بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّهُمَّ صَلِّ عَلی مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

هندسه (۳)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

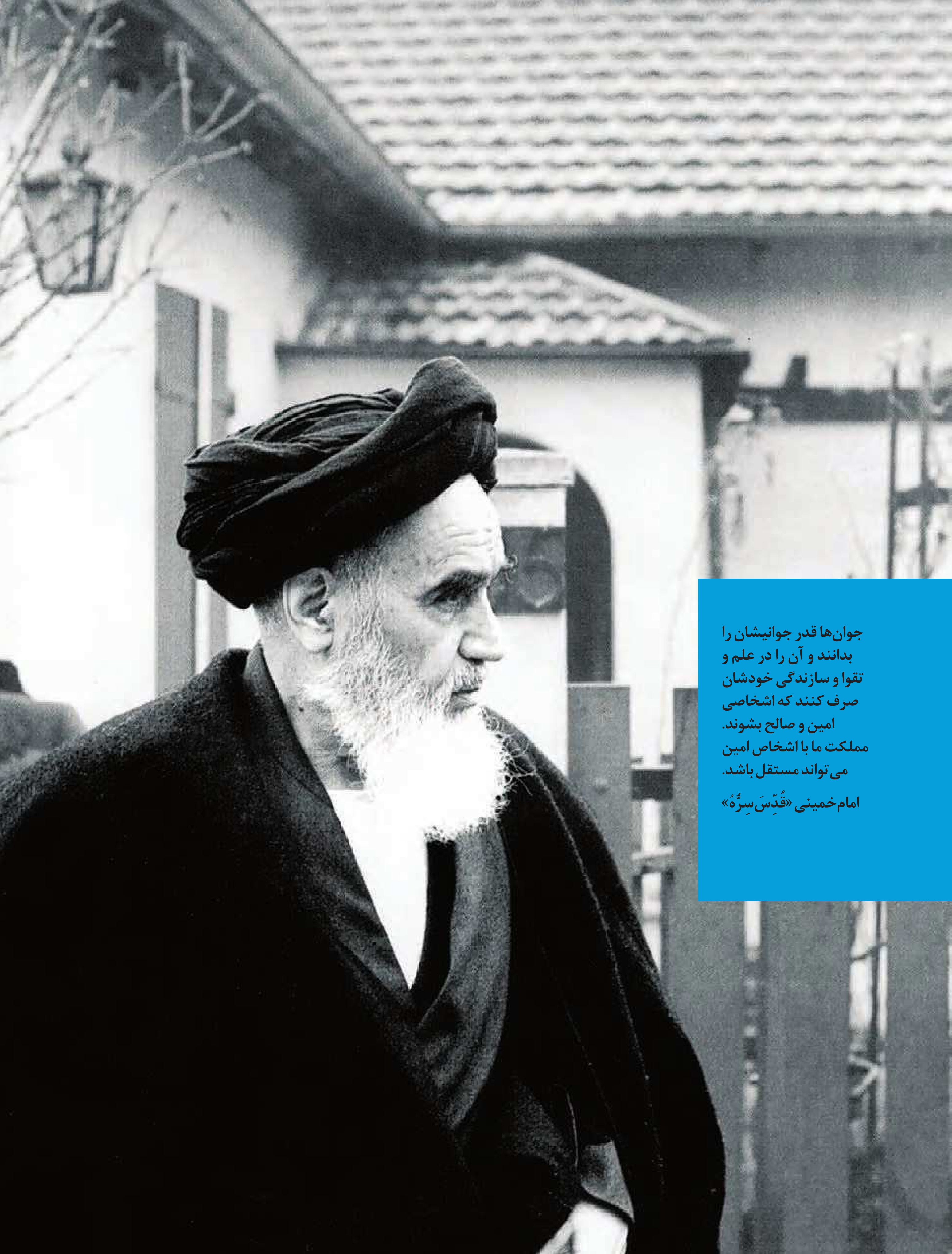
پایهٔ دوازدهم

دوره دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: هندسه(۳) ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۲۱۳
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، هوشنگ شرقی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ مجتبی زند (مدیر هنری، طراح جلد و صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ زهره برهانی زرندی، سوروش سعادتمندی، فاطمه گیتی‌جبین، فاطمه صغری ذوالفقاری، کبری اجابتی و حمید ثابت‌کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ سوم ۱۳۹۹

شابک ۶ـ۳۱۱۳ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3113-6



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

محتوای این کتاب تا پایان سال تحصیلی ۱۴۰۴ - ۱۴۰۳ تغییر نخواهد کرد.

فهــرست

پیشگفتار

کتاب حاضر در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هرحال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.
زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.
ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار[1] و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی[2] دارد، به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

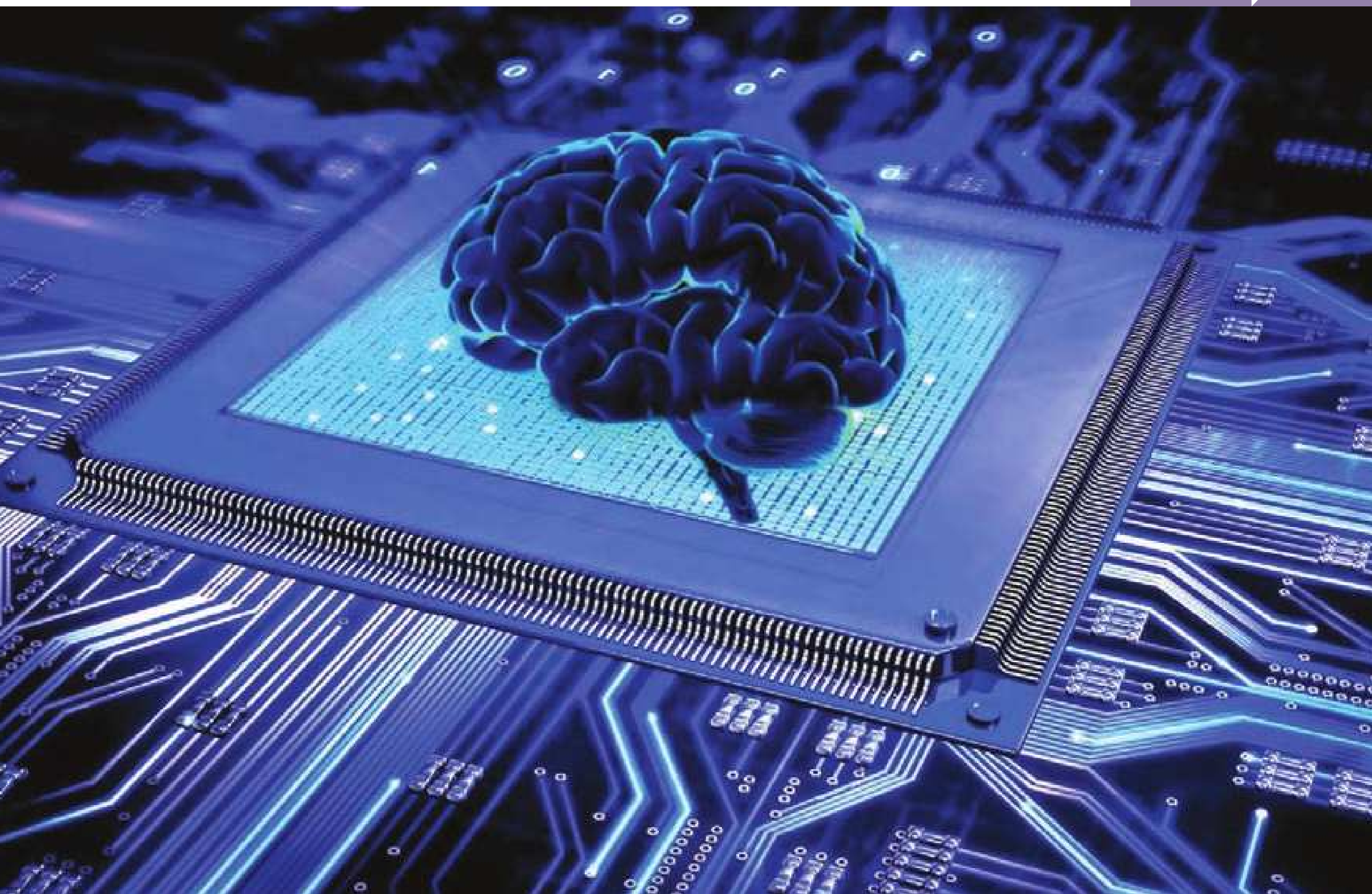
مؤلفان

۱ـ mathrde@gmail.com

۲ـ http: //math-dept.talif.sch.ir

فصل اوّل

ماتریس و کاربردها



یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص در فیزیک کوانتم (هایزنبرگ، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند.) و در رایانه و علومی چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هایش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا در بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطهٔ تنگاتنگ دارد.

درس اوّل

ماتریس[1] و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به‌صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است :

	برد	باخت	مساوی	امتیاز
تیم A	۹	۳	۳	۳۰
تیم B	۷	۴	۴	۲۵
تیم C	۶	۳	۶	۲۴
تیم D	۶	۵	۴	۲۲

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف M نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \text{برد} & \text{باخت} & \text{مساوی} & \text{امتیاز} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۳ & ۳۰ \\ ۷ & ۴ & ۴ & ۲۵ \\ ۶ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ ۶ & ۵ & ۴ & ۲۲ \end{bmatrix} \end{array}$$

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A ، B ، C و . . . نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال : ماتریس A ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای ۱۲=۴×۳ درایه است و مثلاً عدد حقیقی $\sqrt{۲}$ درایهٔ روی سطر اول و ستون چهارم است و درایهٔ (۷−) روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \sqrt{۲} \\ ۵ & ۳ & -۷ & ۱ \\ -۳ & ۲۰ & \pi & ۱۴ \end{bmatrix}$$

در حالت کلّی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم (A) ماتریسی از مرتبه $m\times n$ (m در n) است.) برای هر درایهٔ ماتریس و

۱− Matrix

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستونِ آن درایه را مشخص می‌کند، a_{ij} یعنی درایهٔ روی سطر iام و ستون jام.

ماتریس $A_{۲\times۳}$ و ماتریس $B_{m\times n}$ با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند :

$$A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \cdots & b_{۱j} & \cdots & b_{۱n} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \cdots & b_{۲j} & \cdots & b_{۲n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i۱} & b_{i۲} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m۱} & b_{m۲} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایهٔ b_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس B می‌نامیم که $۱\leq i\leq m$ و $۱\leq j\leq n$ تغییر می‌کنند. همهٔ درایه‌های ماتریس B را می‌توان توسط درایهٔ عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم $B=[b_{ij}]$.[1]

مثال : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ ماتریسی ۲×۲ باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۲$ در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

حل : $a_{۱۱}=a_{۲۲}=۷$ و $a_{۲۱}=۵$ و $a_{۱۲}=-۲$ پس $A=\begin{bmatrix} ۷ & -۲ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$.

کاردرکلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس ۴×۳ و یک بار با ماتریسی ۳×۴ نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۶۵–۱۸۰۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراشتراوس (۱۸۹۷–۱۸۱۵) و دیگران در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

۱ــ اگر $m=n=۱$ در این صورت ماتریس $[K]_{۱\times۱}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می‌کنیم.

معرفی چند ماتریس خاص

۱ـ اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس **مربعی** از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \text{ و } C=[۵]_{۱\times ۱}=۵$$

در ماتریس‌های A و B قطرهای مشخص شده را **قطر اصلی** این دو ماتریس می‌نامیم و اگر $i=j$ در این صورت درایهٔ a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

۲ـ اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس **سطری** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند :

$$A=[۱ \;\; ۲]_{۱\times ۲} \quad , \quad B=[۲ \;\; -۱ \;\; ۴ \;\; ۵]_{۱\times ۴} \quad , \quad C=[۷]_{۱\times ۱}=۷$$

۳ـ اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس **ستونی** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ \\ \pi \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۱} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۴\times ۱} \text{ و } C=[۱۱۴]_{۱\times ۱}=۱۱۴$$

۴ـ ماتریس **قطری**، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{ و } \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad \text{ و } \quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵ـ اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس **اسکالر** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{ و } \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \quad \text{ و } \quad C=[۲]$$

۶ــ ماتریس **صفر**، ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\overline{O}$ نشان می‌دهیم. ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس صفر ۲×۲ است.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i,j\,،\, a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

مثال : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۹ & x-y \\ z-۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+y & ۳ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \\ z-۱=۵ \end{cases} \Rightarrow x=۶,\ y=۳\ ,\ z=۶ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

جمع ماتریس‌ها

در کاردرکلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکنندهٔ لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است :

	A	B	C	D
شلوار	۲۴+۲۰	۲۶+۲۰	۱۷+۲۰	۱۲+۲۰
بلوز	۱۵+۳۰	۱۹+۳۰	۲۸+۳۰	۳۱+۳۰
پیراهن	۷+۵۰	۱۱+۵۰	۲۲+۵۰	۳۵+۵۰

اگر این جدول را با یک ماتریس ۴×۳ نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴} + \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ \\ ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ \end{bmatrix}_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} ۴۴ & ۴۶ & ۳۷ & ۳۲ \\ ۴۵ & ۴۹ & ۵۸ & ۶۱ \\ ۵۷ & ۶۱ & ۷۲ & ۸۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبهٔ A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ \ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

کاردرکلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳ & -۱\\ ۴ & ۵ & ۶ & -۱\\ ۷ & ۸ & ۹ & -۱\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-۱ & -۲ & -۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴\\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}۱+(-۱) & ۲+(-۲) & ۳+(-۳) & (-۱)+۱\\ ۴+۱ & ۵+۲ & ۶+۳ & (-۱)+۴\\ ۷+۵ & ۸+۶ & ۹+۷ & (-۱)+۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۵ & ۷ & ۹ & ۳\\ ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & ۷\end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ب) $A=[۱ \quad -۱ \quad ۳ \quad ۷] \quad , \quad B=[۳ \quad ۲ \quad -۱ \quad ۴] \Rightarrow A+B=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳ & ۲\\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴\end{bmatrix} , B=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۴ & -۷\\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹\end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ت) $A=[۵] \quad , \quad B=[-۷] \Rightarrow A+B=\cdots$

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

تعریف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \;\; , \; r\in\mathbb{R} \Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$B=\begin{bmatrix}۲۴\times۲ & ۲۶\times۲ & ۱۷\times۲ & ۱۲\times۲\\ ۱۵\times۲ & ۱۹\times۲ & ۲۸\times۲ & ۳۱\times۲\\ ۷\times۲ & ۱۱\times۲ & ۲۲\times۲ & ۳۵\times۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲۴+۲۴ & ۲۶+۲۶ & ۱۷+۱۷ & ۱۲+۱۲\\ ۱۵+۱۵ & ۱۹+۱۹ & ۲۸+۲۸ & ۳۱+۳۱\\ ۷+۷ & ۱۱+۱۱ & ۲۲+۲۲ & ۳۵+۳۵\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲\\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱\\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲\\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱\\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵\end{bmatrix}=A+A=۲A$$

کاردرکلاس

۱ــ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $-۱\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}=$

ب) $\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}=$

پ) $۰\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=$

ت) $۷\times\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=$

۲ــ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}=۲\times$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}=(-۱)\times$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد، قرینهٔ ماتریس A را با $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-۱) در ماتریس A به‌دست می‌آید.
واضح است که $A+(-A)=\overline{O}$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A ، B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند :

الف) $A+B=B+A$ — خاصیت جابه‌جایی

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$ — خاصیت شرکت‌پذیری

پ) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ — خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها

ت) $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$ خاصیت عضو قرینه

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

ح) $A=B \Rightarrow rA=rB$

مثال : فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

در این صورت نشان می‌دهیم که $(-۲)(A+B)=(-۲)A+(-۲)B$،

$$-۲(A+B)=(-۲)\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱+(-۲) & ۲+۱ & ۳+۴ \\ (-۱)+۳ & ۳+۲ & (-۵)+۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)(۱+(-۲)) & (-۲)(۲+۱) & (-۲)(۳+۴) \\ (-۲)((-۱)+۳) & (-۲)(۳+۲) & (-۲)((-۵)+۰) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)\times ۱+(-۲)\times(-۲) & -۲\times ۲+(-۲)\times ۱ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۴ \\ (-۲)\times(-۱)+(-۲)\times ۳ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۲ & (-۲)\times(-۵)+(-۲)\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{توزیع‌پذیری ضرب} \\ \text{نسبت به جمع} \\ \text{در } \mathbb{R}}}{=\!=}\begin{bmatrix} -۲\times ۱ & -۲\times ۲ & -۲\times ۳ \\ (-۲)\times(-۱) & -۲\times ۳ & (-۲)\times(-۵) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} (-۲)\times(-۲) & -۲\times ۱ & -۲\times ۴ \\ -۲\times ۳ & -۲\times ۲ & -۲\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+(-۲)\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=(-۲)A+(-۲)B$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت برای $r\in\mathbb{R}$ داریم :

$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=\left[r(a_{ij}\pm b_{ij})\right]$

$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$ توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در $\mathbb{R}$

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]$ تعریف ضرب عدد در ماتریس

$=rA\pm rB$

کاردرکلاس

۱ــ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=۳$ و $s=-۲$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۲ــ درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایهٔ ماتریس A را در درایهٔ نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

مثال : اگر $A=[-۱ \quad ۲ \quad ۰ \quad ۳ \quad -۵]$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۷ \\ -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ در این صورت داریم :

$$A\times B=[-۱ \quad ۲ \quad ۰ \quad ۳ \quad -۵]\times\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۷ \\ -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$=[(-۱)\times(-۲)+۲\times۳+۰\times۷+۳\times(-۱)+(-۵)\times(-۲)]$$

$$=[۲+۶+۰+(-۳)+۱۰]=[۱۵]=۱۵$$

کاردرکلاس

یک ماتریس سطری ۳ × ۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱ × ۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد) در این صورت $A_{mp}\times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp}\times B_{pn}=C_{mn}=[c_{ij}]$، ماتریس C ماتریسی $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iام و ستون jام در آن یعنی، c_{ij} از ضرب سطر iام A در ستون jام B به‌دست می‌آید، یعنی

$c_{ij} = $ سطر iام A × ستون jام B

$$\Rightarrow c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj}$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

اگر فرض کنیم، $A_{3\times 3} \times B_{3\times 2} = C = [c_{ij}]_{3\times 2}$ در این صورت ماتریس حاصل‌ضرب یعنی C ماتریسی ۲×۳ بوده و داریم :

$$c_{12} = A \text{ سطر اول} \times B \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 2 + (-1) \times 5 = \cdots$$

$$c_{32} = A \text{ سطر سوم} \times B \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (-3) + (-4) + 20 = \cdots$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-4 & 3+4-5 \\ 6-2+4 & 9+4+5 \\ -2+2+16 & -3-4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 18 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

آیا ضرب $(B \times A)$ امکان‌پذیر است؟ چرا؟

کار در کلاس

۱ــ برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4} \Rightarrow A \times B = \cdots$

ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A \times B = \cdots , B \times A = \cdots$

پ) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 3} \Rightarrow A \times B = \cdots$, $B \times A = \cdots$

ت) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ $A \times B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a\times b=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$» مقایسه کنید.

۲ــ اگر A ماتریسی ۵×۳ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبهٔ آن را بیابید :

الف) $B=[b_{ij}]_{3\times 2}$ ب) $B=[b_{ij}]_{3\times 5}$ پ) $B=[b_{ij}]_{5\times 3}$

ت) $B=[b_{ij}]_{5\times 4}$ ث) $B=[b_{ij}]_{5\times 5}$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

کاردرکلاس

۱ــ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه

در حالت کلّی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

۲ــ ماتریس اسکالر $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ماتریس اسکالر روبه‌رو که آن را ماتریس واحد یا همانِ مرتبهٔ n می‌نامیم، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعیِ مرتبهٔ n است یعنی:

$$A_{n\times n}\times I_n=I_n\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ و $C=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ در این صورت درستی تساوی $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ را بررسی کنید.

