


t.me/safazelianmath

Link

Mathematics education from high school to university

ID: @safazelian

باسمه تعالی			
سوالات امتحان نهایی درس : ریاضی ۳	رشته ی : تجربی	ساعت شروع : ۱۶ عصر به افق تهران	مدت امتحان : 120 دقیقه
پایه : دوازدهم		تاریخ امتحان : ۲۴ / 3 / 1399	
دانش آموزان روزانه براه دور و داوطلبان آزاد خارج از کشور در ماه خرداد سال 1399		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی	
ردیف	سوالات		نمره

ردیف	۰/۷۵
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) دامنه تابع با ضابطه $y = -kf(\frac{x}{p})$ همان دامنه تابع $y = -kf(x)$ می باشد. ب) تابع $y = 2x^5 - 4x^2 + \sqrt{7}x^2$ یک تابع چند جمله ای نیست. پ) منظور از احتمال $P(A B)$ این است که احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

الف) نادرست

ب) نادرست

پ) درست

۲
 $f(x) = 3x - 4$, $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 14$ را بدست آورید.

$$f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14 \quad (1)$$

$$f(x) = 3x - 4 \Rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \Rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18$$

$$\div 3 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6$$

۱/۳۵	نشان دهید توابع $g(x) = \frac{2-x}{2}$ و $f(x) = \frac{-x+2}{2}$ وارون یکدیگرند.	۳
------	--	---

$$(f \circ g)(x) = \frac{-x \left(\frac{2-x}{2} \right) + 2}{2} = \frac{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + 2}{2} = \frac{x^2 - x + 4}{4} = x$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{2 - f\left(\frac{-x+2}{2}\right)}{2} = \frac{2 - \frac{-(-x+2)+2}{2}}{2} = \frac{2 - \frac{-x+4}{2}}{2} = \frac{2 - \frac{-x}{2} + 2}{2} = \frac{4 + \frac{x}{2}}{2} = x$$

۱۷۵-	۴ در جاهای خالی عبارات مناسب قرار دهید. الف) تابعی که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی تعریف می شود تابع گفته می شود. ب) تابع تنازانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد است. پ) وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه به طور عمودی برش داده می شود سطح مقطع است.
------	---

الف) ثابت

ب) صعودی

پ) دایره

۱/۲۵	$y = \underbrace{r}_{a} \sin(\underbrace{\omega}_{b} x) - \underbrace{r}_{c}$	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع مقابل را به دست آورید.	۵
------	---	---	---

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y_{\max} = |a| + c = 3 - 2 = 1$$

$$y_{\min} = -|a| + c = -3 - 2 = -5$$

۱/۵	الف) جواب های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ را به دست آورید. ب) مقدار $\sin 15^\circ$ را به دست آورید.	۶
-----	--	---

$$\text{الف)} \quad \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ب)} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15 = \frac{1 - \cos 30}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 15 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x-0}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 + \frac{7}{x^2} \right)$$

$$\text{الف) } \frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3x\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{ب) } \frac{2x \omega}{0^- - 0} = \frac{0}{0^-} = -\infty$$

$$\text{پ) } 9 + \frac{7}{\infty} = 9 + 0 = 9$$

۸	اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ باشد، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.
---	--

$$x=2 \rightarrow f(2) = 3x^2 - 2x + 1 = 12 - 4 + 1 = 9 \rightarrow A(2, 9)$$

$$f'(x) = 6x - 2 \rightarrow m = f'(2) = 6 \times 2 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$y = 10(x - 2) + 9 \rightarrow y = 10x - 20 + 9 \rightarrow y = 10x - 11$$

۱/۷۵	الف) $f(x) = \left(\frac{-2x-1}{x^2+5} \right)^4$
	ب) $f(x) = \sqrt{5x+2}$

الف) $f'(x) = 4 \left(\frac{-2x-1}{x^2+5} \right)^3 \times \left(\frac{-2(x^2+5) - 2x(-2x-1)}{(x^2+5)^2} \right)$

ب) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$

۱/۲۵	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.	۱۰
------	--	----

$$\lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 1^+} n^2 + 3 = 1^2 + 3 = 4$$

$\Rightarrow$ تابع در $x=1$ صد برابر پس پیوسته نیست
چون؟

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 1^-} 2n = 2$$

پس مشتق پذیر نیست

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم این توده باکتری در لحظه $t=1$ چقدر است؟

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t$$

$$m'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} + 4 \times 1 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

مقادیر ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود به دست آورید.

