\frac{1}{2})-(-3)=-1+3=2 \\ y_{B'}=2(-\frac{1}{2})-2=-1-2=-3 \end{matrix} \Rightarrow B'(2,-3)$$

گام ۳: معادله‌ی خط AB' را به‌دست می‌آوریم:

$$A(-1,4), \quad B(2,-3)$$

$$y-4=\frac{-3-4}{2-(-1)}(x+1)$$

$$y-4=-\frac{7}{3}(x+1) \Rightarrow y=-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$$

گام ۴: خط AB' را با خط $y=x$ قطع می‌دهیم:

$$-\frac{۷}{۳}x+\frac{۵}{۳}=x \Rightarrow \frac{۱۰}{۳}x=\frac{۵}{۳} \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$y=\frac{۱}{۲} \Rightarrow M(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}) \Rightarrow d=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

توجه کنید که می‌شود همه‌ی نقاطی که روی خط $y=x$ هستند به شکل (α , α) گرفت و نوشت:

$$f(\alpha)=\sqrt{(\alpha+۱)^{۲}+(\alpha-۴)^{۲}}+\sqrt{(\alpha+۳)^{۲}+(\alpha-۲)^{۲}}$$

در حقیقت ما باید تلاش کنیم حداقل این تابع را به‌دست بیاوریم که همان‌طور که مشخص است با دانشی که تا الان از ریاضی داریم، ابزاری برای به‌دست آوردن حداقل این تابع نداریم.

ابزاری که برای به‌دست آوردن حداقل $f(\alpha)$ نیاز داریم، مشتق می‌باشد که در سال بعد با آن آشنایی پیدا خواهید کرد. ولی بدانید اگر مشتق هم بلد بودید بهترین روش حل این سؤال همین راه گفته شده می‌باشد.

تمارین درس اول

۱. اگر نقطه‌ی $A=(m-۲\,,\,۳m+۲)$ روی محور yها و نقطه‌ی $B=(۳+n^۲\,,\,n+۱)$ روی محور x ها باشند، مختصات وسط پاره خط AB را بیابید.

۲. حدود n را طوری تعیین کنید که $A=(۳+n^۲\,,n+۱)$ در ربع سوم صفحه مختصات باشد.

۳. مقدار k را طوری به‌دست آورید که فاصله‌ی $A(۲,۳)$ از خط $۳x+ky+۲=۰$ برابر ۴ باشد.

۴. در هر مورد فاصله‌ی دو خط موازی را به‌دست آورید.

الف) $\begin{cases}۶x=۸y-۴\\ ۳x-۴y+۱=۰\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x-y=۳\\ y=x+۱\end{cases}$

۵. اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط $x+۲y=۵$ و $x=۲$ و $y=۲x$ می‌باشد.

الف) نوع مثلث را تعیین کنید.

ب) مساحت مثلث را به‌دست آورید.

۶. قطر مربعی $۴x+y=۱۰$ می‌باشد و یکی از رئوس آن نقطه‌ی $A(۱\,,۲)$ می‌باشد. مساحت مربع را به‌دست آورید.

۷. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $a^۲x+(a^۲+۱)y=۵$ برابر یک واحد است. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $(a^۲+۱)x+a^۲y=۱۰$ چقدر است؟

۸. معادله‌ی دو ضلع از یک مربع به صورت $y=۲x$ و $۲y-۴x=۵$ است. مساحت مربع را به‌دست آورید.

۹. نقاط $A(۵,-۱)$ و $B(-۱,\,۷)$ را در نظر بگیرید. معادله خط گذرا از A و B به صورت $rx+my=n$ می‌باشد که r,m,n عضو مجموعه‌ی اعداد صحیح هستند. مقدار p را طوری به‌دست آورید که: $B(p,۰)$ و $BA=BC$

۱۰. چهارضلعی $ABCD$ را در نظر بگیرید. $A(۱\,,۲)$ و $B(۶\,,۷)$ و $C(۹,\,۶)$ می‌باشند و داریم: $DC=BC$ و $AB=AD$ و F پای عمود وارده از B بر خط AC می‌باشد. مطلوبست:

الف) مختصات F و D

ب) مساحت $ABCD$

۱۱. در مورد چهارضلعی $PQRS$ داریم: $SR\parallel PQ$ و $P(۱\,,-۱)$ و $Q(۷\,,۱)$ و $S(۳\,,۳)$ و $P\hat{Q}R=۹۰^\circ$ مطلوبست:

الف) مختصات R

ب) مساحت $PQRS$

۱۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۳,۱)$ گذشته و حاصل ضرب طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن برابر ۱۲ باشد.

۱۳. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(m+n,۲n-۱)$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم، نقطه‌ی $B(۲-۳n,n-۲m)$ است. $m,\,n$ را به‌دست آورید.

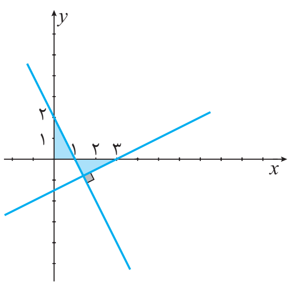
۱۴. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط گذرنده از نقطه‌ی $(۱,۷)$ برابر $\sqrt{۵}$ است. شیب خط را به‌دست آورید.

