در کتاب کنکور گسسته و آمار جامع منتشران چه چیزهایی داریم؟

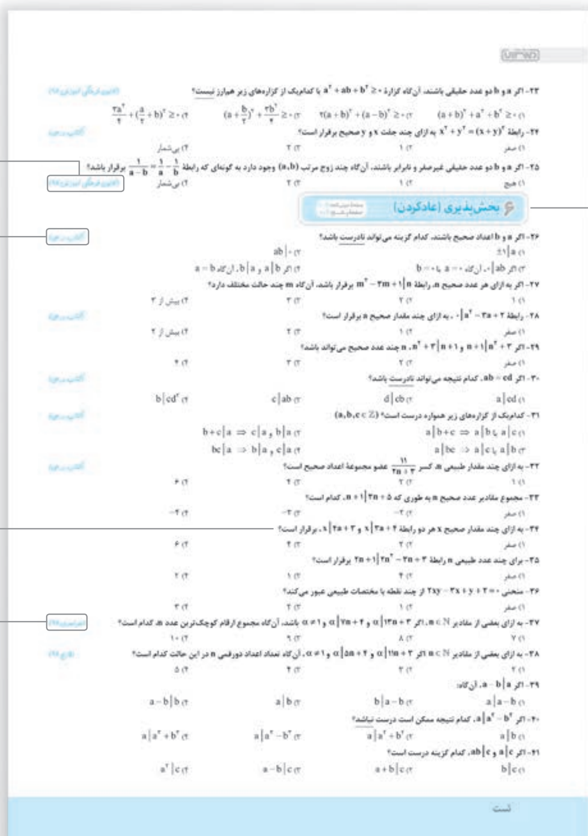
در هر تیتر یک عدد می‌بینید که این عدد شماره‌های درس‌نامه را نشان می‌دهد. با توجه به این عدد، می‌فهمید برای حل تست‌های مربوط به هر تیتر، باید چه درس‌نامه‌هایی را بخوانید.

تست‌ها، بخش اول این کتاب را تشکیل می‌دهند. در این کتاب از بیان تست‌های غیراستاندارد پرهیز کرده‌ایم. به همین خاطر شما با کتابی مواجه هستید که حجم کم‌تری نسبت به کتاب‌های تست گسستهٔ دیگر دارد اما کنکور را به بهترین شکل ممکن پوشش داده است.

در بخش تست، هر فصل با یک سرفصل شروع می‌شود که در آن شماره و اسم فصل و هم‌چنین یک کادر راهنما برای آدرس‌دهی درس‌نامه و پاسخ تست‌ها وجود دارد.

درون هر تیتر چنین کادری را قرار داده‌ایم تا بتوانید درس‌نامه و پاسخ مربوط به هر مبحث را پیدا کنید.

عنوان درس‌نامه‌ها دقیقاً مطابق با عنوان تست‌ها است. مثلاً عنوان درس‌نامهٔ «۱» فصل اول، مثال نقض است.



به کمک این تیترها، تست‌های هر قسمت به صورت کاملاً هوشمندانه‌ای طبقه‌بندی شده‌اند. چیدمان تست‌ها در هر موضوع، روال کاملاً آموزشی دارد. به طوری که یادگیری هر تست و مطالعهٔ پاسخ آن، شما را برای رویارویی با تست‌های بعدی آماده می‌سازد.

کتاب شامل تست‌های کنکور سراسری، کانون فرهنگی آموزش، برگرفته از کتاب درسی و تألیفی است.

هــر درس‌نامه با یک ســردرس شــروع می‌شــود. در سردرس، شــمارهٔ فصــل (این‌جــا فصل ۱)، اســم فصــل (این‌جا نظریهٔ اعداد)، شمارهٔ درس‌نامه (این‌جا درس‌نامهٔ ۱) و عنوان درس‌نامه (این‌جا مثال نقض) را می‌بینید.

درس‌نامه‌ها را با این کادرها از پاسخ تست‌ها جدا کرده‌ایم. هر جا چنیــن کادری دیدید، بدانیــد بــا یــک درس‌نامــه مواجه هستید.

پاســخ تســت‌های هر مبحث بلافاصله بعد از درس‌نامهٔ همان مبحث قرار می‌گیرد. همان‌طور که می‌بینید پاسخ تست‌ها در کادر قرار ندارد.

بخش دوم کتاب، شــامل درس‌نــامــه‌ها و پــاســخ تشــریــحــی تــســت‌هــا می‌باشد. درس‌نــامــه‌های این کتاب را کامل و تا حد امکان کم‌حجم نوشته‌ایم تا تمام مطالب مورد نیاز را یاد بگیرید و در عین حال زمان شــما بــرای مطالب غیرضروری و اضافی تلف نشود. در پاسخ تست‌ها، بــه تمام نکات مــورد نیاز اشــاره شــده و هر جا که نیاز بوده، دلیل نادرســتی سایر گزینه‌ها هم بررسی شده است.

فهرست

۱۴۳- کدام دو عدد در همنهشتی $a \overset{12}{\equiv} b$ صادق‌اند؟ (کتاب درسی)

۱) ۶۳,۲۰ ۲) ۱۲,۲۳ ۳) ۵۹,۲۳ ۴) ۲۴,۵۹

۱۴۴- عدد ۲۰۱۴ به کدام دستهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۱۷ تعلق دارد؟ (کتاب درسی)

۱) $[-2]$ ۲) $[8]$ ۳) $[16]$ ۴) $[24]$

۱۴۵- چند عدد طبیعی $a < 100$ وجود دارد که $a \overset{11}{\equiv} 3$ باشد؟ (کتاب درسی)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۴۶- رابطهٔ همنهشتی مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۱۵ زیرمجموعه افراز کرده است. عدد ۳۳ به کدام کلاس تعلق دارد؟

۱) $[3]$ ۲) $[4]$ ۳) $[8]$ ۴) $[11]$

۱۴۷- اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی با تقسیم اعضا بر ۳، افراز شده باشد، چند عدد دورقمی با ۵ در یک کلاس قرار دارند؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۱۴۸- به کدام پیمانه هیچ دو عددی از اعداد $0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ در یک کلاس همنهشتی قرار ندارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۹- به ازای چند عدد طبیعی m، داریم $23 \overset{m}{\equiv} 13$؟ $(m \neq 1)$ (کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۵۰- اگر $a \overset{m}{\equiv} 70 \overset{m}{\equiv} 239$ و m عددی دورقمی باشد، مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار سه‌رقمی a کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۷

۱۵۱- اگر $a \overset{18}{\equiv} -65$، باقی‌ماندهٔ عدد صحیح a بر ۱۸ کدام است؟

۱) -65 ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۱۵۲- اگر باقی‌ماندهٔ عدد A بر ۳۷ برابر ۲۳ باشد، باقی‌ماندهٔ $2A - 3$ بر ۳۷ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۷ ۳) ۲۰ ۴) ۲۶

۱۵۳- باقی‌ماندهٔ $1! + 2! + 3! + \cdots + 1393!$ بر ۱۲ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۹

۱۵۴- اگر $a = 7k + 30$، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = a^2 + a^3 + a^4 + a^5$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۵- اگر $64a - 26b = 40$، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = a^{29} + 2a^2 + 4$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۵

۱۵۶- به ازای چند مقدار طبیعی و دورقمی a، عدد $a^2 + 2$ بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۵۷- اگر a یک عدد طبیعی باشد، باقی‌ماندهٔ عدد $a^2 + 15$ بر ۷ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۸- عدد $\overline{aba}$ بر ۷ بخش‌پذیر است. $a + b$ کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۵۹- اگر عدد دورقمی $\overline{ab}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^3 - b^3$ بر ۱۳ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۷

۱۶۰- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۹ برابر ۲۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۶۱- اگر $a \overset{6}{\equiv} 20$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $20a$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) صفر

قبل از حل تست ۱۶۲ و ۱۶۳ کادر موجود در صفحهٔ ۱۲۱ را بخوانید.

۱۶۲- اگر در یک سال چهارم دی سه‌شنبه باشد، ۲۸ اسفند چه روزی است؟ (کتاب درسی)

۱) سه‌شنبه ۲) شنبه ۳) یکشنبه ۴) پنجشنبه

۱۶۳- اگر بدانیم بیستم فروردین روز دوشنبه است، چهارمین شنبهٔ بهمن‌ماه چه روزی است؟

۱) بیست و هفتم ۲) بیست و هشتم ۳) بیست و نهم ۴) سی‌اُم

قبل از حل تست‌های ۱۶۴ تا ۱۷۱ کادر موجود در صفحهٔ ۱۲۱ را بخوانید.

۱۶۴- اگر $a \overset{8}{\equiv} 3$ و $a \overset{7}{\equiv} 2$، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵۶ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵۱ ۳) ۵۰ ۴) ۶

۱۶۵- اگر $x \overset{81}{\equiv} -45$ و $x \overset{4}{\equiv} 23$، آن‌گاه x در پیمانهٔ ۳۶ با کدام گزینه همنهشت است؟

۱) ۲۷ ۲) ۹ ۳) ۲۵ ۴) ۱۱

۱۶۶- چند عدد سه‌رقمی طبیعی وجود دارد که باقی‌ماندهٔ آن بر ۳ برابر ۱ و بر ۵ برابر ۳ باشد؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۰ ۳) ۶۱ ۴) ۶۲

۱۶۷- باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷ برابر ۳ و بر ۱۱ برابر ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷۷ کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۰ ۳) ۶۱ ۴) ۶۲

۱۶۸- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۶۳ چگونه است؟

۱) عدد اول ۲) مضرب ۲ ۳) مضرب ۳ ۴) مضرب ۵

۱۶۹- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر دو عدد ۴ و ۵، برابر ۱ باشد؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷۰- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۱۷۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۲، ۱۵ و ۳۲ به ترتیب برابر ۵، ۸ و ۲۵ است. رقم وسط کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۳ تقسیم و معادلهٔ همنهشتی

صفحهٔ درس‌نامه: ۱۲۳
صفحهٔ پاسخ: ۱۲۳

۱۷۲- از رابطهٔ $2a \overset{36}{\equiv} 2b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (کتاب درسی)

۱) $a \overset{36}{\equiv} b$ ۲) $a \overset{18}{\equiv} b$ ۳) $2a \overset{18}{\equiv} 2b$ ۴) $a \overset{9}{\equiv} b$

۱۷۳- از رابطهٔ همنهشتی $12a \overset{9}{\equiv} 18b$، کدام نتیجه‌گیری به پیمانهٔ ۳ درست نیست؟

۱) $3b \equiv 2a$ ۲) $6b \equiv 4a$ ۳) $a \equiv 0$ ۴) $b \equiv 2$

۱۷۴- از رابطهٔ همنهشتی $9a \overset{18}{\equiv} 6b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a \overset{2}{\equiv} 0$ ۲) $b \overset{3}{\equiv} 0$ ۳) $a \overset{6}{\equiv} 0$ ۴) $3a \overset{6}{\equiv} 2b$