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ در این صورت ضرب ماتریس A در مجموع $(B+C)$ خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی دارد یعنی :

$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

۴ــ با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید :

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times k}$ و $C=[c_{ij}]_{k\times n}$ در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت‌پذیری دارد یعنی :

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

تمرین

۱ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۳×۴ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۳ــ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq \bar{O}$ و $B\neq \bar{O}$ ولی $AB=\bar{O}$.

۴ــ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۵ــ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^۲=AA$ و $A^۳=AA^۲$ و ... و $A^n=AA^{n-۱}$ $(n\in\mathbb{N} \ \ n>۱)$ تعریف کنیم، در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۲$ و $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

۷ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹ــ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۱۰ــ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

۱۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^۳$ را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

درس دوم

وارون ماتریس و دترمینان[1]

وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند a $(a\neq ۰)$ را با $\frac{۱}{a}$ نشان می‌دهیم و همواره $a\times\frac{۱}{a}=۱$ (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است)

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به‌طوری‌که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

از وارون ماتریس‌ها در حل دستگاه‌های معادلات استفاده خواهد شد.

مسئله : نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (در صورت وجود) باید ماتریسی چون $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ بیابیم طوری که $A\times B=B\times A=I$ یا $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ که این تساوی x، y، z و t را بر حسب a، b، c و d نتیجه

۱– Determinant

می‌دهد و ماتریس B یا A^{-1} به صورت $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ به دست می‌آید

که با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت :

$$A^{-1}=\frac{۱}{ad-bc}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

عدد $(ad-bc)$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم و با نماد $|A|$ (می‌خوانیم، دترمینانِ A) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت :

نتیجه

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تذکر: با توجه به قاعدهٔ محاسبهٔ A^{-1} واضح است که اگر $|A|=۰$ آنگاه A^{-1} وجود ندارد. (A وارون‌پذیر نیست.) به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) آن است که $|A|\neq۰$.

مثال : وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

چون $|A|=۲\neq۰$ پس A دارای وارون است (وارون‌پذیر است) و داریم

$$A^{-1}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۴ & ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

پاسخ به‌دست آمده را امتحان کنید.

حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون

یکی از کاربردهای ماتریس و ماتریس وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

قضیه یکتایی وارون : وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های ۲ × ۲ محاسبه شده است) در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

اثبات : فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می‌کنیم $B=C$

طبق فرض: $AB=BA=I$

طبق فرض: $AC=CA=I$

$B=IB=(CA)B=C(AB)$
$=CI=C$

فعالیت

دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به‌صورت یک تساوی ماتریسی نوشت :

$$\begin{bmatrix} \cdots+\cdots \\ ۷x+۴y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ \ldots \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم :

$$\begin{bmatrix} ۲x+y \\ ۷x+۴y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهولِ مفروض است.

۱ــ حال اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$ (A را ماتریس ضرایب می‌نامیم) در این صورت ابتدا نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون‌پذیر است) و سپس $A^{-۱}$ را بیابید.

$|A|= \cdots - \cdots = ۱ \neq ۰ \Rightarrow$ A وارون‌پذیر است

$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲ــ معادلهٔ ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\text{شرکت‌پذیری} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=\cdots \\ y=\cdots \end{cases}$$

نتیجه

در حالت کلّی اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولاتِ دستگاهِ دو معادله و دو مجهولِ $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و درصورتی‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد یا $|A|\neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادلهٔ فوق می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B$$
$$\Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -4x+2y=2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟
این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟

مثال : دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

حل : ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و چون $|A|=2\neq 0$ پس A^{-1} وجود دارد. با جابه‌جایی درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه کردنِ درایه‌های روی قطر فرعیِ ماتریس A و تقسیم درایه‌های ماتریس حاصل بر $|A|=2$، ماتریس A^{-1} را به‌دست می‌آوریم.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{2} \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس‌ها}} \begin{cases} x=\cdots \\ y=2 \end{cases}$$

تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، پیدا کردن x و yای است که در هر دو معادلهٔ دستگاه که هرکدام معادلهٔ یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

یادآوری

در واقع یک دستگاه دو معادله دو مجهولی از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادلهٔ یک خط هستند. لذا با دیدگاه هندسی می‌توان گفت وقتی صحبت از جواب این دستگاه می‌کنیم منظور یافتن نقطه‌ای است که روی هر دو خط واقع شده باشد. بنابراین سه حالت زیر را برای یک دستگاه می‌توان در نظر گرفت :

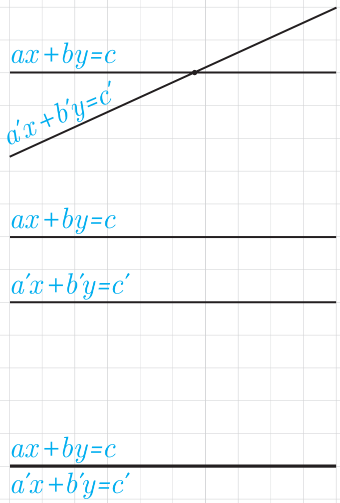
$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد که مانند مثال قبل به دست می‌آید.

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد :

۱ــ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۲ــ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معامله یک خط را نشان می‌دهند؛ لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.



نتیجه

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به (الف) و (ب) می‌توان گفت:

I) اگر $|A| \neq ۰$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصربه‌فرد است (دو خط متقاطع‌اند).

II) اگر $|A| = ۰$ در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی‌اند) و یا اینکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط برهم منطبق هستند).

کار در کلاس

دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x - ۳y = ۳ \\ -۴x + ۶y = ۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲ــ ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ چرا؟

۳ــ سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases} x - ۳y = ۲ \\ -۳x + ۹y = -۶ \end{cases}$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A| = ۰$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

دترمینان و کاربردهای آن

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع‌به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه: وارون‌پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود. همان‌طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود. دترمینان در هندسه برای محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به‌کار می‌رود. به کمک دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به‌دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی‌گردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سوئیسی (۱۷۰۴-۱۷۵۲) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

تعریف: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد $(1 \le n \le 3)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

(ما در این کتاب دترمینان را برای ماتریس‌های حداکثر از مرتبهٔ ۳ تعریف می‌کنیم.)

$$\text{I)}\ A=[k]_{1\times 1} \Rightarrow |A|=k \qquad \text{II)}\ A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$\text{III)}\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A|=a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ برحسب سطر اول

(برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همهٔ حالت‌ها یکسان خواهد بود.)

در واقع دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ را می‌توان تابعی در نظر گرفت که دامنهٔ آن مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ و هم‌دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

$$\det : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=ad-bc$$

(منظور از $M_{2\times 2}$ مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ است.)

مثال: دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $A=[-7]\to|A|=-7$

ب) $A=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\end{bmatrix}\to|A|=\sqrt{2}$

پ) $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}\to|A|=[(4\times 4)-(2\times 8)]=0$

ت) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\rightarrow |A|=(-10)-(12)=-22$

ث) $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}\rightarrow |A|=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

مثال : دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را برحسب یک سطر و یک ستون دلخواه به‌دست آورید :

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix}$

برحسب سطر اول

$$|A|=1\times\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}-(-1)\times\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=1\times(0-12)+(0+6)+2\times(8+2)=(-12)+6+20=14$$

برحسب ستون سوم

$$|A|=2\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}+0\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=2\times(8+2)-3\times(4-2)+0=20-6=14$$

تذکر: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه یا درایه‌های صفر هستند دترمینان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

ب) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 4\\ -3 & 4 & 1\end{bmatrix}$

برحسب سطر دوم

$$|A|=0+0+4\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=-4\times(8-3)=-20$$

برحسب ستون اول

$$|A|=2\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}0 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}-0+(-3)\times(-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix}$$

$$=2\times(0-16)-3\times(-4-0)=-32+12=-20$$

(درایهٔ (۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایهٔ (۳−) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.)

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 11\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در این روش (فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$$

$$|A| = (aei+bfg+cdh) - (ceg+afh+bdi)$$

مثال : دترمینان ماتریس A را برحسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به‌دست آورید (کدام روش راحت‌تر است؟).

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

برحسب سطر سوم

$$|A| = (-۱)\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} + (-۲)\times(-۱)^{۳+۲}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} + ۱\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow |A| = -۱\times(۹-۸)+۲(۶-۴)+۱\times(۴-۳)=-۱+۴+۱=۴$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۳ & ۴ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ & ۱ & -۱ & -۲ \end{array}\right.$$

با دستور ساروس $|A| = (۴-۹-۸)-(-۸-۱۲+۳) = -۱۳+۱۷=۴$

کاردرکلاس

۱ــ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

۲ــ ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید طوری که $|A| = -۶$، سپس ماتریس $A^۲$ را محاسبه و $|A^۲|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^۲-۵|A|+۶=۰$ برقرار باشد.

اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۱۱} = ۴$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

۳ــ اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را برحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطرِ اصلی A، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

نتیجه

۱ــ دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ....

۲ــ دترمینان ماتریس مربعی صفر، .... است.

۴ــ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم $A = ۴\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به‌دست آورید.

تمرین

۱ــ اگر $A = [۱ \quad ۲ \quad -۳]$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^۲|$ را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $A = \begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(|A|^۳ - ۲\right)$ را بیابید.

۴ــ دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ ماتریسی ۳×۳ چون A بیابید که $|A| = ۳$.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

۷ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

۸ــ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $(k\in\mathbb{R})$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ $(k\in\mathbb{R})$ بررسی کنید.

۹ــ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ $(k\in\mathbb{R})$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰ــ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ باشد و $|A|=۵$ در این صورت حاصل $|\,|A|A\,|$ را بیابید.

۱۱ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} -۵ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۱۲ــ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx+۳y=۴ \\ x-۲y=۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

۱۳ــ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

الف) $\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$

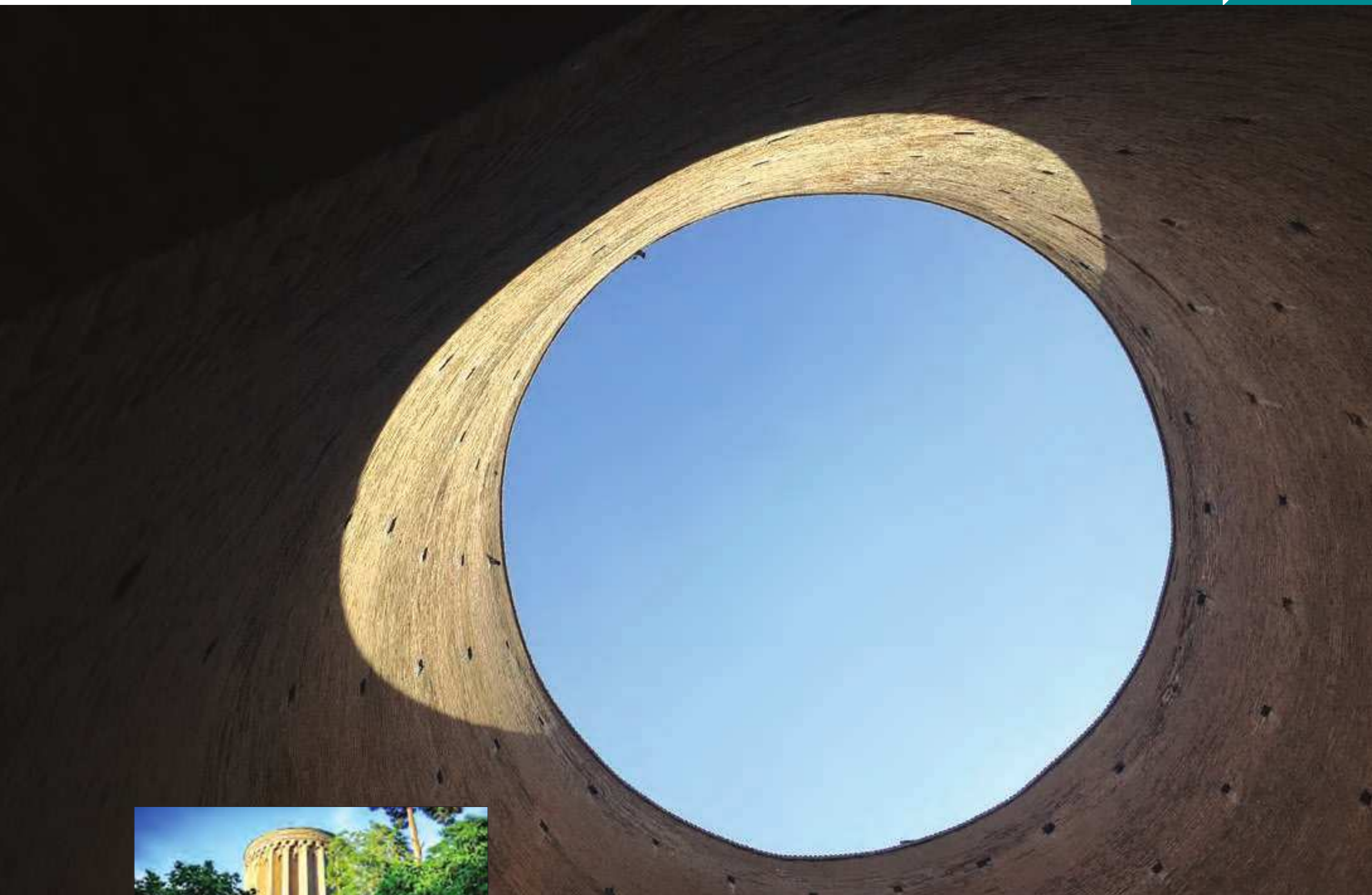
ب) $\begin{cases} x+۳y=۵ \\ -۲x-۶y=۱ \end{cases}$

پ) $\begin{cases} -۲x+۳y=۲ \\ ۴x-۶y=-۴ \end{cases}$

۲

فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

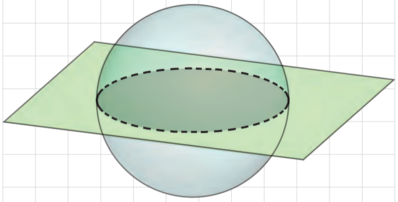


برج طغرل در شرق آرامگاه ابن‌بابویه شهرری و از آثار به‌جامانده از دورهٔ سلجوقیان است. ارتفاع برج حدود ۲۰ متر است و به عقیدهٔ برخی کارشناسان این برج مانند یک ساعت آفتابی عمل می‌کند و می‌توان از روی تابش آفتاب بر روی کنگره‌های آن، زمان را تشخیص داد.

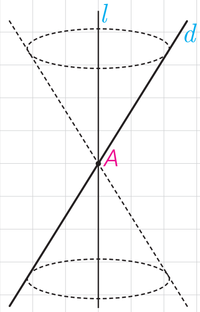
شکل این برج به‌صورت یک مخروط ناقص توخالی است و در نتیجه در ساعت‌های مختلف روز خورشید به درون آن تابیده و سطح داخلی آن را تاحدودی روشن می‌کند. مرز بین سایه و روشنایی، بخشی از محیط یک بیضی است! (چرا؟)

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

مقاطع مخروطی

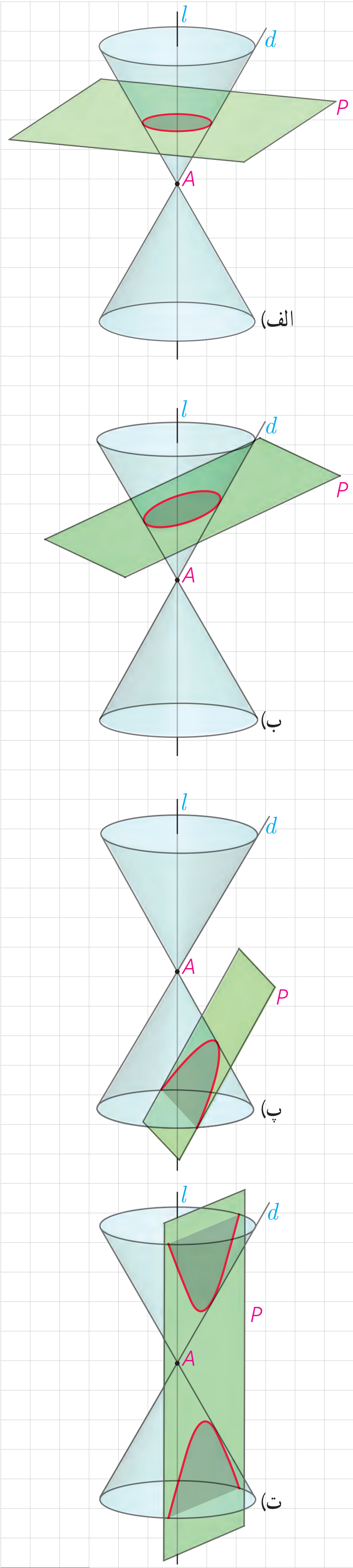


در پایهٔ دهم با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شدید. فرض کنید یک کره را (مانند شکل) توسط یک صفحه قطع کنیم (برش دهیم). منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعهٔ نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می‌تواند باشد؟



رویهٔ مخروطی : فرض کنید دو خط d و l در نقطهٔ A (مانند شکل) متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط l را محور، نقطهٔ A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

حال می‌خواهیم به‌طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا شویم. از تصاویر ارائه شده برای درکِ بهتر شکل حاصل کمک بگیرید.



الف) در حالتی که صفحهٔ P بر محورِ سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک **دایره** است.

ــ در چه حالتی فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی تنها نقطهٔ A خواهد بود؟

ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور l عمود نباشد و با مولدِ d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک **بیضی** خواهد بود.

پ) اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک **سهمی** است. (در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است.)

ت) اگر صفحهٔ P به‌گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک **هذلولی** است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص **هذلولی** نخواهیم پرداخت.

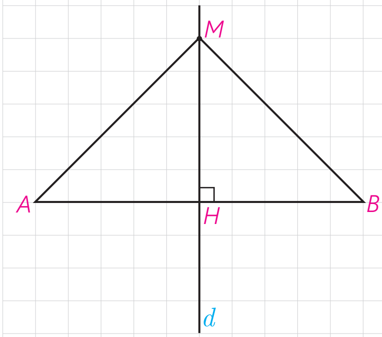
با تعریف دایره آشنایی قبلی دارید. توجه داشته باشید که بیضی، سهمی و هذلولی نیز هر کدام تعاریف دقیق و مشخص دارند، اما اینکه چرا فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی مطابق با آنچه گفته شد دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی است، قابل اثبات است ولی ما در این کتاب به این اثبات‌ها نمی‌پردازیم. حال که با دایره، بیضی، سهمی و هذلولی (مقاطع مخروطی) به‌صورت شهودی آشنا شدیم، برای تعریف دقیق این اشکال، ابتدا مفهوم مکان هندسی را معرفی می‌کنیم.

مکان هندسی

طریقهٔ رسم و ویژگی‌های عمود منصف یک پاره خط را از کتاب هندسهٔ ۱ به خاطر دارید. دو ویژگی زیر را یادآوری می‌کنیم :

ـ هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

ـ هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمود منصف آن است.



اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، در این‌صورت

$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

به‌طور خلاصه، یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می‌گوئیم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله‌اند.

به‌طور کلی مفهوم مکان هندسی به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

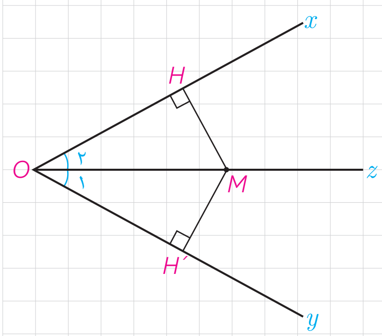
تعریف: مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

فعالیت ۱

در کتاب هندسه ۱ با ویژگی‌ها و طریقهٔ رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید :

۱ـ هر نقطه روی نیمساز زاویه ....