۱۵. دو خط متمایز به معادلات $y=۳x+m$ و $y=mx+۳$ یکدیگر را روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قطع می‌کنند. m چقدر است؟

۱۶. خط $۳x-۲y=۵$ بر دایره‌ای به مرکز $(۳,۱)$ مماس است. مختصات نقطه‌ی تماس را بیابید.

۱۷. مجموعه خطوط $mx-۲y+۴m-۶=۰$ از یک نقطه‌ی ثابت می‌گذرند. فاصله‌ی این نقطه تا مبدأ مختصات را به‌دست آورید.

۱۸. با توجه به شکل مساحت قسمت هاشور خورده را به‌دست آورید.



۱۹. قرینه‌ی نقطه‌ی $M(۴\,,۱)$ نسبت به خط $y=۲x+۱$ را به‌دست آورید.

۲۰. خط d به معادله‌ی $ax+۲y-۵=۰$ و نقاط $A(۴,۷)$ و $B(۲,۱)$ را در نظر بگیرید. به ازای چه مقادیری از a، دو نقطه A و B از خط d به یک فاصله هستند؟

۲۱. m را چنان بیابید تا نقاط $A(۲m-۱,\,m)$ و $B(۳m+۱,۲m+۱)$ و $C(-۵m,m-۴)$ در یک راستا باشند. (یعنی: برروی یک خط راست باشند.)

۲۲. نقطه‌ی $M(۳,۲)$ وسط پاره خط AB است. A روی محور طول‌ها و B روی محور عرض‌ها واقع شده است. معادله‌ی خط AB را بنویسید.

۲۳. مطلوبست تعیین معادله‌ی خطی که از $A(۱,\frac{۸}{۳})$ گذشته و مجموع طول پاره خط‌هایی که بین این خط و مبدأ مختصات روی دو محور جدا می‌شود برابر ۷ باشد.

۲۴. دو نقطــه‌ی $A(۲,۱)$ و $B(۰ , ۲)$ و خط Δ به معادله‌ی y-۲x=۱۰ را در نظــر بگیریــد. روی خط Δ ، نقطه‌ی C را چنان بیابید که مســاحت مثلث ABC برابر ۵ واحد شود.

۲۵. نقطه‌ی $M(۱, ۲)$ یکی از رئوس مستطیلی است که یک ضلع آن روی خــط $۳x-۲y=۶$ و یــک رأس آن روی محور yها واقع شــده اســت. مختصات رئوس دیگر این مستطیل را به‌دست آورید.

۲۶. دو نقطــه‌ی $A(m-۱ , ۲m)$ و $B(m+۱ , ۲-۲m)$ را در نظــر بگیرید. m را چنان بیابید که وسط پاره خط AB روی خط $y-۲x+۱=۰$ باشد.

۲۷. بــه ازای چــه مقادیــری از m و n نقاط $A(-n,m)$ و $B(۲m,-۲)$ نسبت به نقطه‌ی $M(۳n-۱,m+n)$ قرینه‌ی یکدیگر هستند؟

۲۸. نقطــه‌ی $\omega(۳,-۱)$ مرکز مربــع $ABCD$ اســت. اگر $A(-۱,۲)$ ، مساحت مربع را به‌دست آورید.

۲۹. مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره‌ای را به دست آورید که بر دو خط $۴x-۳y=۳۰$ و $۴x-۳y+۱۰=۰$ مماس بــوده و مرکز آن بر خط به معادله‌ی $۲x+y=۰$ واقع باشد.

۳۰. خطی که از نقاط $(۱ , m-۳)$ و $(۱-m, -۱)$ می‌گذرد، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۷- قطع کرده است. m را بیابید.

۳۱. دو ضلــع یــک مربــع روی خطــوط $۲y+x=۳$ و $۴y=k-۲x$ هستند. اگر مساحت مربع ۳/۲ باشد، k را بیابید.

۳۲. دایــره‌ای از دو نقطه‌ی $(۱ , ۰)$ و $(۰ , ۳)$ گذشــته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x-y=۲$ است. شعاع این دایره را به‌دست آورید.

۳۳. دایــره‌ای از دو نقطــه‌ی $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ گذشــته و بــر خط $y=۱$ مماس است. شعاع دایره را به‌دست آورید.

۳۴. نقطــه‌ای به مختصات $(m , ۳)$ روی نیمســاز مثلــث ABC به رئوس $A(۱,۱)$ ، $B(۵,۵)$ و $C(۲,۴)$ قرار دارد. m را به‌دست آورید.

۳۵. اگــر $B(-۲ , ۳)$ و $C(۰ , ۱)$ دو رأس مثلــث متساوی‌الســاقین ABC باشند $(AB = AC)$ و طول هر ساق برابر $\sqrt{۷۴}$ باشد، مختصات رأس A را به‌دست آورید.

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه دو

یادآوری و تکمیل روش‌های حل معادله درجه ۲ (۱-۲-۱)

با معادله درجه دو در سال دهم آشنا شدیم. می‌دانیم معادله‌ای که مجهول آن از درجه دو باشد، معادله درجه دو نامیده می‌شود. به عنوان مثال، معادله $۳x^۲ - ۴x = ۷$ معادله‌ای درجه دو است.

در حالت کلی معادلات به فرم $ax^۲ + bx + c = ۰$ با شرطِ $a \neq ۰$ معادله درجه دو نامیده می‌شوند. در اینجا می‌خواهیم روش‌های مختلفی را برای حل معادله درجه دو مطرح کنیم.