۱۷۵- از رابطهٔ همنهشتی $36a \overset{84}{\equiv} 192$، کدام نتیجه‌گیری در پیمانهٔ ۷ نادرست است؟

۱) $a \equiv 3$ ۲) $a \equiv 4$ ۳) $2a \equiv -1$ ۴) $3a \equiv 2$

۱۴ معادلهٔ همنهشتی

صفحهٔ درس‌نامه: ۱۲۴
صفحهٔ پاسخ: ۱۲۴

۱۷۶- کدام‌یک از معادلات همنهشتی زیر جواب ندارد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $51x \overset{6}{\equiv} 10$ ۲) $4x \overset{6}{\equiv} 18$ ۳) $3x \overset{9}{\equiv} 15$ ۴) $12x \overset{18}{\equiv} 30$

۱۷۷- به ازای کدام a معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{90}{\equiv} 50$ جواب ندارد؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۷ ۲) ۲۵ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۱۷۸- شرط لازم و کافی برای این‌که معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{60}{\equiv} 20$ جواب داشته باشد، کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $20 \mid a$ ۲) $(a,10)=1$ ۳) $(a,3)=1$ ۴) $a \overset{3}{\equiv} 2$

۱۷۹- معادلهٔ همنهشتی $42x \overset{15}{\equiv} 5a$ به ازای کدام مقدار a در مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۸۰- معادلهٔ همنهشتی $4x \overset{6}{\equiv} 2$ با کدام معادله جواب‌های یکسان دارد؟ (کتاب درسی)

۱) $2x \overset{3}{\equiv} 1$ ۲) $2x \overset{6}{\equiv} 1$ ۳) $(4x)^2 \overset{36}{\equiv} 4$ ۴) $(4x)\times 6 \overset{6}{\equiv} 2\times 6$

۱۸۱- اگر $۳x \overset{۷}{\equiv} ۲$ ، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ x بر ۷ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۱۸۲- در رابطهٔ $۹a \overset{۲۰}{\equiv} ۳۶ - ۳a$ ، عدد a به کدام صورت است؟

۱) $۵k+۳$ ۲) $۵k+۱$ ۳) $۴k+۳$ ۴) $۴k+۱$

۱۸۳- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی که در معادلهٔ $۷x \overset{۱۱}{\equiv} ۲$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

۱۸۴- رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a که در رابطهٔ همنهشتی $۱۳a \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۵- جواب کلی x از رابطهٔ $۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۳۰۰$ به کدام صورت است؟

۱) $x \overset{۱۳}{\equiv} ۱$ ۲) $x \overset{۱۳}{\equiv} ۲$ ۳) $x \overset{۱۳}{\equiv} ۳$ ۴) $x \overset{۱۳}{\equiv} ۷$

۱۸۶- دو عدد ۱۳۱ و ۸۲ در یک دستهٔ همنهشتی به پیمانهٔ عدد اول p قرار دارند. اگر دو عدد $۴a+۷$ و $۷a+۴$ به پیمانهٔ p همنهشت باشند، کم‌ترین مقدار سه‌رقمی a کدام است؟

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۴ ۳) ۱۰۶ ۴) ۱۰۷

۱۸۷- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح $۷a+۴$ بر ۲۳ برابر ۱۹ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۲ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۱۸۸- چند عدد دورقمی وجود دارد که در رابطهٔ همنهشتی $۲۶a \overset{۱۸}{\equiv} ۱۲$ صدق کند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۸۹- معادلهٔ همنهشتی $۷۲x \equiv ۱$ (به پیمانهٔ ۳۱) در مجموعهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی چند جواب دارد؟ (خارج ۹۰)

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۱۹۰- فرم کلی جواب‌های معادلهٔ $۷۱x \overset{۵۷}{\equiv} ۱$ ، به کدام صورت است؟

۱) $x \overset{۵۷}{\equiv} ۴$ ۲) $x \overset{۵۷}{\equiv} -۴$ ۳) $x \overset{۵۷}{\equiv} ۵۱$ ۴) $x \overset{۵۷}{\equiv} -۵۱$

۱۹۱- می‌توان ثابت کرد که اگر p عدد اول باشد، آن‌گاه $(p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$. با توجه به این قضیه، باقی‌ماندهٔ $۱۴!$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۹۲- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی که در معادلهٔ $۷x \overset{۹}{\equiv} ۲^{۳۲}$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۲۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۳

۱۹۳- مجموع ارقام کوچک‌ترین x سه‌رقمی که در معادلهٔ همنهشتی $۷x \overset{۱۰}{\equiv} ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۱۳۹۷!$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۱۹۴- چند $a < ۳۰۰$ طبیعی وجود دارد که $۳۱a \overset{۱۳}{\equiv} ۳$ و $۸a \overset{۱۲}{\equiv} ۶۴$ ؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۹۵- اگر $۲x + ۷y \overset{۵}{\equiv} ۳$ و $۴x - ۳y \overset{۵}{\equiv} ۲$ ، باقی‌ماندهٔ x بر ۵ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۶- به ازای چند عدد از مجموعهٔ $\{۱۰۰,۱۰۱,۱۰۲,\dots,۳۰۰\}$ ، داریم: $۴۱ \mid ۹n+۲$ ؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۹۷- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، دو عدد به صورت‌های $۵n-۲$ و $۷n+۳$ ، نسبت به هم غیراول‌اند؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۹۸- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۱۱ دو برابر باقی‌ماندهٔ b بر ۱۱ باشد و باقی‌ماندهٔ $a+b$ بر ۱۱ برابر ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ $a^۲+b^۲$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۹۹- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۱، عبارت $(۲x+۱)(x-۱)$ بر ۷ بخش‌پذیر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۰۰- اگر $a^۲ - ۳a + ۲ \overset{۶}{\equiv} ۰$ ، آن‌گاه a به چه تعداد از دسته‌های همنهشتی به پیمانهٔ ۶ می‌تواند تعلق داشته باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۰۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی N بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ است. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر خارج قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر N، کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۰۲- در تقسیم عدد طبیعی سه‌رقمی **a** بر عدد طبیعی **b**، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ می‌باشد. چند عضو از مجموعهٔ جواب‌های **a** مضرب ۵ می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ *(سراسری ۹۲)*

۲۰۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی **A** بر عدد ۲۳ برابر ۵ و باقی‌ماندهٔ تقسیم دو برابر عدد **A** بر عدد ۱۷ برابر ۹ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی **A** بر عدد ۱۲، کدام است؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۷

فصل ۵ — درس‌نامهٔ ۱۲

نظریهٔ اعداد: همنهشتی

همنهشتی یعنی هم‌باقی‌مانده بودن. مثلاً باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۲ و ۲۷ بر ۵، با هم برابر است:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \hline 25 & 5 \\ \boxed{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 5 \\ \hline 10 & 2 \\ \boxed{2} & \end{array}$$

می‌گوییم ۱۲ و ۲۷ در تقسیم بر ۵، هم‌باقی‌مانده‌اند. یا «۱۲ و ۲۷ به پیمانهٔ ۵، همنهشت‌اند» و می‌نویسیم:

$$12 \overset{5}{\equiv} 27$$

تذکر پیمانه همان مقسوم‌علیه است. البته در همنهشتی به جای b از m استفاده می‌کنیم و معمولاً $m=1$ را در نظر نمی‌گیریم. پس پیمانهٔ عدد طبیعی بیشتر از ۱ است. در قدیم پیمانه را «سنج» یا «هنگ» هم می‌گفتند!

بنابراین $a \overset{m}{\equiv} b$ یعنی a و b به پیمانهٔ m، باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند. البته تعریف ریاضی همنهشتی این است که $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b$؛ یعنی دو عدد زمانی به پیمانهٔ m همنهشت‌اند که اختلاف آن‌ها مضرب m باشد. پس اگر بخواهیم $12 \overset{5}{\equiv} 27$ را کنترل کنیم، می‌گوییم $12-27$ یعنی -15 به ۵ می‌خورد. پس این همنهشتی درست است.

تست کدام نادرست است؟

۱) $3x-1 \overset{4}{\equiv} 7-5x$
۲) $n^3 \overset{6}{\equiv} n$
۳) $9^{100} \overset{11}{\equiv} 2^{100}$
۴) $18 \overset{5}{\equiv} -3$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** دلیل درست‌بودن گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) را ببینید:

۱: $3x-1 \overset{4}{\equiv} 7-5x \Leftrightarrow 4 \mid (3x-1)-(7-5x) \Leftrightarrow 4 \mid 8x-8$ درست است.

۲: $n^3 \overset{6}{\equiv} n \Leftrightarrow 6 \mid n^3-n \Leftrightarrow 6 \mid \underbrace{n(n-1)(n+1)}_{\text{ضرب ۳ عدد متوالی}}$ درست است.

تذکر حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی به $3!=6$ می‌خورد.

۳: $9^{100} \overset{11}{\equiv} 2^{100} \Leftrightarrow 11 \mid 9^{100}-2^{100} \Leftrightarrow 9+2 \mid 9^{100}-2^{100}$

چون ۱۰۰ زوج است، این رابطه هم درست است.

اما گزینهٔ (۴) صحیح نیست. $5 \nmid 18-(-3)$

تست دو عدد ۶۷ و ۲۱ در چند پیمانه همنهشت‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$67 \overset{m}{\equiv} 21 \Leftrightarrow m \mid 67-21 \Leftrightarrow m \mid 46 \Leftrightarrow m = 2$ یا ۲۳ یا ۴۶

پس در ۳ پیمانه همنهشت‌اند.

دو نکته هم ببینید: ۱ در همنهشتی، تعداد کلاس‌های همنهشتی برابر پیمانه است، یعنی در همنهشتی به پیمانهٔ m، m تا کلاس همنهشتی داریم و $\mathbb{Z}$ به m کلاس افراز می‌شود. ۲ دو عدد وقتی در یک کلاس قرار می‌گیرند که همنهشت باشند، یعنی: $[a]=[b] \Leftrightarrow a\overset{m}{\equiv} b$

پس مثلاً همنهشتی به پیمانهٔ ۴، چهارتا کلاس ایجاد می‌کند. این کلاس‌ها همان باقی‌مانده‌های مختلف در تقسیم بر ۴ هستند. می‌نویسیم:

$$\frac{\mathbb{Z}}{4} = [0]_4 \cup [1]_4 \cup [2]_4 \cup [3]_4$$

البته می‌توانیم از هر کلاس، عضو دیگری را هم انتخاب کنیم. مثلاً به جای $[1]_4$ (اعدادی که به پیمانهٔ ۴، باقی‌ماندهٔ ۱ دارند) می‌توانیم بگوییم: $[5]_4$ یا $[13]_4$ یا $[-7]_4$ یا ... .

