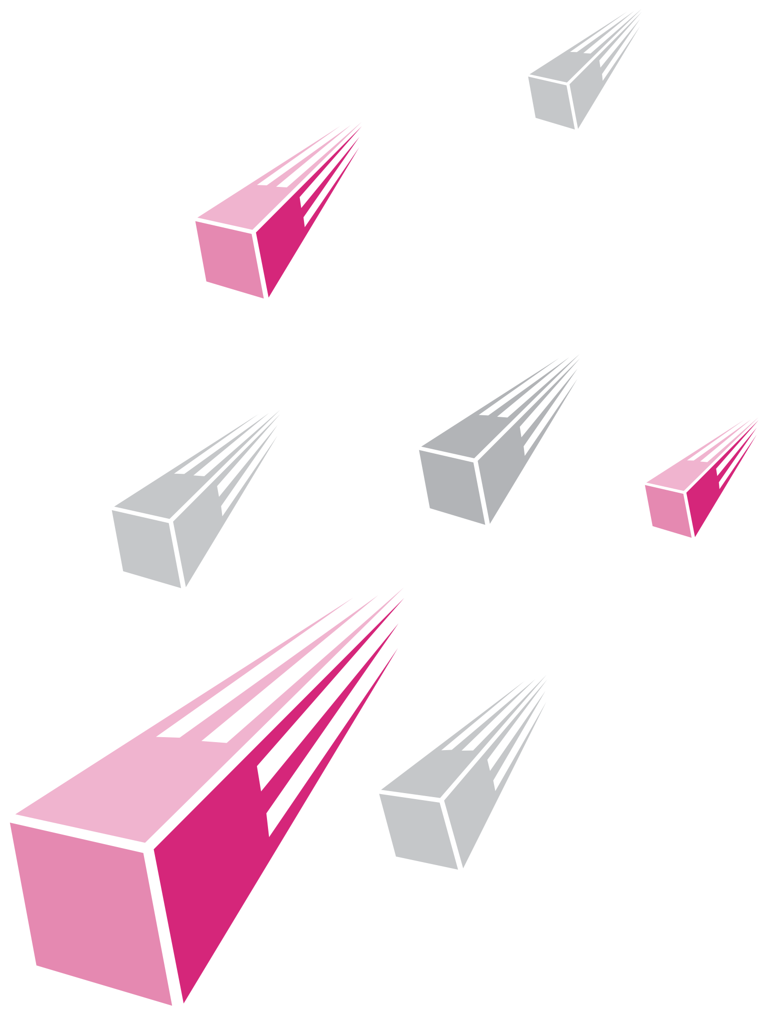


هندسه دهم

حمیدرضا بیات
مرتضی خمامی ابدی
کیان کریمی خراسانی

پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب هندسه دهم را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این کتاب در اصل برای دانش‌آموزان «مدارس استعدادهای درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سایر مدارس کشور و داوطلبان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل؛
- ۵۰ پرسش چهارگزینه‌ای برای هر فصل همراه با پاسخ کلیدی؛
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی تمام تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای به دشوار ( ) و دارای نکتهٔ کلیدی ( ).

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمامی‌ابدی و کیان کریمی‌خراسانی که این کتاب را زیر نظر آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

هم‌چنین از خانم فاطمه محمدی آندرس که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و خانم‌ها نرگس سربندی (رسم شکل) و بهاره خدامی (گرافیست و طراح جلد) سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

فهرست

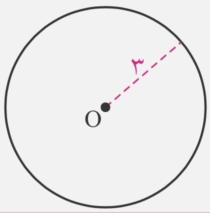
عنوان | **صفحه**

عنوان	صفحه

فصل اول

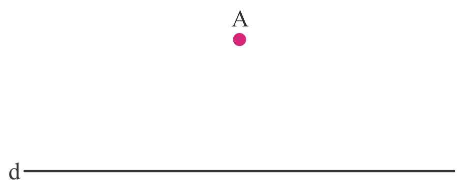
ترسیم‌های هندسی و استدلال

ترسیم



- برای ترسیم، تنها از خط‌کش و پرگار استفاده می‌کنیم.
- برای پیدا کردن مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ یکسان هستند، از پرگار استفاده می‌کنیم. مثلاً برای مجموعهٔ نقاط به فاصلهٔ ۳ از O، پرگار را به شعاع ۳ باز می‌کنیم، دایره‌ای به شعاع ۳ و مرکز O رسم می‌کنیم.

مثال: در شکل روبه‌رو، فاصلهٔ نقطهٔ A، از خط d برابر ۳ است.

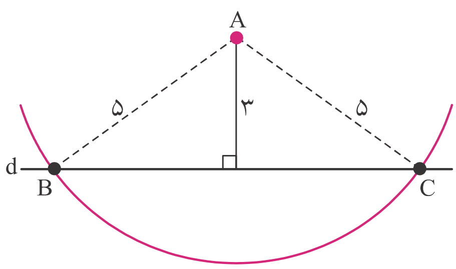


الف) روی خط d، چند نقطه به فاصلهٔ ۵ از نقطهٔ A وجود دارد؟

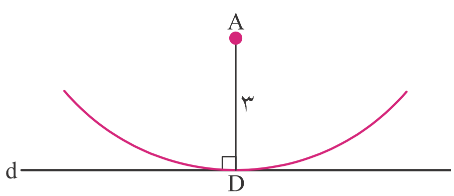
ب) روی خط d، چند نقطه به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A وجود دارد؟

ج) روی خط d، چند نقطه به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ A وجود دارد؟

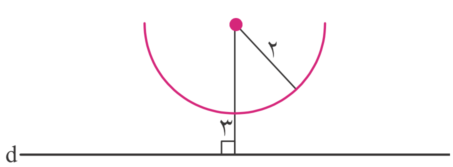
پاسخ: الف) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ رسم می‌کنیم، چون $۳ < ۵$ است، دایره خط d را در دو نقطه قطع می‌کند. پس پاسخ مسئله دو نقطهٔ B و C است.



ب) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ رسم می‌کنیم، چون $۳ = ۳$ است، دایره خط d را در یک نقطه قطع می‌کند. پس پاسخ مسئله نقطهٔ D است.

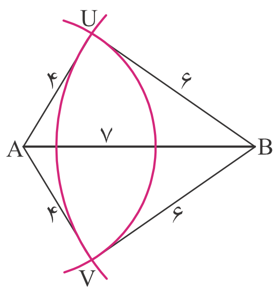


ج) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ رسم می‌کنیم، چون $۳ > ۲$ است، دایره خط d را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند. پس پاسخ مسئله صفر نقطه است.



مثال: در شکل روبه‌رو، می‌دانیم $AB = ۷$ است. نقطه‌ای پیدا کنید که $BC = ۶$ و $AC = ۴$ باشد.

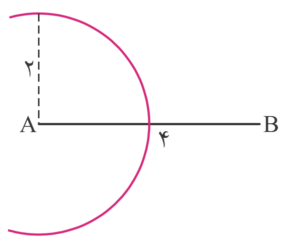
پاسخ: دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ رسم می‌کنیم (دایرهٔ اول). سپس دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۶ رسم می‌کنیم (دایـرهٔ دوم). این دو دایره یکدیگر را در نقاط U و V قطع می‌کنند. نقطهٔ U روی دایرهٔ اول است، پس $AU=۴$ است، همچنین روی دایرهٔ دوم است، پس $BU=۶$. برای V به همین شکل داریم $AV=۴$ و $BV=۶$. پس U و V پاسخ مسئله هستند.



مثال: توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۴ رسم کرد.

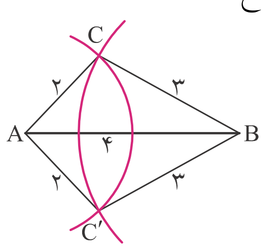
پاسخ: ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ را رسم می‌کنیم.

دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ رسم می‌کنیم (دایرهٔ اول).



سپس دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۳ رسم می‌کنیم. (دایرهٔ دوم).

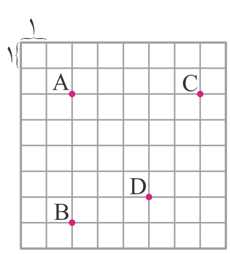
این دو دایره هم‌دیگر را در نقاط C و C' قطع می‌کنند. با توجه به شکل، مثلث‌های ABC و ABC' پاسخ مسئله هستند.



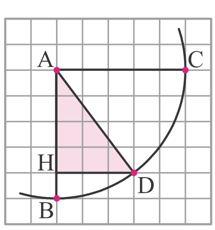
مثال: در شکل روبه‌رو، طول ضلع هر مربع ۱ است. دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ رسم می‌کنیم.

الف) نشان دهید این دایره از نقاط B و C می‌گذرد.

ب) نشان دهید این دایره از نقطهٔ D می‌گذرد.



پاسخ: الف) فاصلهٔ عمودی نقطهٔ B از A و فاصلهٔ افقی نقطهٔ C از A برابر با ۵ است. پس $AB=AC=۵$ است و دایره از نقاط B و C می‌گذرد.



ب) در مثلث AHD، رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

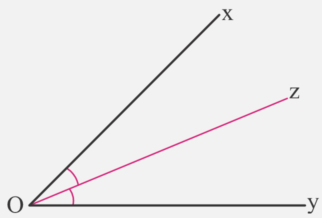
$$AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ \Rightarrow AD^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow AD = \sqrt{۲۵} = ۵$$

چون $AD=۵$ است، دایره از نقطهٔ D می‌گذرد.

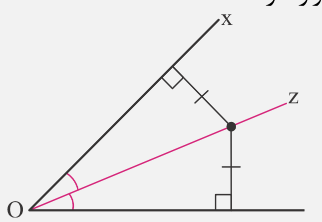
برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

تعریف نیمساز: نیم‌خطی که یک زاویه را به دو زاویهٔ برابر تقسیم می‌کند نیمساز می‌گویند.

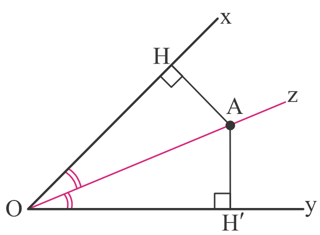
- تمامی نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله‌اند.



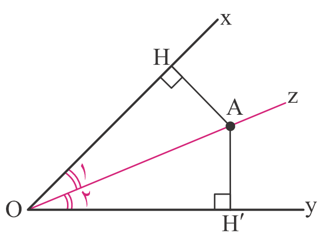
- اگر نقطه‌ای درون یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن قرار دارد.



مثال: **نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ $\widehat{xOy}$ قرار دارد. ثابت کنید $AH = AH'$.**

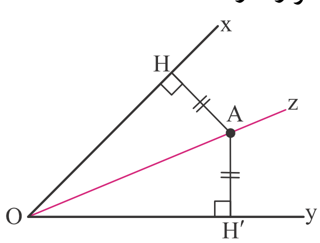


پاسخ: ثابت کنید دو مثلث OAH و OAH′ هم‌نهشت هستند.

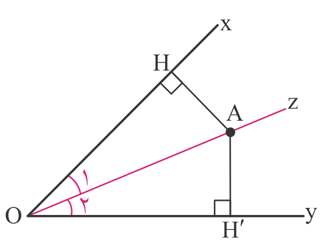


$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 = \hat{O}_2\\ OA = OA\\ \hat{H} = \hat{H'} = 90^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وز}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OAH'} \Rightarrow AH = AH'$$

مثال: **فاصلهٔ نقطهٔ A از Ox و Oy برابر است. ثابت کنید نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد.**



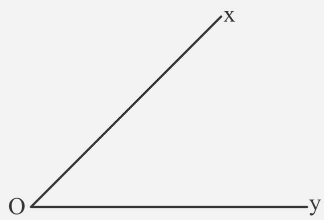
پاسخ: ثابت می‌کنیم دو مثلث OAH و OAH′ هم‌نهشت هستند.



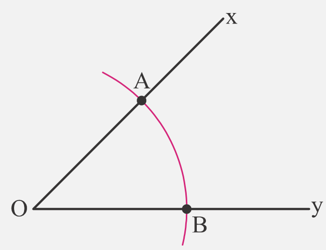
$$\left.\begin{array}{l}AH = AH'\\ OA = OA\\ \hat{H} = \hat{H'} = 90^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وض}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OAH'} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

روش رسم نیمساز:

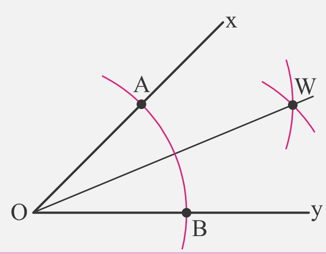
برای رسم نیمساز زاویهٔ $\widehat{xOy}$ این‌گونه عمل می‌کنیم:



- کمانی به مرکز O رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در نقاط A و B قطع کند.



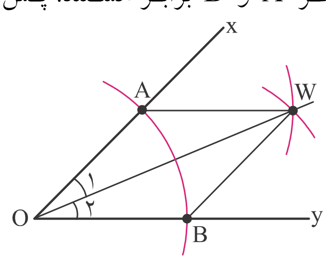
- دو کمان به مرکزهای A و B و با شعاع‌های برابر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در W قطع کنند.
- O را به W وصل می‌کنیم. OW نیمساز است.



مثال: **درستی روش رسم بالا را اثبات کنید.**

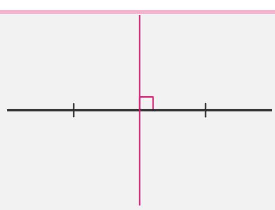
پاسخ: ثابت می‌کنیم دو مثلث OAW و OBW هم‌نهشت هستند. می‌دانیم شعاع کمان‌های به مرکز A و B برابر هستند. پس AW = BW است:

$$\left.\begin{array}{l} AW = BW \\ OA = OB \\ OW = OW \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{A}W \cong O\overset{\Delta}{B}W \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

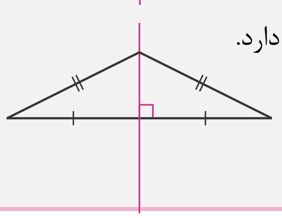


برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

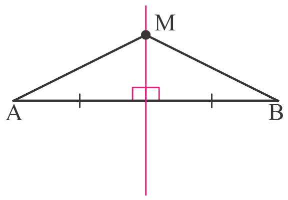
تعریف عمودمنصف: به خطی که بر یک پاره‌خط عمود باشد و از وسط آن بگذرد، عمودمنصف آن پاره‌خط می‌گویند.



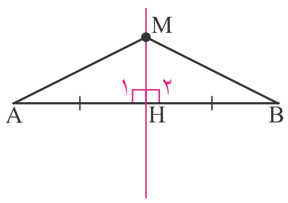
- تمامی نقاط روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن به یک فاصله‌اند.
- اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد.



مثال: **نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. ثابت کنید MA = MB.**

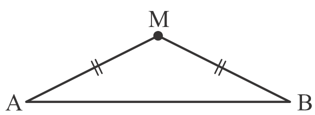


پاسخ: ثابت می‌کنیم دو مثلث MAH و MBH هم‌نهشت هستند:

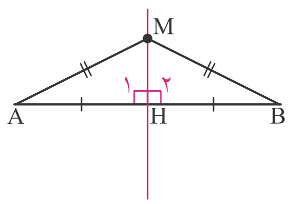


$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\Delta}{A}H \cong M\overset{\Delta}{B}H \Rightarrow MA = MB$$

مثال: **فاصلهٔ نقطهٔ M از A و B برابر است. ثابت کنید نقطهٔ M روی عمودمنصف AB قرار دارد.**



پاسخ: از نقطهٔ M بر ضلع AB عمودی رسم می‌کنیم. ثابت می‌کنیم دو مثلث MAH و MBH هم‌نهشت هستند:



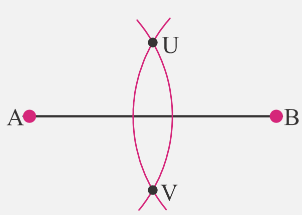
$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{و ض}} M\overset{\Delta}{A}H \cong M\overset{\Delta}{B}H \Rightarrow AH = BH$$

پس MH بر AB عمود است و هم از وسط آن می‌گذرد، در نتیجه عمودمنصف آن است.

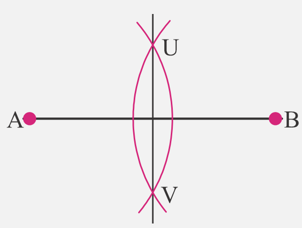
روش رسم عمودمنصف:

برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB این‌گونه عمل می‌کنیم:

- دو کمان به شعاع‌های برابر (بزرگ‌تر از نصف AB) و به مرکزهای A و B رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در U و V قطع کنند.

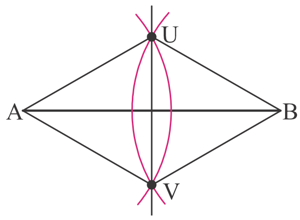


- U و V را به هم وصل می‌کنیم. UV عمودمنصف AB است.



مثال: درستی روش رسم عمودمنصف را اثبات کنید.

پاسخ: پیش از این ثابت کردیم که اگر فاصلهٔ نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط برابر باشد، آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. شعاع دو کمان رسم شده برابر است:



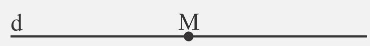
$AU = BU \Rightarrow$ U روی عمودمنصف AB است

$AV = BV \Rightarrow$ V روی عمودمنصف AB است

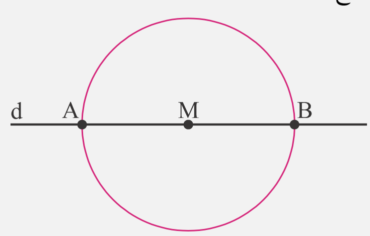
نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند و برای مشخص شدن یک خط، دو نقطه کافی است، پس خط گذرنده از U و V عمودمنصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی خط:

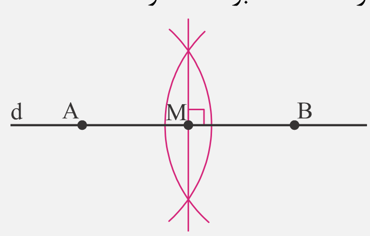
- خط d و نقطهٔ M روی آن مفروض است. می‌خواهیم از نقطهٔ M خطی عمود بر d رسم کنیم.



- کمانی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.

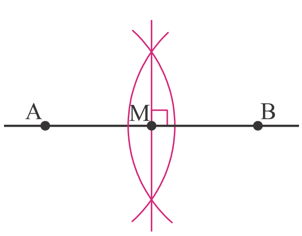


- عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف خطی است که از نقطهٔ M بر d عمود است.



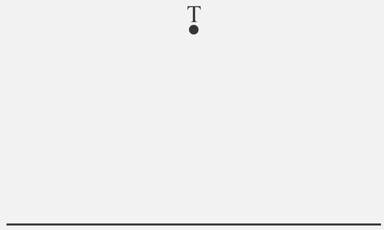
مثال: درستی روش بالا را توضیح دهید.

پاسخ: ابتدا کمانی به مرکز M زده‌ایم، پس $MA = MB$ است و نقطهٔ M وسط AB است. عمودمنصف AB خطی است که از وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است. پس عمودمنصف در نقطهٔ M بر AB عمود است.

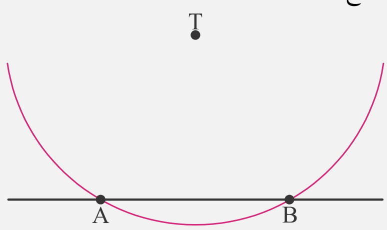


رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط:

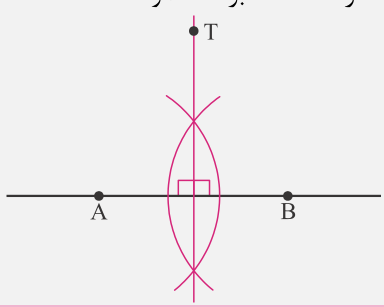
- خط d و نقطهٔ T خارج آن مفروض است. می‌خواهیم از نقطهٔ T خطی عمود بر d رسم کنیم.



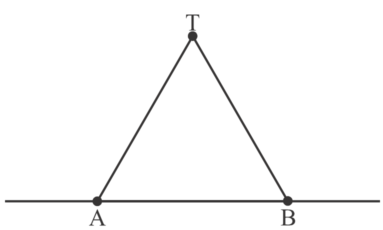
- کمانی به مرکز T رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.



- عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف خطی است که از نقطهٔ T بر d عمود است.



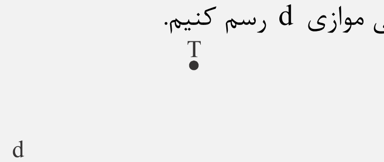
مثال: درستی روش بالا را اثبات کنید.



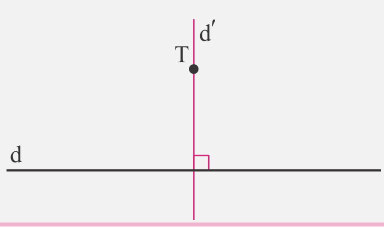
پاسخ: ابتدا کمانی به مرکز T زده‌ایم، پس $TA = TB$ است. مثلث TAB متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف، ارتفاع و میانه بر هم منطبق هستند، پس عمودمنصف AB از T می‌گذرد.

رسم خط موازی با یک خط:

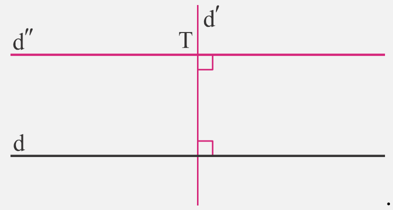
خط d و نقطهٔ T خارج آن مفروض است. می‌خواهیم از نقطهٔ T خطی موازی d رسم کنیم.



- از نقطهٔ T خط d' عمود بر خط d را رسم می‌کنیم.



- از نقطهٔ T خط d'' را عمود بر خط d' رسم می‌کنیم.



- d و d'' موازی هستند.

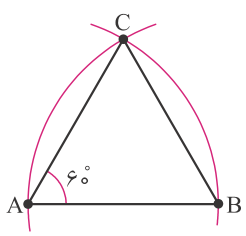
مثال: درستی روش رسم بالا را توضیح دهید.

پاسخ: دو خط d و d'' بر خط d' عمود هستند، پس d و d'' موازی هستند.

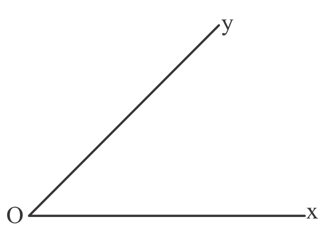
کاربردهای ترسیم

مثال: روش ترسیم یک زاویهٔ 60° را توضیح دهید.

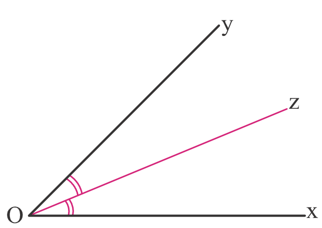
پاسخ: یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم. اندازهٔ هر زاویه برابر با 60° می‌شود.



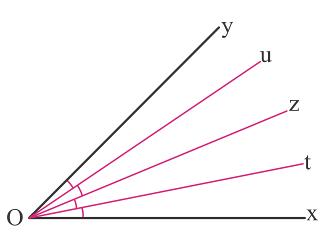
مثال: زاویهٔ $\widehat{xOy}$ را به چهار زاویهٔ برابر تقسیم کنید.



پاسخ: ابتدا نیمساز زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم، $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$ است.

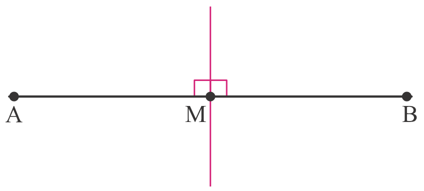


سپس نیمساز زاویه‌های xOz و zOy را رسم می‌کنیم. چون $\widehat{uOy} = \widehat{zOu} = \widehat{tOz} = \widehat{xOt}$ است، پس زاویهٔ xOy به چهار زاویهٔ برابر تقسیم شده است.

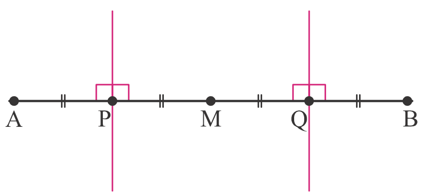


مثال: **پاره‌خط AB را به ۴ پاره‌خط برابر تقسیم کنید.**

پاسخ: ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا نقطهٔ M به دست آید.

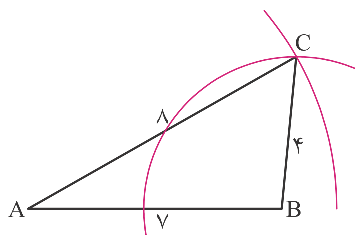


سپس عمودمنصف پاره‌خط‌های AM و MB را رسم می‌کنیم تا نقاط P و Q به دست آیند. چون $AP = PM = MQ = QB$ است، پاره‌خط AB به چهار قسمت برابر تقسیم شده است.

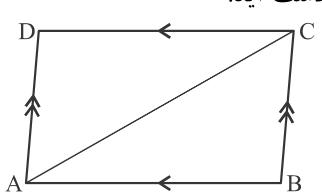


مثال: **روش رسم متوازی‌الاضلاعی را توضیح دهید که طول اضلاعش ۴ و ۷ باشد و طول یکی از قطرهایش ۸ باشد.**

پاسخ: متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $AB = ۷$، $BC = ۴$ و $AC = ۸$ باشد. ابتدا مثلث ABC را رسم می‌کنیم. طول اضلاع ۴، ۷ و ۸ است.

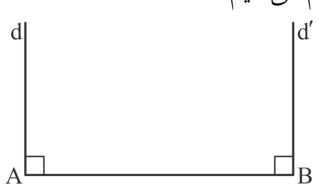


سپس از رأس C خطی موازی AB و از رأس A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا نقطهٔ D به دست آید.

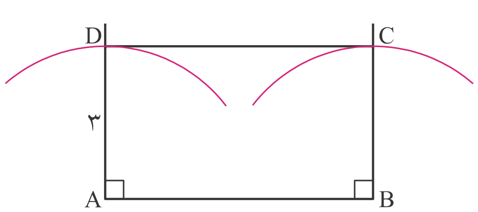


مثال: **روش رسم مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۶ را توضیح دهید.**

پاسخ: ابتدا پاره‌خط AB به طول ۶ را رسم می‌کنیم و از نقاط A و B دو خط عمود بر AB رسم می‌کنیم.

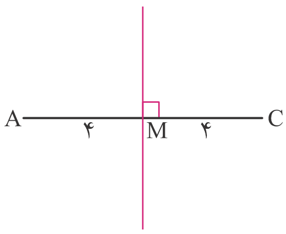


کمان‌هایی به شعاع ۳ و به مرکزهای A و B رسم می‌کنیم تا دو خط d و d' را در نقاط D و C قطع کند. D و C را به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABCD مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۶ است.

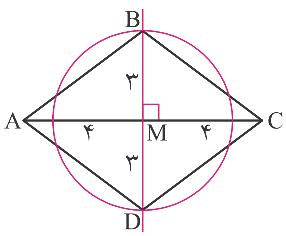


مثال: روش رسم یک لوزی را توضیح دهید که طول قطرهایش ۸ و ۶ باشد.

پاسخ: ابتدا قطر AC به طول ۸ را رسم می‌کنیم و سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. $AM = CM =$ ۴ می‌شود.

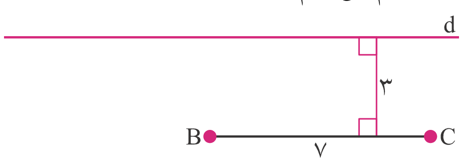


سپس به مرکز M، دایره‌ای به شعاع ۳ رسم می‌کنیم تا عمودمنصف را در نقاط B و D قطع کنـد. B و D را بـه A و C وصـل می‌کنیم. چهارضلعی $ABCD$ لوزی به طول قطرهای ۶ و ۸ است.

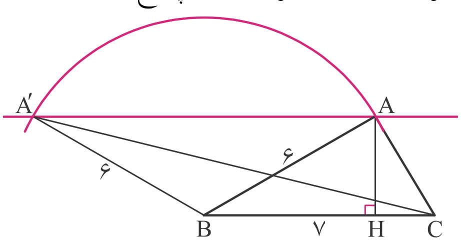


مثال: در مثلث ABC می‌دانیم $BC =$ ۷، $AB =$ ۶ و $AH =$ ۳ اسـت. (AH ارتفـاع وارد از رأس A اسـت.) روش رسـم مثلث را توضیح دهید. مسئله چند جواب دارد؟

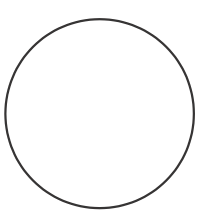
پاسخ: ابتدا ضلع BC به طول ۷ را رسم می‌کنیم و خط d موازی با آن به فاصلهٔ ۳ از آن رسم می‌کنیم.

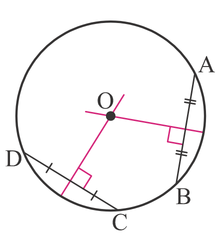


دایره‌ای به شعاع ۶ و به مرکز B رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و A' قطع کند. دو مثلث ABC و $A'BC$ پاسخ مسئله هستند.



مثال: در شکل روبه‌رو، یک دایره دیده می‌شود. به کمک خط‌کش و پرگار، مرکز دایره را پیدا کنید.





پاسخ: دو وتر دلخواه و غیرموازی AB و CD را رسم می‌کنیم. اگر O مرکـز دایـره و r شـعاع دایره باشد، می‌دانیم $OA = OB = r$ است، پس O روی عمودمنصـف AB قـرار دارد. همچنـین $OC = OD = r$ است، پس O روی عمودمنصف CD قرار دارد. پس عمودمنصـف‌هـای AB و CD را رسم می‌کنیم، محل تلاقی دو عمودمنصف نقطه‌ای است که از هر چهار نقطه به یک فاصلـه است و مرکز دایره است.

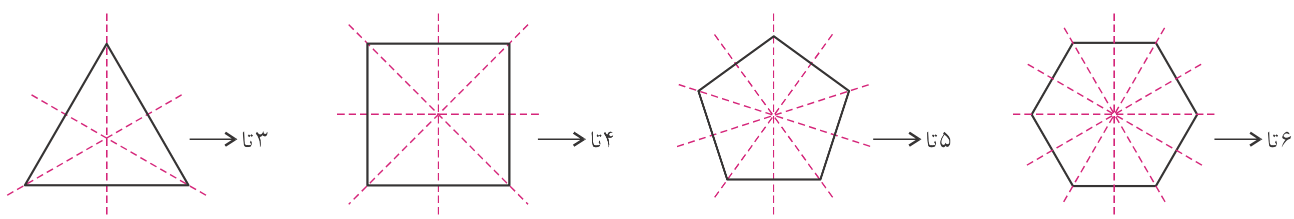
استدلال استقرایی

- استدلال استقرایی بر اساس مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت خاص است و به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسد.»
- در استدلال استقرایی نمی‌توان همواره به نتیجهٔ گرفته شده مطمئن بود.

مثلاً اگر فردی با مشاهدهٔ پنج مسافر آمریکایی که اضافه وزن دارند، نتیجه‌گیری کند که همهٔ آمریکایی‌ها اضافه وزن دارند، از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

مثال: به روش استدلال استقرایی نشان دهید که یک n ضلعی منتظم، n تا محور تقارن دارد.

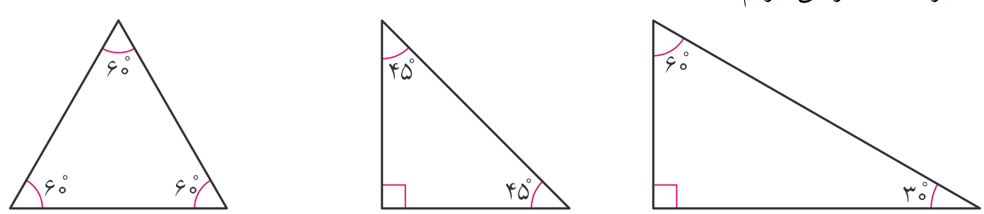
پاسخ: تعداد محورهای تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع، پنج‌ضلعی منتظم و شش‌ضلعی منتظم را بررسی می‌کنیم:



حکم مسأله را در چهار حالت بررسی کردیم و درست بود. با استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم که یک n ضلعی منتظم به تعداد n تا محور تقارن دارد.

مثال: به روش استقرایی نشان دهید که مجموع زاویه‌های یک مثلث، ۱۸۰ درجه است.

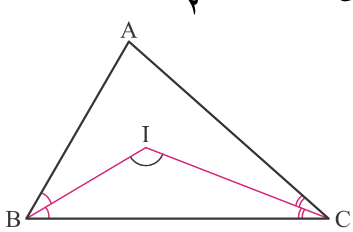
پاسخ: سه مثلث زیر را در نظر می‌گیریم:



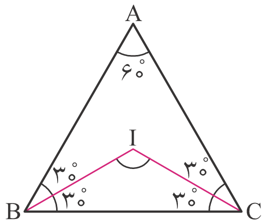
$90^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ ، $90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ ، $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

با توجه به سه مثلث بالا، با استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم که مجموع زوایای همهٔ مثلث‌ها ۱۸۰ درجه است.

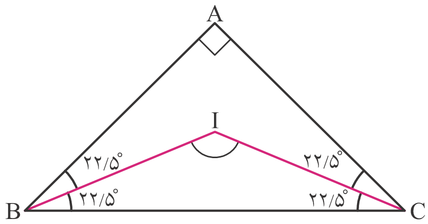
مثال: در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌های B و C را رسم می‌کنیم. به روش استدلال استقرایی ثابت کنید: $\hat{I} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.



پاسخ: در دو مثلث متساوی‌الاضلاع و قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بررسی می‌کنیم.

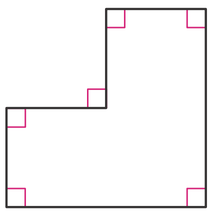


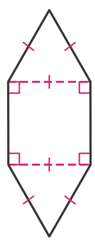
$$\left.\begin{array}{l}\hat{I}+۳۰^\circ+۳۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{I}=۱۲۰^\circ \\ ۹۰^\circ+\dfrac{\widehat{A}}{۲}=۹۰^\circ+\dfrac{۶۰^\circ}{۲}=۱۲۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{I}=۹۰^\circ+\dfrac{\widehat{A}}{۲}$$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{I}+۲۲/۵^\circ+۲۲/۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{I}=۱۳۵^\circ \\ ۹۰^\circ+\dfrac{\widehat{A}}{۲}=۹۰^\circ+\dfrac{۹۰^\circ}{۲}=۱۳۵^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{I}=۹۰^\circ+\dfrac{\widehat{A}}{۲}$$

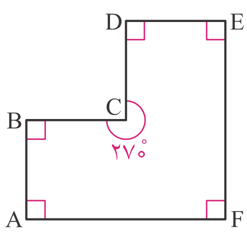
با توجه به دو مثلث بالا، با استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم رابطهٔ $\hat{I}=۹۰^\circ+\dfrac{\widehat{A}}{۲}$ برقرار است.



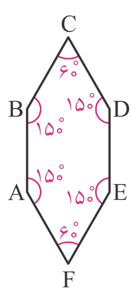


مثال: به دو شکل روبه‌رو توجه کنید. به کمک این دو شکل و با روش استدلال استقرایی نشان دهید مجموع زوایای یک شش ضلعی برابر است با ۷۲۰ درجه.

پاسخ:



$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}=۹۰^\circ+۹۰^\circ+۲۷۰^\circ+۹۰^\circ+۹۰^\circ+۹۰^\circ=۷۲۰^\circ$$



$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}=۱۵۰^\circ+۱۵۰^\circ+۶۰^\circ+۱۵۰^\circ+۱۵۰^\circ+۶۰^\circ=۷۲۰^\circ$$

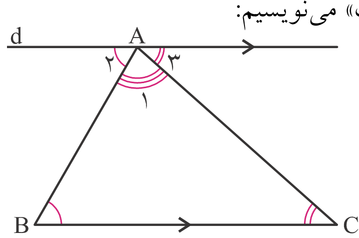
چون مجموع زاویه‌های دو شش ضلعی بالا برابر با ۷۲۰ درجه است، نتیجه می‌گیریم مجموع زوایای یک شش ضلعی برابر با ۷۲۰ درجه است.

استدلال استنتاجی

- استدلال استنتاجی براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.
مثلاً اگر فردی در جایی باشد که باران ببارد و نتیجه‌گیری کند که در آسمان ابر وجود دارد، از استدلال استنتاجی استفاده کرده است.

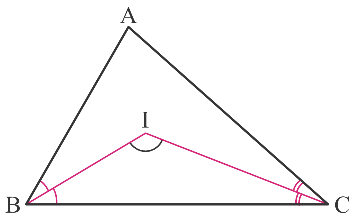
مثال: به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع زاویه‌های یک مثلث ۱۸۰° است.

پاسخ: از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم به کمک قضیهٔ «خطوط موازی و مورب» می‌نویسیم:

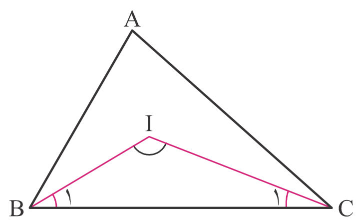


$$\left.\begin{array}{l}d \parallel BC \Rightarrow \widehat{B}=\widehat{A}_۲ \\ d \parallel BC \Rightarrow \widehat{C}=\widehat{A}_۳\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{A}_۳=۱۸۰^\circ$$

مثال: در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌های B و C را رسم می‌کنیم. به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید: $\hat{I} = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$.



پاسخ:



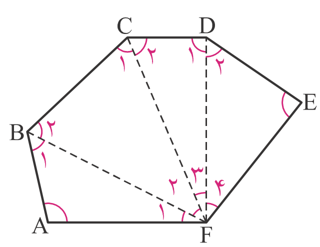
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{B}_۱ &= \frac{\hat{B}}{۲} \\ \hat{C}_۱ &= \frac{\hat{C}}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\hat{I} + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{I} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}) = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$$

مثال: ثابت کنید مجموع زاویه‌های یک شش ضلعی برابر است با ۱۸۰ درجه.

پاسخ:



$$\left.\begin{aligned} &A\overset{\Delta}{B}F : \hat{A} + \hat{B}_۱ + \hat{F}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ &B\overset{\Delta}{C}F : \hat{B}_۲ + \hat{C}_۱ + \hat{F}_۲ = ۱۸۰^\circ \\ &C\overset{\Delta}{D}F : \hat{C}_۲ + \hat{D}_۱ + \hat{F}_۳ = ۱۸۰^\circ \\ &D\overset{\Delta}{E}F : \hat{D}_۲ + \hat{E} + \hat{F}_۴ = ۱۸۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\hat{A} + \hat{B}_۱ + \hat{F}_۱ + \hat{B}_۲ + \hat{C}_۱ + \hat{F}_۲ + \hat{C}_۲ + \hat{D}_۱ + \hat{F}_۳ \\ &+ \hat{D}_۲ + \hat{E} + \hat{F}_۴ = ۴ \times ۱۸۰^\circ = ۷۲۰^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\hat{A} + \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲}^{\hat{B}} + \overbrace{\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲}^{\hat{C}} + \overbrace{\hat{D}_۱ + \hat{D}_۲}^{\hat{D}} + \hat{E} + \overbrace{\hat{F}_۱ + \hat{F}_۲ + \hat{F}_۳ + \hat{F}_۴}^{\hat{F}} = ۷۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = ۷۲۰^\circ$$

همرسی عمودمنصف‌های مثلث:

- در یک مثلث، عمودمنصف‌های سه ضلع همرس هستند. (در یک نقطه به هم می‌رسند.)
- $OA = OB = OC$ می‌شود.