روشِ Δ (۱-۱-۲-۱)

در یک کلام

در معادله درجه دو به فرم $ax^۲ + bx + c = ۰$ ریشه‌ها عبارتند از:

$$x_۱ , x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad \Delta = b^۲ - ۴ac$$

مثلاً برای حل معادله $۳x^۲ - ۴x = ۷$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$۳x^۲ - ۴x = ۷ \Rightarrow ۳x^۲ - ۴x - ۷ = ۰$$

$$\Delta = (-۴)^۲ - ۴(۳)(-۷) = ۱۰۰ \Rightarrow x_۱ , x_۲ = \frac{-(-۴) \pm ۱۰}{۶} = -۱ , \frac{۷}{۳}$$

توجه دارید که در رابطه‌ی ریشه‌ها، Δ زیر رادیکال قرار گرفته است. این موضوع شرایطی را برای وجود و تعداد ریشه‌ها موجب می‌شود.

$$\begin{cases} \Delta > ۰ : \text{معادله دو ریشه متمایز دارد} \\ \Delta = ۰ : \text{معادله یک ریشه دارد / ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta < ۰ : \text{معادله ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

به عنوان مثال معادله‌ی $x^۲ + ۲x + ۳ = ۰$ ریشه حقیقی ندارد. چون $\Delta = -۸$ عددی منفی است.

روشِ Δ' (۲-۱-۲-۱)

در یک کلام

در شرایطی که b (ضریب x) زوج باشد، ریشه‌ها از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند.

$$x_۱ , x_۲ = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \qquad \Delta' = b'^۲ - ac \quad , \quad b' = \frac{b}{۲}$$

به عنوان مثال همان معادله قبلی را از این روش حل می‌کنیم.

$$۳x^۲ - ۴x - ۷ = ۰$$

$$b' = -۲ \qquad \Delta' = (-۲)^۲ - (۳)(-۷) = ۲۵$$

$$x_۱ , x_۲ = \frac{۲ \pm ۵}{۳} = -۱ , \frac{۷}{۳}$$

توجه کنید که در شرایطی که b زوج باشد، استفاده از روش Δ' محاسبات را کم‌تر و ساده‌تر می‌کند. در نتیجه دقتِ حل معادله بالاتر می‌رود. البته در حالتی که b زوج نباشد نیز می‌توان از این روش استفاده کرد. اما محاسباتمان زیاد می‌شود. به عنوانِ مثال معادله $x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$ را با Δ' حل کنید تا متوجه شوید اولاً جواب می‌دهد ثانیاً محاسباتمان پیچیده‌تر می‌شود.

ضمناً توجه کنید که همواره $\Delta' = \frac{\Delta}{۴}$

روشِ حالات خاص (۱-۲-۱-۳)

در یک کلام

در شرایطی خاص، ریشه‌های معادله را می‌توان سریعاً پیدا کرد.

$$۱)\ a+b+c=۰ \Rightarrow x_۱=۱\ ,\ x_۲=\frac{c}{a}$$

$$۲)\ a-b+c=۰ \Rightarrow x_۱=-۱\ ,\ x_۲=-\frac{c}{a}$$

به عنوان مثال همان معادله $۳x^۲-۴x-۷=۰$ را از این روش حل می‌کنیم.

$$۳x^۲-۴x-۷=۰ \qquad ۳-(-۴)+(-۷)=۰ \Rightarrow x_۱=-۱\ ,\ x_۲=\frac{۷}{۳}$$

به عنوان مثالی دیگر ریشه‌های معادله $x^۲+۵x-۶=۰$ برابر ۱ و ۶- است. زیرا جمعِ ضرایب آن صفر است. $(a+b+c=۰)$

دلیل درستی این روش را در بخشِ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دو می‌بینیم.

روشِ مربع کامل‌سازی (۱-۲-۱-٤)

در این روش، عبارت‌های شاملِ x را به کمک اتحادِ اول به صورت یک عبارتِ توانِ دو دار می‌نویسیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم معادله $x^۲+۲x-\frac{۹۱}{۹}=۰$ را حل کنیم.

$$x^۲+۲x-\frac{۹۱}{۹}=۰ \quad \Rightarrow x^۲+۲x+۱-۱-\frac{۹۱}{۹}=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲-۱-\frac{۹۱}{۹}=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲=\frac{۱۰۰}{۹} \Rightarrow (x+۱)=\pm\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x+۱=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow x=\frac{۷}{۳} \\ x+۱=-\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow x=-\frac{۱۳}{۳} \end{cases}$$

مثال ۱. معادله $x^۲+۶x=۱۸۷$ را حل کنید.