۲ـ هر نقطه که .... روی نیمساز زاویه است.



اکنون گزاره زیر را کامل کنید :

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر ....

$$(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) \quad M \in Oz \Leftrightarrow ......$$

بنابراین می‌توان گفت :

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ....

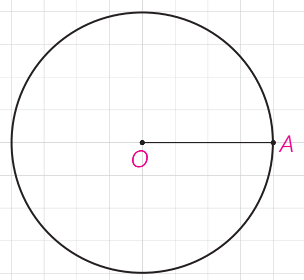
فعالیت ۲

دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.

الف) هر نقطهٔ دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله‌ای دارد؟

ب) اگر B، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصلهٔ r باشد $(OB=r)$ با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید :

$A\in C \Leftrightarrow OA=r$



نتیجه

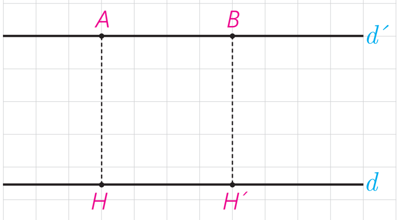
نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,r)$ است، اگر و فقط اگر ....

نتیجه

دایرهٔ $C(O,r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ....

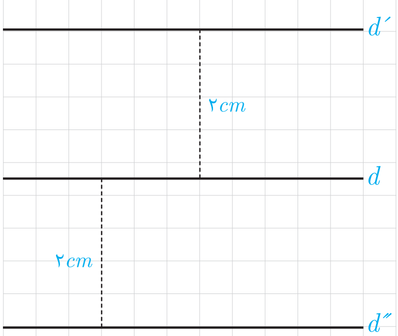
فعالیت ۳

دو خط موازی d , d' را که فاصلهٔ آنها از هم ۲ سانتی‌متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه A و B روی d'، از خط d فاصلهٔ یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟ آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند و روی d' نباشند؟ همه نقاطی که از d به فاصله ۲ سانتی‌متر واقع‌اند، روی چه شکلی قرار دارند؟



آیا گزاره زیر درست است؟

یک نقطه در صفحه، از خط d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.



آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر هستند، دو خط راست موازی d (در دو طرف آن) و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از آن می‌باشد.

مکان‌های هندسی مهم در صفحه :

ــ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت A و B در صفحه به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است.

ــ مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

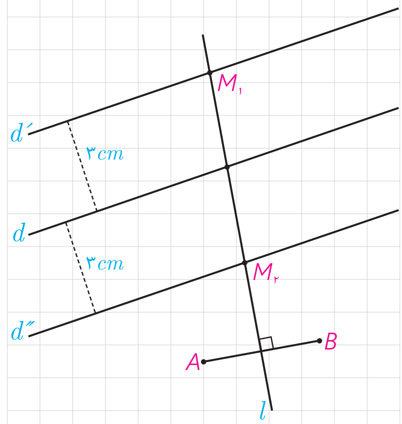
ــ مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ ثابت O به فاصله ثابت k قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع k است.

ــ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d، به فاصلهٔ k از آن و در دو طرف آن است.

کاربرد مکان هندسی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم‌های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشد، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند. بنابراین برای یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به‌دست آورد.

مثال : دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد.



حل : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن هستند. بنابراین نقطهٔ برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' و d'' جواب مسئله است (نقاط M_1 و M_2).

بحث در وجود جواب : اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر l با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

تمرین

۱ــ مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

ب) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند.

پ) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

ت) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس خارجی‌اند.

۲ــ نقاط A،B،C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۳ــ نقاط A،B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۴ــ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

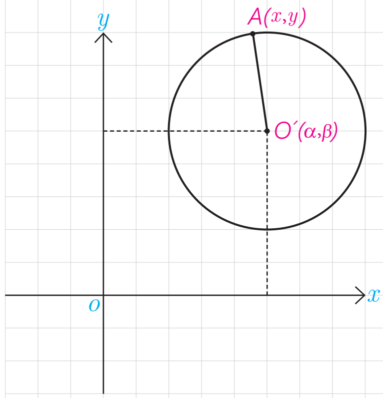
۵ــ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

۶ــ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحهٔ P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

درس دوم

دایــره

معروف‌ترین مقطع مخروطی، دایره است و چنانچه قبلاً دیدیم، دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز دایره) به فاصله‌ای ثابت (شعاع دایره) واقع‌اند. حال می‌خواهیم ویژگی‌های دایره را به صورت تحلیلی در دستگاه مختصات دوبعدی با هم مرور کنیم.

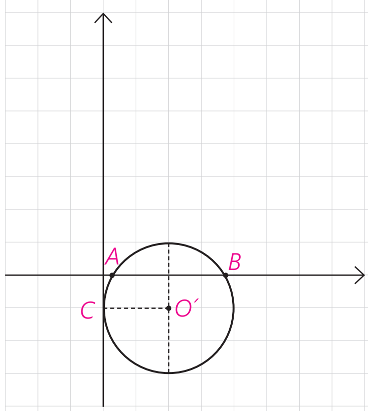


ــ معادلهٔ دایره : دایرهٔ $C(O',r)$ را در دستگاه **مختصات** xoy در نظر می‌گیریم. اگر $O'(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد و $A(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه روی آن باشد، با توجه به تعریف دایره، همواره $O'A=r$ و با توجه به دستور تعیین فاصلهٔ بین دو نقطه می‌توان نوشت :

$$|O'A|=\sqrt{(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}}=r\Rightarrow \boxed{(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=r^{۲}}$$

و این معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α,β) و شعاع r است، که به آن معادلهٔ استاندارد دایره نیز می‌گوئیم.

مثال : معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O'(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به‌دست آورید.



حل : به کمک دستور بالا **معادلهٔ استاندارد** دایرهٔ فوق نوشته می‌شود :

$(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴$

اگر در این معادله، $y=۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور xها به‌دست می‌آید :

$(x-۲)^{۲}+۱=۴\Rightarrow (x-۲)^{۲}=۳$

$\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۳}\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$

لذا دایره فوق محور xها را در نقاط $A(۲-\sqrt{۳},۰)$ و $B(۲+\sqrt{۳},۰)$ قطع می‌کند و اگر در معادلهٔ دایره، $x=۰$ قرار دهیم نقاط برخورد با محور yها پیدا می‌شوند :

$x=۰\Rightarrow (y+۱)^{۲}=۰\Rightarrow y=-۱$

بنابراین دایرهٔ فوق محور yها را فقط در یک نقطهٔ $C(0,-1)$ قطع می‌کند و می‌دانیم که اگر یک خط دایره‌ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است. پس همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود، دایره در نقطهٔ C بر محور yها مماس است.

در معادلهٔ دایره می‌توانیم به کمک اتحادها، عبارت‌های درجهٔ دوم را ساده کنیم، مثلاً در معادلهٔ فوق داریم:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow$$
$$x^2-2x+4+y^2+2y+1=4 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2-2x+2y+1=0$$

که این معادله را **معادلهٔ ضمنی** دایره می‌نامیم.

ـــ تبدیل معادلهٔ ضمنی دایره به معادلهٔ استاندارد:

در حالت کلی معادله‌ای به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ممکن است معادلهٔ دایره‌ای باشد. برای این منظور عبارت‌های x^2+ax و y^2+by را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم.

مثال: مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ را به‌دست آورید.

حلّ:

$$x^2+2x+y^2-4y=-1 \Rightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4=-1$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow O'(-1,2), r=2$$

فعالیت ۱

می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را در حالت کلی به‌دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید:

$$(x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4})+(y^2+by+\cdots-\cdots)+c=0 \Rightarrow$$
$$(x+\cdots)^2+(y+\cdots)^2-\cdots-\cdots+c=0 \Rightarrow$$
$$(x+\cdots)^2+(y+\cdots)^2=\frac{\cdots\cdots\cdots}{4}$$
$$\Rightarrow O(\cdots,\cdots), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه‌ای دربارهٔ a,b,c به‌دست می‌آید؟

رابطهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^۲+b^۲>۴c$ باشد و اگر $a^۲+b^۲<۴c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر $a^۲+b^۲=۴c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

نتیجه

با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادلهٔ آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادلهٔ دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

کاردرکلاس

۱ــ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ و شعاع آن ۳ واحد باشد.

۲ــ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

۳ــ کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به‌دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰$

ب) $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰$

ج) $۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰$

مثال : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-۲,-۱)$ مرکز آن و $M(۱,۱)$ یک نقطه از آن باشد.

حل : مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادلهٔ آن را بنویسیم. روشن است که $OM=r$ پس طول OM را به‌دست می‌آوریم :

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^۲+(y_M-y_O)^۲}=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۱۳}$$

و معادله دایره به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(x+۲)^۲+(y+۱)^۲=۱۳$$

فعالیت ۲

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(۱,-۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادلهٔ $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.

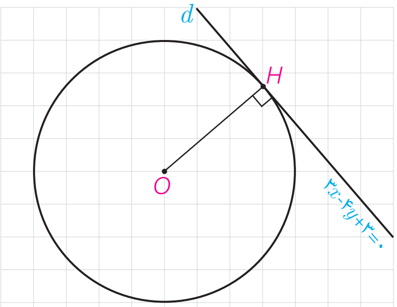
۱ــ با توجه به آنچه از هندسهٔ ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطهٔ تماس (H) برخط ....

۲ــ طول شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره از ....

۳ــ به کمک دستور فاصلهٔ نقطه از خط داریم : $r=OH=\frac{|..............|}{\sqrt{\cdots+\cdots}}=\cdots$

۴ــ معادلهٔ دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم :

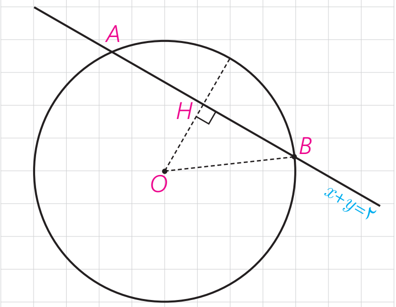
$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=\cdots\Rightarrow\cdots$



کاردرکلاس

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

(**راهنمایی:** می‌دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.)



مثال : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ از مماس بیرونی باشد.

حل : مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ فوق را به‌دست می‌آوریم :

$x^۲-۲x+y^۲+۲y=۰\Rightarrow$

$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۲\Rightarrow O'(۱,-۱),r'=\sqrt{۲}$

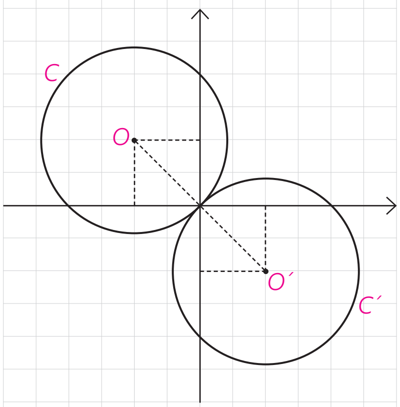
و چنانچه از هندسهٔ ۲ می‌دانیم اگر $d=OO'$ طول خط المرکزین دو دایرهٔ مماس خارج باشد، $d=r+r'$ بنابراین داریم :

$d=OO'=\sqrt{(۱+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$

$d=۲\sqrt{۲}=r+\sqrt{۲}\Rightarrow r=\sqrt{۲}$

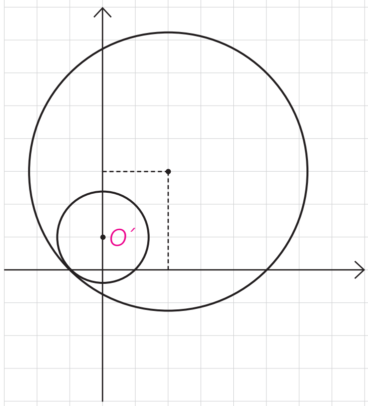
و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادلهٔ دایرهٔ C را می‌نویسیم :

$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$



فعالیت ۳

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(\circ,۱)$ بوده و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس داخل باشد.



۱ــ معادلهٔ دایره فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$$(x-\cdots)^۲+(y-\cdots)^۲=\cdots \Rightarrow O'(\cdots,\cdots), r'=\cdots$$

۲ــ طول خط المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم :

$$d=OO'=\sqrt{(\circ-۲)^۲+(۱-۳)^۲}=\cdots$$

۳ــ با توجه به آنچه از هندسه ۲ می‌دانیم، داریم :

$$d=|r-r'| \Rightarrow |r-\cdots|=۲\sqrt{۲} \Rightarrow r-\cdots=\pm۲\sqrt{۲} \Rightarrow r=\cdots\cdots$$

۴ــ با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم :

$$(x-\circ)^۲+(y-۱)^۲=(\cdots\pm۲\sqrt{۲})^۲$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟

کاردرکلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$, $x^۲+y^۲-۱\circ x-۱۴y+۷۳=\circ$

ب) $x^۲+y^۲-۲x=۱$, $x^۲+y^۲=۱$

ج) $x^۲+y^۲=۹$, $x^۲+y^۲-۲x+۲y+۱=\circ$

د) $x^۲+y^۲=۴$, $x^۲+y^۲-۸x-۴y+۱۹=\circ$

(**راهنمایی:** مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به‌دست آورده و پس از تعیین طول خط المرکزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)

فعالیت ۴

می‌خواهیم وضعیت خط به معادلهٔ $x+y=۴$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ را تعیین کنیم.

روش اول : از معادلهٔ خط، $y=۴-x$ را در معادلهٔ دایره جایگزین می‌کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه‌های برخورد از معادله حاصل به‌دست می‌آید) :

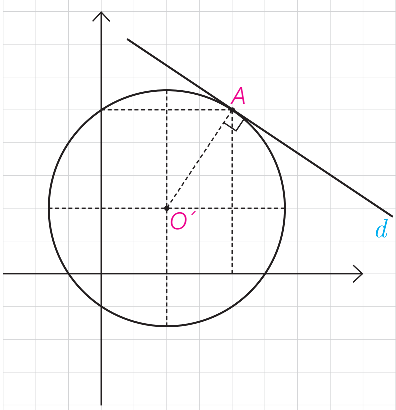
$x^۲+(۴-x)^۲-۲(۴-x)-۳=۰\Rightarrow\cdots$

با ساده‌کردن معادلهٔ حاصل و تعیین علامت Δ، نشان دهید معادلهٔ فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم : معادلهٔ دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصلهٔ مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می‌دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه‌گیری‌تان را ببینید.

سؤال : اگر در معادلهٔ حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta>۰$ یا $\Delta=۰$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت‌ها فاصله مرکز دایره از خط چگونه است؟



مثال : در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.

حل : با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره شیب OA را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب مماس را به‌دست آورده و معادله آن را تعیین می‌کنیم.

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵\Rightarrow O(۱,۱)\Rightarrow m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲\Rightarrow$$

$$m_d=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)\Rightarrow \text{d معادله مماس}: y=-\frac{۱}{۲}x+۴$$

تمرین

۱ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف) $O(۱,۱)$ مرکز آن و $A(۳,۲)$ نقطه‌ای از آن باشد.

ب) $O(۲,۱)$ مرکز آن بوده و برخط $۳x+۴y=۰$ مماس باشد.

پ) $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=۱$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y=۲x-۱$ شامل قطری از آن باشد.

۲ــ حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.

۳ــ وضعیت هر یک از نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$ تعیین کنید.

۴ــ وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^۲+y^۲=۴ \quad , \quad x^۲+y^۲-۲x=۴$

ب) $x^۲+(y-۱)^۲=۱ \quad , \quad (x-۱)^۲+y^۲=۱$

ج) $x^۲+y^۲=۱ \quad , \quad x^۲+y^۲-۳\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}y+۵=۰$

د) $x^۲+y^۲=۱ \quad , \quad x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$

۵ــ نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به‌دست آورید.

۶ــ وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $۳x+۴y=۰ \quad , \quad x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$

ب) $x+y=۲ \quad , \quad x^۲+y^۲=۲$

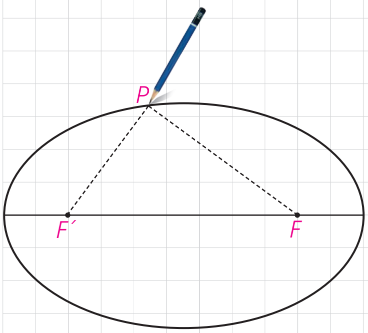
ج) $x+y=۱ \quad , \quad x^۲+y^۲-۲x-۲y=۲$

درس سوم

بیضی و سهمی

بیضی

فعالیت ۱



یک تکه نخ درنظر گرفته و دوسر آن را مطابق شکل در دو نقطهٔ F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ l باشد و $l > FF'$ یک قلم را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دوطرف نخ به‌صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که **بیضی** نام دارد.

۱ــ یک نقطهٔ دلخواه روی شکل رسم شده درنظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطهٔ ثابت F و F' برابر چیست؟

۲ــ یک نقطهٔ دلخواه مانند A در درونِ بیضیِ رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطهٔ ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطهٔ موردنظر از F و F' کوچکتر از l است.

(**راهنمایی:** پاره‌خط FA را از سمت A امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید)

۳ــ یک نقطهٔ دلخواه مانند B بیرونِ بیضیِ رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطهٔ F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطهٔ موردنظر از F و F' بزرگتر از l است.

(**راهنمایی:** اگر نقطهٔ D محل برخورد FB با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

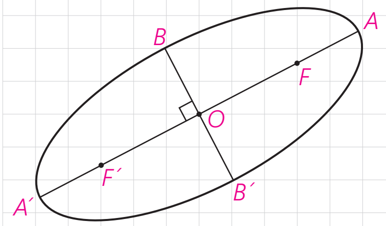
۴ــ از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همهٔ نقاط بیضی شدید که هیچ نقطهٔ دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

۵ــ با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو .... یک مقدار .... است.

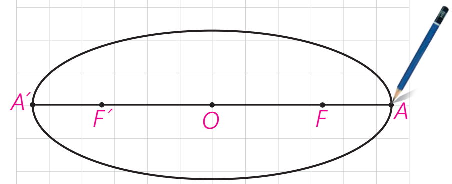
دو نقطهٔ ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به‌دست آوردیم و آنها را F و F' نامیدیم کانون‌های بیضی نام دارند.

فعالیت ۲



بیضی مقابل را درنظر بگیرید. AA' قطر بزرگ (قطر کانونی) و BB' قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود. F و F' کانون‌های بیضی هستند و نقطهٔ O، وسط پاره خط FF'، مرکز بیضی است. فرض کنید اندازهٔ پاره‌خط‌های OA، OB و OF را به ترتیب با a، b و c نمایش دهیم. بنابراین فاصلهٔ دو کانون بیضی برابر ۲c است.

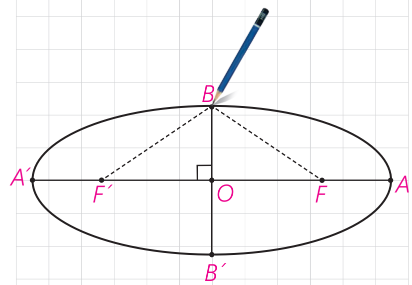
۱ــ در ترسیم بیضی با نخ و قلم دو وضعیتی را که قلم در نقاط A و A' قرار می‌گیرد درنظر بگیرید.



الف) نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید $OA' = OA = a$ و لذا اندازهٔ قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است.