تست رابطهٔ همنهشتی مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۷ کلاس افراز کرده است. عدد ۱۳۹۴ با کدام عدد در یک کلاس است؟

۱) ۲۱۰۰ ۲) !۱۱۱ ۳) ۲۸۰۸ ۴) 7^{7^7}

پاسخ **گزینهٔ «۳»** صورت سؤال یعنی ۱۳۹۴ به پیمانهٔ ۷ با کدام عدد همنهشت است. خب ببینید:

باقی‌ماندهٔ ۱۳۹۴ بر ۷، یک است. پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که باقی‌مانده‌اش بر ۷، یک باشد. ۲۱۰۰، !۱۱۱ و 7^{7^7} که بر ۷ بخش‌پذیرند، پس ۲۸۰۸ جواب است.

$$\begin{array}{r|l} 1394 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{7} & 199 \\ 69 & \\ \underline{63} & \\ 64 & \\ \underline{63} & \\ 1 & \end{array}$$

استفاده از همنهشتی

برای استفاده از همنهشتی باید خواص آن را یاد بگیرید.

۱ همنهشتی می‌تواند به قضیهٔ تقسیم تبدیل شود و برعکس.

$$a\overset{m}{\equiv} r \Leftrightarrow a = mq + r$$

پس مثلاً از $x\overset{7}{\equiv}2$ نتیجه می‌گیریم $x = 7k+2$، یا رابطهٔ $y=11k+4$ می‌تواند به صورت همنهشتی $y\overset{11}{\equiv}4$ مورد استفاده قرار گیرد.

۲ به جای پیمانه، می‌توان هر مقسوم‌علیه طبیعی و غیر یک آن را قرار داد.

$$a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{d|m} a\overset{d}{\equiv}b$$

پس مثلاً از $x\overset{24}{\equiv}1$ نتیجه می‌گیریم $x\overset{12}{\equiv}1$، $x\overset{8}{\equiv}1$، $x\overset{6}{\equiv}1$، $x\overset{4}{\equiv}1$، $x\overset{3}{\equiv}1$ و $x\overset{2}{\equiv}1$

۳ به جای هر عدد می‌توانیم باقی‌مانده یا همنهشت آن را قرار دهیم.

$$a = mq+b \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$$

پس مثلاً در همنهشتی $17x \overset{5}{\equiv} 26y+39$، چون $17\overset{5}{\equiv}2$، $26\overset{5}{\equiv}1$، $39\overset{5}{\equiv}-1$، داریم $2x\overset{5}{\equiv}y-1$.

تذکر بنابراین به جای مضارب پیمانه می‌توانیم صفر بگذاریم: $mq\overset{m}{\equiv}0$. پس می‌توانیم به هر طرف، هر چندتا مضرب m که دوست داریم اضافه یا کم کنیم: $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a\pm mq \overset{m}{\equiv} b\pm mq'$

این کار با ۳ هدف انجام می‌شود:

الف اگر عدد سمت راست منفی است و ما می‌خواهیم باقی‌مانده را اعلام کنیم، مضرب مناسبی از پیمانه به آن اضافه می‌کنیم تا کوچک‌ترین عدد مثبت ایجاد شود. عدد مثبت کوچک‌تر از پیمانه، باقی‌مانده است.

تست از رابطهٔ $x\overset{7}{\equiv}-20$، باقی‌ماندهٔ x بر ۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۱-

پاسخ **گزینهٔ «۱»** $21 = 3\times 7$ را به طرف راست اضافه می‌کنیم:

$$x\overset{7}{\equiv}-20\overset{7}{\equiv}21-20\overset{7}{\equiv}1 \Rightarrow r=1$$

ب اگر عدد سمت راست خیلی زیاد است، با کم‌کردن مضرب پیمانه، آن را اصلاح (کوچک) می‌کنیم.

تست از همنهشتی $y\overset{9}{\equiv}31$ کدام نتیجه درست است؟

۱) $y\overset{9}{\equiv}1$ ۲) $y\overset{9}{\equiv}3$ ۳) $y\overset{9}{\equiv}2$ ۴) $y\overset{9}{\equiv}4$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** از ۳۱ به اندازهٔ $27 = 3\times 9$ کم می‌کنیم:

$$y\overset{9}{\equiv}31\overset{9}{\equiv}31-27\overset{9}{\equiv}4$$

پ اگر عدد سمت راست به چیزی که ما می‌خواهیم بخش‌پذیر نبود، بخش‌پذیر می‌کنیم. مثلاً در همنهشتی $5x\overset{11}{\equiv}2$، می‌خواهیم عدد سمت راست، یعنی ۲ را به ۵ تقسیم کنیم اما بخش‌پذیر نیست؛ باید 3×11 به آن اضافه کنیم تا بخش‌پذیر شود: $5x\overset{11}{\equiv}2\overset{11}{\equiv}33+2\overset{11}{\equiv}35$

حالا با رعایت قواعد (در چند شمارهٔ بعدی قواعد را می‌بینیم) بر ۵ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div 5} x\overset{11}{\equiv}7$$

پس $x = 11k+7$.

تست کم‌ترین عدد سه‌رقمی x از رابطهٔ $72x\overset{37}{\equiv}1$ کدام است؟

۱) ۱۲۹ ۲) ۱۲۷ ۳) ۱۱۷ ۴) ۱۱۹

پاسخ **گزینهٔ «۱»** اولاً به جای ۷۲، همنهشت آن را قرار می‌دهیم:

$72\overset{37}{\equiv}-2$ (۲×۳۷ را از ۷۲ کم می‌کنیم.)

پس داریم: $-2x\overset{37}{\equiv}1$، حالا باید بر ۲- تقسیم کرد:

$$-2x\overset{37}{\equiv}1\overset{37}{\equiv}1-37\overset{37}{\equiv}-36 \xrightarrow{\div(-2)} x\overset{37}{\equiv}18 \Rightarrow x = 37q+18$$

$$\xrightarrow[q=3]{\text{سه‌رقمی}} x_{min} = 37\times 3+18 = 111+18 = 129$$

تذکر خلاصهٔ کار این شد که با اضافه یا کم کردن مضارب m، عدد سمت راست را اصلاح می‌کنیم.

۴ اعمال جبری مجاز هستند؛ یعنی همنهشتی تقریباً شبیه تساوی است:

$$a \overset{m}{\equiv} b \begin{cases} \xrightarrow{\text{به دو طرف، c را اضافه کنیم}} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ \xrightarrow{\text{از دو طرف، c را کم کنیم}} a-c \overset{m}{\equiv} b-c \\ \xrightarrow{\text{دو طرف را در c ضرب کنیم}} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ \xrightarrow{\text{دو طرف و پیمانه را در c ضرب کنیم}} ac \overset{mc}{\equiv} bc \end{cases}$$

۱۴۳ گزینه ۳ طبق تعریف همنهشتی اگر a و b به پیمانهٔ ۱۲ همنهشت باشند، داریم $۱۲ | a-b \Rightarrow a \overset{۱۲}{\equiv} b$؛ یعنی $a-b$ به ۱۲ می‌خورد.
در گزینه‌ها، اختلاف a و b به ترتیب ۴۳، ۱۱، ۳۶ و ۳۵ است که فقط گزینهٔ (۳) یعنی ۳۶ به ۱۲ می‌خورد.

۱۴۴ گزینه ۲ اول باقی‌ماندهٔ ۲۰۱۴ بر ۱۷ را بیابیم:

$$\begin{array}{r|l} ۲۰۱۴ & ۱۷ \\ \cline{2-2} ۱۷ & ۱۱۸ \\ \hline ۳۱ & \\ ۱۷ & \\ \hline ۱۴۴ & \\ ۱۳۶ & \\ \hline ۸ & \end{array}$$

پس $۲۰۱۴ \overset{۱۷}{\equiv} ۸$؛ یعنی $۲۰۱۴ \in [۸]_{۱۷}$.

۱۴۵ گزینه ۳ از رابطهٔ $a \overset{۱۱}{\equiv} ۳$ می‌توانیم بگوییم باقی‌ماندهٔ a بر ۱۱، برابر با ۳ است، پس $a = ۱۱q+۳$. به بیان دیگر باید $۱۱ | a-۳$؛ بنابراین $a-۳ = ۱۱q$ و به همان نتیجه می‌رسیم. پس باید عدد طبیعی $a < ۱۰۰$ به صورت $۱۱q+۳$ باشد.
$۱ \le ۱۱q+۳ < ۱۰۰$
واضح است که حداقل مقدار q در این رابطه، $q=۰$ و حداکثر آن $q=۸$ است؛ پس ۹ مقدار برای q و در نتیجه ۹ مقدار برای a داریم.

۱۴۶ گزینه ۱ صورت سؤال می‌گوید رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m دارای ۱۵ کلاس است، پس $m=۱۵$ و داریم $۳ \overset{۱۵}{\equiv} ۳۳$؛ پس عدد ۳۳ در این رابطه، با اعداد ۳، ۱۸، ... و $۱۵k+۳$ هم‌کلاس است.

۱۴۷ گزینه ۱ این رابطه، همنهشتی به پیمانهٔ ۳ است، پس دنبال اعداد دورقمی x می‌گردیم که $x \overset{۳}{\equiv} ۵$ و داریم:

$$x \overset{۳}{\equiv} ۵ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow x-۲ = ۳q \Rightarrow x = ۳q+۲$$

چون $x = ۳q+۲$ باید دورقمی شود، q حداقل ۳ و حداکثر ۳۲ است و $۳۲-۳+۱$، یعنی ۳۰ جواب برای x داریم.

۱۴۸ گزینه ۳ صورت سؤال یعنی در کدام پیمانه هیچ‌یک از این اعداد همنهشت نیستند. دقت کنید که $۲ \overset{۳,۶}{\equiv} ۲^۳$؛ پس گزینه‌های (۱) و (۴) درست نیستند. همچنین $۲^۲ \overset{۴}{\equiv} ۰$؛ پس گزینهٔ (۲) هم نیست. بنابراین جواب می‌شود گزینهٔ (۳)؛ ببینید:

$$۰ \overset{۵}{\equiv} ۰ , ۲^۱ \overset{۵}{\equiv} ۲ , ۲^۲ \overset{۵}{\equiv} ۴ , ۲^۳ \overset{۵}{\equiv} ۳ , ۲^۴ \overset{۵}{\equiv} ۱$$

یعنی هیچ‌کدام از این اعداد به پیمانهٔ ۵ با دیگری همنهشت نیست.

تذکر ۱ این عددها ۵تا بودند. طبق اصل لانه‌کبوتری، چون به پیمانهٔ ۴ کلاً ۴ کلاس داریم حتماً دو عدد در یک کلاس قرار می‌گرفتند. در مورد پیمانهٔ ۳ هم همین‌طور است.

تذکر ۲ در حالت کلی اعداد $۰, a, a^۲, \ldots, a^{m-۱}$ زمانی در کلاس‌های مختلف به پیمانهٔ m قرار دارند که $(a,m)=۱$ باشد.

۱۴۹ گزینه ۲ طبق تعریف همنهشتی داریم $m | ۲۳-۱۳ \Rightarrow ۱۳ \overset{m}{\equiv} ۲۳$، پس m باید ۱۰ را بشمارد؛ بنابراین ۱۰ یا ۵ یا ۲ یا $m=۱$ و چون باید پیمانه بزرگ‌تر از یک باشد، پس ۳ عدد طبیعی m داریم.

۱۵۰ گزینه ۳ از همنهشتی $۷۰ \overset{m}{\equiv} ۲۳۹$، نتیجه می‌شود که $m | \underbrace{۲۳۹-۷۰}_{۱۶۹}$، پس m باید ۱ یا ۱۳ یا ۱۶۹ باشد اما m عددی دورقمی است؛ پس $m=۱۳$ و بنابراین داریم:
$a \overset{۱۳}{\equiv} ۷۰$
طبق تعریف همنهشتی $۱۳ | a-۷۰$؛ $a-۷۰ = ۱۳q$؛ پس $a = ۱۳q+۷۰$. برای کم‌ترین مقدار سه‌رقمی a، داریم: $\xrightarrow{q=۳} a_{min} = ۱۳(۳)+۷۰ = ۱۰۹$
مجموع ارقام: $۱+۰+۹=۱۰$

۱۵۱ گزینه ۲ طبق خواص همنهشتی اجازه داریم به هر طرف، هر مضرب دلخواه از پیمانه را اضافه کنیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mq \overset{m}{\equiv} b \pm mq'$$

پس در این‌جا برای رسیدن به باقی‌ماندهٔ مناسب بر ۱۸ (طبق الگوریتم تقسیم $۰ \le r < ۱۸$) باید به -۶۵، مضرب ۱۸ اضافه کرد:

$۴ \times ۱۸ = ۷۲$

$$a \overset{۱۸}{\equiv} -۶۵ \overset{۱۸}{\equiv} ۷۲-۶۵ \overset{۱۸}{\equiv} ۷ \Rightarrow r=۷$$

۱۵۲ گزینه ۱ طبق صورت سؤال $A \overset{۳۷}{\equiv} ۲۳$، پس داریم: $۲A \overset{۳۷}{\equiv} \underbrace{۲(۲۳)}_{۴۶}$ و در نتیجه:

$$۲A-۳ \overset{۳۷}{\equiv} ۴۶-۳ \overset{۳۷}{\equiv} ۴۳$$

اما ۴۳ به عنوان باقی‌مانده مناسب نیست (چون باید $۰ \le r < ۳۷$ باشد)، پس یک پیمانه (۳۷) از آن کم می‌کنیم:

$$۲A-۳ \overset{۳۷}{\equiv} ۴۳-۳۷ \overset{۳۷}{\equiv} ۶$$

۱۵۳ گزینه ۴ از !۴ به بعد در حاصل‌ضرب $n!$، ۳×۴ وجود دارد، پس $n! \underset{n\ge۴}{\overset{۱۲}{\equiv}} ۰$؛ بنابراین:

$$۱!+۲!+\cdots+۱۳۹۳! \overset{۱۲}{\equiv} ۱!+۲!+۳!+\underbrace{۰}_{\text{۴! به بعد}} \overset{۱۲}{\equiv} ۱+۲+۶ \overset{۱۲}{\equiv} ۹$$

۱۵۴ گزینه ۴ طبق صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$a = ۷k+۳۰ \Rightarrow a \overset{۷}{\equiv} ۳۰$$

البته ۳۰ به عنوان باقی‌مانده بر ۷، مناسب نیست.

$-۴\times۷=-۲۸$

$$a \overset{۷}{\equiv} ۳۰ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

پس داریم:

$$a^۲+a^۳+a^۴+a^۵ \overset{۷}{\equiv} ۲^۲+۲^۳+۲^۴+۲^۵$$

$$\overset{۷}{\equiv} ۴+۸+۱۶+۳۲ \overset{۷}{\equiv} ۶۰ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

باقی‌مانده بر ۷

تذکر در هر مرحله، اجازه داریم به جای هر عدد، باقی‌ماندهٔ آن بر پیمانه را قرار دهیم.
البته هیچ فرقی ندارد که بگوییم مضرب مناسبی از پیمانه را به طرف دوم اضافه می‌کنیم:

-۸×۷

$$A \overset{۷}{\equiv} ۶۰ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

۱۵۵ گزینه ۴ چون خواستهٔ سؤال باقی‌مانده بر ۱۳ است، تساوی را به همنهشتی به پیمانهٔ ۱۳ تبدیل می‌کنیم.

تذکر هر تساوی را می‌توان به همنهشتی تبدیل کرد:

$$x = y \Rightarrow x \overset{m}{\equiv} y$$ (m هر عدد طبیعی دلخواه است)

$$\Rightarrow 64a - 26b = 40 \Rightarrow 64a - 26b \overset{13}{\equiv} 40$$

به جای ۶۴، ۲۶ و ۴۰، همنهشت آن‌ها را به پیمانهٔ ۱۳ قرار بدهیم:

$$\xrightarrow{64\overset{13}{\equiv}-1,\ 26\overset{13}{\equiv}0,\ 40\overset{13}{\equiv}1} -1\times a - 0\times b \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow -a \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow a \overset{13}{\equiv} -1$$

پس به پیمانهٔ ۱۳، عدد a با ۱- همنهشت است. حالا خواستهٔ سؤال:

$$A = a^{29} + 2a^2 + 4 \overset{13}{\equiv} (-1)^{29} + 2(-1)^2 + 4 \overset{13}{\equiv} -1+2+4 \overset{13}{\equiv} 5 \Rightarrow r = 5$$

۱۵۶ گزینه ۱ اگر a زوج باشد، a^2 مضرب ۴ است و a^2+2 به ۴ بخش‌پذیر نخواهد بود (a^2+2 به صورت $4k+2$ است). اگر a فرد باشد، a^2 به صورت $4k+1$ است و a^2+2 حتماً $4k+3$ می‌شود و به ۴ بخش‌پذیر نمی‌شود؛ پس هرگز امکان ندارد و یا به عبارتی:

$$a \overset{4}{\equiv} 0 \text{ یا } 2 \text{ یا } \pm1 \Rightarrow a^2 \overset{4}{\equiv} 0 \text{ یا } 1 \Rightarrow a^2+2 \overset{4}{\equiv} 2 \text{ یا } 3$$

یعنی a^2+2 به پیمانهٔ ۴، هیچ‌وقت صفر نمی‌شود.

۱۵۷ گزینه ۴ عدد طبیعی a به پیمانهٔ ۷ با یکی از اعداد $0, \pm1, \pm2$ یا ±3 همنهشت است. هر حالت را بررسی کنیم:

بر ۷

الف) $a \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow a^2+15 \overset{7}{\equiv} 0+1 \overset{7}{\equiv} 1$

ب) $a \overset{7}{\equiv} \pm1 \Rightarrow a^2+15 \overset{7}{\equiv} 1+1 \overset{7}{\equiv} 2$

پ) $a \overset{7}{\equiv} \pm2 \Rightarrow a^2+15 \overset{7}{\equiv} 4+1 \overset{7}{\equiv} 5$

ت) $a \overset{7}{\equiv} \pm3 \Rightarrow a^2+15 \overset{7}{\equiv} 9+1 \overset{7}{\equiv} 3$

پس باقی‌ماندهٔ a^2+15 بر ۷، ۴ نشد.

۱۵۸ گزینه ۴ اول بسط دهگانی را بنویسیم:

$$\overline{aba} \overset{7}{\equiv} \underbrace{100a + 10b}_{100\overset{7}{\equiv}2,\ 10\overset{7}{\equiv}3} + a \overset{7}{\equiv} 2a + 3b + a \overset{7}{\equiv} 3(a+b)$$

حالا این عدد باید به ۷ بخورد؛ پس $3(a+b) \overset{7}{\equiv} 0$، $a+b$ باید به ۷ بخورد (۳ که به ۷ نمی‌خورد!)؛ بنابراین $a+b$ می‌تواند ۷ یا ۱۴ باشد (دقت کنید! $1 \le a \le 9$ و $0 \le b \le 9$ است).

۱۵۹ گزینه ۱ با بسط دهگانی داریم:

$$\overline{ab} = \underbrace{10a}_{10\overset{13}{\equiv}-3} + b \overset{13}{\equiv} -3a + b \overset{13}{\equiv} 0$$

پس داریم $b \overset{13}{\equiv} 3a$. حالا $a^3 - b^3$ را می‌خواهیم:

$$a^3 - \underbrace{b^3}_{b\overset{13}{\equiv}3a} \overset{13}{\equiv} a^3 - (3a)^3 \overset{13}{\equiv} a^3 - 27a^3 \overset{13}{\equiv} -26a^3 \overset{13}{\equiv} 0$$

پس همواره $a^3 - b^3$ مضرب ۲۶ است و به ۱۳ می‌خورد؛ یعنی باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۳ همواره صفر است.

۱۶۰ گزینه ۱ طبق خاصیت همنهشتی می‌توانیم به جای m، هر مقسوم‌علیه آن را قرار دهیم:

$$a \overset{99}{\equiv} 25 \xrightarrow{9|99} a \overset{9}{\equiv} 25$$

البته ۲۵ باقی‌ماندهٔ مناسبی نیست. به جای ۲۵ به پیمانهٔ ۹، باقی‌ماندهٔ آن بر ۹ را قرار می‌دهیم:

$$a \overset{9}{\equiv} 25-18 \overset{9}{\equiv} 7 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 7$$

۱۶۱ گزینه ۱ از همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$، با ضرب در عدد صحیح و مثبت c، دوتا نتیجه می‌گیریم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ ac \overset{mc}{\equiv} bc \end{cases}$$

یعنی دو طرف را می‌توانیم در c ضرب کنیم و اگر خواستیم، پیمانه هم در c ضرب می‌شود.

$$a \overset{6}{\equiv} 20 \xrightarrow{\times 20} 20a \overset{20\times6}{\equiv} 20\times20 \Rightarrow 20a \overset{120}{\equiv} 400$$

البته ما باقی‌ماندهٔ 20a را بر ۱۵ می‌خواهیم. چون ۱۵|۱۲۰، به جای ۱۲۰ می‌توانیم ۱۵ قرار دهیم:

$$20a \overset{15}{\equiv} 400 \overset{15}{\equiv} \underbrace{10}_{\text{باقی‌مانده بر ۱۵}}$$

پس باقی‌ماندهٔ 20a بر ۱۵، برابر با ۱۰ است.

برای حل سؤال‌های ۱۶۲ و ۱۶۳ بخوانید

می‌دانیم که با گذشت ۷ روز، دوباره به همان روز در هفته می‌رسیم. مثلاً اگر امروز دوشنبه است، ۷ روز بعد هم دوشنبه است، ۱۴ روز بعد هم دوشنبه است ۳۵ روز پیش هم دوشنبه بوده. این یعنی اضافه‌کردن یا کم‌کردن 7k روز، تغییری ایجاد نمی‌کند. پس اگر بخواهیم از روی یک روز مشخص بفهمیم روز دیگری چند شنبه است، باید ببینیم چند روز گذشته و باقی‌ماندهٔ آن را بر ۷ در نظر بگیریم. مثلاً اگر هشتم فروردین جمعه باشد، اول مهر چند شنبه است؟

از هشتم فروردین تا اول مهر $23+31+31+31+31+31+1$ روز سپری شده. باقی‌ماندهٔ آن بر ۷ می‌شود:

$$1+5\times3+2 \overset{7}{\equiv} 18 \overset{7}{\equiv} 4$$

پس انگار ۴ روز سپری شده و اول مهر باید سه‌شنبه باشد:

جمعه → ش → ی → د → س

۱۶۲ گزینه ۱ از چهارم دی تا ۲۸ اسفند، $\underset{\text{اسفند}}{28} + \underset{\text{بهمن}}{30} + \underset{\text{دی}}{26} = 84$ روز داریم. چون ۸۴ مضرب ۷ است، باقی‌مانده‌ای نداریم و ۲۸ اسفند هم همان سه‌شنبه است.

۱۶۳ گزینه ۱ از بیستم فروردین تا یکم بهمن، $287 = \underset{\text{بهمن}}{1} + \underset{\text{مهر تا دی}}{4\times30} + \underset{\text{اردیبهشت تا شهریور}}{5\times31} + \underset{\text{فروردین}}{11}$ روز می‌گذرد که مضرب ۷ است، پس بیستم فروردین و یکم بهمن، روز یکسانی هستند (هر دو دوشنبه‌اند)؛ بنابراین شنبهٔ اول در بهمن‌ماه، روز ۶ بهمن و چهارمین شنبه ۲۷ بهمن است.

برای حل سؤال‌های ۱۶۴ تا ۱۷۱ بخوانید

اگر طرفین (یعنی طرف چپ و راست) دو همنهشتی یکی باشند، می‌توانیم آن‌ها را یکی کنیم و ک.م.م پیمانه‌ها را بنویسیم:

$$\begin{rcases} a \overset{m_1}{\equiv} b \\ a \overset{m_2}{\equiv} b \end{rcases} \Rightarrow a \overset{[m_1,m_2]}{\equiv} b$$

این برای چند همنهشتی هم برقرار است؛ پس مثلاً از $x\overset{6}{\equiv}1$ و $x\overset{4}{\equiv}1$ نتیجه می‌شود $x\overset{[6,4]}{\equiv}1$ یا $x\overset{12}{\equiv}1$.

تست از دو رابطهٔ $a\overset{6}{\equiv}1$ و $a\overset{5}{\equiv}3$، باقی‌ماندهٔ a بر ۳۰ کدام است؟

۱) مضرب ۳ ۲) مربع کامل ۳) عدد اول ۴) مضرب ۷

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اگر طرف‌های راست یکی بود به راحتی دو همنهشتی را یکی می‌کردیم. اما الان خودمان باید طرف‌های راست را اصلاح کنیم:

$$a\overset{6}{\equiv}1\equiv 12+1\equiv 13$$

حالا خوب شد، پس داریم: $a\overset{[6,5]}{\equiv}13$ یعنی $a\overset{30}{\equiv}13$. بنابراین باقی‌ماندهٔ a بر ۳۰ عددی اول است.

$$a\overset{5}{\equiv}3\equiv 10+3\equiv 13$$

تست از روابط $a\overset{12}{\equiv}3$ و $a\overset{14}{\equiv}5$، باقی‌ماندهٔ a بر ۴۲ کدام است؟

۱) زوج ۲) مضرب ۱۱ ۳) مربع کامل ۴) عدد اول

پاسخ **گزینهٔ «۲»** دقت کنید که ۴۲، «ک. م. م» ۱۲ و ۱۴ نیست، پس می‌توانیم با پیمانه‌های کم‌تری کار کنیم؛ مثلاً ۶ و ۷، پس می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{12}{\equiv}3 \xrightarrow{6|12} a\overset{6}{\equiv}3\equiv 33 \\ a\overset{14}{\equiv}5 \xrightarrow{7|14} a\overset{7}{\equiv}5\equiv 33 \end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{42}{\equiv}33$$

۱۶۴ گزینه ۲ طرف راست همنهشتی‌ها باید یکسان شوند تا بتوانیم از قاعدهٔ «ک.م.م» پیمانه‌ها برویم. سعی می‌کنیم مضارب مناسب پیمانه را اضافه یا کم کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{8}{\equiv}3\equiv 3-8\equiv -5 \\ a\overset{7}{\equiv}2\equiv 2-7\equiv -5 \end{array}\right. \Rightarrow a\overset{[8,7]}{\equiv}-5 \Rightarrow a\overset{56}{\equiv}-5$$

البته ۵− به عنوان باقی‌مانده قبول نیست و ۵۶تا به آن می‌افزاییم: $a\overset{56}{\equiv}56-5\overset{56}{\equiv}51$

تذکر باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که در فرض‌های سؤال صدق کند، یعنی عددی که بر ۸ و ۷ به ترتیب باقی‌مانده‌های ۳ و ۲ داشته باشد.

۱۶۵ گزینه ۱ چون نهایتاً x را به پیمانهٔ ۳۶ می‌خواهیم و $36=[4,9]$، اول پیمانهٔ ۸۱ را به ۹ کاهش می‌دهیم:

$$x\overset{81}{\equiv}-45 \xrightarrow{9|81} x\overset{9}{\equiv}-45\equiv 0 \qquad x\overset{4}{\equiv}23\equiv 3$$

عددی جواب است که بر ۹ و ۴ دارای باقی‌مانده‌های ۰ و ۳ باشد که فقط ۲۷ این‌طور است.

تذکر با روابط $x\overset{9}{\equiv}0$ و $x\overset{4}{\equiv}3$، یک همنهشتی به پیمانهٔ ۳۶ می‌خواهیم:

$$\left\{\begin{array}{l} x\overset{9}{\equiv}0\equiv 27 \\ x\overset{4}{\equiv}3\equiv 27 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{ک.م.م}} x\overset{36}{\equiv}27$$

یعنی x به پیمانهٔ ۳۶ با ۲۷ همنهشت است.

۱۶۶ گزینه ۲ طبق صورت سؤال، $a\overset{3}{\equiv}1$ و $a\overset{5}{\equiv}3$ است. طرف راست‌ها را به راحتی یکسان می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{3}{\equiv}1\equiv -2 \\ a\overset{5}{\equiv}3\equiv -2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{[3,5]}{\equiv}-2 \Rightarrow a\overset{15}{\equiv}-2$$

پس این اعداد باید $15q-2$ باشند.

حداقل مقدار a به ازای $q=7$ به دست می‌آید $(15\times7-2=103)$ و حداکثر آن به ازای $q=66$ $(15\times66-2=988)$؛ پس داریم $7\leq q\leq 66$ و بنابراین ۶۰ مقدار برای q داریم.

۱۶۷ گزینه ۱

روش اول طبق صورت سؤال، $a\overset{7}{\equiv}3$ و $a\overset{11}{\equiv}4$ است؛ پس گزینه‌ای مناسب است که بر ۱۱ دارای باقی‌ماندهٔ ۴ باشد که فقط ۵۹ این‌طور است.

روش دوم طرف راست‌ها را یکی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{7}{\equiv}3\equiv 59 \\ a\overset{11}{\equiv}4\equiv 59 \end{array}\right. \Rightarrow a\overset{[7,11]}{\equiv}59 \Rightarrow a\overset{77}{\equiv}59$$

۱۶۸ گزینه ۱ طبق صورت سؤال داریم $a\overset{9}{\equiv}5$ و $a\overset{7}{\equiv}6$.

با کمی جستوجو، طرف‌های راست را یکسان می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{9}{\equiv}5\equiv 36+5\equiv 41 \\ a\overset{7}{\equiv}6\equiv 35+6\equiv 41 \end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{[9,7]}{\equiv}41 \Rightarrow a\overset{63}{\equiv}41$$

یعنی باقی‌ماندهٔ a بر ۶۳ برابر با ۴۱ است که در میان گزینه‌ها، «عدد اول» مناسب است.

۱۶۹ گزینه ۲ وقتی باقی‌ماندهٔ عدد بر ۴ و ۵، برابر ۱ است، باقی‌ماندهٔ آن بر $20=[4,5]$ هم یک است؛ پس داریم:

x مضرب ۱۱ است $\Rightarrow x\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow x\overset{11}{\equiv}121$

باقی‌ماندهٔ x بر ۲۰ برابر یک است $\Rightarrow x\overset{20}{\equiv}1 \Rightarrow x\overset{20}{\equiv}121$

$$\Rightarrow x\overset{[11,20]}{\equiv}121 \Rightarrow x\overset{220}{\equiv}121 \Rightarrow x=220q+121$$

به ازای $q=0,1,2,3$ اعداد سه‌رقمی داریم؛ یعنی ۴تا.

۱۷۰ گزینه ۲ باید طرف راست همنهشتی‌ها را یکسان کنیم، اما اول دقت کنید که ۳۹، «ک.م.م» ۹ و ۱۳ نیست، بلکه پیمانهٔ ۳ به جای ۹ کافی است. پس از $a\overset{9}{\equiv}5$ نتیجه می‌گیریم $a\overset{3}{\equiv}5\overset{3}{\equiv}2$ و با این دو معادله کار می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} a\overset{3}{\equiv}2 \\ a\overset{13}{\equiv}7 \end{array}\right.$$

فقط ۲۰ بر ۱۳ باقی‌ماندهٔ ۷ دارد و سایر گزینه‌ها نمی‌خورند. برای حل تشریحی باید طرف راست‌ها را یکی کنیم:

$$a\overset{3}{\equiv}2\equiv 20 \qquad a\overset{13}{\equiv}7\equiv 20$$

پس: $a\overset{39}{\equiv}20$

۱۷۱ گزینه ۱ طبق صورت سؤال داریم: $a\overset{12}{\equiv}5\,,\ a\overset{15}{\equiv}8\,,\ a\overset{32}{\equiv}25$

با کمی دقت، اگر از طرف‌های راست یک پیمانه برداریم، همگی -7 می‌شوند:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{12}{\equiv}5-12\overset{12}{\equiv}-7 \\ a\overset{15}{\equiv}8-15\overset{15}{\equiv}-7 \\ a\overset{32}{\equiv}25-32\overset{32}{\equiv}-7 \end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{[12,15,32]}{\equiv}-7$$

«ک.م.م» ۱۲، ۱۵ و ۳۲ هم به تجزیه نیاز دارد:

$$[2^2\times3, 3\times5, 2^5]=2^5\times3\times5=480$$

پس $a\overset{480}{\equiv}-7$ و بنابراین $a=480q-7$ و داریم:

$$\xrightarrow{q=1} a_{min}=473 \xrightarrow{\text{رقم وسط}} 7$$

فصل ۱ درس‌نامهٔ ۳ نظریهٔ اعداد
تقسیم و معادلهٔ همنهشتی

در اعمال جبری حرفی از تقسیم نزدیم. حالا به تقسیم بپردازیم؛ اگر بخواهیم دو طرف همنهشتی را بر c تقسیم کنیم حتماً باید هر دو طرف بخش‌پذیر باشند. اصلاً می‌نویسیم $ac\overset{m}{\equiv}bc$ تا مطمئن باشیم که دو طرف به c می‌خورند. برای تقسیم ثابت می‌شود که باید پیمانه را بر (m,c) یعنی بر ب.م.م خودش و c تقسیم کنیم:

$$ac\overset{m}{\equiv}bc \xrightarrow{\div c} a\overset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv}b$$

مثلاً: $12x\overset{50}{\equiv}8 \xrightarrow{\div 4} 3x\overset{\frac{50}{(50,4)}}{\equiv}2 \xrightarrow{(50,4)=2} 3x\overset{25}{\equiv}2$

حالا دوباره می‌خواهیم همین $3x\overset{25}{\equiv}2$ را به ۳ تقسیم کنیم و چون ۲ به ۳ نمی‌خورد، باید آن را اصلاح کرد:

$$3x\overset{25}{\equiv}2\overset{25}{\equiv}27 \xrightarrow[(25,3)=1]{\div 3} x\overset{25}{\equiv}9$$

دقت کردید؟ وقتی طرفین را بر عددی تقسیم می‌کنیم که نسبت به پیمانه اول است، پیمانه عوض نمی‌شود.

تست از رابطهٔ همنهشتی $12a\overset{9}{\equiv}18b$ کدام نتیجه درست است؟

۱) $6a\overset{9}{\equiv}9b$ ۲) $4a\overset{9}{\equiv}6b$ ۳) $2a\overset{9}{\equiv}3b$ ۴) $a\overset{9}{\equiv}0$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به گزینه‌ها:

$$12a\overset{9}{\equiv}18b\left\{\begin{array}{l} \xrightarrow[(2,9)=1]{\div 2} 6a\overset{\frac{9}{1}}{\equiv}9b \Rightarrow 6a\overset{9}{\equiv}9b \\ \xrightarrow[(3,9)=3]{\div 3} 4a\overset{\frac{9}{3}}{\equiv}6b \Rightarrow 4a\overset{3}{\equiv}6b \\ \xrightarrow[(6,9)=3]{\div 6} 2a\overset{\frac{9}{3}}{\equiv}3b \Rightarrow 2a\overset{3}{\equiv}3b \end{array}\right.$$

پس گزینهٔ (۱) درست است. دلیل نادرستی گزینهٔ (۴) را هم می‌بینیم:

$$12a\overset{9}{\equiv}18b \xrightarrow[\text{۱۸b به ۹ می‌خورد}]{18b\overset{9}{\equiv}0} 12a\overset{9}{\equiv}0 \xrightarrow[(12,9)=3]{\div 12} a\overset{\frac{9}{3}}{\equiv}0 \Rightarrow a\overset{3}{\equiv}0$$

یک ویژگی کم‌کاربرد هم یاد بگیرید (تمرین کتاب درسی است).

از بسط دوجمله‌ای ثابت می‌شود که:

$$(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

$$(a-b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+(-b)^n$$

۱۷۲ گزینه ۱ اگر طرفین همنهشتی را بر عدد c تقسیم کنیم، پیمانه بر «ب.م.م» خودش و c تقسیم می‌شود:

$$2a\overset{36}{\equiv}2b \xrightarrow{\div 2} a\overset{\frac{36}{(2,36)}}{\equiv}b \Rightarrow a\overset{18}{\equiv}b$$

پس گزینهٔ (۱) نادرست و گزینهٔ (۲) درست است. گزینه‌های (۳) و (۴) را هم تأیید کنیم:

۳: $a\overset{18}{\equiv}b \xrightarrow{\times 2} 2a\overset{18}{\equiv}2b$

۴: $a\overset{18}{\equiv}b \xrightarrow{9|18} a\overset{9}{\equiv}b$

پس نتیجه‌گیری می‌کنیم گزینهٔ (۱) نادرست است.

۱۷۳ گزینه ۴ خیلی واضح است که باقی‌ماندهٔ ۱۸b بر ۹ همیشه صفر است، پس این رابطه هیچ نظری در مورد باقی‌ماندهٔ b بر ۳ یا ۹ نمی‌تواند بدهد؛ یعنی گزینهٔ (۴) درست نیست.

دلیل درستی سایر گزینه‌ها را هم ببینیم:

۱: $12a\overset{9}{\equiv}18b \xrightarrow[(9,6)=3]{\div 6} 2a\overset{\frac{9}{3}}{\equiv}3b \Rightarrow 2a\overset{3}{\equiv}3b$

۲ و ۳: $2a\overset{3}{\equiv}3b\left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{\times 2} 6b\overset{3}{\equiv}4a \\ \xrightarrow{3b\overset{3}{\equiv}0} 2a\overset{3}{\equiv}0 \xrightarrow{\div 2} a\overset{3}{\equiv}0 \end{array}\right.$

۱۷۴ گزینه ۳

روش اول دو طرف را بر ۳ تقسیم کنیم: $9a\overset{18}{\equiv}6b \Rightarrow 3a\overset{6}{\equiv}2b$

دقت کردید؟ وقتی دو طرف را بر عددی تقسیم می‌کنیم و پیمانه هم بر آن عدد بخش‌پذیر است، انگار هر سه بخش (طرف راست، طرف چپ و پیمانه) بر آن عدد تقسیم می‌شوند؛ پس گزینهٔ (۴) تأیید شد. حالا از همنهشتی به پیمانهٔ ۶، می‌خواهیم پیمانه‌های ۲ و ۳ بگیریم.

$$3a\overset{6}{\equiv}2b \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \xrightarrow{2|6} 3a\overset{2}{\equiv}2b \xrightarrow[2b\overset{2}{\equiv}0]{3\overset{2}{\equiv}1} a\overset{2}{\equiv}0 & :1 \\ \xrightarrow{3|6} 3a\overset{3}{\equiv}2b \xrightarrow{3a\overset{3}{\equiv}0} 2b\overset{3}{\equiv}0 \xrightarrow{\div 2} b\overset{3}{\equiv}0 & :2 \end{array}\right.$$

اما گزینهٔ (۳) قابل نتیجه‌گیری نیست.

روش دوم به ازای $a=2$ و $b=3$ رابطهٔ فرض سؤال و نتایج گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند اما گزینهٔ (۳) درست نیست.

۱۷۵ گزینه ۲ **روش اول** اصلاً به صورت سؤال نگاه نکنید. فرض کنید گزینهٔ (۱) درست است.

$$1:\ a\overset{7}{\equiv}3\left\{\begin{array}{ll} \xrightarrow{\times 2} 2a\overset{7}{\equiv}6\overset{7}{\equiv}-1 & :3 \\ \xrightarrow{\times 3} 3a\overset{7}{\equiv}9\overset{7}{\equiv}2 & :4 \end{array}\right.$$

پس اگر گزینهٔ (۱) درست باشد، گزینه‌های (۳) و (۴) هم درست‌اند. حالا سؤال پرسیده کدام نادرست است؟ خب گزینهٔ (۲) نادرست است! متوجه شدید؟!

روش دوم: باید دو طرف را بر ۳۶ تقسیم کرد اما ۱۹۲ به ۳۶ نمی‌خورد. خب اشکال ندارد، فعلاً بر ۱۲ تقسیم کنیم:

$$36a \overset{84}{\equiv} 192 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌شوند}]{\text{همگی بر ۱۲}} 3a \overset{7}{\equiv} 16$$

و از رابطهٔ $3a \overset{7}{\equiv} 16$، نتایج گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) را به دست می‌آوریم:

۱: $3a \overset{7}{\equiv} 16 \Rightarrow 3a \overset{7}{\equiv} 16-7 \overset{7}{\equiv} 9 \xrightarrow{\div 3} a \overset{7}{\equiv} 3$

۳: $3a \overset{7}{\equiv} 16 \xrightarrow{\times 2} 2a \overset{7}{\equiv} 6 \overset{7}{\equiv} -1$

$3a \overset{7}{\equiv} 16 \xrightarrow{16 \overset{7}{\equiv} 2} 3a \overset{7}{\equiv} 2$

فصل ۱ — درس‌نامه ۱۴ — نظریهٔ اعداد: معادلهٔ همنهشتی

معادلهٔ $ax \overset{b}{\equiv} c$ یک معادلهٔ همنهشتی است (البته می‌توانیم معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ را با در نظر گرفتن همنهشتی به پیمانهٔ b، به این شکل درآوریم) شرط جواب‌داشتن آن $(a,b)|c$ است.

پس $7x \overset{11}{\equiv} 2$ جواب دارد $(7,11)|2$، اما $14x \overset{6}{\equiv} 1$ جواب ندارد چون $(14,6) \nmid 1$ و $ax \overset{16}{\equiv} 3$ وقتی جواب دارد که a فرد باشد برای حل آن، اول تا حد ممکن به جای a و c، همنهشت‌های کوچک‌تری قرار می‌دهیم و بعد دو طرف را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم. اگر طرف راست اجازهٔ تقسیم نداد، خودمان با اضافه‌کردن مضارب b (پیمانه) درستش می‌کنیم:

$$17x \overset{5}{\equiv} 21 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 1 \overset{5}{\equiv} 6 \xrightarrow{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x=5k+3$$

$$7x \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow -4x \overset{11}{\equiv} 1 \overset{11}{\equiv} 12 \xrightarrow{\div(-4)} x \overset{11}{\equiv} -3 \Rightarrow x=11k-3$$

$$15x \overset{40}{\equiv} 100 \Rightarrow 15x \overset{40}{\equiv} 60 \xrightarrow{\div 15} x \overset{8}{\equiv} 4 \Rightarrow x=8k+4$$

به آخری دقت کردید؟ با تقسیم دو طرف بر ۱۵، پیمانه هم بر $(40,15)=5$ تقسیم می‌شود. در دوتای اول این «ب.م.م» ۱ بود و تقسیم‌شدن پیمانه را ندیدیم.

۱۷۶ گزینه ۱: شرط وجود جواب در معادلهٔ $ax \overset{b}{\equiv} c$ این بود که $(a,b)|c$ که این شرط در گزینهٔ (۱) برقرار نیست $(51,6)=3 \nmid 1$. ولی در سایر گزینه‌ها $2|18$ و $3|15$ و $6|30$ درست است.

۱۷۷ گزینه ۴: شرط وجود جواب در معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{b}{\equiv} c$ این است که $(a,b)|c$؛ پس باید $(a,90)|50$. البته ما می‌خواهیم معادله جواب نداشته باشد، یعنی $(a,90) \nmid 50$. به تجزیه‌ها نگاه کنید: $(a,3^2\times2\times5) \nmid 5^2\times2$

خب برای این‌که حاصل «ب.م.م»، ۵۰ را عاد نکند، باید حتماً a مضرب ۳ باشد تا «ب.م.م» ۳ را داشته باشد؛ پس در گزینه‌ها $a=60$ مناسب است.

۱۷۸ گزینه ۳: باید $(a,60)|20$. به تجزیه‌ها دقت کنیم:

$$(a,2^2\times3\times5)|2^2\times5$$

این اتفاق زمانی می‌افتد که a عامل ۳ را نداشته باشد؛ پس باید $(a,3)=1$ باشد.

۱۷۹ گزینه ۴: باید $\underbrace{(42,15)}_{3}|5a$، یعنی باید 5a به ۳ بخش‌پذیر باشد

اما ۵ به ۳ نمی‌خورد، پس باید a بر ۳ بخش‌پذیر باشد و $a=9$ مناسب است.

۱۸۰ گزینه ۱: رسیدن به گزینهٔ (۱) کار سختی نیست:

$$4x \overset{6}{\equiv} 2 \xrightarrow[(2,6)=2]{\div 2} 2x \overset{3}{\equiv} 1$$

۲: که اساساً جواب ندارد، چون $(2,6) \nmid 1$.

۳: مربع‌کردن دو طرف، جواب‌های اضافی می‌آورد و تازه اجازهٔ مربع‌کردن پیمانه را هم نداشتیم.

۴: هم همیشه برقرار است، چون $0 \overset{6}{\equiv} 6$، پس جواب‌های آن کل $\mathbb{Z}$ است.

۱۸۱ گزینه ۱: باید دو طرف را بر ۳ تقسیم کنیم اما ۲ بر ۳ تقسیم نمی‌شود، پس اول مضارب مناسبی از پیمانه را اضافه می‌کنیم تا بخش‌پذیر بشود:

$$3x \overset{7}{\equiv} 2 \overset{7}{\equiv} 7+2 \overset{7}{\equiv} 9 \xrightarrow[(7,3)=1]{\div 3} x \overset{7}{\equiv} 3$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ x بر ۷، ۳ است.

۱۸۲ گزینه ۱: اول $-3a$ را به طرف چپ بیاوریم: $9a+3a \overset{20}{\equiv} 36$

$$\Rightarrow 12a \overset{20}{\equiv} 36 \xrightarrow[(12,20)=4]{\div 12} a \overset{\frac{20}{4}}{\equiv} 3 \Rightarrow a \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow a=5k+3$$

۱۸۳ گزینه ۴: اول x را آزاد کنیم. برای این‌که دو طرف را بر ۷ تقسیم کنیم، لازم است مضرب مناسبی از ۱۱ به ۲ اضافه یا کم کنیم:

$$7x \overset{11}{\equiv} 2 \overset{11}{\equiv} 33+2 \overset{11}{\equiv} 35 \xrightarrow[(7,11)=1]{\div 7} x \overset{11}{\equiv} 5$$

به این صورت هم می‌توانیم بگوییم:

$$-4x \overset{11}{\equiv} 2 \overset{11}{\equiv} -20 \xrightarrow[(-4,11)=1]{\div(-4)} x \overset{11}{\equiv} 5$$

تذکر: شاید بهتر بود بگوییم $\underbrace{7x \overset{11}{\equiv} -4x}_{7 \overset{11}{\equiv} -4} \overset{11}{\equiv} 2$ و بعد دو طرف را بر -4 تقسیم کنیم:

پس به هر روشی، باقی‌ماندهٔ x بر ۱۱، ۵ است و داریم:

$$x \overset{11}{\equiv} 5 \Rightarrow x=11q+5$$

$$\xrightarrow[q=8]{\text{دورقمی بزرگ}} x_{max}=11\times8+5=93 \Rightarrow \text{جمع ارقام}: 12$$

۱۸۴ گزینه ۴: عجله نکنید! لازم نیست دو طرف را بر ۱۳ تقسیم کنیم. ببینید:

$$13a \overset{9}{\equiv} 11 \xrightarrow{13 \overset{9}{\equiv} 4} 4a \overset{9}{\equiv} 11 \overset{9}{\equiv} 20 \xrightarrow[(4,9)=1]{\div 4} a \overset{9}{\equiv} 5$$

پس $a=9k+5$ و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a به ازای $k=11$ می‌شود $99+5=104$ که رقم یکانش ۴ است.

۱۸۵ گزینه ۲: اول به جای ۳۰۰، باقی‌مانده‌اش را قرار دهیم:

$$7x \overset{13}{\equiv} 300 \xrightarrow{300 \overset{13}{\equiv} 1} 7x \overset{13}{\equiv} 1$$

حالا باید بر ۷ تقسیم کرد:

$$7x \overset{13}{\equiv} 1 \overset{13}{\equiv} 13+1 \overset{13}{\equiv} 14 \xrightarrow[(7,13)=1]{\div 7} x \overset{13}{\equiv} 2$$

۱۸۶ گزینه ۳: طبق صورت سؤال، $131 \overset{p}{\equiv} 82$؛ پس داریم: $p|\underbrace{131-82}_{49}$

و در نتیجه $p|49$. حالا چون p عددی اول است، مجبوریم $p=7$ انتخاب کنیم؛

حالا داریم: $7a+4 \overset{p}{\equiv} 4a+7 \Rightarrow 3a \overset{p}{\equiv} 3 \xrightarrow{p=7} 3a \overset{7}{\equiv} 3$

$\xrightarrow[(3,7)=1]{\div 3} a \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow a = 7k+1$

پس کم‌ترین عدد سه‌رقمی a به ازای $k = 15$ برابر است با:

$a_{min} = 7(15)+1 = 105+1 = 106$

۱۸۷ گزینه ۲ طبق صورت سؤال، $7a+4 \overset{23}{\equiv} 19$؛ پس داریم:

$$7a \overset{23}{\equiv} 19-4 = 15 \overset{23}{\equiv} \overset{3\times23}{69}+15 \overset{23}{\equiv} 84 \xrightarrow[(23,7)=1]{\div 7} a \overset{23}{\equiv} 12$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۳ برابر با ۱۲ است.

۱۸۸ گزینه ۳ از رابطهٔ همنهشتی $26a \overset{18}{\equiv} 12$، اول به جای ۲۶ به پیمانهٔ ۱۸، عدد ۸ را می‌گذاریم:

$$26a \overset{18}{\equiv} 8a \overset{18}{\equiv} 12$$

$$26 \overset{18}{\equiv} 8$$

حالا باید بر ۸ تقسیم کنیم اما ۱۲ بخش‌پذیر نیست، پس $2\times18=36$ به آن اضافه می‌کنیم:

$$8a \overset{18}{\equiv} 36+12 = 48 \xrightarrow[(8,18)=2]{\div 8} a \overset{\frac{18}{2}}{\equiv} 6 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 6$$

$$\Rightarrow a = 9q+6$$

پس عدد دورقمی a به صورت $9q+6$ است. q می‌تواند حداقل ۱ و حداکثر ۱۰ باشد؛ پس ۱۰ تا عدد دورقمی a داریم.

۱۸۹ گزینه ۱ به پیمانهٔ ۳۱، به جای ۷۲ می‌توانیم ۱۰ بگذاریم:

$$72 \overset{31}{\equiv} 10 \Rightarrow 72x \overset{31}{\equiv} 10x \overset{31}{\equiv} 1 \overset{31}{\equiv} -30 \xrightarrow[(10,31)=1]{\div 10} x \overset{31}{\equiv} -3$$

$$\Rightarrow x = 31q-3$$

حالا x باید سه‌رقمی باشد. کم‌ترین مقدار به ازای $q = 4$ و بیشترین مقدار به ازای $q = 32$ به دست می‌آید: $4\le q\le 32$؛ پس ۲۹ جواب داریم.

۱۹۰ گزینه ۲ اول به جای ۷۱ به پیمانهٔ ۵۷، باقی‌مانده‌اش، یعنی ۱۴ را بگذاریم:

$$71x \overset{57}{\equiv} 14x \overset{57}{\equiv} 1 \Rightarrow 14x \overset{57}{\equiv} -56 \xrightarrow[(14,57)=1]{\div 14} x \overset{57}{\equiv} -4$$

۱۹۱ گزینه ۳ سؤال گفته: $16! \overset{17}{\equiv} -1$ پس داریم: $16! \overset{17}{\equiv} 16$

و با تقسیم بر ۱۶: $15! \overset{17}{\equiv} 1$

تذکر: $\frac{16!}{16} = 15!$، مشکلی ندارید؟

حالا می‌خواهیم دو طرف را بر ۱۵ تقسیم کنیم. ۷ تا ۱۷ روی ۱ می‌ریزیم.

$$15! \overset{17}{\equiv} 1 \overset{17}{\equiv} 120 \xrightarrow{\div 15} 14! \overset{17}{\equiv} 8$$

۱۹۲ گزینه ۳ اول باقی‌ماندهٔ 2^{32} را به پیمانهٔ ۹ پیدا کنیم:

$$2^{32} = (2^3)^{10}\times 2^2 = 8^{10}\times 4 \overset{9}{\equiv} (-1)^{10}\times 4 \overset{9}{\equiv} 4$$

پس داریم $7x \overset{9}{\equiv} 4$. حالا به پیمانهٔ ۹، به جای ۷ هم ۲- می‌گذاریم:

$$-2x \overset{9}{\equiv} 4 \xrightarrow[(-2,9)=1]{\div(-2)} x \overset{9}{\equiv} -2 \Rightarrow x = 9q-2$$

بزرگ‌ترین عدد دورقمی x، به ازای $q = 11$ می‌شود ۹۷ که جمع ارقامش ۱۶ است.

۱۹۳ گزینه ۱ حاصل $1!+2!+\cdots$ به پیمانهٔ ۱۰ با ۳ همنهشت است. ببینید:

$$1!+2!+\cdots+1397! \overset{10}{\equiv} 1+2+6+24+\underbrace{0}_{\text{از !5 به بعد به ۱۰ می‌خورند}} \overset{10}{\equiv} 33 \overset{10}{\equiv} 3$$

پس داریم:

$$7x \overset{10}{\equiv} 3 \xrightarrow{7x \overset{10}{\equiv} -3x} -3x \overset{10}{\equiv} 3 \xrightarrow{\div(-3)} x \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow x = 10q-1$$

کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی x در این رابطه، به ازای $q = 11$ می‌شود ۱۰۹ که جمع ارقامش ۱۰ است.

۱۹۴ گزینه ۴ اول همنهشتی‌ها را ساده‌تر بنویسیم:

$$31a \overset{13}{\equiv} 3 \xrightarrow{31 \overset{13}{\equiv} 5} 5a \overset{13}{\equiv} 3 \overset{13}{\equiv} -10 \xrightarrow{\div 5} a \overset{13}{\equiv} -2$$

$$8a \overset{12}{\equiv} 64 \xrightarrow[(8,12)=4]{\div 8} a \overset{\frac{12}{4}}{\equiv} 8 \Rightarrow a \overset{3}{\equiv} 2$$

حالا باید طرف‌های راست را یکسان کرد. با کمی دقت:

$$a \overset{13}{\equiv} -2 \overset{13}{\equiv} 11$$

$$a \overset{3}{\equiv} 2 \overset{3}{\equiv} 11 \quad (3\times3)$$

$$\Rightarrow a \overset{[13,3]}{\equiv} 11 \Rightarrow a \overset{39}{\equiv} 11$$

پس a به صورت $a = 39k+11$ است. ما دنبال $a < 300$ هستیم که از $k = 0$ تا $k = 7$ به دست می‌آید؛ یعنی ۸ مقدار a داریم.

۱۹۵ گزینه ۳ باید y را حذف کرد:

$$\begin{cases} 2x+7y \overset{5}{\equiv} 3 \\ 4x-3y \overset{5}{\equiv} 2 \end{cases}$$

اما دقت کنید که $7 \overset{5}{\equiv} 2$ و $-3 \overset{5}{\equiv} 2$؛ پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}2x+2y\overset{5}{\equiv}3\\4x+2y\overset{5}{\equiv}2\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تا y برود}]{\text{کم‌کنیم}} 2x \overset{5}{\equiv} -1 \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow[(5,2)=1]{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 2$$

یعنی باقی‌ماندهٔ x بر ۵ برابر با ۲ است.

۱۹۶ گزینه ۲ از رابطهٔ $41 \mid 9n+2$ نتیجه می‌شود:

$$9n+2 \overset{41}{\equiv} 0 \Rightarrow 9n \overset{41}{\equiv} -2$$

حالا باید مضرب مناسبی از ۴۱ را به ۲- اضافه کنیم تا به ۹ بخورد. اگرچه پیداکردن $41\times4=164$ سخت نیست اما زحمت به خودمان نمی‌دهیم! اول به ۳ تقسیم کنیم:

$$9n \overset{41}{\equiv} -2 \overset{41}{\equiv} 39 \xrightarrow[(3,41)=1]{\div 3} 3n \overset{41}{\equiv} 13 \overset{41}{\equiv} 54$$

حالا دوباره تقسیم بر ۳:

$$\xrightarrow[(3,41)=1]{\div 3} n \overset{41}{\equiv} 18$$

$$\Rightarrow n = 41q+18 \Rightarrow 100 \le 41q+18 \le 300 \Rightarrow 2\le q\le 6$$

پس $6-2+1=5$ عدد به فرم مطلوب در مجموعهٔ مورد نظر وجود دارد.

۱۹۷ گزینه ۲ $(7n+3, 5n-2) = d$

$$\begin{array}{l} d \mid 5n-2 \xrightarrow{\times(7)} \\ d \mid 7n+3 \xrightarrow{\times(5)} \end{array} \begin{cases} d \mid 35n-14 \\ d \mid 35n+15 \end{cases} \Rightarrow d \mid 29$$

بنابراین $5n-2$ باید مضرب ۲۹ باشد، لذا:

$$5n-2 \overset{29}{\equiv} 0 \Rightarrow 5n \overset{29}{\equiv} 2 \Rightarrow 5n \overset{29}{\equiv} 2(29)+2 \Rightarrow 5n \overset{29}{\equiv} 60 \Rightarrow n \overset{29}{\equiv} 12$$

یعنی n به صورت $29k+12$ است.

$$10 \le 29k+12 \le 99 \Rightarrow 0\le k\le 3 \Rightarrow k\in\{0,1,2,3\}$$

۱۹۸ گزینه ۱ طبق صورت سؤال، $a \overset{11}{\equiv} 2b$ و $a+b \overset{11}{\equiv} 4$؛ پس داریم:

$$\underbrace{a+b}_{a \overset{11}{\equiv} 2b} \overset{11}{\equiv} 2b+b \overset{11}{\equiv} 3b \overset{11}{\equiv} 4 \overset{11}{\equiv} 15 \xrightarrow[(3,11)=1]{\div 3} b \overset{11}{\equiv} 5 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 10 \overset{11}{\equiv} -1$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ a^2+b^2 بر ۱۱ برابر است با:

$$a^2+b^2 \overset{11}{\equiv} (-1)^2+5^2 \overset{11}{\equiv} 26 \xrightarrow{-2\times 11} \overset{11}{\equiv} 4$$

۱۹۹ گزینه ۳ دو حالت داریم:

یا $x-1$ به ۷ می‌خورد یعنی باقی‌ماندهٔ x بر ۷، ۱ است.

یا $2x+1$ بر ۷ می‌خورد یعنی باقی‌ماندهٔ x بر ۷، ۳ است.

ببینید:

$$2x+1 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 2x \overset{7}{\equiv} -1 \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{\div 2} x \overset{7}{\equiv} 3$$

در اعداد ۱ تا ۷، ۸ تا ۱۴، ۱۵ تا ۲۱ و ۲۲ تا ۲۸، چهار گروه ۷تایی داریم که در هر کدام یک عدد بر ۷ باقی‌ماندهٔ ۳ دارد و یک عدد بر ۷ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد. خود عدد ۲۹ هم خوب است، پس روی هم می‌شود $9 = 4+5$ تا. ببینید:

باقی‌مانده=۱		باقی‌مانده=۳				
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱
۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸
۲۹	۳۰					

۲۰۰ گزینه ۳ از اشباع برویم. a می‌تواند به پیمانهٔ ۶، دارای باقی‌ماندهٔ $0,1,2,3,4,5$ باشد.

$a \overset{6}{\equiv} 1 \Rightarrow a^2-3a+2 \overset{6}{\equiv} 0$ ✓

$a \overset{6}{\equiv} 0 \Rightarrow a^2-3a+2 \overset{6}{\equiv} 2$ ✗

$a \overset{6}{\equiv} 3 \Rightarrow a^2-3a+2 \overset{6}{\equiv} 2$ ✗

$a \overset{6}{\equiv} 2 \Rightarrow a^2-3a+2 \overset{6}{\equiv} 0$ ✓

$a \overset{6}{\equiv} 4 \Rightarrow a^2-3a+2 \overset{6}{\equiv} 16-12+2 \overset{6}{\equiv} 6 \overset{6}{\equiv} 0$ ✓

$a \overset{6}{\equiv} 5 \Rightarrow a^2-3a+2 \overset{6}{\equiv} 25-15+2 \overset{6}{\equiv} 12 \overset{6}{\equiv} 0$ ✓

پس ۴تا از باقی‌مانده‌ها قبول‌اند.

تذکر: $(a-1)(a-2)$ ضرب دو عدد متوالی و حتماً زوج است.

حالا اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۳، ۱ یا ۲ باشد این حاصل‌ضرب به ۳ می‌خورد و به ۶ بخش‌پذیر می‌شود. پس ما دنبال aهایی هستیم که مضرب ۳ نباشند؛ یعنی ۰ و ۳ خوب نبود و از ۰ تا ۵، چهارتا جواب داشتیم.

۲۰۱ گزینه ۱ سؤال می‌گوید:

$$N = 31q+26 \quad , \quad \begin{cases} N = 43k+k \\ 0 \le k \le 42 \end{cases}$$

پس داریم: $N = 44k$

این را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم: $44k = 31q+26$

یعنی $44 \mid 31q+26$ و به بیان دیگر: $31q+26 \overset{44}{\equiv} 0$

$$\Rightarrow 31q \overset{44}{\equiv} -26 \Rightarrow -13q \overset{44}{\equiv} -26 \xrightarrow{\div(-13)} q \overset{44}{\equiv} 2$$

پس q می‌تواند ۲ یا ۴۶ یا ... باشد اما از تقسیم N بر ۴۳ می‌دانیم مقدار N از 44×42 بیشتر نیست.

q	۲	۴۶	۹۰
N	$\underbrace{31\times 2+26}_{\text{یکان=۸}}$	$\underbrace{31\times 46+26}_{\text{یکان=۲}}$	$\underbrace{31\times 90+26}_{\text{این زیاده}}$

۲۰۲ گزینه ۲ روش اول طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = bq+r \\ 0 \le r < b \end{cases} \xrightarrow[r=37]{q=21} \begin{cases} a = 21b+37 \\ 0 \le 37 < b \end{cases}$$

حالا می‌خواهیم a مضرب ۵ باشد:

$$a = 21b+37 \overset{5}{\equiv} 0 \xrightarrow[37 \overset{5}{\equiv} 2]{21 \overset{5}{\equiv} 1} 1b+2 \overset{5}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow b+2 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow b+2 = 5q \Rightarrow b = 5q-2$$

یعنی b باید به صورت $5q-2$ باشد. طبق شرط دوم الگوریتم تقسیم، $b > 37$ است؛ پس مقادیر مناسب b عبارت‌اند از:

$$b = 5q-2 \xrightarrow[q \ge 8]{b>37} b = 38, 43, 48, 53, \dots$$

حالا دقت کنیم که a عدد سه‌رقمی است، یعنی $a = 21b+37 < 1000$. واضح است که $21\times \underbrace{43}_{b}+37$ بیشتر از 1000 نیست اما $21\times 48+37$ از 1000 بیشتر می‌شود پس b می‌تواند فقط ۳۸ و ۴۳ باشد و ۲تا جواب سه‌رقمی a داریم.

روش دوم

$$\begin{cases} a = bq+r \\ 0 \le r < b \end{cases} \xrightarrow[r=37]{q=21} \begin{cases} a = 21b+37 \\ 0 \le 37 < b \end{cases}$$

$$a = 21b+37 \Rightarrow 21b+37 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow b+2 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 5k-2 \\ b > 37 \end{cases}$$

$$5k-2 > 37 \Rightarrow k \ge 8 \ (*)$$

$$a = 21(5k-2)+37 = 105k-5$$

$$a \text{ سه‌رقمی است} \Rightarrow 100 \le 105k-5 \le 999$$

$$\Rightarrow 105 \le 105k \le 1004$$

$$\Rightarrow 1 \le k \le 9 \xrightarrow{(*)} 8 \le k \le 9 \Rightarrow$$ دو جواب دارد.

۲۰۳ گزینه ۱ سؤال گفته:

$$\begin{cases} A \overset{23}{\equiv} 5 \\ 2A \overset{17}{\equiv} 9 \end{cases}$$

اول برویم سراغ پایینی:

$$2A \overset{17}{\equiv} 9 \overset{17}{\equiv} 26 \xrightarrow{\div 2} A \overset{17}{\equiv} 13$$

پس باقی‌ماندهٔ A بر ۲۳ و ۱۷ به ترتیب ۵ و ۱۳ است.

در $23q+5$ها، دنبال عددی بگردیم که بر ۱۷، باقی‌ماندهٔ ۱۳ داشته باشد.

$$23q+5 \overset{17}{\equiv} 13 \Rightarrow 23q \overset{17}{\equiv} 8$$

$$\xrightarrow{23 \overset{17}{\equiv} 6} 6q \overset{17}{\equiv} 8 \xrightarrow{\div 2} 3q \overset{17}{\equiv} 4 \overset{17}{\equiv} 21 \Rightarrow q \overset{17}{\equiv} 7$$

پس q مقادیر $7, 24, 41, \dots$ را دارد. بیشترین عدد ۳رقمی A به ازای $q = 41$ می‌شود: $A = 23\times 41+5$ و باقی‌مانده‌اش بر ۱۲ برابر است با:

$$A \overset{12}{\equiv} \underbrace{23}_{\overset{12}{\equiv} -1} \times \underbrace{41}_{\overset{12}{\equiv} 5} + 5 \overset{12}{\equiv} -5+5 \overset{12}{\equiv} 0$$