پاسخ:

روش اول: Δ'

$$x^۲+۶x-۱۸۷=۰$$
$$\Delta'=۳^۲-(۱)(-۱۸۷)=۱۹۶$$
$$x_۱, x_۲=-۳\pm۱۴=۱۱,-۱۷$$

روش دوم: مربع کامل‌سازی:

$$x^۲+۶x=۱۸۷$$
$$x^۲+۶x+۹=۱۸۷+۹ \Rightarrow (x+۳)^۲=۱۹۶$$
$$x+۳=\pm۱۴ \Rightarrow x=۱۱\ ,\ -۱۷$$

روشِ تجزیه (۱-۲-۱-۵)

بسیاری از معادلات درجه ۲ را می‌توانیم با تجزیه حل کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۳x^۲-۱۵x=۰$ **ب)** $x^۲+۱۳x+۳۶=۰$

پاسخ: الف)

$$۳x^۲-۱۵x=۰ \Rightarrow ۳x(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } ۵$$

ب) به کمک اتحادِ جمله مشترک، عبارت درجه دو را تجزیه می‌کنیم.

$$x^۲+۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x+۴)(x+۹)=۰ \Rightarrow x=-۴ \text{ یا } -۹$$

شاید بتوان گفت روش تجزیه سریع‌ترین و بهترین روش حل معادله درجه دو است. بنابراین سعی کنید معادلات درجه دو را حتی الامکان با تجزیه حل کنید.

روشِ تغییر متغیّر برای حل معادله (۱-۲-۲)

این بحث را با یک مثال آغاز می‌کنیم.

مثال ۳. معادله $x^۴ + ۱۵x^۲ = ۱۶$ را حل کنید.

پاسخ: این معادله درجه ۴ است ولی با تغییر متغیر $x^۲ = t$ می‌توان آن را به کمک معادله درجه دو حل کرد.

$$x^۲ = t \Rightarrow t^۲ + ۱۵t = ۱۶ \Rightarrow t^۲ + ۱۵t - ۱۶ = ۰$$

جمعِ ضرایب این معادله صفر است. پس $t = -۱۶$ یا $t = ۱$ اکنون به کمکِ t، xها را می‌یابیم.

$$t = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

$t = -۱۶ \Rightarrow x^۲ = -۱۶$ جواب ندارد

بنابراین می‌توانیم برخی معادلات را به کمک تغییر متغیر به معادله درجه ۲ تبدیل کنیم.

مثال ٤. معادله $۲x^۶ - ۳x^۳ - ۹ = ۰$ را حل کنید.

پاسخ: این معادله درجه ۶ را با تغییر متغیر $x^۳ = t$ به کمک معادله درجه دو حل می‌کنیم.

$x^۳ = t \Rightarrow ۲t^۲ - ۳t - ۹ = ۰ \Rightarrow (۲t + ۳)(t - ۳) = ۰ \Rightarrow t = -\frac{۳}{۲}$ یا ۳

$$x^۳ = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{-\frac{۳}{۲}}$$

$$x^۳ = ۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۳}$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲ (۱-۲-۳)

قبل از این‌که وارد موضوع اصلی شویم، به نکته‌ای درباره معادله درجه دو می‌پردازیم. در معادله درجه دو اگر a و c علامت متفاوتی داشته باشند، معادله دارای دو ریشه متمایز است. به عنوان مثال درباره معادله $۳x^۲ + ۷x - ۹ = ۰$، بدون حل کردن می‌توانیم بگوییم این معادله دارای دو ریشه متمایز است. توجه کنید در حالتی که علامت a و c مختلف باشد، Δ مطمئناً مثبت می‌شود. زیرا Δ برابر است با $b^۲ - ۴ac$. وقتی a و c مختلف العلامت باشند ac منفی می‌شود و $(-۴ac)$ مثبت در نتیجه Δ از جمع دو مقدار مثبت به دست می‌آید. به عبارت دیگر:

$$a.c < ۰ \Rightarrow -۴ac > ۰$$

$$\Delta = \underbrace{\underbrace{b^۲}_{+} - ۴\underbrace{ac}_{-}}_{+}$$

مثبت بودن Δ به معنی داشتن دو ریشه متمایز است. توجه کنید که این مطلب برگشت‌پذیر نیست. یعنی ممکن است a و c هم علامت باشند ولی باز هم دو ریشه متمایز داشته باشد. مثلاً معادله $x^۲ + ۶x + ۸ = ۰$ این گونه است.

پس از این مقدمه با یک مثال وارد بحث اصلی این بخش می‌شویم.

مثال ۵. مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{-۳ + \sqrt{۵}}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{-۳ - \sqrt{۵}}{۲}$$

$$\text{جمع ریشه‌ها} = x_۱ + x_۲ = \frac{-۳ + \sqrt{۵}}{۲} + \frac{-۳ - \sqrt{۵}}{۲} = -۳$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = x_۱ . x_۲ = \frac{(-۳ + \sqrt{۵})}{۲} . \frac{(-۳ - \sqrt{۵})}{۲} = \frac{(-۳)^۲ - (\sqrt{۵})^۲}{۴} = ۱$$

در حالت کلی برای به‌دست آوردن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، نیازی نیست مانند مثال فوق عمل کنیم. نکته زیر کار را ساده می‌کند.

در یک کلام

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دو $ax^2+bx+c=0$ باشند، مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad , \quad P=\alpha\,.\,\beta=\frac{c}{a}$$

اثبات: فرض کنید $\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ در نتیجه:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}+\frac{-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$P=\alpha\;.\;\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

اکنون به مثال ۵ برگردیم. مجموع ریشه‌های معادله $x^2+3x+1=0$ برابر $-\frac{b}{a}=-3$ و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابر $\frac{c}{a}=1$ است.

مثال ۶. در معادله $-x^2+2x+7=0$ مجموع مربع ریشه‌ها را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\alpha+\beta=\frac{-2}{-1}=2 \qquad \alpha\,.\,\beta=\frac{7}{-1}=-7$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2(-7)=18$$

تشکیل معادله درجه دو با استفاده از S و P (۱-۲-۳-۱)

در این قسمت می‌خواهیم با دانستن جمع و ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دو، آن معادله را تشکیل دهیم.