ب) نشان دهید طول نخ موردنظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

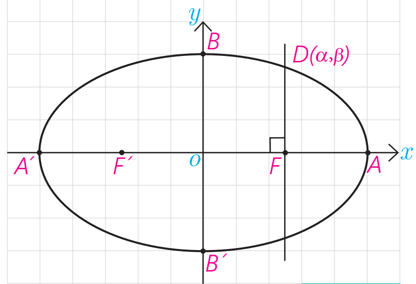
۲ــ الف) در رسم بیضی وضعیتی را که قلم در نقطهٔ B قرار دارد درنظر بگیرید و نشان دهید $b^۲+ c^۲ = a^۲$



ب) با انجام همین کار برای نقطهٔ B' نتیجه بگیرید $OB'^۲ +c^۲ = a^۲$

و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB' = OB = b$ و لذا اندازهٔ قطر کوچک بیضی برابر ۲b است.

کار در کلاس



۱ــ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطهٔ F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده باشد، مختصات D را به‌دست آورید.

فعالیت ۳

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای a و c بیضی موردنظر را رسم می‌کنیم.
می‌دانیم که $۰ \le c \le a$ و لذا $۰ \le \frac{c}{a} \le ۱$ دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به‌صورت تقریبی ابتدا دو کانون F و F' را به فاصلهٔ $۲c$ از هم درنظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به‌گونه‌ای انتخاب کنید که فاصلهٔ A تا F و فاصلهٔ A' تا F' برابر $a-c$ و اندازهٔ AA' برابر $۲a$ باشد، سپس با استفاده از رابطهٔ $b^۲=a^۲-c^۲$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را به‌طور تقریبی رسم کنید :

۱ــ $c=۱$ و $a=۴$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}$

۲ــ $c=۲$ و $a=۸$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}$

۳ــ $c=۱$ و $a=۲$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$

۴ــ $c=۲$ و $a=۴$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$

۵ــ $c=۳$ و $a=۴$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۴}$

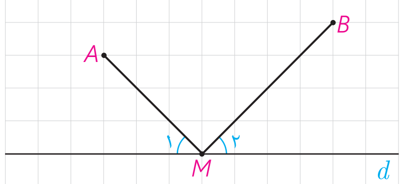
۶ــ $c=۶$ و $a=۸$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۴}$

با توجه به آنچه دیدید هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده‌تر شده و شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود و هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود. به این سبب مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

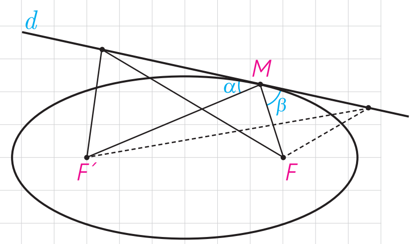
ــ در حالتی که $\frac{c}{a}=۱$ بیضی تبدیل به یک پاره‌خط و در حالتی که $\frac{c}{a}=۰$ بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. چرا؟

یادآوری

در پایهٔ یازدهم دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A به نقطهٔ B و با عبور از نقطه‌ای از خطِ d، از نقطه‌ای مانند M روی خط d می‌گذرد، به‌گونه‌ای که دو زاویهٔ ایجاد شده $M_۱$ و $M_۲$ باهم برابرند.



فعالیت ۴



فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد.

۱ــ مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

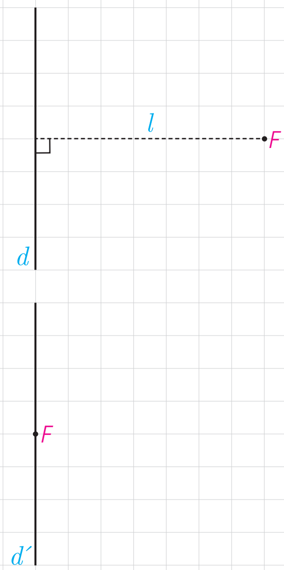
۲ــ دو زاویهٔ α و β نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳ــ با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنهٔ داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

سهمی

با سهمی در سال‌های گذشته تا حدی آشنا شده‌ایم. اکنون قصد داریم آن را به‌عنوان یک شکل هندسی مورد بررسی قرار دهیم.

فعالیت ۵

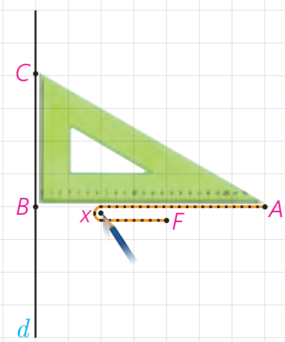


یک خط ثابت مانند d و یک نقطهٔ ثابت مانند f خارج آن درنظر بگیرید و فرض کنید فاصلهٔ F از خط d برابر l باشد.

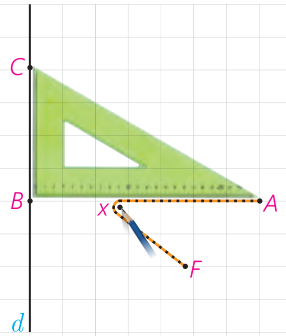
ــ یک نقطه بیابید که فاصلهٔ آن از خط d و نقطهٔ F یکسان باشد.

ــ آیا می‌توانید نقطهٔ دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطهٔ F خطی موازی خط d رسم کنید و آن را d' بنامید. تمام نقاط واقع بر خط d' فاصله‌شان از خط d برابر l است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط d' بیابید که از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله باشند.

ــ اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصلهٔ یکسانی از خط d و نقطهٔ F قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط موردنظر ارائه می‌گردد.

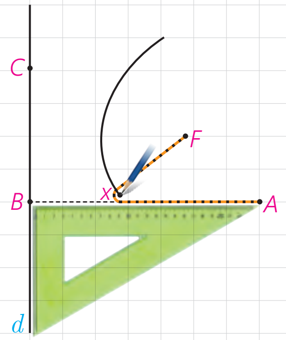


فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های A ، B و C باشند. یک سر یک تکه نخ به طول AB را در رأس A از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطهٔ F ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع BC بر خط d واقع باشد و نقطهٔ F بر ضلع AB قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به‌گونه‌ای به نخ گیردهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصلهٔ نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط d و از نقطهٔ F نسبت به هم چگونه است؟



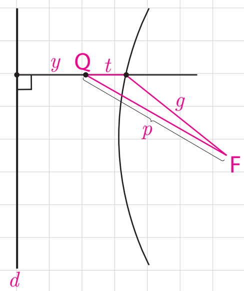
حال در حالتی که ضلع BC کماکان بر خط d واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع AB چسبیده باشد و هر دو تکهٔ نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطهٔ درحال حرکت نوک قلم را در هر حالت با X نمایش دهیم.

پاره‌خط‌های BX و FX هرکدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطهٔ X هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟



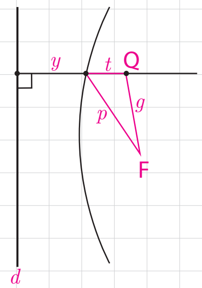
توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط قلم رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع BC بر خط d در هر دوطرف نقطهٔ F می‌توان حرکت داد.)

شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطهٔ F را **کانون سهمی** و خط d را **خط هادی سهمی** می‌نامیم و اگر از F بر d خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به آن **رأس سهمی** می‌گوییم. دیدیم که تمام نقاط روی سهمی از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله‌اند.



حال فرض کنیم نقطه‌ای مانند Q از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله باشد ولی روی سهمی واقع نباشد. در این صورت داریم :

$$\begin{cases} g = y + t \\ p = y \end{cases} \Rightarrow g = p + t$$



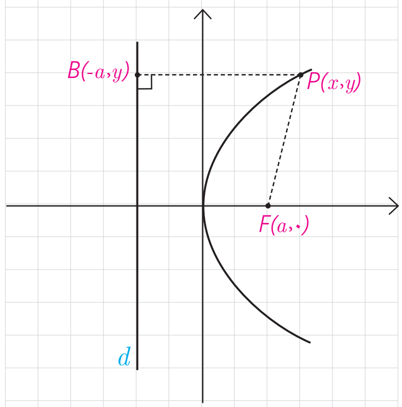
و تساوی اخیر با نامساوی مثلثی در تناقض است. بنابراین هیچ نقطه‌ای که روی سهمی نباشد نمی‌تواند از F و d به یک فاصله باشد. حال با توجه به آنچه دیدیم می‌توان گفت :

> **سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.**

معادلهٔ سهمی

با توجه به آنچه گفته شد با سهمی به‌صورت هندسی آشنا شدیم. حال به‌دنبال این هستیم که برای یک سهمی داده شده معادله آن را به‌دست آوریم؛ یعنی معادله‌ای به‌دست آوریم که مختصات هر نقطه از سهمی در آن معادله صدق کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله صدق کند روی سهمی موردنظر باشد. دقت کنید که این کار را فقط برای سهمی‌هایی انجام می‌دهیم که خط هادی آنها موازی با یکی از محورهای مختصات باشد.

فعالیت ۶



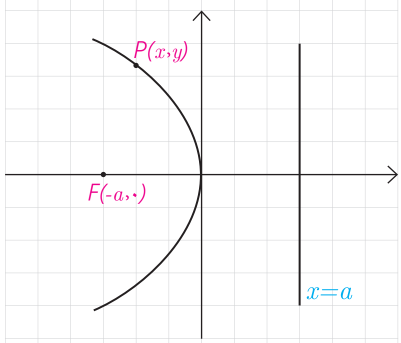
۱ــ فرض کنید نقطهٔ $F(a,0)$ ، که در آن a مثبت است، کانون سهمی و خط هادی d موازی محور yها به معادلهٔ $x=-a$ باشد و نقطهٔ $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم : $|PF|=|PB|$. چرا؟

بنابراین

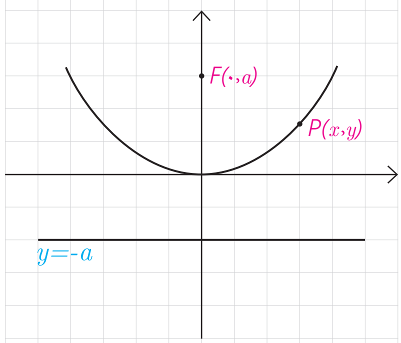
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+a)^2+(y-y)^2}$$

با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت : $y^2=4ax$

دقت کنید که a برابر با فاصلهٔ کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصلهٔ رأس سهمی تا خط هادی است و فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $2a$ است. در این حالت عدد مثبت a را **فاصلهٔ کانونی سهمی** می‌نامند و چنان که دیده می شود خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود می‌شود که در اینجا محور xهاست **محور تقارن سهمی** است که به آن **محور کانونی سهمی** یا **محور سهمی** هم می گوییم.

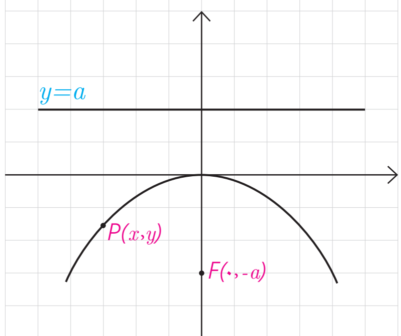


۲ــ در حالتی که خط هادی d موازی محور yها به معادلهٔ $x=a$ باشد ولی کانون $F(-a,0)$ در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $y^2=-4ax$ است. در این حالت محور xها محور سهمی است.



۳ــ در حالتی که خط هادی d موازی محور xها به معادلهٔ $y=-a$ و کانون $F(0,a)$ در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $x^2=4ay$ است. در این حالت محور yها محور سهمی است.

(در واقع این معادله همان $y=\frac{1}{4a}x^2$ است که در پایهٔ دهم به عنوان معادلهٔ سهمی با آن آشنا شدید)



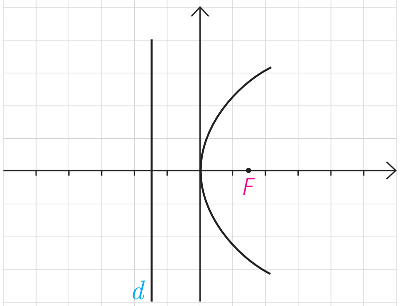
۴ــ در حالتی که خط هادی d موازی محور xها به معادلهٔ $y=a$ و کانون $F(0,-a)$ در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $x^2=-4ay$ است. در این حالت محور yها محور سهمی است.

مطالب فوق دربارهٔ سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی (a>۰)
رو به راست	محور x	$x=-a$	$(a,۰)$	$y^۲=۴ax$
رو به چپ	محور x	$x=a$	$(-a,۰)$	$y^۲=-۴ax$
رو به بالا	محور y	$y=-a$	$(۰,a)$	$x^۲=۴ay$
رو به پایین	محور y	$y=a$	$(۰,-a)$	$x^۲=-۴ay$

مثال : معادلهٔ $y^۲=۶x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.

حل : این معادلهٔ یک سهمی است که دهانهٔ آن روبه راست است و محور آن محور xهاست. با قرار دادن $۴a=۶$ داریم $a=\frac{۳}{۲}$. لذا کانون آن $F(\frac{۳}{۲},۰)$ و خط هادی آن موازی محور yها و به معادلهٔ $x=\frac{-۳}{۲}$ است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به‌صورت مقابل است.

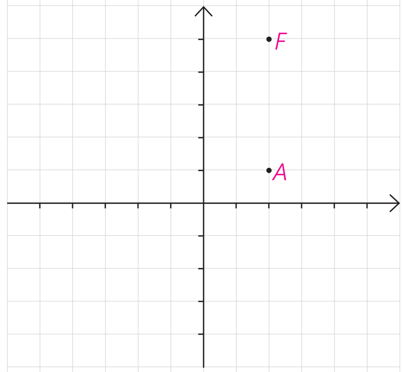


انتقال (محورها)

دیدیم که $y^۲=۴ax$ معادلهٔ یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن $F(a\ ,۰)$، خط هادی آن موازی محور yها به معادلهٔ $x=-a$، محور آن محور xها (خط $y=۰$) و دهانهٔ آن رو به راست است. حال با توجه به آنچه دربارهٔ انتقال می‌دانیم می‌توان گفت معادله $(y-k)^۲=۴a(x-h)$ معادلهٔ همان سهمی است که به اندازهٔ h به‌سمت راست (درصورت منفی بودن h به سمت چپ) و به‌اندازهٔ k به سمت بالا (درصورت منفی بودن k بـه‌سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مـختصات $(h\ ,k)$، کانون آن $F(a+h,\ k)$، خط هادی آن موازی محور yها به معادله $x=-a+h$، محور آن خط $y=k$ و دهانهٔ آن کماکان روبه راست است.

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی
رو به راست	خط $y=k$	$x=-a+h$	$(a+h\ ,k)$	$(y-k)^۲=۴a(x-h)$
رو به چپ	خط $y=k$	$x=a+h$	$(-a+h\ ,k)$	$(y-k)^۲=-۴a(x-h)$
رو به بالا	خط $x=h$	$y=-a+k$	$(h,a+k)$	$(x-h)^۲=۴a(y-k)$
رو به پایین	خط $x=h$	$y=a+k$	$(h,-a+k)$	$(x-h)^۲=-۴a(y-k)$

همان‌طور که گفته شد رأس این سهمی‌ها نقطه‌ای به مختصات (h, k) است. لذا این حالت‌ها، حالت‌های کلی معادلات است که با قراردادن $(h,k) = (0,0)$ به حالت‌های خاص، که در جدول قبل مطرح شد، خواهیم رسید. معادلات سهمی را در جدول فوق، **معادلات استاندارد یا متعارف** می‌گوییم.



مثال : معادلهٔ سهمی به رأس $A(2,1)$ و کانون $F(2,5)$ را بیابید و معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید.

حل : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

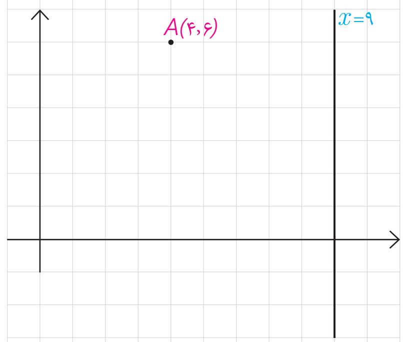
۱) $a = 4$ (چرا؟)

۲) معادله خط هادی آن $y = -3$ است. چرا؟

۳) دهانه سهمی روبه بالاست. چرا؟

لذا معادله آن به صورت $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ است و خواهیم داشت :

$$(x-2)^2 = 16(y-1)$$



مثال : مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس $A(4,6)$ و خط هادی $x = 9$ بنویسید.

حل : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

۱) $a = 5$ چرا؟

۲) کانون آن به مختصات $F(-1, 6)$ است، چرا؟

۳) دهانه سهمی رو به چپ است. چرا؟

لذا معادله آن به‌صورت $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ است و خواهیم داشت :

$$(y-6)^2 = -20(x-4)$$

تبدیل معادلهٔ یک سهمی به‌صورت متعارف

چهار حالت معادله سهمی را که در جدول دوم مطرح شد، ۴ حالت شناخته شده (متعارف) درنظر می‌گیریم. اما در سال‌های قبل معادلاتی با عنوان معادله سهمی مطرح شدند که برخی از آنها در ظاهر به شکل معادلات مطرح شده در جدول نبودند. به‌طور مثال در پایهٔ دهم معادله‌ای به‌صورت $y = x^2 + 3x + 5$ معادلهٔ یک سهمی نامیده شد. دقت کنید که ویژگی معادله سهمی این است که نسبت به یکی از دو متغیر x و y از درجه ۱ و نسبت به دیگری از درجه ۲ است. در ادامه نشان می‌دهیم معادله مطرح شده قابل تبدیل به یکی از ۴ حالت متعارف خواهد بود.

مثال : معادله یک سهمی به‌صورت $y=x^2+3x+5$ داده شده است. آن را به یکی از حالت‌های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

حل : داریم
$$x^2+3x=y-5$$
$$\Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}=y-5+\frac{9}{4}\Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2=y-\frac{11}{4}$$

لذا معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن $(-\frac{3}{2},\frac{11}{4})$ و $4a=1$ و در نتیجه $a=\frac{1}{4}$ است. بنابراین $F=(h,a+k)=(-\frac{3}{2},3)$ کانون آن و خط هادی آن به معادله $y=-a+k=\frac{5}{2}$ است. معادله محور سهمی به‌صورت $x=h=-\frac{3}{2}$ است.
با روش مشابه آنچه در مثال دیدید معادلات سهمی‌ها را می‌توان به یکی از حالات استاندارد نوشت.

رسم سهمی

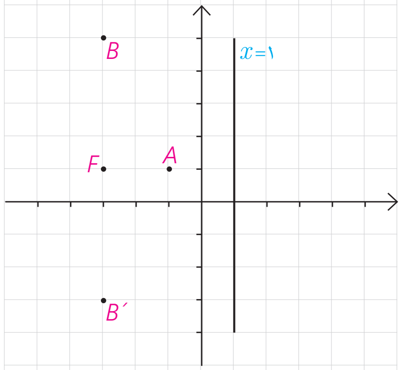
رسم دقیق یک منحنی توسط نرم‌افزارهای ریاضی انجام می‌گیرد. طبیعی است که در رسم منحنی‌ها با کاغذ و قلم، شکل حاصل شکل تقریبی منحنی مورد نظر خواهد بود.
برای رسم یک سهمی ابتدا معادله آن را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم و با توجه به آن، مختصات رأس سهمی، مقدار a (فاصله کانونی)، مختصات F (کانون) و خط هادی آن را به‌دست می‌آوریم و نیز درمی‌یابیم که دهانه سهمی رو به کدام طرف است.
یکی از مهم‌ترین نقاطی که باید در رسم سهمی جایگاه آن را مشخص نماییم، رأس سهمی است. اگر کانون سهمی را نیز مشخص نماییم دراین صورت خطی که از رأس و کانون سهمی عبور می‌کند محور تقارن سهمی است.
حال اگر خطی را که در نقطه F بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً B و B' را که به فاصله $2a$ از F هستند مشخص نماییم، در این‌صورت نقاط B و B' بر سهمی واقع‌اند. چرا؟

حال با داشتن رأس و دو نقطهٔ دیگر از سهمی و دانستن شکل کلی آن می‌توان شکل سهمی را به‌صورت تقریبی رسم کرد. قبل از رسم می‌توان نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات را نیز مشخص نمود.

