

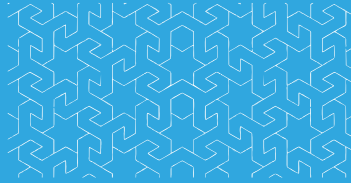
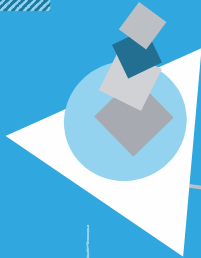
لذرائع  
تعداد بہ فائدہ شگفت انگیز

کتاب آموزش کامل مفاهیم و آزمون

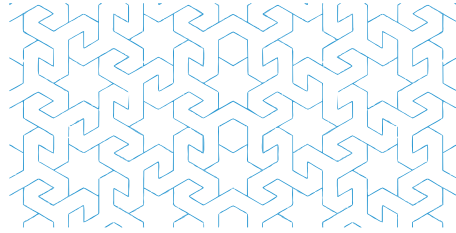
# هندسه یازدهم

علی صلاقی

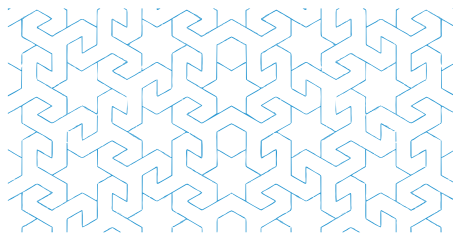
(ریاضی فیزیک)

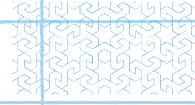






UNIVERSITY  
OF  
AL-QADISIYA





## به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «هندسه یازدهم» از مجموعه «گذرنامه» را تقدیم دانش‌آموزان می‌کنیم. این کتاب مطالب هندسه پایه یازدهم را به صورت مفهومی آموزش می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با مباحث هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌های فراوان بر حل آن‌ها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی پرسش‌های تشریحی و چهارگزینه‌ای را پاسخ می‌دهد تا بر موضوع تسلط یابد. برخی از پرسش‌ها که با علامت \* مشخص شده‌اند، کمی دشوار می‌باشند که برای به چالش کشیدن دانش‌آموزان علاقه‌مند طراحی شده است.

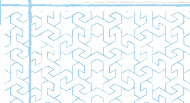
در ادامه سؤالات کنکورهای سراسری و یک آزمون چهارگزینه‌ای برای هر درس جهت خودآزمایی آورده شده است. همچنین سطح‌بندی پرسش‌ها، اعم از تشریحی، چهارگزینه‌ای، آزمون و کنکورهای سراسری در بخش پاسخ‌ها، انجام گرفته است.

انتظار می‌رود کتاب حاضر، همه نیازهای دانش‌آموزان کلاس یازدهم را در درس هندسه که مایل به تحصیل در بهترین دانشگاه‌ها و بهترین رشته‌های کشور هستند، پاسخ‌گو باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از مؤلف محترم آقای علی صادقی که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه تألیف کرده‌اند تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها محبوبه شریفی (حروف‌چین و صفحه‌آرا)، سمانه مسروری و سارا لطفی مقدم (رسم شکل)، بهاره خدای (گرافیکست و طراح جلد) سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم هندسه و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود درباره این کتاب یاری فرمایند.

انتشارات مبتکران



۸	درس‌نامه درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره.....
۱۷	پرسش‌های تشریحی.....
۲۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۳۴	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۳۵	درس‌نامه درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره.....
۴۵	پرسش‌های تشریحی.....
۵۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۶۱	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۶۳	درس‌نامه درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی.....
۷۱	پرسش‌های تشریحی.....
۷۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۸۵	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۸۶	کنکورهای سراسری.....
۹۴	پاسخ پرسش‌های تشریحی.....
۱۳۳	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۱۷۴	پاسخ آزمون درس اول.....
۱۷۵	پاسخ آزمون درس دوم.....
۱۷۷	پاسخ آزمون درس سوم.....
۱۷۹	پاسخ کنکورهای سراسری.....

۱۹۴	درس‌نامه درس اول: تبدیل‌های هندسی.....
۲۰۷	پرسش‌های تشریحی.....
۲۱۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۲۲۷	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۲۲۸	درس‌نامه درس دوم: کاربردها تبدیل‌ها.....
۲۳۵	پرسش‌های تشریحی.....
۲۴۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۲۴۴	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۲۴۶	کنکورهای سراسری.....
۲۴۹	پاسخ پرسش‌های تشریحی.....
۲۷۳	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۲۹۱	پاسخ آزمون درس اول.....
۲۹۲	پاسخ آزمون درس دوم.....
۲۹۴	پاسخ کنکورهای سراسری.....

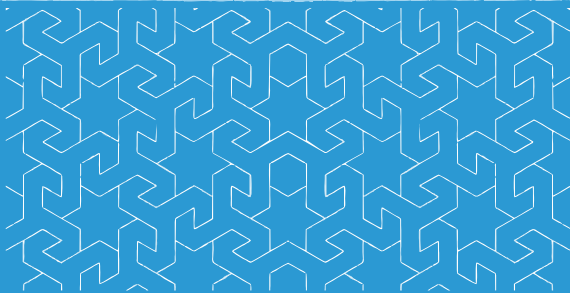
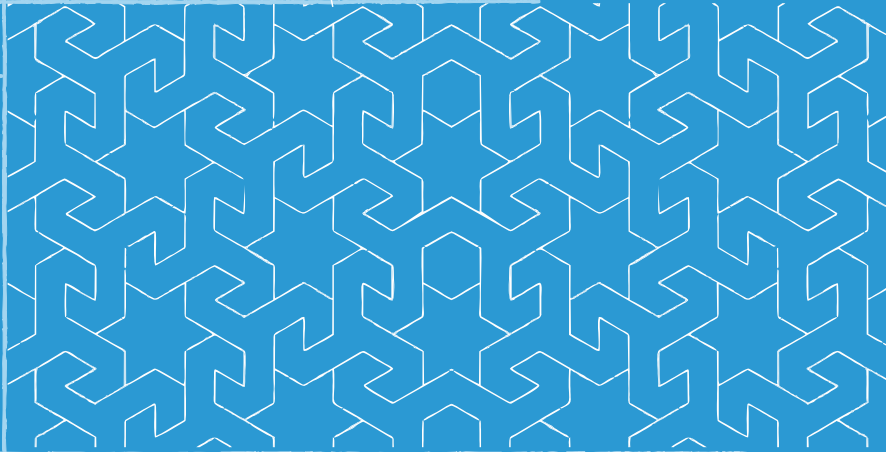
۳۰۰	درس‌نامه درس اول: قضیه سینوس‌ها.....
۳۰۴	پرسش‌های تشریحی.....
۳۰۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۳۱۳	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۳۱۴	درس‌نامه درس دوم: قضیه کسینوس‌ها.....
۳۲۰	پرسش‌های تشریحی.....
۳۲۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۳۳۳	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۳۳۴	درس‌نامه درس سوم: قضیه نیمسازها.....
۳۴۱	پرسش‌های تشریحی.....
۳۴۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۳۵۰	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۳۵۱	درس‌نامه درس چهارم: قضیه هرون.....
۳۵۹	پرسش‌های تشریحی.....
۳۶۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۳۶۷	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۳۶۸	کنکورهای سراسری.....
۳۷۳	پاسخ پرسش‌های تشریحی.....
۴۲۳	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای.....
۴۵۹	پاسخ آزمون درس اول.....
۴۶۰	پاسخ آزمون درس دوم.....
۴۶۲	پاسخ آزمون درس سوم.....
۴۶۴	پاسخ آزمون درس چهارم.....
۴۶۷	پاسخ کنکورهای سراسری.....
۲۷۷	سوالات آزمون سراسری ۹۸.....
۴۸۳	سوالات آزمون سراسری ۹۹.....