در یک کلام

اگر جمع دو عدد برابر S و ضرب آن‌ها P باشد، آن دو عدد ریشه‌های معادله $x^2-Sx+P=0$ هستند.

اثبات این مطلب با توجه به روابط جمع و ضرب ریشه‌ها واضح است.

مثال ۷. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1-\sqrt{3}$ و $1+\sqrt{3}$ باشند.

پاسخ:

$$\alpha=1+\sqrt{3} \quad , \quad \beta=1-\sqrt{3}$$

$$\alpha+\beta=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2 \qquad \alpha\;.\;\beta=(1+\sqrt{3})\,(1-\sqrt{3})=1-3=-2$$

پس این دو عدد ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-2=0$ هستند.

مثال ۸. دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها ۲/۵- و حاصل‌ضربشان ۶- باشد.

پاسخ: آن دو عدد را α و β در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم $\alpha+\beta=-2/5$ و $\alpha\,.\,\beta=-6$ باشد می‌دانیم α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(-2/5)x-6=0$ هستند. این معادله را حل می‌کنیم تا α و β را پیدا کنیم.

$$x^2-(-2/5)x-6=0$$

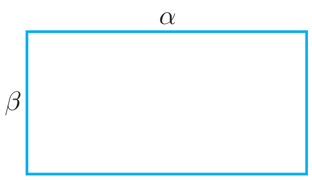
$$\Delta=(\tfrac{5}{2})^2-4(1)(-6)=\frac{25}{4}+24=\frac{121}{4}$$

$$\alpha\,,\beta=\frac{-\frac{5}{2}\pm\frac{11}{2}}{2}=\frac{3}{2}\,,-4$$

بنابراین به جای حل دستگاه دو معادله دو مجهول $\begin{cases}\alpha+\beta=-2/5\\ \alpha\,.\,\beta=-6\end{cases}$، معادله درجه دو $x^2+2/5x-6=0$ را حل کردیم.

مثال ۹. طول و عرض مستطیلی را بیابید که محیط آن ۱۹ و مساحت آن ۲۱ باشد.

پاسخ: طول و عرض مستطیل را α و β در نظر می‌گیریم.



$$\text{مساحت مستطیل} = \alpha \,.\, \beta = 21$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2\alpha + 2\beta = 19 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{19}{2}$$

در واقع ما به دنبال دو عددی هستیم که جمع‌شان $\frac{19}{2}$ و ضربشان ۲۱ باشد. این دو عدد ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - \frac{19}{2}x + 21 = 0$ هستند.

$$x^2 - \frac{19}{2}x + 21 = 0$$

$$\Delta = (-\frac{19}{2})^2 - 4 \times 21 = \frac{361}{4} - 84 = \frac{25}{4}$$

$$\alpha \,,\, \beta = \frac{\frac{19}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = 6 \,,\, \frac{7}{2}$$

توجه کنید که می‌توانیم دستگاه دو معادله دو مجهول زیر را حل کنیم.

$$\left.\begin{cases} \alpha \,.\, \beta = 21 \\ \alpha + \beta = \frac{19}{2} \Rightarrow \beta = \frac{19}{2} - \alpha \end{cases}\right\} \Rightarrow \alpha(\frac{19}{2} - \alpha) = 21 \Rightarrow \frac{19}{2}\alpha - \alpha^2 = 21 \Rightarrow \alpha^2 - \frac{19}{2}\alpha + 21 = 0$$

مشاهده می‌کنید که با این روش نیز به همان معادله درجه دو می‌رسیم.

مثال ۱۰. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن از ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 5 = 0$ یک واحد کم‌تر باشد.

پاسخ: ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 5 = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم. در این صورت $\alpha + \beta = -3$ و $\alpha \,.\, \beta = -5$. هم‌چنین ریشه‌های معادله جدید به صورت $\alpha - 1$ و $\beta - 1$ هستند.

اکنون جمع و ضرب ریشه‌های معادله جدید را تشکیل می‌دهیم.

$$S = (\alpha - 1) + (\beta - 1) = \alpha + \beta - 2 = -3 - 2 = -5 \quad \text{(جمع ریشه‌های معادله جدید)}$$

$$P = (\alpha - 1) \,.\, (\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = -5 - (-3) + 1 = -1 \quad \text{(ضرب ریشه‌های معادله جدید)}$$

بنابراین معادله جدید به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 1 = 0$$

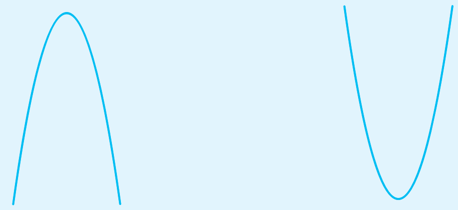
این یعنی ریشه‌های معادله $x^2 + 5x - 1 = 0$ از ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 5 = 0$ یک واحد کم‌تر است. توجه کنید برخی در حل این سوال پیشنهاد می‌کنند که ابتدا ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 5 = 0$ را محاسبه کنیم. سپس یک واحد از آن کم کنیم و به کمک اعداد به دست آمده معادله جدید را بنویسیم. این روش، درست است اما به دلیل گنگ بودن ریشه‌ها محاسبات طولانی در پی دارد.