مثال : نمودار معادله $y^2-2y+8x+9=0$ را رسم کنید.

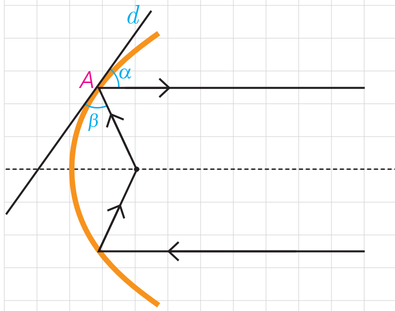
حل : ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم
$$y^2-2y+1=-8x-9+1$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+1)$$

لذا معادله فوق یک سهمی با رأس $A(h,k)=(-1,1)$ است که دهانه آن رو به چپ است. داریم: $-4a=-8$ و لذا $a=2$ و بنابراین $F(-a+h,k)=(-3,1)$ و معادله خط هادی آن به‌صورت $x=a+h=1$ است.



در این‌صورت نقاط B و B' که هم طول با F و به فاصله $2a=4$ از F باشند یعنی $B(-3,5)$ و $B'(-3,-3)$ نیز بر سهمی واقع‌اند. فاصله هریک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط B و A و B' به‌صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی موردنظر را به‌دست آورید.

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها و کاربردهای آن

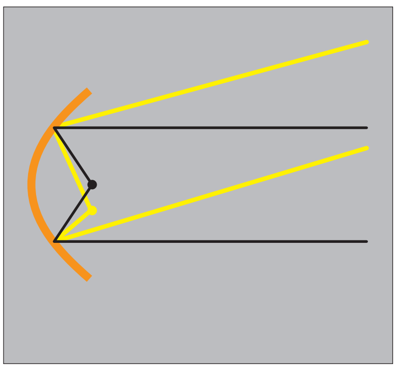


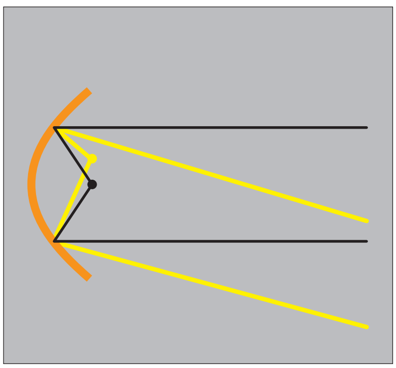
یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

درواقع اگر خط d برسهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه‌های α و β برابرند.

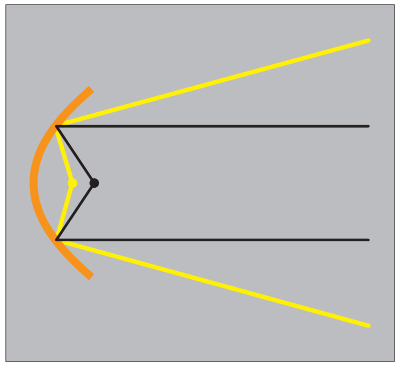
از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به‌طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به‌گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به‌حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این‌صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهموی پشت لامپ به‌صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به‌جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به‌وجود می‌آورند.

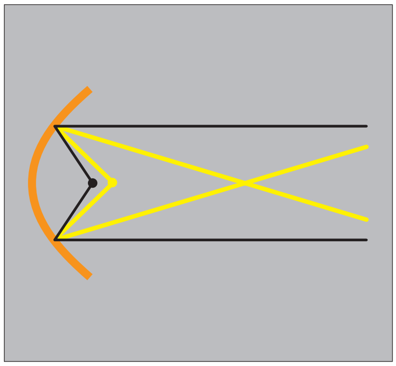
با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.





اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.





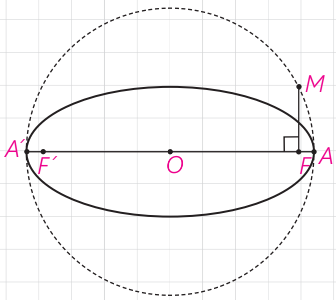
تمرین

۱ــ دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید :

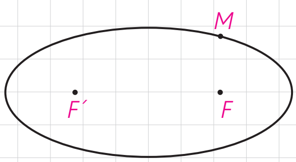
الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

۲ــ قطر دایرهٔ C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۳ــ در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$

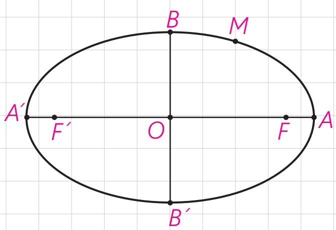


۴ــ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

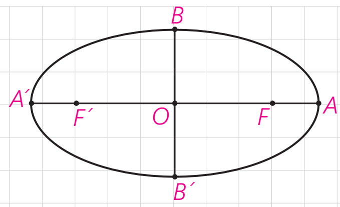
ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.

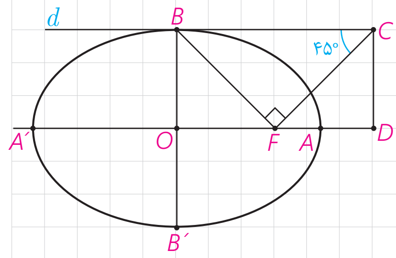


$OA = ۵$ $OB = ۳$ $OF = ۴$

۵ــ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟



۶ــ در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن‌را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.



۷ــ سهمی $y^۲=۲x-۴y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

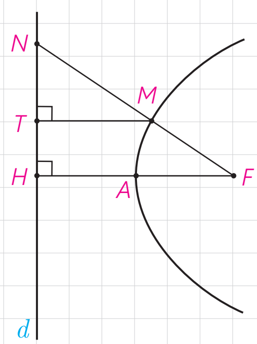
۸ــ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y=ax^۲+bx+c$ $(a\neq ۰)$ را به دست آورید.

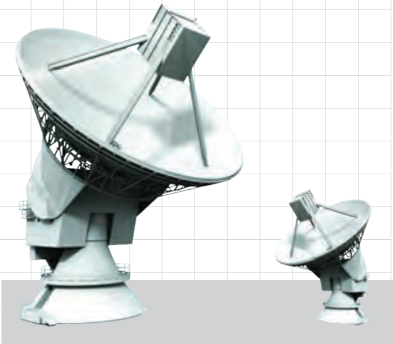
۹ــ معادله سهمی را بنویسید که $S(۱،۲)$ رأس و $F(۱،-۲)$ کانون آن باشد.

۱۰ــ سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

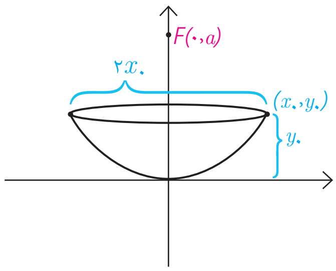
۱۱ــ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

۱۲ــ در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید : $\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$



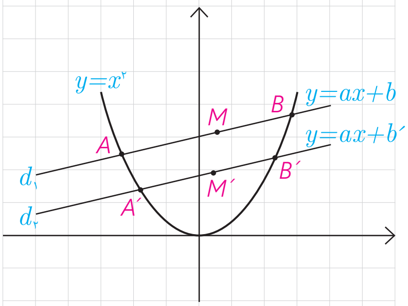


۱۳ـ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن‌را به‌دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۱۴ـ فرض کنید از مثلث ABC، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را توضیح دهید.

۱۵ـ سهمی $y = x^۲$ و دو خطِ موازی $d_۱:\ y = ax + b$ و $d_۲:\ y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند، درنظر بگیرید.



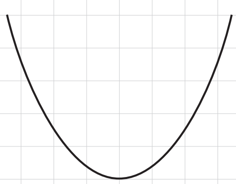
الف) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط $d_۱$ و سهمی $y = x^۲$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط $d_۱$ و سهمی باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطهٔ M را به‌دست آورید.

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط $d_۲$ به جای $d_۱$ انجام دهید و مختصات نقطهٔ M' (نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط $d_۲$ و سهمی) را به‌دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور yها چه وضعی دارد؟

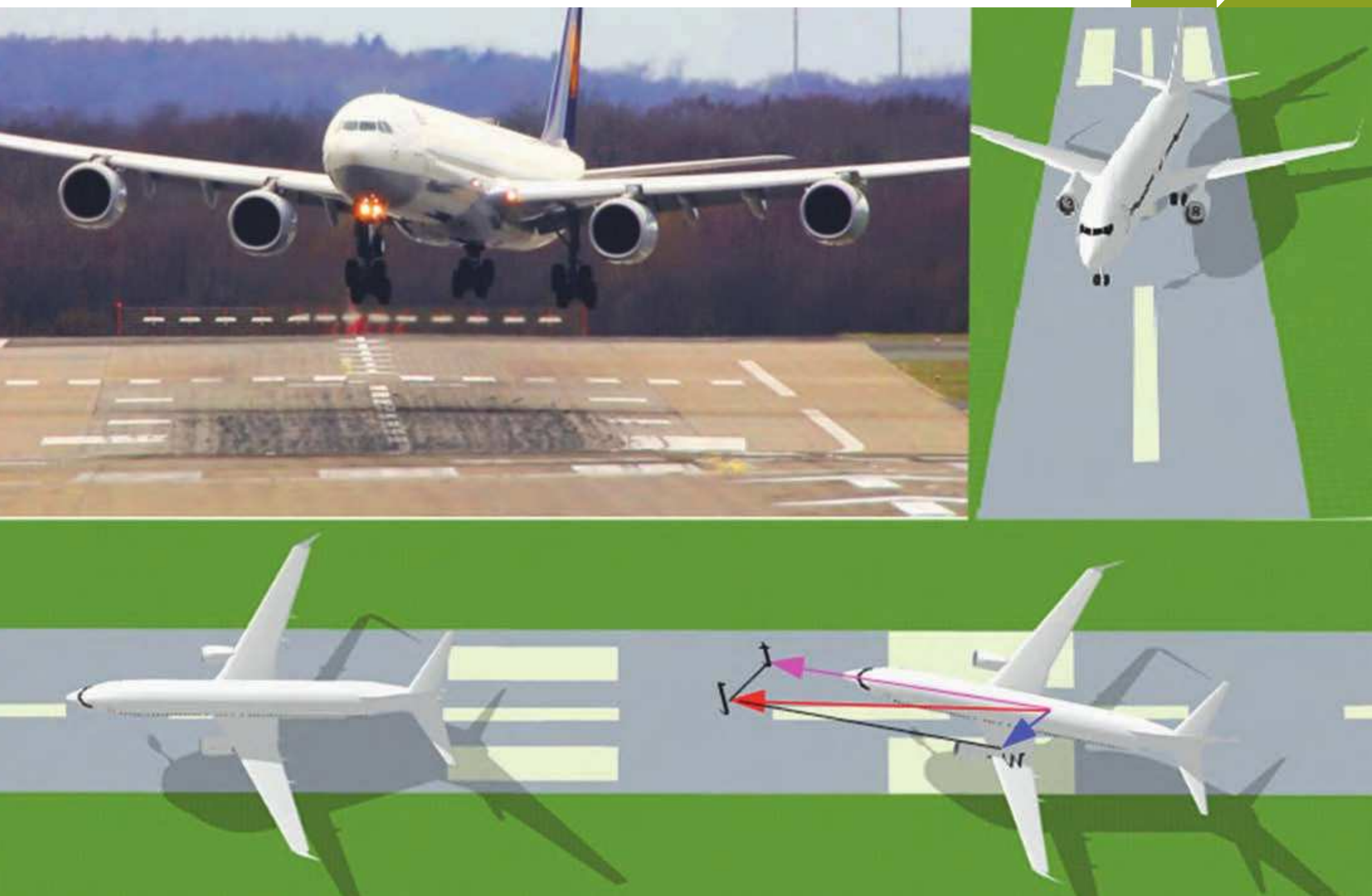
ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



۳

فصل سوم

بـــردارهـــا



بنابه گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی غیر هم‌راستا با خط فرود می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند بردارهای نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار گیرد. به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند.

درس اوّل

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می‌دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (a,b) که $a,b\in\mathbb{R}$ مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به‌صورت زوج مرتب (x,y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با $\mathbb{R}^2$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$$

همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می‌دانید که حالت کلی آن به صورت $ax+by=c$ است که در آن $a,b,c\in\mathbb{R}$ (a و b هم‌زمان صفر نیستند).

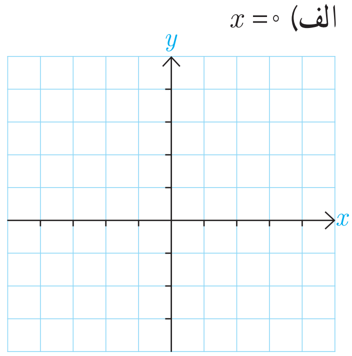
به طور کلی هر وقت گفته می‌شود رابطه یا معادله‌ای نمودار G را مشخص می‌کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار G در آن رابطه یا معادله صدق می‌کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار G قرار دارد.

با توجه به آنچه گفته شد می‌خواهیم در $\mathbb{R}^2$ یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکل‌های متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل‌ها، روابط مرتبط با آنها را مشخص نماییم.

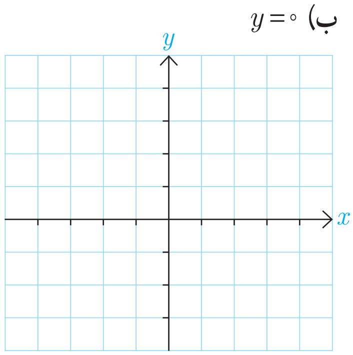
کار در کلاس

۱ــ برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

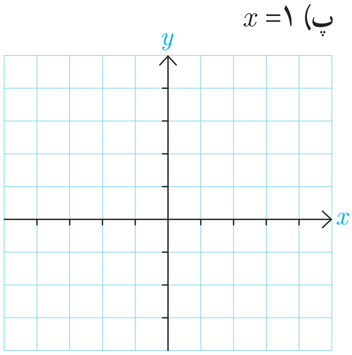
الف) $x=0$



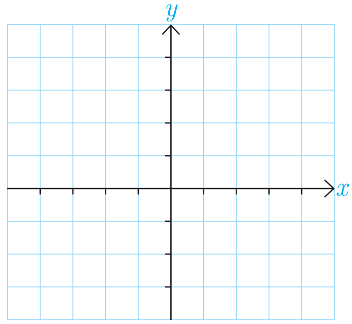
ب) $y=0$



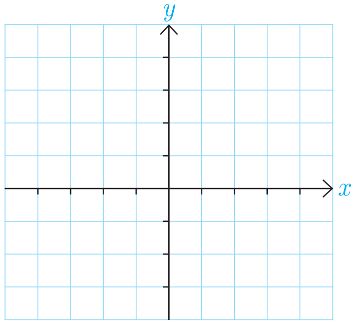
پ) $x=1$



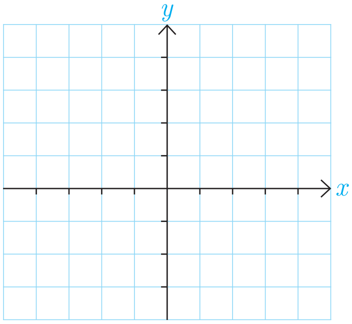
ت) $-۱ \le y < ۳ \quad , \quad x = ۱$



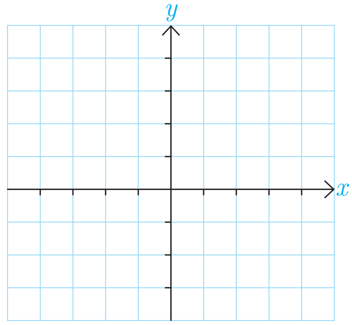
ث) $-۱ < x \le ۲ \quad , \quad y = x^۲$



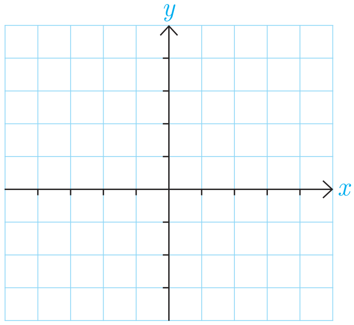
ج) $۱ \le x \le ۲ \quad , \quad y = x^۲$



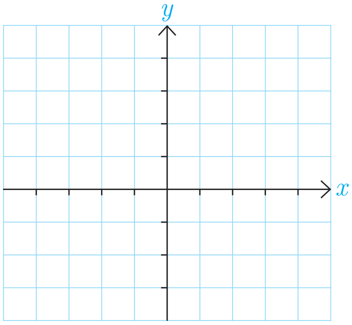
چ) $-۲ \le y \le ۱ \quad , \quad -۱ \le x \le ۱$



ح) $x^۲ < y \le ۲$

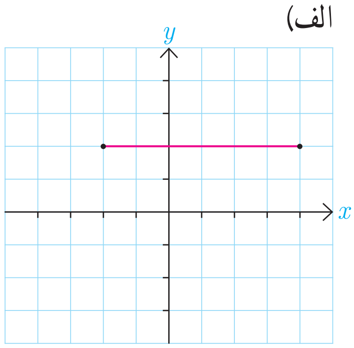


خ) $y \ge x^۲$

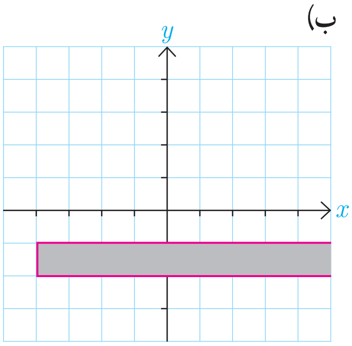


۲ــ در هر یک از شکل‌های روبه‌رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.[۱]

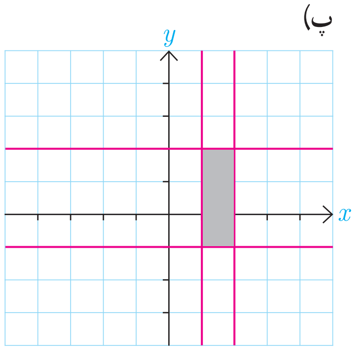
الف)



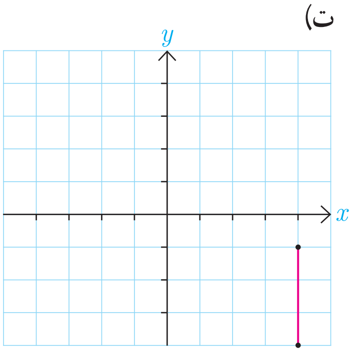
ب)



پ)



ت)



۱ــ صرفاً ناحیه‌هایی مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.

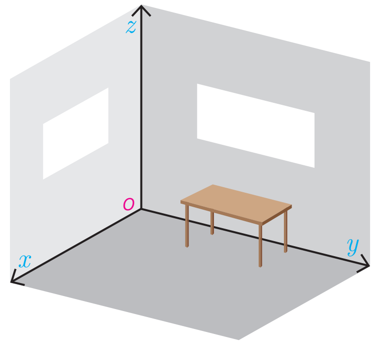
حال به سراغ فضای $\mathbb{R}^3$ می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای $\mathbb{R}^3$ و مجموعه تمام سه‌تایی‌های (a,b,c) که در آن $a,b,c\in\mathbb{R}$ برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه (که خود دو بعدی است) رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیرید.