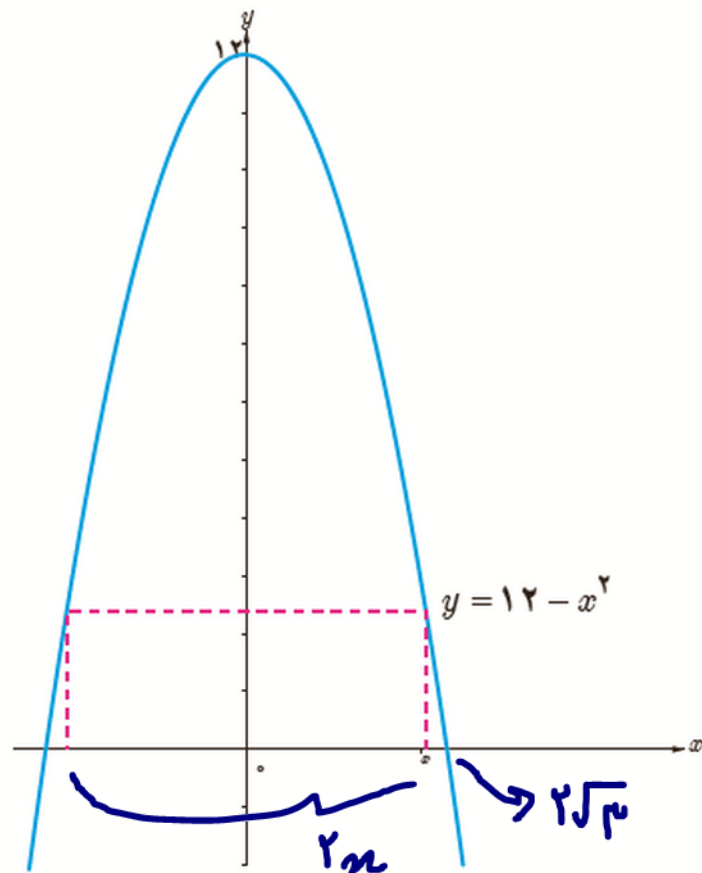
۱۲

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 5 = -8 - 5 = -13 \rightarrow \text{مقدار min مطلق}$$

$$f(1) = 1^2 + 2(1) - 5 = 1 + 2 - 5 = -2 \rightarrow \text{مقدار max مطلق}$$

ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور x ها و دو راس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی به معادله $y = 12 - x^2$ باشند.



$$S = 2a \times y$$

$$S = 2a(12 - a^2) = -2a^3 + 24a \quad ; \quad a \in [0, 2\sqrt{3}]$$

$$S' = -6a^2 + 24 = 0 \rightarrow -6a^2 = -24$$

$$\rightarrow a^2 = 4$$

$$\begin{cases} a = 2 \checkmark \\ a = -2 \notin [0, 2\sqrt{3}] \end{cases}$$

$$\text{طول: } 2a = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{عرض: } y = 12 - 2^2 = 12 - 4 = 8$$

در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مختصات مرکز آن $\begin{matrix} 4 \rightarrow \alpha \\ 5 \rightarrow \beta \end{matrix}$ باشد. O باشد.
 الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.
 ب) مختصات دو سر قطر بزرگ آن را بنویسید.

۱۴

$$AA' = 2a = 6 \rightarrow a = 3$$

$$BB' = 2b = 4 \rightarrow b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 9 = 4 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$FF' = 2c = 2\sqrt{5}$$

الف)

$$A(\alpha - a, \beta) \Rightarrow A(4 - 3, 5) \Rightarrow A(1, 5)$$

$$A'(\alpha + a, \beta) \Rightarrow A'(4 + 3, 5) \Rightarrow A'(7, 5)$$

ب)

وضعیت دایره به معادله $x^2 + y^2 = 2$ و خط $y = -x - 2$ را نسبت به هم مشخص کنید.

$$O(0,0) \quad r = \sqrt{2}$$

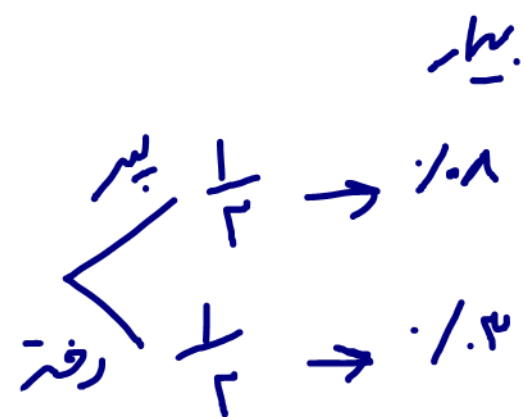
$$\text{خط } x + y + 2 = 0$$

$$d = \frac{|0 \times 1 + 0 \times 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

فاصله مرکز دایره تا خط

$$d = r = \sqrt{2} \Rightarrow \text{خط بر دایره مماس است}$$

اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر $0/08$ و به دختر $0/03$ باشد و خانواده ای قصد بچه دار شدن را داشته باشند؛ با چه احتمالی نوزاد آن ها به بیماری خاص مبتلا خواهد شد؟



$$\rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \times 0/08 + \frac{1}{2} \times 0/03 = 0/04 + 0/015 = 0/055$$