ماکزیمم و مینیمم سهمی (۱-۲-٤)

در سال گذشته با ضابطه تابع درجه دو آشنا شدیم. دیدیم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ تابعی درجه دو است. هم‌چنین می‌دانیم نمودار این تابع به صورت سهمی است. ضمناً علامتِ a تعیین کننده جهتِ سهمی است.

در یک کلام

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ضابطه یک سهمی است. که دو وضعیت کلی دارد.



$a > 0$
سهمی رو به بالا و مینیمم دارد

$a < 0$
سهمی رو به پایین و ماکزیمم دارد

بنابراین سهمی همواره یا ماکزیمم یا مینیمم دارد. اکنون می‌خواهیم مقدار ماکزیمم و مینیمم را به‌دست آوریم.
قبل از این‌که وارد روابط و فرمول‌ها شویم، مثال‌هایی را با اطلاعاتی که از قبل داریم، حل می‌کنیم.

مثال ۱۱. کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=x^۲-۲x-۳$ را به‌دست آورید.

پاسخ: **روش اول:** به کمک مربع کامل‌سازی می‌توانیم راجع به مینیمم سهمی اطلاعاتی به‌دست آوریم.

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴$$

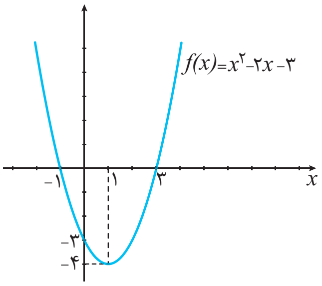
اگر به عبارت $(x-۱)^۲-۴$ نگاه کنید متوجه می‌شوید که $(x-۱)^۲$ مقادیر مثبت تولید می‌کند و به (۴-) اضافه می‌کند. بنابراین کم‌ترین مقدار تابع هنگامی رخ می‌دهد که چیزی به (۴-) اضافه نشود. به عبارت دیگر $(x-۱)^۲$ برابر صفر شود. این یعنی کم‌ترین مقدار این تابع برابر (۴-) است که به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید. به بیان دیگر:

$$(x-۱)^۲\geq ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲-۴\geq -۴ \Rightarrow x^۲-۲x-۳\geq -۴ \Rightarrow f(x)\geq -۴$$

روش دوم: به کمک ریشه‌های معادله $x^۲-۲x-۳=۰$ نمودار سهمی را رسم می‌کنیم.

$$x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow x_۱=-۱, x_۲=۳$$

نمودار سهمی به این صورت است.



به صورت شهودی مشخص است که میانگین ریشه‌ها، یعنی ۱ طولِ رأس سهمی است و به ازای آن کم‌ترین مقدار سهمی به‌دست می‌آید. در واقع مینیمم سهمی همان $f(۱)=-۴$ است.

حال که مثال فوق را دیدیم، روشی را معرفی می‌کنیم که کار را کمی ساده‌تر می‌کند و ما را از تجزیه و تحلیل بی‌نیاز می‌سازد.

در یک کلام ماکزیمم یا مینیمم سهمی به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید و مقدار آن برابر است با: $f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a}$

بنابراین در مثال ۱۱، کم‌ترین مقدار برابر $-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{-(۴+۱۲)}{۴}=-۴$ است.

مثال ۱۲. مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=-x^۲+۴x-۷$ را به‌دست آورید.

پاسخ: **روش اول:**

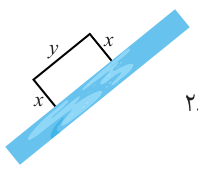
$$-\frac{\Delta}{۴a}=-(\frac{۱۶-۴(-۱)(-۷)}{-۴})=\frac{۱۲}{-۴}=-۳$$

روش دوم: ابتدا $-\frac{b}{۲a}$ را محاسبه کرده و سپس آن را در ضابطه سهمی می‌گذاریم. $f(۲)=-۴+۸-۷=-۳$

$$-\frac{b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲$$

البته این سوال را نیز مانند مثال ۱۱ می‌توان با مربع کامل‌سازی یا رسم حل کرد.

مثال ۱۳. قرار است در کنار یک رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. اگر تنها هزینه $۵۰m$ دیوارکشی را داشته باشیم. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن شود.



پاسخ: طول مستطیل را y و عرض آن را x در نظر می‌گیریم. سمت رودخانه نیز دیوار نمی‌کشیم. بنابراین: $۲x+y=۵۰$

مساحت مستطیل عبارت است از $S=xy$ به کمک رابطه $۲x+y=۵۰$ مساحت را تک متغیره می‌کنیم.

$$S=xy=x(۵۰-۲x)=-۲x^۲+۵۰x$$

S برحسب x، تابعی درجه دو است که چون ضریب $x^۲$ منفی است، ماکزیمم دارد.

می‌دانیم ماکزیمم به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید.

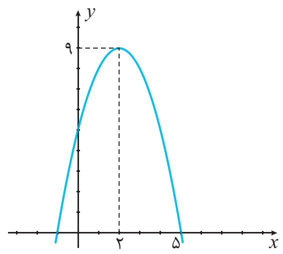
$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۵۰}{۲(-۲)}=\frac{۲۵}{۲}$$

$$y=۵۰-۲x=۵۰-\frac{۵۰}{۲}=\frac{۵۰}{۲}$$

توجه کنید که ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه دو، همان عرضِ رأس سهمی است. به عبارت دیگر سهمی در رأس خود به بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار می‌رسد.