# فصل ۱

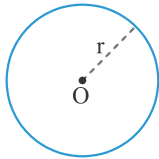
دایره



# دروس ۱ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

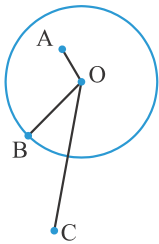
## دایره

به تمام نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (مرکز  $O$ ) به فاصله یکسان و ثابت (شعاع  $r$ ) باشند دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  گفته می‌شود.  
 - در شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  رسم شده است.  
 - دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را به صورت  $C(O, r)$  نمایش می‌دهیم.



## اوضاع نسبی یک نقطه و یک دایره

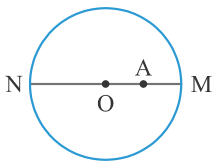
۱. نقطه درون دایره: نقطه  $A$  درون دایره است اگر و تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره کمتر از  $r$  (شعاع دایره) باشد. یعنی  $OA < r$ .
۲. نقطه روی دایره: نقطه  $B$  روی دایره است اگر و تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره برابر با  $r$  (شعاع دایره) باشد. یعنی  $OB = r$ .
۳. نقطه خارج دایره: نقطه  $C$  خارج دایره است اگر و تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره بزرگتر از  $r$  (شعاع دایره) باشد. یعنی  $OC > r$ .



## بیشترین و کمترین فاصله یک نقطه از یک دایره

بیشترین و کمترین فاصله نقطه  $A$  از یک دایره را با توجه به اوضاع نسبی یک نقطه و یک دایره در ۳ حالت زیر بررسی می‌کنیم.

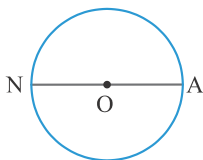
الف) نقطه  $A$  درون دایره باشد: در این حالت، قطر گذرنده از  $A$  را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع کند. در این صورت  $M$  نزدیکترین نقطه از دایره به  $A$  و  $N$  دورترین نقطه از دایره به  $A$  می‌باشد و لذا



$$\text{بیشترین فاصله } A \text{ از دایره} = R + OA$$

$$\text{کمترین فاصله } A \text{ از دایره} = R - OA$$

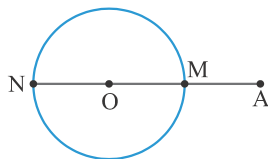
ب) نقطه  $A$  روی دایره باشد: در این حالت، قطر گذرنده از  $A$  را رسم می‌کنیم. نزدیکترین نقطه از دایره به  $A$  خود  $A$  است، و دورترین نقطه از دایره به  $A$ ، نقطه  $N$  می‌باشد و لذا



$$\text{بیشترین فاصله } A \text{ از دایره} = 2R$$

$$\text{کمترین فاصله } A \text{ از دایره} = 0$$

پ) نقطه  $A$  خارج دایره باشد: در این حالت، از  $A$  به مرکز دایره ( $O$ ) وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در  $M$  و  $N$  قطع کند.  $M$  نزدیکترین نقطه از دایره به  $A$  و  $N$  دورترین نقطه از دایره به  $A$  می‌باشد و لذا



$$\text{بیشترین فاصله } A \text{ از دایره} = OA + R$$

$$\text{کمترین فاصله } A \text{ از دایره} = OA - R$$

## تست

۱: بیشترین و کمترین فاصله نقطه  $A$  از یک دایره به ترتیب ۱۰ و ۶ می‌باشد. شعاع دایره کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۴      ۳) ۸      ۴) ۲ یا ۸

پاسخ: چون وضعیت نقطه  $A$  و دایره را نمی‌دانیم دو وضعیت در نظر می‌گیریم (نقطه  $A$  روی دایره نیست زیرا باید در این صورت کمترین فاصله صفر باشد).

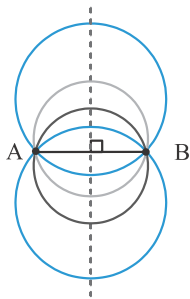
$$A \text{ درون دایره} \Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین فاصله} = R - OA = 6 \\ \text{بیشترین فاصله} = R + OA = 10 \end{cases} \Rightarrow R = 8$$

$$A \text{ خارج دایره} \Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین فاصله} = OA - R = 6 \\ \text{بیشترین فاصله} = OA + R = 10 \end{cases} \Rightarrow R = 2$$

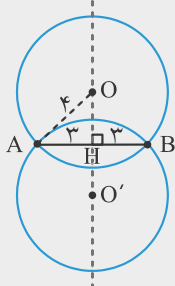




۱. از دو نقطه متمایز A و B (شکل مقابل) بی‌شمار دایره می‌گذرد که مرکز همه دایره‌ها روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار می‌گیرد. با توجه به شکل مقابل، شعاع‌های این دایره‌ها همواره بزرگتر یا مساوی نصف AB می‌باشد. یعنی  $R \geq \frac{AB}{2}$ . بنابراین کوچکترین دایره‌ای که از A و B می‌گذرد، دایره‌ای است که AB قطر آن ( $R = \frac{AB}{2}$ ) و وسط AB مرکز آن باشد.



۲. پاره‌خط  $AB = 6$  مفروض است، چند دایره به شعاع ۴ از A و B می‌گذرد؟



بی‌شمار (۴)

۲ (۳ ✓)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: طبق تذکره ۱ مرکز چنین دایره‌هایی باید روی عمود منصف AB قرار داشته باشند و همچنین  $OA = OB = 4$ . بنابراین:

$$OAH: \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow OH = \sqrt{7}$$

در نتیجه دو نقطه O و O' روی عمود منصف AB و در طرفین AB به فاصله  $\sqrt{7}$  از آن، مرکز دایره‌های مورد نظر می‌باشند و لذا ۲ دایره وجود دارد.