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

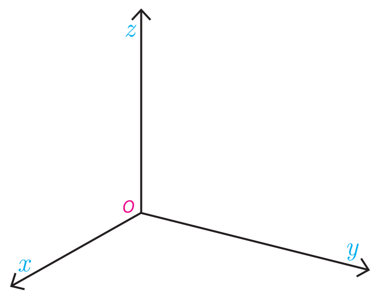
مشابه $\mathbb{R}^2$ می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) که در آنها x,y,z اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای $\mathbb{R}^3$ می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط $\mathbb{R}^2$ از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم xها و yها استفاده می‌شود. به‌طور مشابه می‌توان فضای $\mathbb{R}^3$ را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دو عمود برهم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محور دو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کنج[1] می‌دهند.

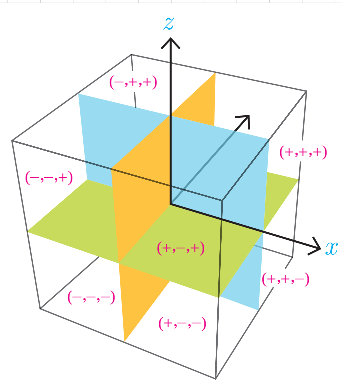


محورهای Ox، Oy و Oz به ترتیب محور xها، محور yها و محور zها نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت‌اند از صفحه xy (کف اتاق) شامل محور xها و yها، صفحه yz (دیوار سمت راست) شامل محور yها و zها، صفحه xz (دیوار سمت چپ) شامل محور xها و zها هستند. جهت مثبت هریک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه O) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه $\mathbb{R}^3$ به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه xy و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه xy هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه xy مطابق با شماره‌گذاری استاندارد یک دستگاه $\mathbb{R}^2$ شماره‌گذاری می‌شوند.



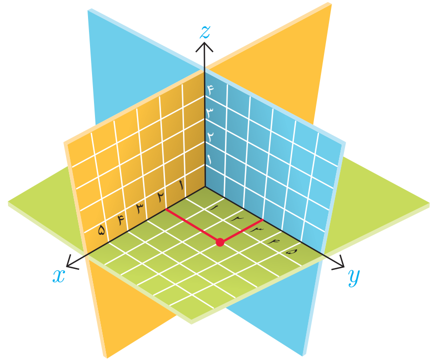
مثلاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه xy از ۵ تا ۸ شماره‌گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول روبه‌رو مشخص شده‌اند.

شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

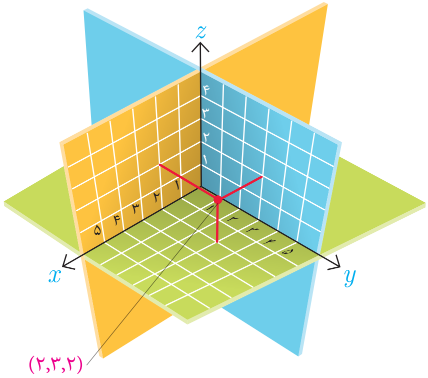


۱ــ از برخورد سه صفحهٔ دوبه‌دو متقاطع، یک کنج تشکیل می‌شود.

برای نمایش سه‌تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ کافی است ابتدا همانند شکل ۱ نقطه (x_0, y_0) را در صفحه xy بیابیم و سپس ارتفاع آن را به اندازه z_0 در راستای موازی با محور zها (یعنی به‌طور عمودی) تغییر دهیم تا شکل شماره ۲ حاصل شود.

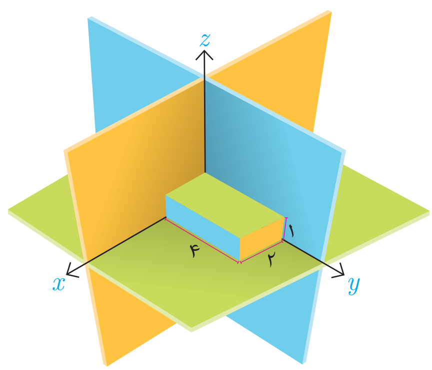


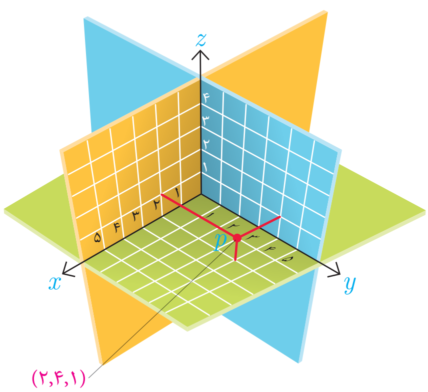
شکل شماره ۱



شکل شماره ۲

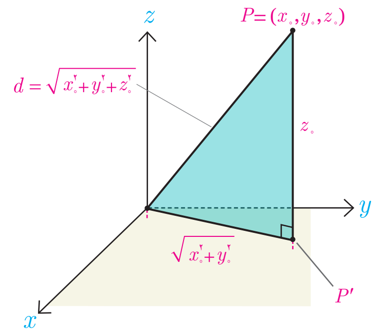
در واقع، می‌توان سه نقطه به طول‌های x_0, y_0, z_0 به ترتیب بر روی محورهای x, y, z در نظر گرفت و سپس صفحه گذرنده از x_0 و موازی با صفحه yz، صفحه گذرنده از y_0 و موازی با صفحه xz و صفحه گذرنده از z_0 و موازی با صفحه xy را در نظر بگیریم. محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول x_0، عرض y_0 و ارتفاع z_0 است که نمایش‌دهنده سه‌تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) می باشد. مثلاً نقطه P در شکل زیر متناظر با سه‌تایی مرتب (۲,۴,۱) است.





همچنین نقطه O که مبدأ مختصات است متناظر سه تایی مرتب $(0,0,0)$ می‌باشد.
دو نقطه $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ را برهم منطبق گوییم و می‌نویسیم $P=Q$ هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی $x_0=x_1\ ,\ y_0=y_1\ ,\ z_0=z_1$.

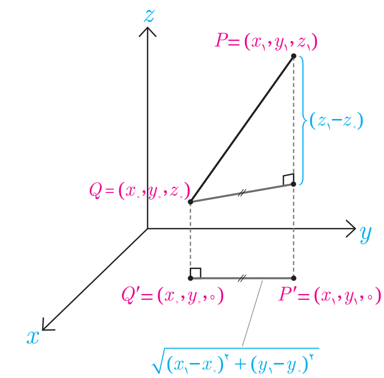
برای یافتن فاصله یک نقطه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P=(x_0,y_0,z_0)$ از مبدأ مختصات کافی است از نقطه P عمودی بر صفحه xy رسم کرده و پای عمود را P' بنامیم. در این‌صورت با توجه به شکل مقابل ازقضیه فیثاغورس طول پاره خط OP' به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$|OP'|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه OPP' از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر OP استفاده می‌کنیم. پس داریم :

$$|OP|=\sqrt{|OP'|^2+z_0^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

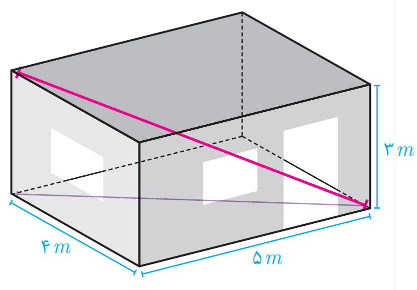


رابطه فوق را می‌توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ به‌صورت زیر تعمیم داد.

$$|PQ|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

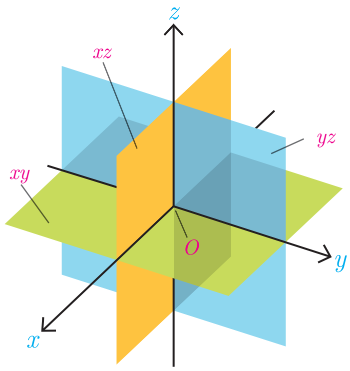
مثال : در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می‌شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟

$$\text{قطر مستطیل کف اتاق}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}\Rightarrow \text{قطر اتاق}=\sqrt{41+3^2}=5\sqrt{2}$$



حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می‌پردازیم.

مثال : فرض کنید معادله $x=0$ داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق می‌کنند و این یعنی تمام نقاطی که مؤلفه اول آنها یعنی x برابر صفر باشد. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله $\mathbb{R}^2$ است یا $\mathbb{R}^3$.



قبلاً در کار در کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در $\mathbb{R}^۲$ محور yهاست. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از $\mathbb{R}^۳$ را مشخص نماییم که مؤلفه اول آنها برابر صفر است، یعنی تمام سه تایی‌هایی به صورت $(۰, y, z)$ به طوری که $y, z \in \mathbb{R}$. همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار y و z هرچه باشد در صورتی که مؤلفه اول صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله $x = ۰$ صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر y و z آزاد هستیم. مثلاً نقاط $(۰,-۳,-۱)$ ، $(۰,۰,۰)$ ، $(۰,۱,۲)$ و $(۰,-۱,۵)$ همگی در معادله صدق می‌کنند. تمام این نقاط در معادلهٔ $x = ۰$ صدق می‌کنند و این همان صفحهٔ yz است.

فعالیت

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله $x = ۰$ در $\mathbb{R}^۳$ تمام نقاط صفحه yz است (به عبارتی $x = ۰$ معادله صفحه yz است) و دیدیم که نقاط مختلفی با y و zهای دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه yz به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر $x = ۰$ شرط $z = ۰$ را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه yz سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها $z = ۰$ باشد.)

۱ــ مختصات چند نقطه را که در رابطه $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

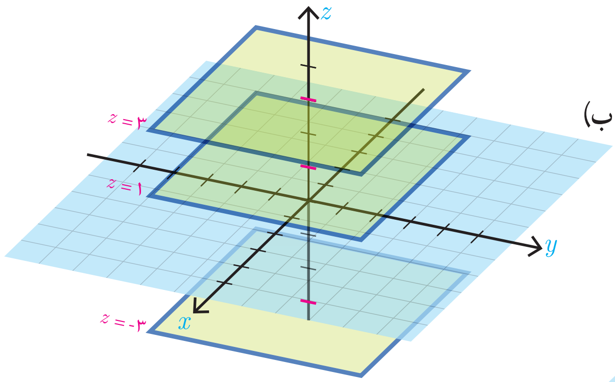
۲ــ نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x = ۰$ دارد؟

مثال : روی صفحهٔ $z = ۱$ نقاط $A = (۱,۲,۱)$ و $B = (۲,۲,۱)$ و $C = (۳,۲,۱)$ را در نظر می‌گیریم، مؤلفهٔ دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحهٔ مزبور $(z = ۱)$ تمام نقاطی که مؤلفهٔ دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن یک خط است به معادلات $\begin{cases} y = ۲ \\ z = ۱ \end{cases}$)

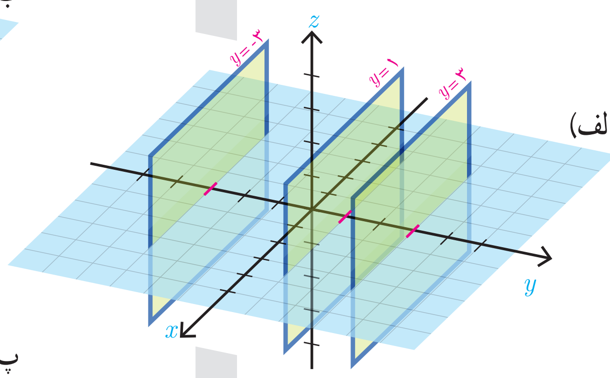
کاردرکلاس

۱ــ در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.

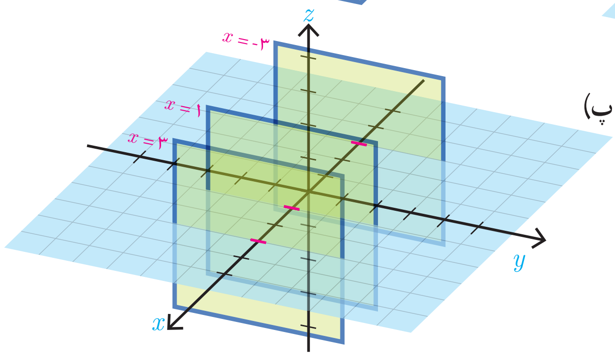
ب)

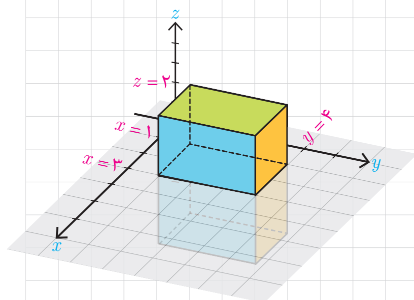


الف)



پ)





۲ــ وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=۱$، $x=۳$، $y=۱$، $y=۴$، $z=-۲$ و $z=۲$ هستند[۱].

الف) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

ب) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

پ) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

ت) روابط مشخص‌کنندهٔ یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کنندهٔ پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} ۱ \leq x \leq ۳ \\ ۱ \leq y \leq ۴ \\ z = ۲ \end{cases}$$

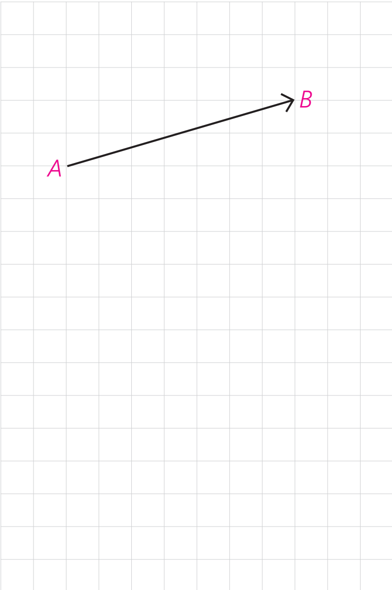
ث) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

ج) شرط اینکه نقطه‌ای درون یا روی یکی از وجه‌های این مکعب باشد چیست؟

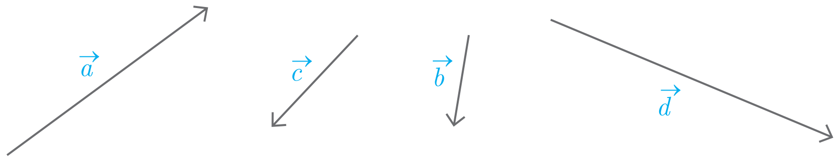
چ) روابطی را بنویسید که مشخص‌کنندهٔ حجم محدود شده به وجه‌های مکعبِ داده شده باشند.

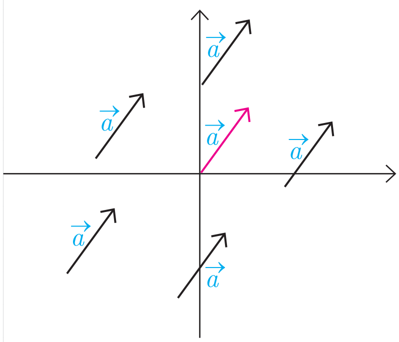
۱ــ طرح چنین سؤال‌هایی تنها برای سطوحی که هر مرز آن موازی با یکی از محورهای مختصات است و حجم‌هایی که هر وجه آنها موازی با یکی از صفحات دستگاه مختصات است، مجاز می‌باشد.

بردارها در $\mathbb{R}^{۲}$



در سال‌های گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت‌دار مانند AB در شکل مقابل، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B می‌باشد. این بردار را با $\overrightarrow{AB}$ و اندازه آن را با $|\overrightarrow{AB}|$ نشان می‌دهند. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ و اندازه طول آن را با $|\vec{a}|$ نمایش می‌دهند. در شکل زیر چند بردار مختلف رسم شده‌اند. در این کتاب از هر دو شیوه نگارش، بسته به زمینه مورد بحث استفاده می‌گردد.



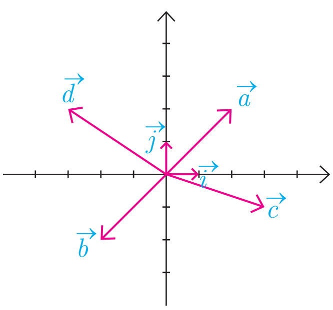


دو بردار را مساوی یا همسنگ گوییم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل بردارها با هم مساوی هستند. همواره می‌توان هر بردار را با برداری مساوی آن، که از مبدأ مختصات شروع می‌شود یکی دانست، چراکه جهت و اندازه آنها برابر است.

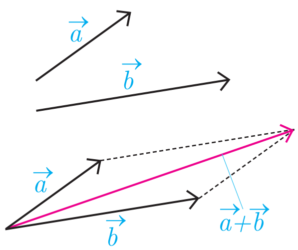
واضح است که می‌توان بی‌شمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه درنظر گرفت. به این بردارهای برابر، در اصطلاح، بردارهای هم‌ارز گفته می‌شود.

برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را به‌عنوان نماینده بردارهای همسنگ درنظر می‌گیرند. مثلاً در شکل مقابل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ $\vec{a}$ می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیرند.

با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر گرفته‌ایم، مؤلفه‌های یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس. از این‌رو هر بردار مانند $\vec{a}$ را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ که $(a_۱,a_۲)$ مختصات انتهای بردار $\vec{a}$ می‌باشد.



مثال : بردارهای $\vec{a}=(۲,۲)$، $\vec{b}=(-۲,-۲)$ و $\vec{c}=(۳,-۱)$، $\vec{d}=(-۳,۲)$، $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم شده‌اند.



از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ از روش متوازی‌الاضلاع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید و به آن برایند دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ می‌گویند.

و نیز اگر داشته باشیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲)$ می‌توان نوشت :

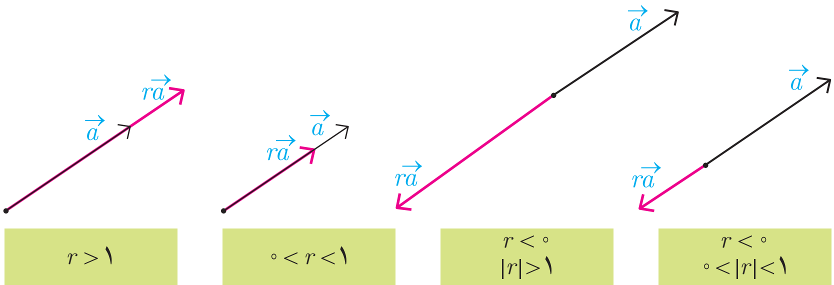
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱,a_۲)+(b_۱,b_۲)=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲)$$

همچنین اگر $r \in \mathbb{R}$ و $\vec{a}$ یک بردار باشد، آنگاه بردار $r\vec{a}$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$r\vec{a}=r(a_1,a_2)=(ra_1,ra_2)$$

می‌توان نشان داد دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ همواره با هم موازی‌اند و برعکس اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

در شکل‌های زیر وضعیت دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ در حالت‌های مختلف نشان داده شده‌اند.



به‌طور خاص وقتی $r=-1$ بردار $-\vec{a}=(-a_1,-a_2)$ حاصل می‌شود که آن را قرینه بردار $\vec{a}$ می‌نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می‌توان برای تفاضل دو بردار نوشت :

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_1,a_2)+(-b_1,-b_2)=(a_1-b_1,a_2-b_2)$$

به‌نظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

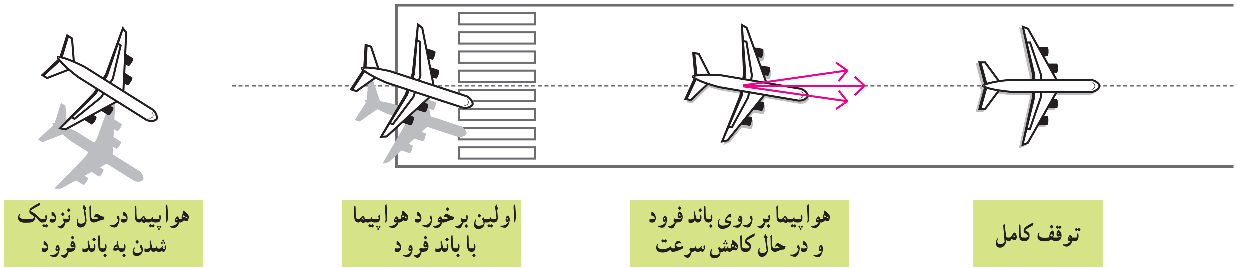
معمولاً مبدأ مختصات را به‌عنوان بردار صفر در نظر می‌گیرند و با $\vec{O}=(0,0)$ نمایش می‌دهند.

با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2)$ را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار $\vec{a}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

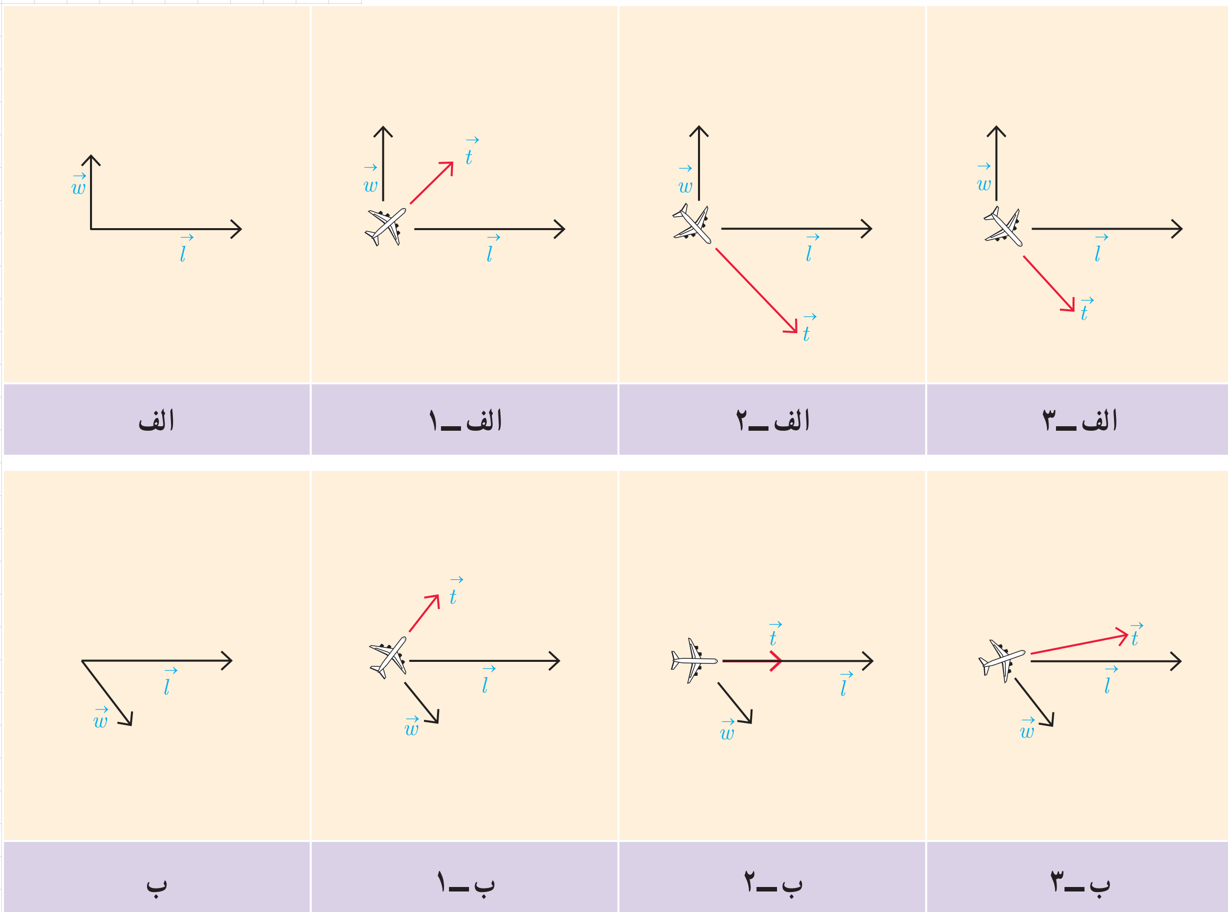
$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

بردارها، کاربردهای فراوانی در محاسبات مهندسی و نیز مدل‌سازی‌ها دارند. به‌طور نمونه بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود (مسیر باند فرود) می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برایند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار

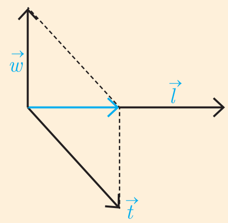
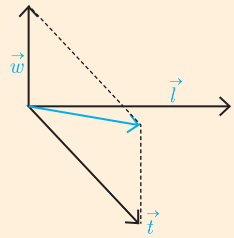
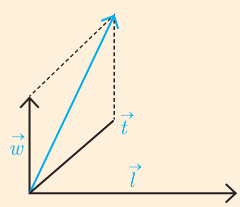
گیرد (به شکل زیر رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند. بردارها برای مدل‌سازی وضعیت فرود هواپیما در چنین شرایطی بسیار مناسب می‌باشند. اکنون به مثال بعد در این رابطه دقت کنید.



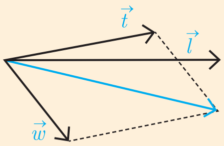
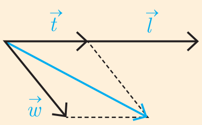
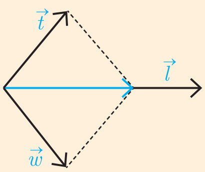
مثال : فرض کنید مسیرفرود (خط فرود) در جهت بردار $\vec{l}$ و حداکثرِ نیروی قابل کنترل در لحظه فرود با اندازه این بردار برابر باشد. همچنین باد نیرویی در جهت بردار $\vec{w}$ به هواپیما وارد می‌کند. در هریک از دو وضعیت زیر خلبان، هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده می‌تواند قرار دهد، به طوری‌که یک فرود ایمن داشته باشد یعنی برایند نیروی محرکه $\vec{t}$ و نیز $\vec{w}$ در جهت $\vec{l}$ باشد.



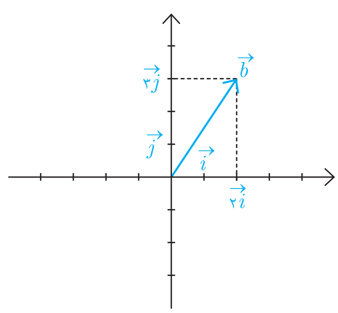
پاسخ : در مورد وضعیت الف برایند بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{t}$ (نیرو محرکه هواپیما) به‌صورت زیر است.

الف ــ۳	الف ــ۲	الف ــ۱
		
بردار برایند در جهت $\vec{l}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{l}$ است. بنابراین $\vec{l}$ فرود ایمن است.	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از بالای باند)

در مورد وضعیت ب برایند بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{t}$ (نیرو محرکه هواپیما) به‌صورت زیر است.

ب ــ۳	ب ــ۲	ب ــ۱
		
بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{l}$ است. بنابراین فرود ایمن است.

معمولاً بردار به طول واحد در جهت محور xها را با $\vec{i}$ و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور yها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند. در شکل مقابل بردار $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ و نیز بردار $\vec{b}=(۲,۳)$ به‌صورت حاصل‌جمع مضاربی از $\vec{i},\vec{j}$ نمایش داده شده‌اند. به‌طور کلی می‌توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ را به‌صورت زیر نمایش داد.



$$\vec{a}=(a_۱,a_۲)=a_۱(۱,۰)+a_۲(۰,۱)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}$$

کاردرکلاس

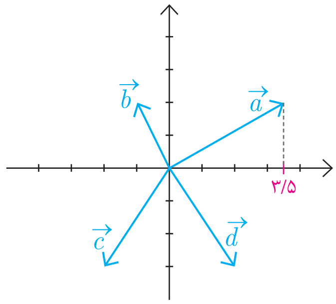
۱ــ در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده‌است.

الف) مختصات بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{b}$ را رسم کرده و مختصات آنها را به‌دست آورید.

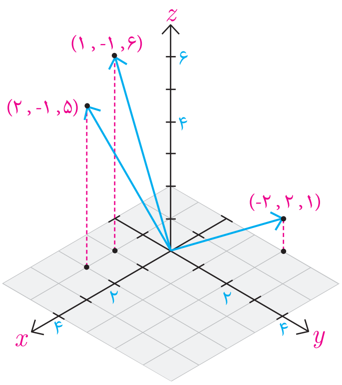
ج) مؤلفه‌های بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{d}-\vec{c}$ را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به‌دست آورید.

د) هریک از بردارهای $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ ، $\vec{a}+\vec{b}$ ، $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{d}-\vec{c}$ را برحسب بردارهای واحد $\vec{i},\vec{j}$ به‌دست آورید.



بردارها در $\mathbb{R}^۳$

مشابه بردارهای $\mathbb{R}^۲$ می‌توان به هرنقطه از $\mathbb{R}^۳$ ، برداری که از مبدأ شروع می‌شود نظیر کرد. مثلاً فرض کنید $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نقطه‌ای غیر از مبدأ $\mathbb{R}^۳$ باشد. در این‌صورت پاره‌خط جهت داری که از مبدأ مختصات یعنی $O=(۰,۰,۰)$ شروع شده و در نقطه A پایان می‌یابد یک بردار در $\mathbb{R}^۳$ را مشخص می‌کند و آن را با $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نشان می‌دهیم. در بردار $\vec{a}$ مقادیر $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ را مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ می‌گویند. همچنین قرارداد می‌کنیم که مبدأ مختصات یعنی $O=(۰,۰,۰)$ نمایشگر بردار $\vec{O}=(۰,۰,۰)$ است که بردار صفر نامیده می‌شود. به‌عنوان مثال در شکل مقابل، چند بردار در $\mathbb{R}^۳$ نمایش داده شده است.



طول بردار در $\mathbb{R}^۳$

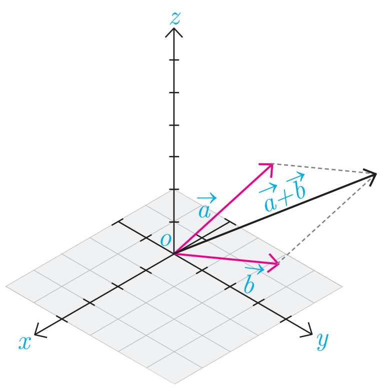
با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از $\mathbb{R}^۳$، طول هر بردار مانند $(a_۱,a_۲,a_۳)$ $\vec{a}$ در $\mathbb{R}^۳$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$$

حاصل جمع دو بردار در $\mathbb{R}^۳$

حاصل‌جمع دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود که به آن بردار برایند نیز می‌گویند.

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)$$

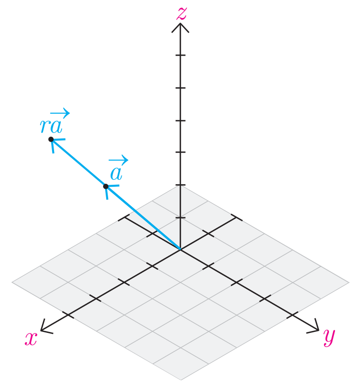


این شکل بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ را در دستگاه $\mathbb{R}^۳$ نشان می‌دهد.

همان‌طور که از شکل روبه‌رو پیداست برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{a},\vec{b}$ می‌توان روش متوازی‌الاضلاع را در صفحه‌ای که از آن دو بردار می‌گذرد به‌کار برد و بردار برایند $\vec{a}+\vec{b}$ را یافت.

برای هر عدد حقیقی r، حاصل‌ضرب r در بردار $\vec{a}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$r\vec{a}=r(a_{۱},a_{۲},a_{۳})=(ra_{۱},ra_{۲},ra_{۳})$$

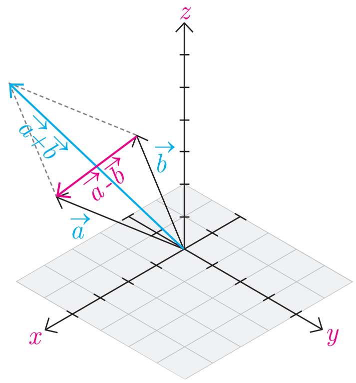


این شکل دو بردار $\vec{a}\,,\,r\vec{a}$ که در آن $r>۱$ را نشان می‌دهد.

آیا راستای $\vec{a}\,,\,r\vec{a}$ با هم متفاوت‌اند؟

به‌طور خاص بردار $-۱\vec{a}$ را که با $-\vec{a}$ نشان می‌دهند قرینه $\vec{a}$ می‌گویند یعنی $-\vec{a}=(-a_{۱},-a_{۲},-a_{۳})$. این بردار هم اندازه با $\vec{a}$ (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می‌باشد. اکنون تفاضل بردار $\vec{b}$ از $\vec{a}$ یعنی $\vec{a}-\vec{b}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

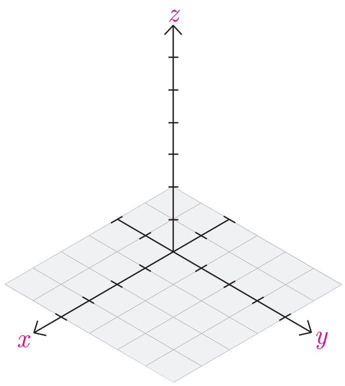
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_{۱}-b_{۱},a_{۲}-b_{۲},a_{۳}-b_{۳})$$



در شکل بردارهای $\vec{a}\,,\,\vec{b}$ و قرینه آن و نیز $\vec{a}-\vec{b}$ نمایش داده شده‌اند.

کاردرکلاس

نقاط $A=(۲,۳,۱)$, $B=(-۱,۲,۲)$ و $D=(۱,۰,-۱)$ و $C=(۳,۴,۰)$ را در یک دستگاه $\mathbb{R}^{۳}$ در نظر بگیرید، اگر $\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}\,,\,\vec{d}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^{۳}$ با نقاط انتهایی به ترتیب A,B,C,D باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هریک از بردارهای زیر را به‌دست آورید.



$\vec{a}+۲\vec{b}=$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=$

$-۲(\vec{b}+\vec{c})=$

$-۲\vec{b}-۲\vec{c}=$

خواص جمع بردارها

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم.

به‌طور کلی اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{O}=(0,0,0)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

۱ــ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)

۲ــ $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (خاصیت شرکت‌پذیری در جمع)

۳ــ $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{O}$ (عضو قرینه)

۴ــ $\vec{a}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{a}=\vec{a}$ (عضو خنثی)

۵ــ $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

۶ــ $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

۷ــ $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$

۸ــ اگر $\vec{b}=r\vec{a}$ آنگاه $|\vec{b}|=|r||\vec{a}|$ ($|r|$ قدر مطلق r است)

بردارهای یکه

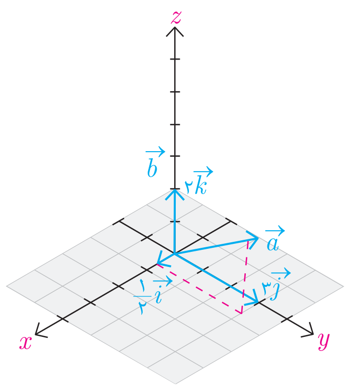
با بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}$ در صفحه $\mathbb{R}^2$ به ترتیب در جهت محور xها و yها آشنا شدید.

به‌طور مشابه در $\mathbb{R}^3$ بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیرند.

$$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$$

به این ترتیب $\vec{i}$ بردار یکه در جهت محور طول‌ها، $\vec{j}$ بردار یکه در جهت محور عرض‌ها و $\vec{k}$ بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها می‌باشند.

همچنین با استفاده از روابط بین بردارها به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ به‌صورت ترکیبی از بردارهای یکه $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ قابل بیان است. در واقع داریم :

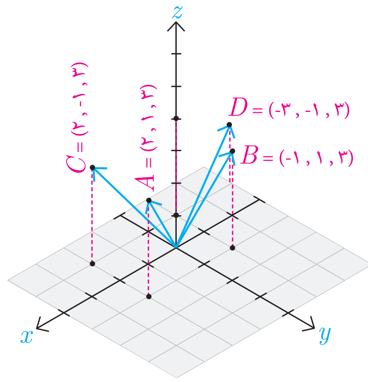


$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

مثال : بردار $\vec{a}=(\frac{1}{2},3,2)$ را برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ نشان دهید.

$$\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$$

تمرین

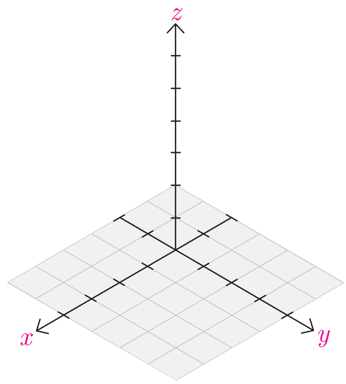


۱ــ چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.

الف) معادلات مشخص‌کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.

۲ــ نقاط با مختصات $P=(۱,۰,۱)$، $Q=(۰,-۱,-۲)$، $R=(۳,۰,-۱)$ و $S=(-۲,-۲,-۲)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.



۳ــ در سؤال قبل طول پاره‌خط‌های PQ، RQ و PS را بیابید.

۴ــ فرض کنید $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $Q=(x_۱,y_۱,z_۱)$. مختصات نقطه M وسط پاره‌خط PQ را بیابید.

۵ــ در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a}=(-\frac{۱}{۳},۰,۲)$ ، $\vec{b}=(\sqrt{۲},۱,۱)$ ، $r=۳$ ، $r\vec{a}-\vec{b}=?$

ب) $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=(۳,۱,-۱)$ ، $r=-۱$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

ج) $\vec{a}=\sqrt{۲}\,\vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=۳\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{a}+\vec{b}=?$

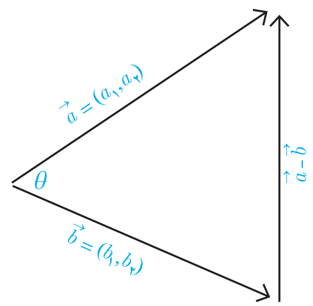
د) $\vec{a}=۵\vec{k}+\vec{j}$ ، $\vec{b}=-\vec{k}+\vec{i}$ ، $r=\frac{۱}{۵}$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

۶ــ طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

درس دوم

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

فرض کنید دوبردار $\vec{a}=(a_1,a_2)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2)$ همانند شکل داده شده‌اند.
می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار (θ) را پیدا کنیم.
برای این منظور بردار تفاضل $\vec{a}-\vec{b}$ را نیز در این شکل رسم کرده‌ایم تا مثلثی به طول اضلاع زیر به‌دست آید.



$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها که سال گذشته آموخته‌اید می‌توان نوشت.

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورت کسر فوق را می‌توان با توجه به اندازه‌های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده‌اند به‌صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2)=a_1b_1+a_2b_2$$

پس عبارت (۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است.)

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار $0 \leq \theta \leq \pi$ به‌دست می‌آید.

کمیتی که در صورت این کسر سمت راست است را معمولاً با $\vec{a}.\vec{b}$ نشان می‌دهند و به آن حاصل‌ضرب داخلی یا حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ می‌گویند. بنابراین می‌توان نوشت.

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

به‌طور مشابه حاصل‌ضرب داخلی دو بردار در $\mathbb{R}^3$ نیز قابل تعریف است.

تعریف: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند؛ در این‌صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می‌توان نشان داد که اگر $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{a},\vec{b}$ در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دوبردار $\vec{a},\vec{b}$ صفر باشند آنگاه $\vec{a}.\vec{b}=0$ هر چند که در این حالت زاویه θ بین دو بردار تعریف نمی‌شود.

مثال : زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را پیدا می‌کنیم.

حل : ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{a}.\vec{b}=(2\times1)+(-1\times-1)+(2\times0)=3$$

از طرفی اگر $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت :

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow 3=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

خواص ضرب داخلی

۱ــ $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ خاصیت جابه‌جایی

اثبات : $\vec{a}.\vec{b}=a_{۱}b_{۱}+a_{۲}b_{۲}+a_{۳}b_{۳}=b_{۱}a_{۱}+b_{۲}a_{۲}+b_{۳}a_{۳}=\vec{b}.\vec{a}$

۲ــ $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^{۲}$

اثبات : $\vec{a}.\vec{a}=a_{۱}a_{۱}+a_{۲}a_{۲}+a_{۳}a_{۳}=a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}=|\vec{a}|^{۲}$

۳ــ $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ خاصیت توزیع‌پذیری

اثبات : $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=a_{۱}(b_{۱}+c_{۱})+a_{۲}(b_{۲}+c_{۲})+a_{۳}(b_{۳}+c_{۳})$

$= a_{۱}b_{۱}+a_{۱}c_{۱}+a_{۲}b_{۲}+a_{۲}c_{۲}+a_{۳}b_{۳}+a_{۳}c_{۳}$

$= a_{۱}b_{۱}+a_{۲}b_{۲}+a_{۳}b_{۳}+a_{۱}c_{۱}+a_{۲}c_{۲}+a_{۳}c_{۳}$

$= \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

۴ــ برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$: a و b برهم عمود هستند $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=۰$

$$\vec{a}.\vec{b}=۰ \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۰ \underset{|\vec{b}|\neq ۰}{\overset{|\vec{a}|\neq ۰}{\Leftrightarrow}} \cos\theta=۰ \overset{۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}}{\Leftrightarrow} \theta=\frac{\pi}{۲}$$

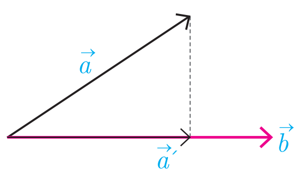
۵ــ $\vec{a}.\vec{o}=۰\ ,\ \vec{o}.\vec{a}=۰$

۶ــ $|\vec{a}.\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$ (نامساوی کشی شوارتز) منظور از $|\vec{a}.\vec{b}|$ قدر مطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ است.

$$|\vec{a}.\vec{b}|=\left||\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\right|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$$

که در آخرین نامساوی از $|\cos\theta|\leq ۱$ استفاده شده است.

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$



دو بردار غیرصفر $\vec{a},\vec{b}$ را که زاویه بین آنها θ است با فرض $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a}'$ نمایش داده‌ایم به‌دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک r حقیقی $\vec{a}'=r\vec{b}$.

با توجه به اینکه بردار تفاضل $\vec{a}$ از $\vec{a}'$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است. خواهیم داشت :

$$(\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=۰ \Rightarrow (\vec{a}-r\vec{b}).\vec{b}=۰ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}-r\vec{b}.\vec{b}=۰ \Rightarrow r=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}$$

بنابراین بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\vec{a}'=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}$$

مثال : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ بیابید.

$$\vec{a}.\vec{b}=۲\times۱+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۳$$

$$|b|=\sqrt{(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+۰^{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$a'=\frac{a.b}{|b|^{۲}}b=\frac{۳}{۲}b=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)=(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰)$$

کار در کلاس

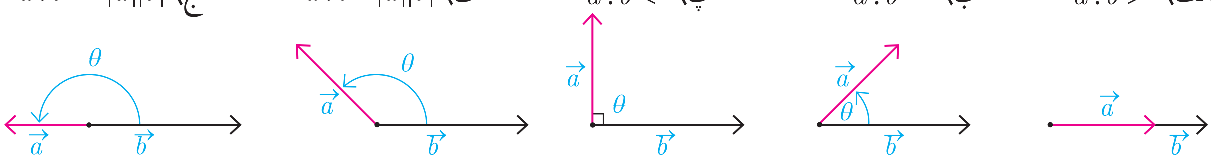
۱ــ تصویر بردار $i=(۱,۰,۰)$ بر امتداد بردار $j=(۰,۱,۰)$ را بیابید.

۲ــ نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می‌شود.

۳ــ نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

۴ــ هر یک از حالات زیر را با شکل‌های داده شده نظیر کنید.

الف) $\vec{a}.\vec{b}>۰$ ب) $\vec{a}.\vec{b}=۰$ پ) $\vec{a}.\vec{b}<۰$ ت) $\vec{a}.\vec{b}=|a||b|$ ج) $\vec{a}.\vec{b}=-|a||b|$



$\theta=۰$ $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ $\theta=\frac{\pi}{۲}$ $\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi$ $\theta=\pi$

ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می‌توان ضرب دو بردار را به گونه‌ای تعریف کرد که حاصل‌ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعریف: فرض کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_۲b_۳-a_۳b_۲\,,\,a_۳b_۱-a_۱b_۳\,,\,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آنها باشد اندازه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ می‌شود :

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=|(a_۲b_۳-a_۳b_۲\,,\,a_۳b_۱-a_۱b_۳\,,\,a_۱b_۲-a_۲b_۱)|^۲$$

$$=(a_۲b_۳-a_۳b_۲)^۲+(a_۳b_۱-a_۱b_۳)^۲+(a_۱b_۲-a_۲b_۱)^۲$$

$$=a_۲^۲b_۳^۲-۲a_۲a_۳b_۲b_۳+a_۳^۲b_۲^۲+a_۱^۲b_۳^۲-۲a_۱a_۳b_۱b_۳+$$

$$a_۳^۲b_۱^۲+a_۱^۲b_۲^۲-۲a_۱a_۲b_۱b_۲+a_۲^۲b_۱^۲$$

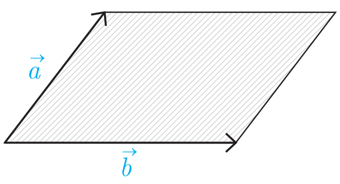
$$=(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)-(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲=|a|^۲|b|^۲-(a.b)^۲$$

$$=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲-|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\cos^۲\theta=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲(۱-\cos^۲\theta)=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\sin^۲\theta=$$

$$(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^۲$$

بنابراین $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

از هندسه سال قبل می‌دانیم که سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر $|\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$ است.



مثال : بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید. حاصل $\vec{i}\times\vec{j}$ و $\vec{j}\times\vec{i}$ را به‌دست آورید.

$$\vec{i}\times\vec{j}=(۱,۰,۰)\times(۰,۱,۰)$$

$$=((۰)(۰)-(۰)(۱),(۰)(۰)-(۱)(۰),(۱)(۱)-(۰)(۰))=(۰,۰,۱)=\vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=(۰,۱,۰)\times(۱,۰,۰)$$

$$=((۱)(۰)-(۰)(۰),(۰)(۰)-(۰)(۱),(۰)(۰)-(۱)(۱))=(۰,۰,-۱)=-\vec{k}$$

همان‌طور که مشاهده شد حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ برابر با بردار $\vec{k}$ شد که بر هر دوی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ عمود می‌باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می‌باشد.

خاصیت ۱ : فرض کنید $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0 \qquad , \qquad \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$
بنابراین با توجه به آنچه تاکنون به‌دست آمده است می‌توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می‌توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است.
اثبات این خاصیت در ادامه می‌آید.

اثبات :

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=a_۱(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+a_۲(a_۳b_۱-a_۱b_۳)+a_۳(a_۱b_۲-a_۲b_۱)=0$$

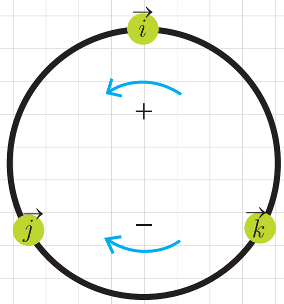
$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=b_۱(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+b_۲(a_۳b_۱-a_۱b_۳)+b_۳(a_۱b_۲-a_۲b_۱)=0$$

می‌توان نشان داد که برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روابط زیر برقرار است :

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\ ,\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\ ,\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به‌صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می‌دهند.



خاصیت ۲ : $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

خاصیت ۳ : $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$.

خاصیت ۴ : اگر r عددی حقیقی باشد، آنگاه : $r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$.

خاصیت ۵ : برای سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ داریم :

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

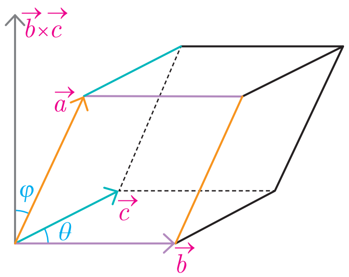
خاصیت ۶ : دو بردار غیر صفر $\vec{a},\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

اثبات :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0\Leftrightarrow\sin=0\Leftrightarrow\theta=0 \text{ یا } \theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}\|\vec{b}$$

حجم متوازی السطوح

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می‌توان به کمک آنها متوازی‌السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.



همان‌طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی‌السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^{2}}(\vec{b}\times\vec{c})$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec{b}\times\vec{c}|$. با استفاده از دترمینان نیز می‌توان مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ به صورت زیر به دست آورد :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح به صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=\text{مساحت قاعده}\times\text{اندازه ارتفاع}=|\vec{b}\times\vec{c}|\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^{2}}(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی‌السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی‌السطوح برابر است با $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$. حجم متوازی‌السطوح پدید آمده توسط سه بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ، $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ با استفاده از دترمینان زیر نیز به دست می‌آید.

$$K=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم}=V=|K|$$

یا $K=a.(b\times c)$.

اگر $K=0$ در این صورت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مثال : حجم متوازی‌السطوحی را به‌دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(1,0,1)$ تولید می‌شود.

حل : با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به‌دست می‌آید.

$$\vec{b}\times\vec{c}=(1,1,-1)$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح به‌دست می‌آید.

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|(1,1,0).(1,1,-1)|=|1+1+0|=2$$

پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$ برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

مثال : آیا بردارهای $\vec{a}=(۱,۴,۱),\ \vec{b}=(۱,-۱,۳),\ \vec{c}=(۱,۹,-۱)$ در یک صفحه‌اند؟

حل : برای این منظور کافی است $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ را به‌دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$\vec{b}\times\vec{c}=(-۲۶,۴,۱۰)\Rightarrow\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=-۲۶+۱۶+۱۰=۰\Rightarrow$ سه بردار در یک صفحه هستند.

تمرین

۱ــ برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به‌دست آورید.

الف) $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ ، $\vec{b}=i$

ب) $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ ، $\vec{b}=(۳,۲,۱)$

پ) $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ ، $\vec{b}=(-۱,۲,۴)$

۲ــ فرض کنید $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=۰$ را محاسبه کنید.

۳ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۴ــ اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$, $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

۵ــ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$, $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ پیدا کنید.

۶ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

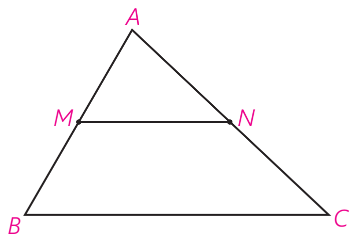
۷ــ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\vec{a}|=۳$ ، $|\vec{b}|=۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$. مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

۸ــ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(۳,۵,۷)$, $B=(۵,۵,۰)$, $C=(-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.

در این فصل با بردارها و خواص جالبی از آنها آشنا شدید. جالب است بدانید بردارها در حل بسیاری از مسائل هندسی که در سال‌های گذشته با آنها آشنا شده‌اید می‌توانند کاربرد داشته باشند و اثبات برخی قضایا را راحت‌تر می‌کنند. در ادامه چند مثال از این‌گونه مسائل آورده شده است که مطالعهٔ آنها به علاقه‌مندان پیشنهاد می‌گردد.

مثال ۱ : ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

اثبات :



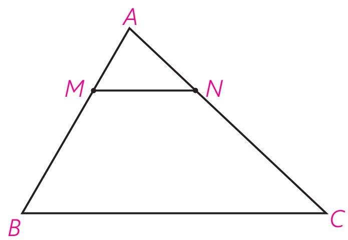
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$

$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$$

پس طول BC دو برابر طول MN است و چون $\overrightarrow{BC}$ مضربی از $\overrightarrow{MN}$ است لذا BC موازی MN است.



مثال ۲ : در مثلث ABC، $MN\|BC$ ثابت کنید :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

(قضیهٔ تالس)

اثبات : فرض کنیم $BA=K.MA$ و $AC=K'.AN$ و $BC=K''.MN$

بنابراین :

$$\overrightarrow{BA}=K.\overrightarrow{MA}\ ,\ \overrightarrow{AC}=K'.\overrightarrow{AN}\ ,\ \overrightarrow{BC}=K''.\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MN}\ ,\ \ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow$$

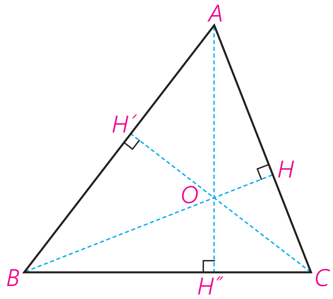
$$K.\overrightarrow{MA}+K'.\overrightarrow{AN}=K''.\overrightarrow{MN}=K''(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})=$$

$$K''.\overrightarrow{MA}+K''.\overrightarrow{AN}\Rightarrow(K-K'')\overrightarrow{MA}+(K'-K'').\overrightarrow{AN}=\vec{0}$$

ولی $a\overrightarrow{MA}$ و $b\overrightarrow{AN}$ بردارهایی در راستا و جهت‌های مختلف‌اند، پس مجموع آنها نمی‌تواند صفر شود مگر آنکه :

$$K-K''=K'-K''=0$$

و در نتیجه : $K=K'=K''$ و از آنجا حکم ثابت می‌شود.



مثال ۳ : ثابت کنید در هر مثلث، سه ارتفاع در یک نقطه همرس‌اند.

اثبات : فرض کنیم ارتفاع‌های BH و CH' همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند.
در این صورت داریم :

$$BH \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{BH}\,.\,\overrightarrow{AC}=0\,,\ \overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$$

$$CH' \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{CH'}\,.\,\overrightarrow{AB}=0\,,\ \overrightarrow{CO}\,.\,\overrightarrow{AB}=0$$

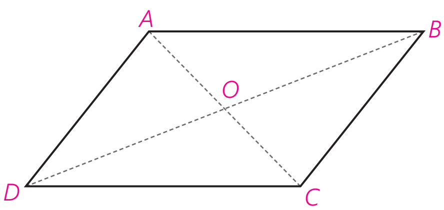
$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\,.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AB}$$

$$=(\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA}).\,\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CA}).\,\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{AC}}_{0}-\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC}$$

$$-\underbrace{\overrightarrow{CO}\,.\,\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{AB}=0$$

بنابراین $AO \perp BC$ و لذا امتداد AO هم بر BC عمود است و ارتفاع رأس A هم از O می‌گذرد.

مثال ۴ : ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن با هم موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



اثبات : در شکل مقابل، با فرض اینکه $AB=CD$ و $AB \parallel CD$
نتیجه می‌شود :

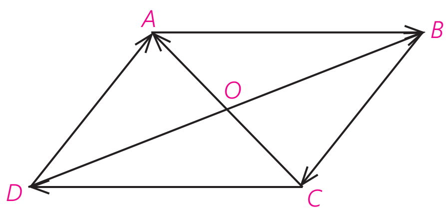
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و در نتیجه :

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$$

و بنابراین : $CB \parallel DA$ و $CB=DA$ و $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۵ : ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

اثبات :



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}\end{array}\right\}+$$

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$$

اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.

منـــابع

۱ــ پورنگی، محمدرضا، تابش، یحیی (۱۳۸۱)، کتاب درسی هندسه تحلیلی و جبر خطی، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۲ــ غیور، حسین، مجذوب زنجانی، حسین، معیری، محمدطاهر (۱۳۷۳). کتاب درسی هندسه تحلیلی، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۳ــ فیروزنیا، احمد، یاوری، احمدرضا (۱۳۷۰) هندسهٔ تحلیلی، تهران، نشر فردوس.

۴ــ ایرانمنش، علی، جمالی، محسن و ... (۱۳۸۸) کتاب درسی ریاضیات ۲، تهران سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۵ــ امیری حمیدرضا، ماتریس و دستگاه‌های معادلات خطی (۱۳۷۸) انتشارات مدرسه

۶ــ شهریاری، پرویز، محاسبهٔ برداری (۱۳۶۹) انتشارات تهران.

7– T. Grenfell, Analytical Geometry for beginners Nabu Press 2010.

8– Mittal & Shanti Nrayan, Analytical Solid Gedretry international Book Distributing Company 2005.

9– Larson, R.& Falvo, D.C.(2009). Elementary Linear Algebra, Sixth Edition. Houghron Mifflin Harcourt Publishing Company, Boston, MA.

10– Larson, R. (2017) Elementary Linear Algebra, Eighth Edition. Cengage Learning, Boston, MA

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب هندسه ۳ با کد ۱۱۲۲۱۳

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	احد تقی عجمی	آذربایجان شرقی	۲۷	جابر عامری	خوزستان
۲	پیمان خاوندی	آذربایجان شرقی	۲۸	میترا سلماسی	خراسان شمالی
۳	فرشته قرامحمدی	شهر تهران	۲۹	سیدعلی حسینی	خراسان جنوبی
۴	محمد رمضانپور	فارس	۳۰	محمد مهدی قلندری	هرمزگان
۵	شادی حبیب پور	هرمزگان	۳۱	میثم محمدیان	زنجان
۶	فرزانه فروزانفر	کردستان	۳۲	سیما حقیقی آذر	گلستان
۷	علی نصیری	قزوین	۳۳	کیان سهرابی	کرمانشاه
۸	زهرا اصلانی	شهرستانهای تهران	۳۴	نوراله جمالی	بوشهر
۹	حکیمه محمدی	البرز	۳۵	لیلی حاتم زاده	اصفهان
۱۰	فاطمه نصیری	ایلام	۳۶	لیلا محرابی نسب	خراسان شمالی
۱۱	سید محسن حسینی	کردستان	۳۷	مائده ملاحسنی	البرز
۱۲	کامران کاظمی	خوزستان	۳۸	ژاله اخوان	شهرستانهای تهران
۱۳	الناز رابری	آذربایجان غربی	۳۹	علی رضا بیات	همدان
۱۴	رضا کاظمی	قزوین	۴۰	فاطمه دولت خواه	گیلان
۱۵	قاسم شعبانی چاوسر	مازندران	۴۱	مذهب روستائی	بوشهر
۱۶	کیانوش کمانی	مرکزی	۴۲	وحید سجادپور	کهگیلویه وبویراحمد
۱۷	فرزانه کد خدایی	لرستان	۴۳	سالم برزگر	اردبیل
۱۸	محمدرضا نخعی	خراسان رضوی	۴۴	سعید تاجیان	فارس
۱۹	مجتبی مرسلی	شهر تهران	۴۵	فرشته واثق	کرمان
۲۰	مهدی روناسی	سیستان وبلوچستان	۴۶	حسن فتاحی	کرمانشاه
۲۱	مریم امیرمحمدی	گیلان	۴۷	رضا علیوند	اردبیل
۲۲	قباد خالدی کوره	آذربایجان غربی	۴۸	زهرا خاتمی	زنجان
۲۳	سلیمان موحدی راد	مازندران	۴۹	جمال نوین	یزد
۲۴	مریم امامی	همدان	۵۰	محمد نیازی	چهارمحال وبختیاری
۲۵	علی مراد سبزه کار	خراسان جنوبی	۵۱	زهرا صیدی	ایلام
۲۶	سکینه حبیبی	لرستان	۵۲	علیرضا عمرانی	مرکزی