در یک کلام در تابع درجه دو $f(x)=ax^۲+bx+c$ مختصات رأس سهمی به صورت $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ است. $(-\frac{\Delta}{۴a})$ مقدار ماکزیمم یا مینیمم نامیده می‌شود.

مثال ۱۴. معادله سهمی شکل زیر را بنویسید.



پاسخ: **روش اول:** از روی مطلب سه مطلب درباره این سهمی می‌توانیم بفهمیم. اولاً این سهمی از نقطه $(۵, ۰)$ می‌گذرد. ثانیاً طول رأس سهمی برابر ۲ و ثالثاً عرض آن برابر ۹ است. فرض می‌کنیم معادله سهمی به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشد. به کمک این مطالب a، b و c را به‌دست می‌آوریم.

$$f(۵)=۰ \Rightarrow ۲۵a+۵b+c=۰$$
$$x_S=-\frac{b}{۲a} \Rightarrow -\frac{b}{۲a}=۲ \Rightarrow b=-۴a$$
$$f(۲)=۹ \Rightarrow ۴a+۲b+c=۹$$

بنابراین با حل این سه معادله سه مجهول a، b و c به‌دست می‌آیند.

$$\left.\begin{cases}\left.\begin{array}{l}۲۵a+۵b+c=۰\\ ۴a+۲b+c=۹\end{array}\right\} \Rightarrow ۲۱a+۳b=-۹\\ b=-۴a\end{cases}\right\} \Rightarrow ۲۱a+۳(-۴a)=-۹ \Rightarrow ۹a=-۹ \Rightarrow a=-۱\,,\ b=۴\,,\ c=۵$$

منفی بودن a با انتظار ما تطابق دارد. زیرا سهمی شکل ما رو به پایین است. پس معادله سهمی به صورتِ $f(x)=-x^۲+۴x+۵$ است.

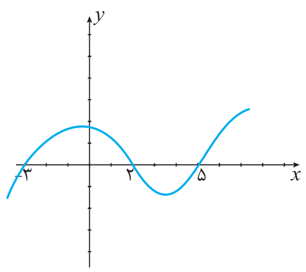
روش دوم: از آن‌جایی که طول رأس سهمی میانگین محل برخورد آن با محور xها است، می‌فهمیم که سهمی در نقطه $(-۱, ۰)$ نیز با محور طول‌ها برخورد می‌کند. بنابراین معادله‌ی آن باید به صورت $f(x)=a(x+۱)(x-۵)$ باشد. با گذاشتن $(۲, ۹)$ در این معادله، مقدار a را نیز محاسبه می‌کنیم.

$$f(۲) \Rightarrow a(۳)(-۳)=۹ \Rightarrow a=-۱$$

پس معادله سهمی به صورت $f(x)=-(x+۱)(x-۵)$ یا همان $f(x)=-x^۲+۴x+۵$ است. این روش مقدمه‌ای برای بحث بعدی است.

صفرهای تابع درجه دو (۱-۲-۵)

فرض کنید شکل زیر نمودار تابع f باشد.



نمودار تابع f در سه نقطه‌ی ۵ و ۲ و (۳-) با محور xها برخورد کرده است. به عبارت دیگر می‌توانیم بگوییم: $f(-۳)=f(۲)=f(۵)=۰$. این یعنی مقدار تابع f در این سه نقطه برابر صفر است. این نقاط را صفرها (ریشه‌ها) ی تابع f می‌نامیم.

در یک کلام نقاط برخورد نمودار تابع $f(x)$ با محور x ها را صفرهای تابع f می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله $f(x)=۰$ هستند. به عبارت دیگر در این نقاط مقدار تابع صفر است.

اگر ضابطه‌ی تابعی را داشته باشیم برای به‌دست آوردن صفرهای آن تابع باید معادله $f(x)=۰$ را حل کنیم.

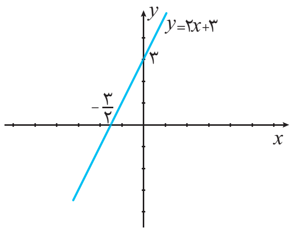
مثال ۱۵. صفرهای توابع زیر را بیابید.

الف) $y = ۲x + ۳$ **ب)** $y = x^۲ + ۶x - ۷$ **ج)** $y = \frac{x+۳}{x-۱}$

پاسخ:

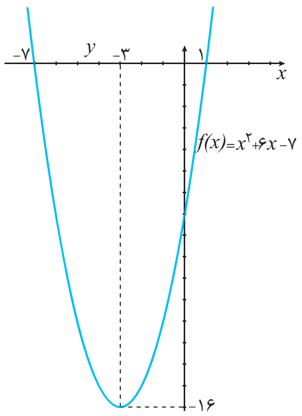
الف) $y = ۰ \Rightarrow ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$

نمودار تابع $y = ۲x + ۳$ به این صورت است.



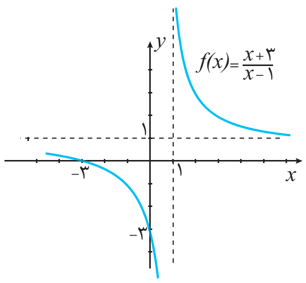
ب) $y = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۶x - ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۱$ یا (-۷)

نمودار تابع $y = x^۲ + ۶x - ۷$ به این صورت است.