۳. پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. اگر تنها دو دایره به شعاع  $6x - 1$  از A و B بگذرد، حدود x کدام است؟

$\frac{1}{6} < x < \frac{2}{3}$  (۴)

$x > \frac{2}{3}$  (۳ ✓)

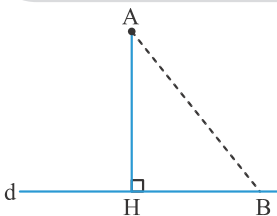
$x > 1$  (۲)

$x > \frac{1}{6}$  (۱)

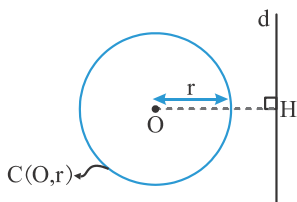
پاسخ: طبق تذکره ۱ باید داشته باشیم  $R > \frac{AB}{2}$  (اگر  $R = \frac{AB}{2}$  باشد تنها یک دایره از A و B می‌گذرد). بنابراین:

$$6x - 1 > \frac{6}{2} \Rightarrow 6x > 4 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

یادآوری (فاصله نقطه از خط): خط d و نقطه A مفروضند. اگر H پای عمودی باشد که از A به خط d رسم می‌شود، اندازه پاره‌خط AH را فاصله نقطه A از خط d می‌گوییم. واضح است که این فاصله (AH) کوتاهترین فاصله نقطه A از سایر نقاط خط d است ( $AH < AB$ ).

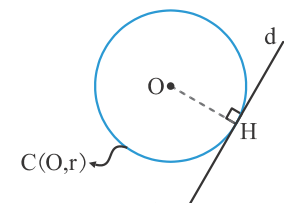


### اهضاع نسبی یک خط و یک دایره



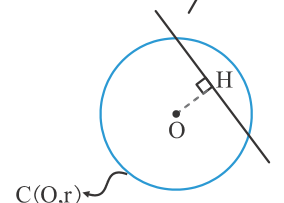
۱. خط خارج دایره است (متخارج): در این حالت خط و دایره، هیچ نقطه مشترکی ندارند و فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیشتر است.

خط d خارج دایره است  $\Leftrightarrow OH > r$



۲. خط مماس بر دایره است: در این حالت خط و دایره، تنها یک نقطه مشترک دارند و فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است.

خط d بر دایره مماس است  $\Leftrightarrow OH = r$



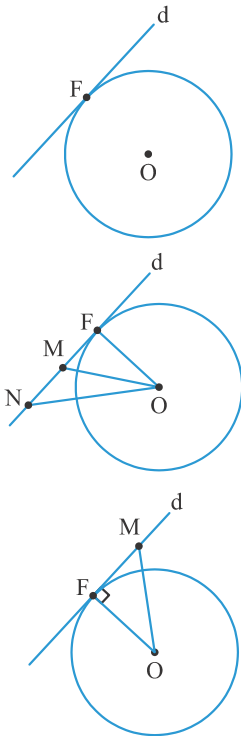
۳. خط و دایره متقاطع‌اند: در این حالت خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کمتر است.

خط d و دایره متقاطع‌اند  $\Leftrightarrow OH < r$

تذکر

۲. به خطی که دایره را در دو نقطه قطع کند، خط قاطع می‌گویند.

### ویژگی خط مماس بر دایره



فرض کنیم خط  $d$  بر دایره  $C$  مماس است. نزدیکترین نقطه خط  $d$  به نقطه  $O$  نقطه  $F$  است. زیرا می‌دانیم  $OF = R$  و هر نقطه دیگر از خط  $d$  خارج دایره است و بنابراین فاصله آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع است. اگر از  $O$  به  $d$  عمود کنیم، این خط عمود، خط  $d$  را در نقطه  $F$  قطع می‌کند. زیرا اگر فرض کنیم که در  $F$  قطع نکنند، پس نقطه دیگری مانند  $M$  وجود دارد که  $OM$  بر خط  $d$  عمود است و پای عمود می‌باشد. نقطه دیگری مانند  $N$  روی خط  $d$  هست که  $M$  بین  $F$  و  $N$  قرار دارد و در نتیجه

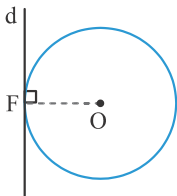
$$\left. \begin{array}{l} FM = MN \\ \widehat{FMO} = \widehat{NMO} = 90^\circ \\ OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OMN \cong \triangle OMF \Rightarrow ON = OF = R$$

بنابراین نقطه  $N$  نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط  $d$  بر دایره، تناقض دارد. پس خط مماس، در نقطه  $F$  بر  $OF$  عمود است. بنابراین اگر  $F$  نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع  $OF$  و خط مماس بر دایره در نقطه  $F$ ، هم عمودند.

حال فرض می‌کنیم  $d$  در نقطه  $F$  به شعاع  $OF$  عمود باشد. همچنین فرض می‌کنیم  $M$  نقطه دیگری غیر از  $F$  روی خط  $d$  باشد. چون  $OM > OF$  در نتیجه نقطه  $M$  خارج دایره  $C$  است. بنابراین خط  $d$  با دایره  $C$  فقط یک نقطه مشترک دارد و در خط  $d$  بر دایره مماس است. بنابراین:

خط  $d$  در نقطه  $F$  بر دایره  $C$  مماس است اگر و تنها اگر خط  $d$  بر شعاع گذرنده از  $F$  عمود باشد.

### طریقه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی دایره

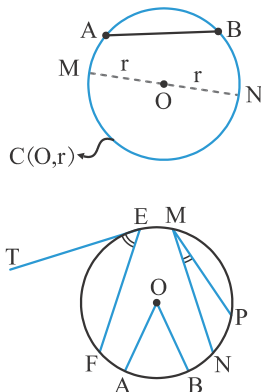


اگر  $F$  نقطه‌ای روی دایره  $C(O, r)$  باشد طبق ویژگی خط مماس، برای اینکه در نقطه  $F$  مماس بر دایره رسم کنیم، کافی است ابتدا از  $O$  به  $F$  وصل کرده سپس در نقطه  $F$  عمودی بر خط  $OF$  خارج کنیم. این خط چون بر شعاع گذرنده از  $F$  عمود است، بنابراین در  $F$  بر دایره مماس خواهد بود.

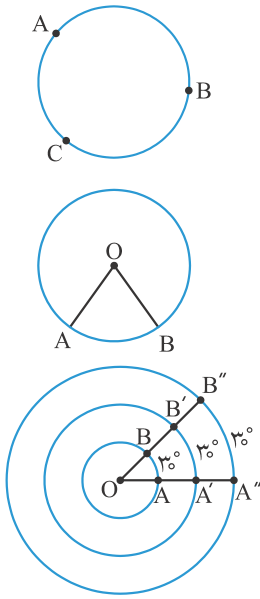
تذکر

۳. در هر نقطه از یک دایره تنها و تنها یک مماس بر آن دایره می‌توان رسم کرد. (پهرا)

### پند تعریف اولیه



۱. شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن روی دایره باشد، شعاع نامیده می‌شود.
۲. وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد، وتر دایره نامیده می‌شود (وتر  $AB$  در شکل مقابل).
۳. قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر دایره نامیده می‌شود (قطر  $MN$  در شکل مقابل). واضح است که قطر بزرگترین وتر دایره است.
۴. زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و اضلاعش، شعاع‌های دایره‌اند. (زاویه  $\widehat{AOB}$ ).
۵. زاویه محیطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره‌اند. (زاویه  $\widehat{MNP}$ ).
۶. زاویه ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. (زاویه  $\widehat{TEF}$ ).



۷. **کمان:** دو نقطه A و B را روی دایره در نظر می‌گیریم. این دو نقطه، محیط دایره را به دو بخش تقسیم می‌کنند، که به هر یک از آن بخش‌ها، کمان یا قوس می‌گوییم.

- کمان AB را به صورت  $\widehat{AB}$  می‌نویسیم و می‌خوانیم «کمان AB». وقتی می‌نویسیم  $\widehat{AB}$  منظور کمان کوچکتر می‌باشد. برای نشان دادن کمان بزرگتر از نقطه کمکی مانند C استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم  $\widehat{ACB}$ .

- هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که این دو کمان‌ها را نیم‌دایره می‌نامیم.

۸. **اندازه کمان:** همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

به عبارت دیگر اندازه زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان مقابل به آن است. یعنی:  $\widehat{O} = \widehat{AB}$

۹. با توجه به شکل مقابل، واضح است که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند. اندازه هر سه کمان  $\widehat{AB}$ ،  $\widehat{A'B'}$  و  $\widehat{A''B''}$  برابرند در صورتی که طول این کمان‌ها نابرابرند.

۱۰. با توجه به اینکه محیط دایره، یک کمان به اندازه  $360^\circ$  است لذا برای به دست آوردن طول کمانی مانند AB می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$\frac{\widehat{AB} \text{ کمان}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } \widehat{AB}}{\text{محیط دایره}} \quad (\pi \approx 3.14 \text{ یعنی رادیان یعنی } \pi)$$

۱: در دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر، طول کمان  $\widehat{AB}$  با اندازه  $60^\circ$  را به دست آورید

پاسخ:

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\widehat{AB} \text{ کمان}}{2\pi(4)} \Rightarrow \widehat{AB} \text{ کمان} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} \approx \frac{4(3.14)}{3} \approx 4.18 \text{ cm}$$

### ویژگی‌های مربوط به یک وتر و کمان نظیر آن

در زیر ویژگی‌های مربوط به یک وتر از دایره و کمان نظیر آن وتر را بررسی می‌کنیم.

۱. در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند به عبارت دیگر

$$OD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \widehat{AD} = \widehat{DB} \text{ و } \widehat{AC} = \widehat{CB} \end{cases}$$

۲. در هر دایره خطی که از مرکز دایره، به وسط وتر و از آن دایره وصل می‌شود، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند. به عبارت دیگر:

$$AH = HB \Rightarrow \begin{cases} OD \perp AB \\ \widehat{AD} = \widehat{DB} \end{cases}$$

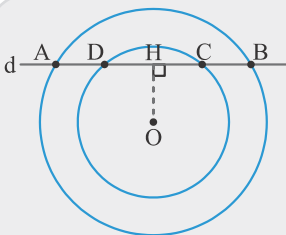
۳. در هر دایره، خطی که از مرکز دایره، به وسط کمانی از آن دایره وصل می‌شود، بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن وتر را نصف می‌کند. به عبارت دیگر:

$$\widehat{AD} = \widehat{DB} \Rightarrow \begin{cases} OD \perp AB \\ AH = HB \end{cases}$$

۴. اثبات ویژگی‌های فوق در بخش پرسش‌های تشریحی مطرح شده است (پرسش‌های ۱، ۲ و ۳ جواب: صفحه ۹۴).

۵. با توجه به ویژگی‌های فوق، اگر نقاط وسط وتر AB و وسط کمان AB را به هم وصل کنیم، امتداد پاره‌خط حاصل از مرکز دایره می‌گذرد و

این خط در وسط وتر AB، بر وتر AB عمود است.



۲: خطی مطابق شکل، دو دایره هم مرکز را قطع می‌کند و دو پاره‌خط بین دو دایره

محصور (محدود) می‌شوند. ثابت کنید این دو پاره‌خط با هم برابرند.

پاسخ: از O بر خط d عمود می‌کنیم.

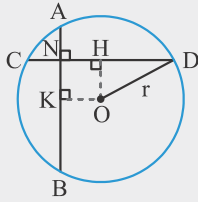
$$\begin{aligned} OH \perp AB &\Rightarrow AH = HB \\ OH \perp DC &\Rightarrow DH = HC \\ \Rightarrow AH - DH &= HB - HC \Rightarrow AD = BC \end{aligned}$$

تست

۴: مطابق شکل مقابل دو وتر  $AB$  و  $CD$  بر هم عمودند. اندازه شعاع دایره کدام است؟ ( $AN = CN = ۲$  و  $ND = NB = ۶$ )

- ۱)  $\sqrt{۵}$       ۲)  $۲\sqrt{۵}$  ✓      ۳)  $۳\sqrt{۵}$       ۴)  $۵$

پاسخ:



از مرکز دایره به هر یک از دو وتر عمود می‌کنیم. بنابراین  $CH = HD = \frac{CD}{۲} = ۴$  و  $AK = KB = \frac{AB}{۲} = ۴$

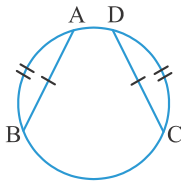
$$NK = AK - AN = ۴ - ۲ = ۲ \Rightarrow OH = ۲$$

$$\triangle OHD: \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow r^2 = OH^2 + HD^2 = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow r = ۲\sqrt{۵}$$

### ویژگی‌های مربوط به دو وتر از یک دایره

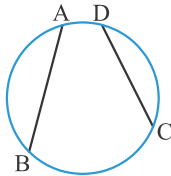
۱. در هر دایره، اگر دو وتر با هم برابر باشند، آنگاه کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند و برعکس. به عبارت دیگر:

$$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$



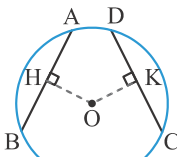
۲. در هر دایره، اگر دو وتر نابرابر باشند، کمان نظیر وتر بزرگتر، از کمان نظیر وتر کوچکتر، بزرگتر است و برعکس. به عبارت دیگر:

$$AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}$$



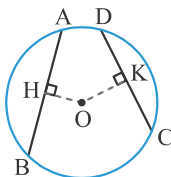
۳. در هر دایره، وترهای برابر، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. به عبارت دیگر:

$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OK$$



۴. در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس. به عبارت دیگر:

$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OK$$



۶. اثبات ویژگی‌های فوق در بخش پرسش‌های تشریحی مطرح شده است (پرسش‌های ۴ تا ۷ - جواب: صفحات ۹۴ و ۹۵).

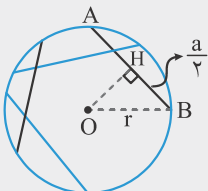
تذکر

مسئله

۳: ثابت کنید در دایره  $C(O, r)$  وسط وترهایی به طول  $a$ ، روی دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{۴}}$  قرار می‌گیرند.

پاسخ:

می‌دانیم در دایره وترهای مساوی همگی از مرکز به یک فاصله‌اند و فاصله مرکز تا هر یک از وترهای مساوی، خطی است عمود در وسط این وترها. بنابراین وسط این وترها همگی از مرکز به یک فاصله‌اند. در نتیجه روی دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $OH$  قرار می‌گیرند. طول  $OH$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.



$$\triangle OHB: \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow OH^2 = r^2 - \frac{a^2}{۴} \Rightarrow OH = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{۴}}$$



۵: در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶، وسط وترهایی به طول ۲ روی کدام دایره قرار می‌گیرند؟

- (۱)  $C(O, 6)$  (۲)  $C(O, \sqrt{33})$  (۳)  $C(O, \sqrt{34})$  (۴)  $C(O, \sqrt{35})$  ✓

پاسخ:

با توجه به مسأله قبل، وسط وترهایی به طول ۲ در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع

$$\sqrt{6^2 - \frac{2^2}{4}} = \sqrt{35} \quad C(O, \sqrt{35}) \text{ قرار می‌گیرند. یعنی}$$



۶: در دایره  $C(O, 6)$  دو وتر  $AB = 2x - 1$  و  $CD = x^2 - 4$  به گونه‌ای می‌باشند که وتر AB از مرکز دایره دورتر است. در

این صورت چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ ✓ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

پاسخ:

اولاً باید طول این وترها مثبت باشد. بنابراین:

$$AB > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 2$$

$$CD > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2$$

ثانیاً از آنجا که وتر AB از مرکز دایره دورتر است نتیجه می‌شود که  $AB < CD$ . بنابراین:

$$AB < CD \Rightarrow 2x - 1 < x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 3$$

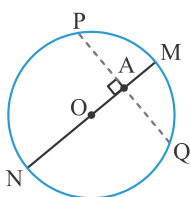
ثالثاً باید این وترها از قطر دایره کوچکتر مساوی باشند. بنابراین:

$$CD \leq 12 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 12 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

بنابراین اشتراک بازه‌های  $(x > 2)$  و  $(x < -1 \text{ یا } x > 3)$  و  $(-4 \leq x \leq 4)$  حدود تغییرات x می‌باشد که  $3 < x \leq 4$  است. در این

بازه هم تنها عدد  $x = 4$ ، یک عدد صحیح است.

### وتر ماکزیمم (بزرگترین) و وتر مینیمم (کوچکترین) گذرنده از یک نقطه داخل دایره



فرض می‌کنیم A نقطه دلخواه (غیر مرکز) درون دایره  $C(O, r)$  باشد. می‌دانیم از نقطه A بی‌شمار وتر می‌گذرد. بزرگترین وتر گذرنده از A، قطر گذرنده از A می‌باشد و کوچکترین وتر گذرنده از A، وتری است که در نقطه A بر قطر گذرنده (بزرگترین وتر) از A عمود باشد.

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۸» - جواب: صفحه ۹۵)

در شکل مقابل وتر MN بزرگترین وتر گذرنده از A و PQ کوچکترین وتر گذرنده از A می‌باشد.

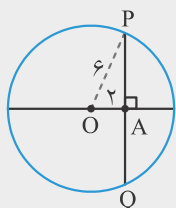


۷: در دایره  $C(O, 6)$ ، نقطه A به فاصله ۲ واحد از مرکز دایره قرار دارد. اندازه کوچکترین وتر گذرنده از A کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{2}$  (۲)  $6\sqrt{2}$  (۳)  $8\sqrt{2}$  ✓ (۴)  $10\sqrt{2}$

پاسخ:

کوچکترین وتر گذرنده از A، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود باشد. بنابراین:



$$OA \perp PQ \Rightarrow PA = AQ = \frac{1}{2} PQ$$

$$\Delta PAO: PA^2 = OP^2 - OA^2 = 36 - 4 = 32 \Rightarrow PA = 4\sqrt{2} \Rightarrow PQ = 8\sqrt{2}$$

تست

۸: در دایره  $(O, 6)$ ، نقطه  $A$  به فاصله ۲ واحد از مرکز دایره قرار دارد. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که از  $A$

بگذرند و طول آن‌ها برابر با ۸ باشد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ بی‌شمار      ۴ ✓ صفر

پاسخ:

طبق تست قبل طول کوتاهترین وتر گذرنده از  $A$  برابر با  $8\sqrt{2}$  است و این بدین معنی است که وتری با طول کمتر از  $8\sqrt{2}$  وجود ندارد.

تست

۹: نقطه  $A$  درون دایره  $C$  مفروض است. اگر طول کوچکترین و بزرگترین وتر از دایره  $C$  که از نقطه  $A$  می‌گذرند

به ترتیب ۱۲ و ۱۵ باشد، فاصله نقطه  $A$  تا مرکز دایره چقدر است؟

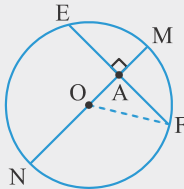
- ۴ (۱)      ۴/۵ (۲) ✓      ۵ (۳)      ۵/۵ (۴)

پاسخ:

بزرگترین وتر گذرنده از  $A$ ، قطر گذرنده از  $A$  و کوچکترین وتر گذرنده از  $A$ ، وتری است که در  $A$  بر قطر عمود است.

همچنین قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. بنابراین در شکل زیر داریم:  $EA = AF = 6$  و شعاع دایره  $R = \frac{15}{2}$ . از  $O$

به  $F$  وصل می‌کنیم:



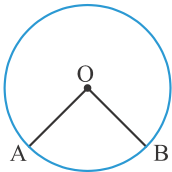
$$\triangle OAF: OA^2 = OF^2 - AF^2$$

$$OA^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 6^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow OA = \frac{9}{2} = 4/5$$

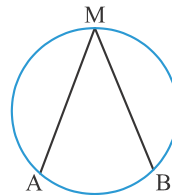
## انواع زوایا در دایره

به‌طور کلی در دایره ۷ نوع زاویه به‌صورت زیر وجود دارد. برخی از این زاویه در قبل تعریف شده ولی جهت یادآوری به هر ۷ نوع زاویه اشاره کرده و اندازه هر یک را مشخص می‌کنیم.

۱. **زاویه مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و اضلاعش، شعاع‌های دایره‌اند. طبق تعریف، اندازه زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان مقابلش است. یعنی:  $\hat{O} = \widehat{AB}$



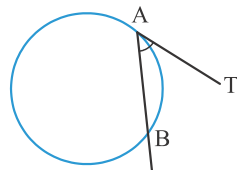
۲. **زاویه محاطی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره‌اند. ثابت می‌شود



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ یعنی برابر با نصف کمان مقابلش است. یعنی } \hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۹» - جواب: صفحه ۹۶)

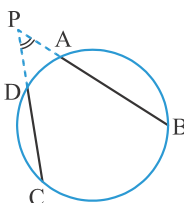
۳. **زاویه ظلی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. ثابت می‌شود اندازه هر زاویه ظلی، برابر با نصف کمان مقابلش است.



$$\hat{B\hat{A}T} = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ یعنی}$$

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۰» - جواب: صفحه ۹۶)

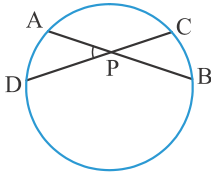
۴. **زاویه بین امتداد دو وتر:** (زاویه بین دو قاطع یا زاویه وتری خارجی): زاویه‌ای است که از برخورد امتداد دو وتر از دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود.



ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش.

$$\hat{P} = \frac{|\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} \text{ یعنی}$$

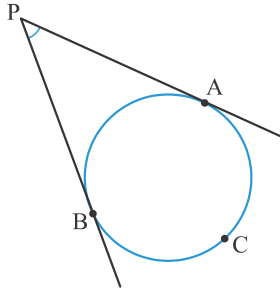
(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۱» - جواب: صفحه ۹۶)



۵. زاویه بین دو وتر (زاویه وتری داخلی): زاویه‌ای است که از برخورد دو وتر در داخل دایره ایجاد می‌شود. ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف مجموع اندازه کمان‌های روبرویش.

$$\hat{P} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2}$$

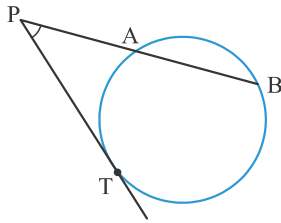
(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۲» - جواب: صفحه ۹۶)



۶. زاویه بین دو مماس: زاویه‌ای است که از برخورد دو مماس بر یک دایره و در خارج دایره ایجاد می‌شود. ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش. یعنی:

$$\hat{P} = \frac{|\widehat{ACB} - \widehat{AB}|}{2}$$

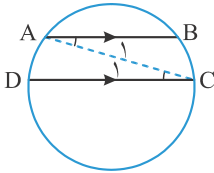
(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۳» - جواب: صفحه ۹۶)



۷. زاویه بین قاطع و مماس (زاویه بین امتداد وتر و مماس): زاویه‌ای است که از برخورد امتداد یک وتر و یک مماس بر دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود. ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش. یعنی:

$$\hat{P} = \frac{|\widehat{BT} - \widehat{AT}|}{2}$$

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۴» - جواب: صفحه ۹۷)

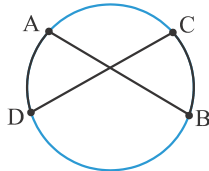


۱. در هر دایره، کمان‌های محصور (محدود) بین دو وتر موازی، با هم برابرند. به عبارت دیگر:

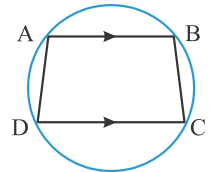
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

از A به C وصل می‌کنیم و از قضیه خطوط موازی و مورب، کمک می‌گیریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel DC \\ AC \text{ مورب} \end{array} \right. \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1 \text{ و } \hat{C}_1 \text{ محاطی‌اند}} \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD}$$

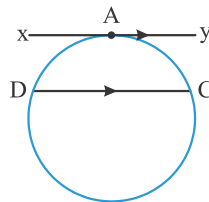


توجه شود که عکس مطلب فوق برقرار نمی‌باشد یعنی ممکن است دو کمان با هم برابر باشند ولی وترهای مربوطه با هم موازی نباشند. در شکل مقابل  $\widehat{AD} = \widehat{BC}$  ولی دو وتر AB و CD موازی نیستند!



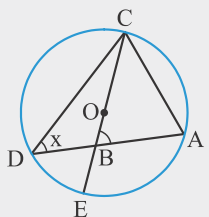
با توجه به نکته ۱ می‌توان گفت دوزنقه‌ای که رؤس آن بر روی یک دایره باشد، حتماً متساوی‌الساقین است.

$$AB \parallel DC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AD = BC$$



۲. (حالت خاص نکته ۱) در هر دایره، کمان‌های محصور (محدود) بین یک وتر و مماس موازی با آن، با هم برابرند. به عبارت دیگر:  $xy \parallel DC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AC}$ . اثبات: مشابه اثبات نکته ۱ عمل کنید.

۱۰. در شکل زیر O مرکز دایره است. اگر  $\hat{A} = 75^\circ$  و  $\hat{B} = 50^\circ$  در این صورت مقدار x کدام است؟



۴۵° (۴)

۴۰° (۳)

۳۵° (۲ ✓)

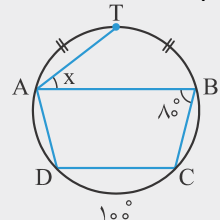
۳۰° (۱)

پاسخ: زوایای  $\hat{D}$  و  $\hat{A}$  محاطی‌اند. بنابراین:  $\widehat{AC} = 2x$  و  $\widehat{DC} = 150^\circ$ . می‌دانیم  $\widehat{CDE} = 180^\circ$  در نتیجه  $\widehat{DE} = 30^\circ$ . زاویه  $\hat{B}$  زاویه بین دو وتر است، و لذا:

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DE}}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{2x + 30^\circ}{2} \Rightarrow x = 35^\circ$$

تست

۱۱: در شکل زیر، وترهای AB و CD موازیند.  $\widehat{CD} = 100^\circ$  و T وسط کمان AB است. زاویه x کدام است؟



۲۰° (۱)      ۳۰° (۳)      ۳۵° (۴) ✓      ۲۵° (۲)

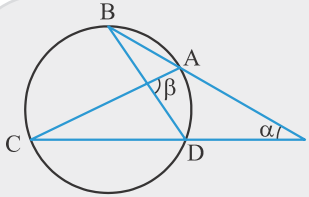
پاسخ: از آنجا که وترهای AB و CD موازیند، نتیجه می‌شود که  $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ . از طرفی زاویه  $\hat{B}$  محاطی است، و لذا

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2} \Rightarrow 80^\circ = \frac{\widehat{AD} + 100^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 60^\circ = \widehat{BC}$$

$$\widehat{ATB} = 360^\circ - (\widehat{AD} + 100^\circ + \widehat{BC}) = 360^\circ - (100^\circ + 120^\circ) = 140^\circ \Rightarrow \widehat{AT} = \widehat{TB} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow x \text{ محاطی} = \frac{\widehat{TB}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

تست

۱۲: در شکل مقابل اگر  $\hat{BAC} = 3\hat{ABD}$  باشد، آنگاه زاویه  $\beta$  چند برابر زاویه  $\alpha$  است؟



۳/۲ (۱)      ۲ (۲) ✓      ۳ (۳)      ۳/۴ (۴)

پاسخ: فرض می‌کنیم  $\hat{ABD} = x$ . بنابراین  $\hat{BAC} = 3x$ . زوایای  $\hat{ABD}$  و  $\hat{BAC}$  محاطی‌اند و لذا نصف کمان روبرویشان می‌باشند. در نتیجه:

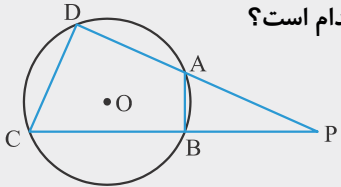
$$\hat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 2x$$

$$\hat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 6x$$

از طرفی:  $\alpha = 2x \Rightarrow \alpha = 2x$  و  $\beta = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} = \frac{6x + 2x}{2} = 4x$  بنابراین  $\beta = 2\alpha$ .

تست

۱۳: در دایره  $C(O, R)$  شکل مقابل،  $AB = R$  و  $CD = \sqrt{2}R$  می‌باشند. مقدار زاویه P کدام است؟



۲۰° (۱)      ۲۲/۵° (۲)      ۳۰° (۴)      ۱۵° (۳) ✓

پاسخ: از O به A و B و C و D وصل می‌کنیم. داریم:

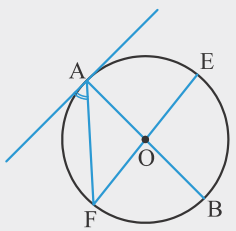
$$OA = OB = AB = R \Rightarrow \text{OAB متساوی الاضلاع} \Rightarrow \hat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$OD = OC = R \text{ و } CD = \sqrt{2}R \Rightarrow \text{DOC قائم الزویه} \Rightarrow \hat{DOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{P} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{AB}}{2} = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$$

تست

۱۴: در شکل مقابل O مرکز دایره و  $\hat{A} = 58^\circ$  است. اندازه کمان AE کدام است؟



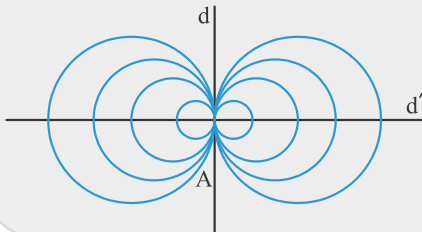
۶۸° (۲)      ۶۴° (۱) ✓      ۷۴° (۳)      ۷۴° (۴)

پاسخ: زاویه A ظلّی است و بنابراین  $\hat{A} = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow \widehat{AF} = 116^\circ$  همچنین:

$$\widehat{AFB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AF} + \widehat{FB} = 180^\circ \Rightarrow 116^\circ + \widehat{FB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{FB} = 64^\circ \Rightarrow \widehat{AE} = 64^\circ$$

مسئله

۴: خط d و نقطه A روی آن مفروض است. مرکزهای همه دایره‌هایی که همگی در نقطه A بر خط d مماس‌اند، روی چه



شکلی هستند؟ این شکل چه وضعی نسبت به خط d دارد؟

پاسخ: مطابق شکل مقابل، مرکزهای همه دایره‌هایی که همگی در نقطه A بر خط d مماس‌اند، روی یک خط قرار می‌گیرند ( $d'$ ), که با توجه به اینکه مماس بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است، این خط در نقطه A بر خط d عمود می‌شود.



## پرسش‌های تشریحی

۱. ثابت کنید، در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند.



۲. ثابت کنید، در هر دایره خطی که از مرکز دایره، به وسط وتر و از آن دایره وصل می‌شود، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



۳. ثابت کنید، در هر دایره خطی که از مرکز دایره، به وسط کمانی از آن دایره وصل می‌شود، بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن وتر را نصف می‌کند.



۴. ثابت کنید، در هر دایره، اگر دو وتر با هم برابر باشند، آنگاه کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند و برعکس.



۵. ثابت کنید، در هر دایره، اگر دو وتر نابرابر باشند، کمان نظیر وتر بزرگتر، از کمان نظیر وتر کوچکتر، بزرگتر است و برعکس.



۶. ثابت کنید، در هر دایره، وترهای برابر، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.



۷. ثابت کنید، در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس.



۸. ثابت کنید، کوچکترین وتر و تری که از نقطه A داخل دایره می‌گذرد، و تری است که در نقطه A بر قطر گذرنده از A عمود باشد.



۹. ثابت کنید، اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان مقابلش است.



۱۰. ثابت کنید، اندازه هر زاویه ظلّی، برابر با نصف کمان مقابلش است.



۱۱. ثابت کنید، اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش.



۱۲. ثابت کنید، اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر داخل دایره ایجاد می‌شود برابر است با نصف مجموع اندازه کمان‌های روبرویش.



۱۳. ثابت کنید، اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو مماس بر یک دایره و در خارج دایره ایجاد می‌شود برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش.



۱۴. ثابت کنید، اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد یک وتر و یک مماس بر دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود برابر است با نصف قدرمطلق اندازه کمان‌های روبرویش.

۱۵. کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند.

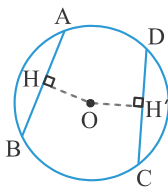
- همه زوایای مرکزی یک دایره متساویند.
- رأس هر زاویه مرکزی از یک دایره بر مرکز آن دایره واقع است.
- هر دایره فقط شامل دو نیم دایره است.
- هر نیم‌دایره، یک کمان از دایره است.
- هر دایره فقط یک قطر دارد.
- هر دایره با هر وتر آن تنها در دو نقطه مشترک است.
- هر قطر دایره، وتری از دایره است.
- هر وتر دایره، یک قطر دایره است.
- قطرهای یک دایره هم اندازه‌اند.
- بعضی از وترهای یک دایره شعاع دایره‌اند.
- بزرگترین وتری که از یک نقطه داخل دایره می‌گذرد، قطری است که بر آن نقطه مرور می‌کند.

۱۶. عبارات زیر را چنان کامل کنید که هر یک، گزاره‌ای درست باشد.

- کمان‌های مساوی یک دایره، زاویه‌های مرکزی ..... دارند.
- در دو دایره نامساوی، کمان‌های ..... زاویه‌های مرکزی مساوی دارند.
- هر شعاع از یک دایره، زیر مجموعه‌ای از نقاط ..... است.
- نیمساز هر زاویه مرکزی از یک دایره، کمان نظیر آن زاویه را .....

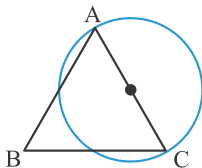
۱۷. پاره‌خط  $AB = 4$  مفروض است.

- الف) چند دایره از نقاط  $A$  و  $B$  می‌گذرند؟
- ب) چند دایره به قطر  $4$  از  $A$  و  $B$  می‌گذرد؟
- پ) چند دایره به شعاع  $4$  از  $A$  و  $B$  می‌گذرد؟
- ت) چند دایره به قطر  $3$  از  $A$  و  $B$  می‌گذرد؟
- ث) چند دایره به شعاع  $3$  از  $A$  و  $B$  می‌گذرد؟



۱۸. در شکل مقابل،  $O$  مرکز دایره است. اگر  $AB = 10$  و  $CD = 8$  و  $OH = 6 - x$  و  $OH' = 2x - 3$  باشد، حدود  $x$  را تعیین کنید.

۱۹. نقطه  $M$  به فاصله  $2$  از مرکز دایره  $C(O, 5)$  قرار دارد. طول کوچکتری و بزرگترین وتر گذرنده از این نقطه را به دست آورید.



۲۰. در شکل روبرو  $AC$  قطر دایره است و  $AB = AC$ . ثابت کنید دایره از وسط  $BC$  می‌گذرد.

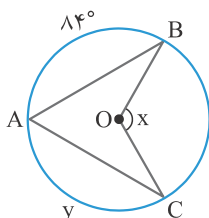
۲۱. سه نقطه A و B و C بر یک دایره به مرکز O چنان اختیار شده‌اند که  $\hat{A}OB = 75^\circ$  و  $\hat{B}OC = 136^\circ$  و دو زاویه در دو طرف OB هستند. اندازه کمان  $\widehat{AC}$  را تعیین کنید.

۲۲. بر دایره  $C(O, 4)$  نقاطی تعیین کنید که از نقطه A که به فاصله ۶ واحد از مرکز دایره واقع است، به فاصله ۴ واحد باشد.

۲۳. دو وتر مساوی از دایره  $C(O, R)$  در نقطه M متقاطع‌اند. ثابت کنید پاره‌خطهایی که به وسیله نقطه تقاطع روی دو وتر پدید می‌آیند، دوهبه‌دو مساوی یکدیگرند.

۲۴. ثابت کنید هر دو وتر موازی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند، مساویند.

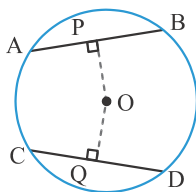
۲۵. ثابت کنید هر دو وتر مساوی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند و در دو طرف قطر قرار دارند، موازی‌اند.



۲۶. با توجه به شکل مقابل به هر یک از موارد زیر پاسخ دهید:

الف) اگر  $\hat{y} = 140^\circ$ ، آنگاه مقدار زاویه x را به دست آورید.

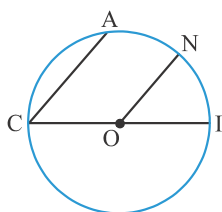
ب) اگر  $\hat{x} = 165^\circ$ ، آنگاه اندازه کمان  $\widehat{y}$  را به دست آورید.



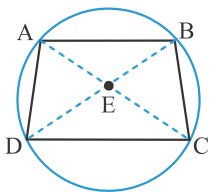
۲۷. با توجه به شکل روبرو:

الف) اگر طول شعاع ۱۰ و  $PO = 6$ ، آنگاه طول AP و AB را به دست آورید.

ب) اگر  $OC = \sqrt{2}$  و  $OQ = CQ$ ، آنگاه طول پاره‌خطهای CQ، DQ و CD را به دست آورید.



۲۸. در دایره به مرکز O و به قطر CI، داریم  $CA \parallel ON$ . ثابت کنید  $\widehat{AN} = \widehat{NI}$ .

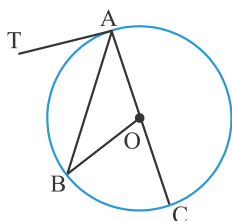


۲۹. با توجه به شکل مقابل ثابت کنید:

الف) اگر  $AD = BC$ ، آنگاه  $AC = BD$ .

ب) اگر  $AC = BD$ ، آنگاه  $AD = BC$ .

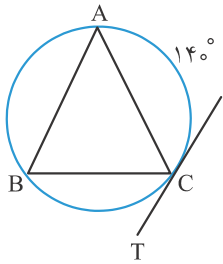
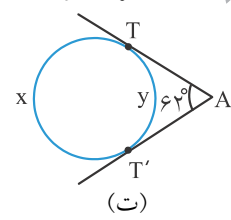
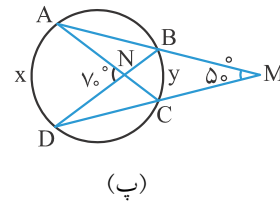
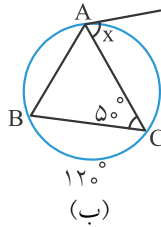
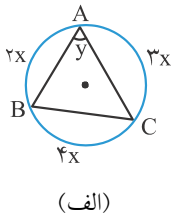
۳۰. شعاع‌های دو دایره هم مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازه تری از دایره بزرگتر را که بر دایره کوچکتر مماس است، به دست آورید.



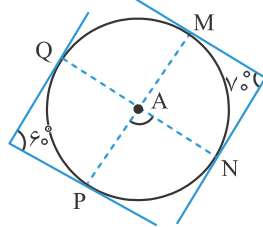
۳۱. در شکل مقابل قطر دایره و  $\hat{B}OC = 70^\circ$  و خط AT در نقطه A بر دایره مماس است.

اندازه زاویه  $\hat{T}AB$  را تعیین کنید.

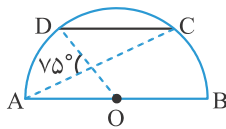
۳۲. مقادیر مجهول را در هر یک از شکل های زیر تعیین کنید.



۳۳. در شکل مقابل  $AB = AC$  و مماس بر دایره در نقطه  $C$  و  $\widehat{AC} = 140^\circ$  است. اندازه زاویه  $BCT$  را به دست آورید.



۳۴. در شکل مقابل اندازه زاویه  $A$  را محاسبه کنید.

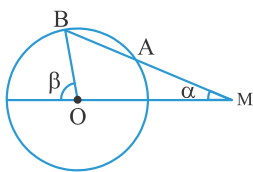


۳۵. در شکل مقابل  $O$  مرکز نیم دایره و  $CD \parallel AB$ . اندازه کمان  $CD$  را به دست آورید.

۳۶. در دایره  $C(O, R)$ ،  $\widehat{AB} = 60^\circ$  و  $AB = 10$ . فاصله  $O$  از وتر  $AB$  را به دست آورید.

۳۷. خط  $d$  مفروض است. مرکزهای همه دایره هایی که شعاع آنها مقدار ثابت  $R$  است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی هستند؟ این شکل چه وضعی نسبت به  $d$  دارد؟

۳۸. دو خط  $m$  و  $n$  در نقطه  $A$  متقاطع اند. دایره ای رسم کنید که مرکز آن روی  $n$  و شعاع آن ۲ سانتی متر بوده و بر  $m$  مماس باشد. (از نتیجه سؤال قبل استفاده کنید)



۳۹. دایره  $C(O, R)$  مفروض است. از نقطه  $M$  در خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع کرده است و  $AM = R$ . ثابت کنید:  $\beta = 3\alpha$ .

۴۰. دو وتر  $AB$  و  $CD$  از دایره  $C(O, R)$  در نقطه ای مانند  $P$  درون دایره متقاطع اند به طوری که  $\widehat{P} = (7x + 11)^\circ$  و کمان های مقابل به آن از دایره  $(2x)^\circ$  و  $(x + 88)^\circ$  می باشند. اندازه زاویه  $P$  را به دست آورید.

۴۱. دو وتر عمود بر هم از دایره  $C(O, R)$  بر دایره چهار کمان پدید آورده اند. اگر اندازه های دو کمان از چهار کمان مزبور  $40^\circ$  و  $60^\circ$  باشند، اندازه های دو کمان دیگر را تعیین کنید.