ج) $y = ۰ \Rightarrow \frac{x+۳}{x-۱} = ۰ \Rightarrow x = -۳$

نمودار این تابع به این صورت است.



همان‌طور که محل برخورد با محور xها را اسم‌گذاری کردیم، محل برخورد با محور yها را نیز نام‌گذاری می‌کنیم. به عرض نقطه‌ی برخورد با محور yها، عرض از مبدأ تابع گوییم. عرض از مبدأ همان $f(۰)$ است.

به عنوان نمونه در مثال ۱۵، عرض از مبدأ توابع به ترتیب مقادیر ۳، (۷-) و (۳-) است.

یک تابع ممکن است چند صفر داشته باشد ولی عرض از مبدأ در صورت وجود همواره یکتاست. زیرا در غیر این صورت تابع بودن نقض می‌شود.

توجه کنید که در تابع درجه دو، عرض از مبدأ همان مقدار ثابت c است.

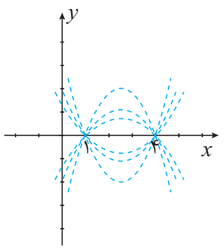
در یک کلام در تابع درجه دو $f(x) = ax^۲ + bx + c$، عرض از مبدأ برابر c است.

بنابراین برخورد یک سهمی با محور عرض‌ها همیشه در نقطه‌ی c رخ می‌دهد.

مثال ۱۶. **تابعِ درجه دومی بنویسید که صفرهای آن ۴ و ۱ باشد.**

پاسخ: **روش اول:** $S=۵\,,\,P=۴ \Rightarrow f(x)=x^{۲}-۵x+۴$

روش دوم: $f(x)=(x-۱)(x-۴)$

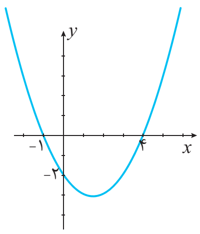


این مثال در عین سادگی، نکته مهمی در خود دارد. تابعی که به‌عنوان پاسخ معرفی کردیم جواب مسأله است اما آیا این مسأله فقط یک جواب دارد؟ برای پاسخ به این سؤال به شکل روبه‌رو دقت کنید.
در شکل روبه‌رو مشخص است که می‌توان بی‌شمار سهمی رسم کرد به طوری‌که صفرهای آن ۱ و ۴ باشد. بنابراین پاسخ یکتا نیست. مثلاً توابع $f(x)=۲x^{۲}-۱۰x+۸$ و $h(x)=-x^{۲}+۵x-۴$ نیز صفرهایشان همان ۱ و ۴ است. تفاوت این سهمی‌ها در ضریبِ $x^{۲}$ است.

در یک کلام

اگر صفرهای یک تابع درجه دو، $x_۱$ و $x_۲$ باشند، معادله آن به صورت $f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ است.

مثال ۱۷. **معادله سهمی زیر را بنویسید.**



پاسخ: ۴ و (۱-) صفرهای تابع و (۲-) عرض از مبدأ است. پس:

$f(x)=a(x+۱)(x-۴)$

ضمناً $f(۰)=-۲$ در نتیجه:

$f(۰)=a(۱)(-۴)=-۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$

$f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۴)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۳}{۲}x-۲$

اکنون روش دوم حل مثال ۱۴ را مرور کنید.

تشخیص علامت ریشه‌ها به کمک S و P (۱-۵-۲-۱)

S جمع دو ریشه و P ضرب دو ریشه معادله درجه دو است که آموختیم از روابط زیر به‌دست می‌آید.

$$S=-\frac{b}{a} \quad , \quad P=\frac{c}{a}$$

حال می‌خواهیم بدون حل معادله درجه دو، علامت ریشه‌ها را تعیین کنیم. برای این کار از مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم.
از سال‌های گذشته می‌دانیم که حاصل‌ضرب دو عددِ مثبت، مثبت است. حاصل‌ضرب دو عدد منفی هم مثبت است. ولی حاصل‌ضرب عددی مثبت در عددی منفی، منفی است. از این‌ها می‌توان نتیجه گرفت که اگر ضرب دو عدد مثبت باشد، آن دو عدد هم علامت هستند. همچنین اگر ضرب دو عدد منفی باشد، آن دو عدد غیر هم علامت‌اند. مثلاً از این‌که $\alpha.\beta=۵$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که α و β یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی هستند. همچنین اگر $\alpha.\beta=-۳$ باشد، αو β یکی مثبت و دیگری منفی است.
از این نکته در تعیین علامت ریشه‌های معادله درجه دو استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۸. **علامت صفرهای توابع زیر را تعیین کنید.**

الف) $f(x)=x^{۲}+۵x+۳$

ب) $f(x)=۳x^{۲}+۵x-۴$

ج) $f(x)=۲x^{۲}-۵x+۱$

د) $f(x)=-x^{۲}+۲x-۲$

پاسخ: الف) اولاً چون $\Delta>۰$ است تابع دو ریشه متمایز دارد. ثانیاً $P=\frac{c}{a}=۳>۰ \Rightarrow$ دو ریشه هم علامت دارد. f

$S=-\frac{b}{a}=-۵<۰$ یعنی ریشه‌های f هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند.