

بانک سوال المپیاد ریاضی

پایه نهم

تألیف : گروه مولفان



مولفان:

سارا ارشاد منش - حسن باطنی - حمیدرضا بیات - زهره پندی - فرخنده ترابی - کیهان خجسته
مجتبی خمایی ابدی - مرتضی خمایی ابدی - خسرو داوودی - کبری دلشاد - حمیدرضا زیارتی - امیررضا عرب
سیامک قادر - حمید کاملی - کیان کریمی خراسانی - مجید منشوری

مقدمه

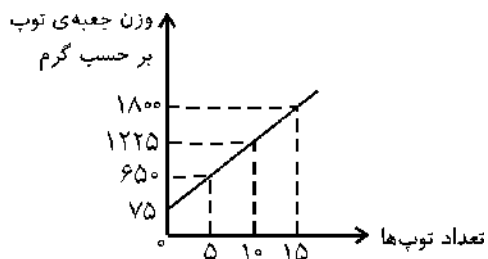
مبتکران؛ بابیش از ۳۰ سال فعالیت آموزشی، علمی و فرهنگی در کشور، توانمندسازی و مهارت افزایی دانش‌آموزان سرزمین‌مان را جز اهداف مهم و اثرگذارش قرار داده است. در همین راستا در سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹ بر آن شدیم برای شناسایی و کشف استعدادهای علمی و توانایی‌های فردی ریاضیات نوجوانان کشورمان، اقدام به برگزاری مسابقه ملی با استانداردهای جهانی کنیم. در طول ۹ دوره المپیاد ریاضی نوجوانان ایران که منجر به حضور دانش‌آموزان و مدارس علمی و توانای کشورمان و کسب موفقیت‌ها و رتبه‌های فراوان بین‌المللی و کشوری آنان شد، ما را بر آن داشت تا در تحقق اهدافمان با انگیزه‌تر و مصمم‌تر قدم برداریم. این کتاب با عنوان بانک سوالات ۹ دوره المپیاد ریاضی نوجوانان ایران برای ایجاد آمادگی بیشتر نوجوانان در دهمین المپیاد ریاضی نوجوانان ایران و المپیادهای جهانی و سایر مسابقات ملی تهیه و تدوین شده است. امید است که نوجوانان کوشا و مستعد سرزمین‌مان با تجربه پرسش‌هایی مفهومی، چالش برانگیز و در سطح استاندارد جهانی بتوانند در مسابقات و المپیادهای ملی و جهانی همچنان بدرخشند.

دبیرخانه المپیاد مبتکران

۱. وزن یک هندوانه با مجموع وزن یک طالبی و دو خربزه برابر است. مجموع وزن یک هندوانه و یک طالبی با مجموع وزن سه خربزه برابر است. وزن یک خربزه چند برابر وزن یک طالبی است؟

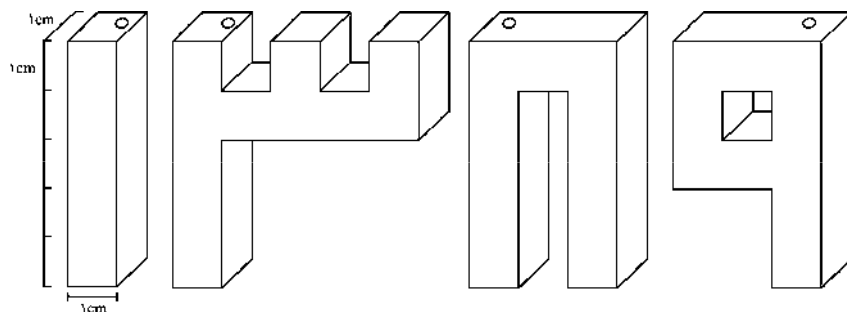
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ (۵) نمی توان گفت

۲. نمودار زیر، وزن یک جعبه توپ تنیس (با احتساب وزن خود جعبه) را برحسب تعداد توپهای درون آن نشان می دهد. وزن هر توپ تنیس چند گرم است؟

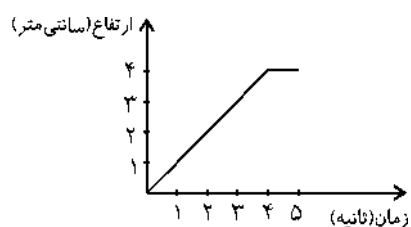


- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۲۲/۵ (۵) ۱۳۰

۳. در نوروز امسال، چهار گلدان به شکل زیر ساختیم، سپس از حفره ی بالای هر یک از آنها، آب به داخل گلدانها ریختیم. در هر ثانیه ۱ سانتی متر مکعب از هر گلدان پر شد.

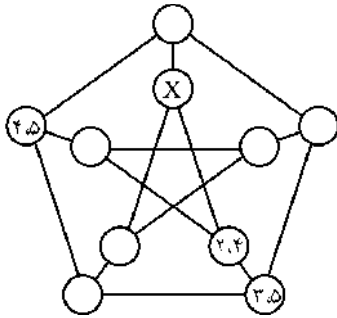


شکل زیر نمودار ارتفاع آب (برحسب سانتی متر) در یکی از این گلدانها در ۵ ثانیه ی اول پر شدن آب در آن گلدان را نشان می دهد. این نمودار مربوط به کدام گلدان است؟ (ارتفاع آب بیشترین فاصله ی سطح آب از کف گلدان است.)



- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵) ۱ و ۹

۴. می‌دانیم مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ دارای ۱۰ زیرمجموعه دو عضوی است. با کمی دقت می‌فهمیم هر کدام از این زیرمجموعه‌ها با ۳ زیرمجموعه دیگر عضو مشترک ندارد. خوب به شکل زیر دقت کنید. شکل دارای ۱۰ دایره است که هر دایره به ۳ دایره دیگر وصل



است. می‌خواهیم در این شکل، تمامی این ۱۰ زیرمجموعه (عضوهای زیرمجموعه) را در دایره‌ها بنویسیم به شرطی که هر دو دایره‌ای که به هم وصل هستند، عضو مشترک نداشته باشند. سه تا از زیرمجموعه‌ها در شکل مشخص شده‌اند. اگر بقیه‌ی دایره‌ها را پیدا کنیم، داخل دایره‌ای که در آن X نوشته شده است، کدام مجموعه قرار خواهد گرفت؟

- (۱) $\{1, 3\}$
 (۲) $\{1, 4\}$
 (۳) $\{1, 5\}$
 (۴) $\{2, 3\}$
 (۵) $\{2, 5\}$

۵. نرگس به حداقل چند وزنه نیاز دارد اگر بخواهد با قرار دادن آن‌ها در یک کفه ترازو اشیایی از وزن ۱ گرم تا ۳۵ گرم را وزن کند؟ (وزن اشیاء عددی صحیح است.)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶

۶. علی هنگام رفتن به مدرسه برای گذر از خیابان از یک پله برقی استفاده می‌کند. او بعضی وقت‌ها که عجله دارد، در هر ثانیه یک پله هم خودش در جهت حرکت پله برقی حرکت می‌کند و ۲۰ ثانیه‌ای پله‌ها را طی می‌کند. بعضی وقت‌ها که بیش‌تر عجله دارد، در هر ثانیه دو پله در جهت حرکت پله برقی حرکت می‌کند و در ۱۶ ثانیه پله‌ها را طی می‌کند. اگر او بتواند در هر ثانیه ۵ پله در جهت حرکت پله برقی حرکت کند، چند ثانیه طول می‌کشد تا پله‌ها را طی کند؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲ (۵) ۱۵

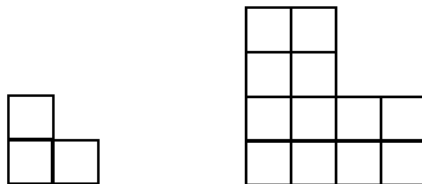
۷. مکعب $ABCDEFGH$ مفروض است. نقطه‌ی O درون این مکعب قرار دارد. فاصله‌ی این نقطه از ۶ وجه مکعب را به دست می‌آوریم. این ۶ فاصله برابر هستند با ۱، ۵، ۹، ۷، ۱۱ و ۱۵. چنان‌چه فاصله‌ی نقطه‌ی O از وجه $ABCD$ برابر با ۱۱ باشد، فاصله‌اش از وجه $EFGH$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۷ (۵) ۱۵

۸. یک مکعب ۶ وجه و ۸ رأس دارد. اگر اعداد ۱ تا ۸ را روی رأس‌های مکعب بنویسیم و در مرکز هر وجه، حاصل جمع اعداد رأس‌های آن وجه را بنویسیم، سپس اعداد نوشته شده روی مرکز وجه‌های مجاور را به هم وصل کنیم. (دو وجه مجاور دارای یک ضلع مشترک هستند) جسمی درون مکعب ایجاد می‌شود. آن جسم چند وجه دارد و جمع اعداد نوشته شده روی رأس‌های آن چند است؟

- (۱) ۶ وجهی، ۱۰۸ (۲) ۸ وجهی، ۱۰۸ (۳) ۸ وجهی، نامعلوم (۴) ۸ وجهی، ۱۴۴ (۵) ۶ وجهی، ۱۴۴

۹. در یک شهر موجودات عجیبی زندگی می‌کنند. این موجودات عجیب همیشه به شکل L هستند. در این جا شکل یک L یک ساله و یک L دو ساله را مشاهده می‌کنید:



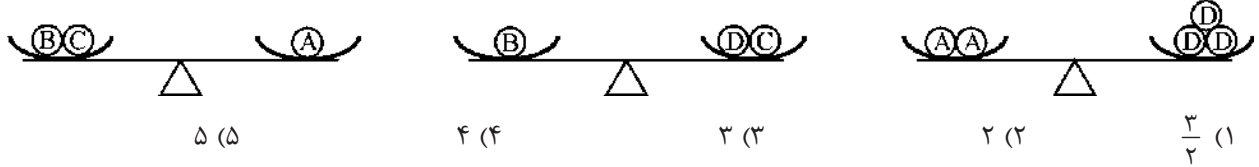
L یک ساله

L دو ساله

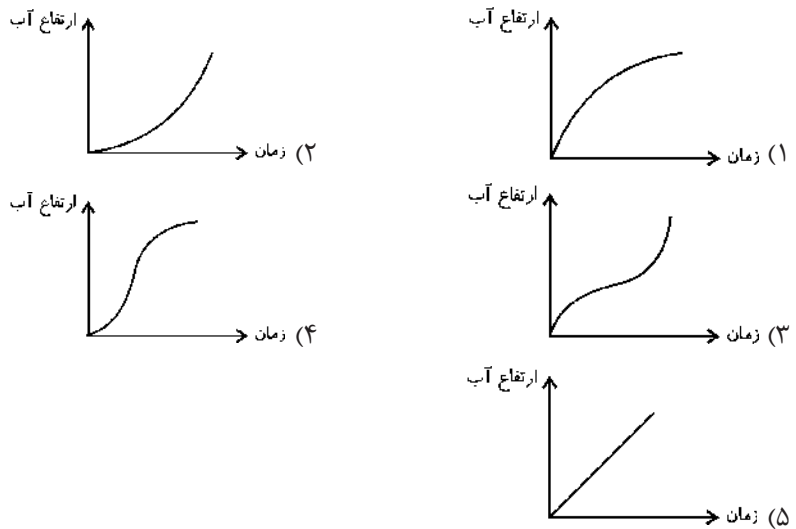
اگر این موجودات L شکل به همین ترتیب رشد کنند، یک L سه ساله را با چند L یک ساله می‌توان کاملاً پوشاند؟

- (۱) ۳ (۲) ۲۷ (۳) ۹ (۴) ۴ (۵) ۷

۱۰. ترازوهای زیر هر سه در حالت تعادل اند. وزن گلوله‌ی B چند برابر وزن گلوله‌ی C است؟



۱۱. درون یک ٚنگ کروی شکل با سرعت ثابت آب می‌ریزیم. کدام گزینه نمودار تغییرات ارتفاع آب درون ٚنگ را بر حسب زمان به درستی نشان می‌دهد؟

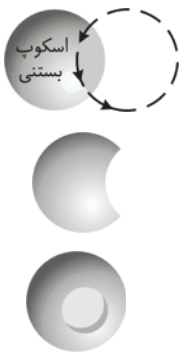


۱۲. در شکل زیر، یک مستطیل به ۹ بخش مستطیل شکل تقسیم و عدد مساحت هر بخش داخل آن نوشته شده است. مقدار X بر حسب a, b, c, d و e کدام است؟

a	b	
	c	d
x		e

- $\frac{bd}{ace}$ (۲)
 $\frac{ec}{abd}$ (۱)
- $\frac{ace}{bd}$ (۴)
 $\frac{abd}{ec}$ (۳)
- $\frac{ebc}{ad}$ (۵)

۱۳. از یک اسکوپ بستنی شکلاتی به شکل کره، با یک قاشق اسکوپ‌ساز که هم‌اندازه اسکوپ بستنی است، بخشی از اسکوپ بستنی را برداشته‌ایم تا به شکل روبه‌رو درآید. اگر مساحت اسکوپ بستنی در ابتدا ۵۰cm^2 باشد، مساحت بستنی باقی‌مانده چند سانتی‌متر مربع است؟



- (۱) ۶۰
- (۲) $۵۰ - ۴\pi$
- (۳) بستگی به عمق حفره ایجاد شده دارد.
- (۴) ۵۰
- (۵) $۵۰ + ۴\pi$

۱۴. دو وجه از یک چند وجهی را مجاور گوئیم اگر دارای یک ضلع مشترک باشند. وسط وجه‌های مجاور یک مکعب را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم. چند وجهی که به این ترتیب درون مکعب ایجاد می‌شود را در نظر می‌گیریم و برای آن نیز همین عمل را انجام می‌دهیم. این عمل را دو بار دیگر ادامه می‌دهیم (این عمل در هر مرحله روی چند وجهی ایجاد شده از مرحله قبلی انجام می‌شود یعنی این عمل در کل ۴ بار انجام می‌شود). جسم نهایی حاصل از این ۴ مرحله چیست؟

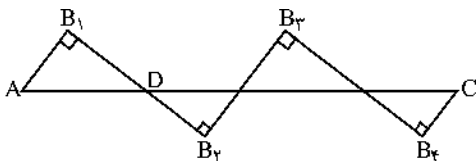
- (۱) مکعب (۲) ۸ وجهی منتظم (۳) ۱۲ وجهی منتظم (۴) مکعب مستطیل (۵) ۸ وجهی نامنتظم

۱۵. عقربه‌های ساعتی از ساعت ۱۲ شب تاکنون در نیمی از اوقات با دو برابر سرعت عادی و در نیمی دیگر با نصف سرعت عادی حرکت کرده‌اند. اکنون این ساعت ۱۰:۰۰ صبح را نشان می‌دهد. ساعت در واقع چند است؟

- (۱) ۶:۰۰ (۲) ۷:۰۰ (۳) ۸:۰۰ (۴) ۹:۰۰ (۵) ۱۰:۰۰

۱۶. در شکل زیر اندازه پاره خط AC برابر ۳۵ است. اگر داشته باشیم:

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{B}_3 = \hat{B}_4 = 90^\circ, B_1D = 8, AB_1 = 6$$



طول پاره خط شکسته $AB_1B_2B_3B_4C$ چند است؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۴۰ (۳) ۲۵ (۴) ۸۰ (۵) ۷۰

۱۷. اگر d, c, b, a چهار عضو دوه‌دو متمایز از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ باشند، بزرگ‌ترین مقدار ممکن

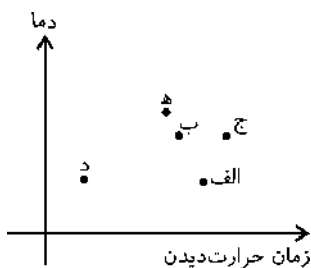
$$\frac{abc + abd + acd + bcd}{abcd}$$

کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{25}{12}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) ۴ (۵) $\frac{275}{504}$

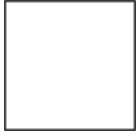
۱۸. در پنج ظرف از جنس مس به شکل یکسان، به یک مقدار از پنج مایع متفاوت ولی هم‌دما ریخته‌ایم که هیچ‌یک با مس واکنش شیمیایی نمی‌دهند. هر پنج ظرف را به طور یکسان و یکنواخت حرارت می‌دهیم ولی ظرف‌ها را در زمان‌های متفاوت برمی‌داریم و دمای مایع درون ظرف برداشته شده را سریع اندازه‌گیری می‌کنیم. دمای هر یک از پنج مایع برحسب زمان حرارت دیدن در نمودار زیر مشخص است. اگر دمای هر مایع در اثر حرارت به طور یکنواخت بالا رود، کدام یک از مایع‌ها در اثر گرما سریع‌تر داغ می‌شوند؟

(به عبارت علمی کدام یک ظرفیت گرمایی کم‌تری دارند؟)



- (۱) الف (۲) ب (۳) ج (۴) د (۵) ه

۱۹. یک مربع کاغذی را یک بار از روی یکی از قطرهایش تا کردیم. سپس تای کاغذ را باز کردیم و یک تای دیگر از یکی از رأس‌های آن طوری ایجاد کردیم که تای جدید، جای تای قبلی، یعنی قطر مربع را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کند. این تاء، ضلع مربع را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

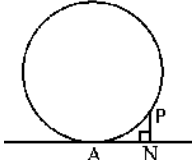


- (۱) ۱ به ۳
(۲) ۱ به ۴
(۳) ۱ به ۵
(۴) ۱ به ۶
(۵) هیچ کدام

۲۰. مستطیل 19×65 سانتی‌متری را به وسیله خط‌های موازی ضلع‌ها، به مربع‌هایی به ضلع یک سانتی‌متر بخش کرده‌ایم. اگر قطر این مستطیل را رسم کنیم، این قطر از چند تا از نقاط گره‌ای درون یا روی مستطیل می‌گذرد؟

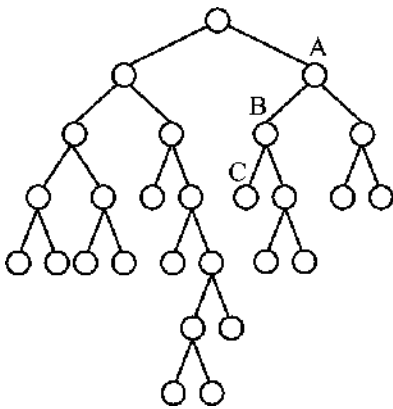
- (۱) ۲
(۲) ۱۹
(۳) ۶۵
(۴) ۴۶
(۵) ۴۸

۲۱. دایره‌ای بر خطی در نقطه A مماس شده است. از نقطه P روی دایره، عمود PN بر خط را رسم می‌کنیم. اگر $AN = 15$ و $PN = 9$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



- (۱) ۲۸
(۲) ۲۵
(۳) ۲۰
(۴) ۱۸
(۵) ۱۷

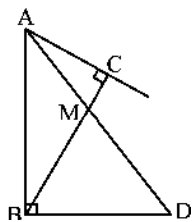
۲۲. نقشه شبکه روستاهای یک منطقه و راه‌های ارتباطی بین آن‌ها به صورت مقابل می‌باشد. مثلاً $A - B - C$ یا همان $C - B - A$ یکی از این مسیرهاست که A را به C وصل می‌کند. $A - B$ خود یکی از مسیرهاست که A را به B وصل می‌کند و $B - C$ نیز یکی از مسیرهاست که B را به C وصل می‌کند. چند مسیر مختلف بین روستاهای این شبکه وجود دارد؟



(توجه: بین هیچ دو روستایی بیش از یک مسیر وجود ندارد.)

- (۱) ۳۵۱
(۲) ۷۰۲
(۳) ۷۲۹
(۴) ۲۶
(۵) بی‌شمار

۲۳. در شکل زیر زاویه \hat{BAC} برابر 60° و زوایای B و C نیز برابر 90° می‌باشند. AD نیمساز زاویه رأس A و هم‌چنین اندازه ضلع BD برابر با 6cm می‌باشد. طول AD برابر است با: (شکل دقیق نمی‌باشد)



- (۱) 12cm
(۲) 9cm
(۳) 10cm
(۴) 15cm

(۵) اطلاعات مسئله کافی نمی‌باشد.

۲۴. ماشین‌های منطقی A، B، C و D به این صورت کار می‌کنند که هر کدام دو ورودی دارند، در این ورودی‌ها، عددهای صفر و یک وارد می‌شوند و با توجه به ورودی‌های دریافتی، خروجی به دست می‌آید، جدول ورودی‌ها و خروجی‌ها در زیر نمایش داده شده است.

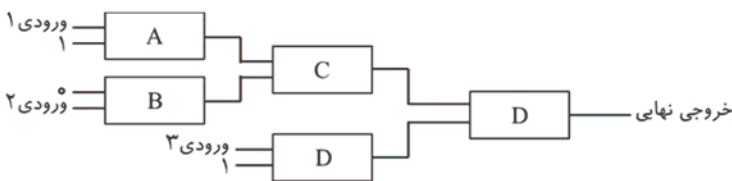
a	A		c
b			
a	b	c	
۰	۰	۰	
۰	۱	۰	
۱	۰	۰	
۱	۱	۱	

a	B		c
b			
a	b	c	
۰	۰	۰	
۰	۱	۱	
۱	۰	۱	
۱	۱	۱	

a	C		c
b			
a	b	c	
۰	۰	۱	
۰	۱	۰	
۱	۰	۰	
۱	۱	۰	

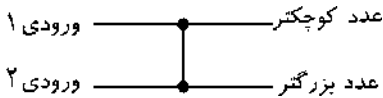
a	D		c
b			
a	b	c	
۰	۰	۱	
۰	۱	۰	
۱	۰	۱	
۱	۱	۰	

ورودی‌های ۱، ۲ و ۳ از شبکه زیر می‌توانند اعداد صفر یا یک دریافت کنند. در مجموع ورودی‌ها ۸ حالت مختلف می‌توانند دریافت کنند. در چند حالت از این ۸ حالت، خروجی نهایی صفر می‌باشد؟

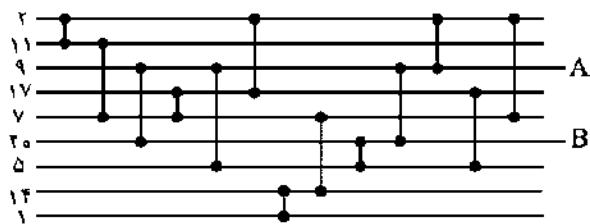


- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷
(۵) ۸

۲۵. به شکل زیر با دو ورودی توجه کنید.



اگر دو عدد را به عنوان ورودی به این شبکه بدهیم، در خروجی، این اعداد را مرتب می‌کند، عدد بزرگ‌تر در پایین و عدد کوچک‌تر در بالا قرار می‌گیرد. اگر به شبکه زیر با ۹ ورودی که از تعدادی شبکه مرتب‌کننده دوتایی تشکیل شده، عددهای زیر را به عنوان ورودی بدهیم، در خروجی A و B چه عددهایی ظاهر می‌شوند؟



- (۱) $A=9$ و $B=20$
(۲) $A=1$ و $B=17$
(۳) $A=2$ و $B=17$
(۴) $A=5$ و $B=9$
(۵) $A=20$ و $B=5$

۲۶. بهار عددهای ۱۱ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۶ - ۲۷ - ۳۲ - ۳۵ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۱ و ۴۷ را روی کاغذ می‌نویسد و کاغذ را به لیدها و کیانا نشان می‌دهد. سپس یکی از عددهای روی کاغذ را انتخاب می‌کند. یکان آن را مخفیانه به لیدها و دهگان آن را مخفیانه به کیانا می‌گوید و از آن‌ها می‌خواهد که بدون این که رقمی که مخفیانه به آن‌ها گفته شده را بازگو کنند، عدد انتخابی‌اش را پیدا کنند. این مکالمه بین لیدها و کیانا برقرار شد:

لیدها: من متوجه نشدم بهار چه عددی را انتخاب کرده است.
کیانا: می‌دانستم که متوجه نخواهی شد!

لیدها: حالا متوجه شدم!

بهار کدام عدد را انتخاب کرده است؟

- (۱) ۱۱
(۲) ۲۶
(۳) ۳۵
(۴) ۴۱
(۵) ۴۷

۳۱. مجموعه A را با دو عضو $A = \{a, b\}$ در نظر بگیرید. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر است با ۴ زیرمجموعه که با حروف M, N, P, Q نام‌گذاری می‌کنیم.

جدول 2×4 مجموعه‌ای را این‌گونه نام‌گذاری و تعریف می‌کنیم که ستون‌ها با نام زیر مجموعه‌ها و سطرها با نام عضوها. سپس به سراغ هر عضو می‌رویم. اگر عضو a در هر زیرمجموعه‌ای باشد در محل تقاطع سطر مربوطه به آن عضو و ستون مربوطه به آن زیرمجموعه یک علامت ضربدر قرار می‌دهیم و این عمل را برای کلیه عضوهای مجموعه انجام می‌دهیم. در انتها جدولی خواهیم داشت که تعدادی از خانه‌های آن خالی و تعدادی دیگر علامت ضربدر دارد. به این جدول یک جدول مجموعه‌ای ۲ عضوی گفته می‌شود. کدام گزینه در مورد جدول مجموعه‌ای ۸ عضوی درست نمی‌باشد؟

	M	N	P	Q
a		X		X
b			X	X

- (۱) این جدول شامل 2^1 خانه می‌باشد.
- (۲) تعداد ستون‌های این جدول که ۷ ضربدر دارند، ۸ ستون می‌باشد.
- (۳) سطری وجود دارد که تعداد خانه‌های خالی آن 2^7 خانه می‌باشد.
- (۴) ستونی وجود دارد که کل خانه‌های آن خالی و ستونی وجود دارد که تمامی خانه‌های آن پر می‌باشد.
- (۵) بیش از نیمی از خانه‌های این جدول پر می‌باشد.

۳۲. بزرگ‌ترین مقدار نسبت یک عدد ۳ رقمی بر مجموع رقم‌های آن چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۲۰۰ (۳) ۵۰۰ (۴) ۵۰ (۵) ۱۰۰

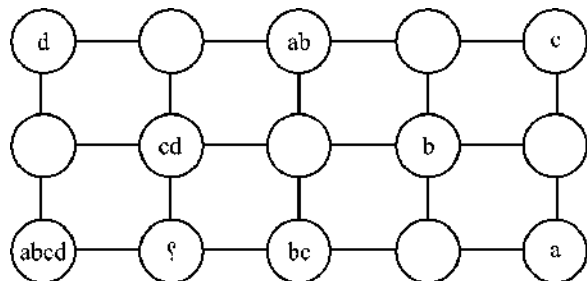
۳۳. دو تیم فوتبال «امید» و «شاهین» با هم بازی کردند. می‌دانیم در پایان، بازی ۷ - ۶ به نفع تیم شاهین پایان یافت. می‌دانیم در حین بازی تیم شاهین، یک بار پیشی گرفت، یک بار اختلاف را زیاد کرد، چهار بار اختلاف را کم کرد و یک بار بازی را مساوی کرد. همچنین می‌دانیم در حین بازی تیم امید یک بار پیشی گرفت، چهار بار اختلاف را زیاد کرد و یک بار اختلاف را کم کرد.

پیشی گرفتن A از B : یعنی A و B مساوی بودند که A یک گل زد و پیشی گرفت.
 اختلاف را زیاد کرد: یعنی بازی به نفع A در جریان بود که A یک گل زد و اختلاف را زیاد کرد.
 اختلاف را کم کرد: یعنی بازی به نفع B در جریان بود که A یک گل زد و اختلاف را کم کرد.
 بازی را مساوی کرد: یعنی A یک گل عقب بود که یک گل زد و بازی را مساوی کرد.

با توجه به داده‌های مسأله گل‌های یازدهم، دوازدهم و سیزدهم را به ترتیب کدام تیم زده‌اند؟ (از راست به چپ)

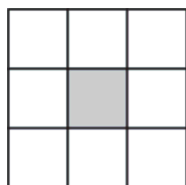
- (۱) شاهین، امید، شاهین
- (۲) شاهین، شاهین، امید
- (۳) امید، شاهین، امید
- (۴) شاهین، شاهین، شاهین
- (۵) امید، شاهین، شاهین

۳۴. می‌دانیم مجموعه‌ی $\{a \cdot b \cdot c \cdot d\}$ دارای ۱۶ زیرمجموعه است. اگر زیرمجموعه‌ی تهی را از آن حذف کنیم، ۱۵ زیرمجموعه خواهیم داشت. تمامی این ۱۵ زیرمجموعه را در خانه‌های جدول زیر طوری گذاشته‌ایم که اگر دو دایره به هم وصل باشند، حتماً دارای عضوی یا عضوهای مشترک می‌باشند. بعضی از خانه‌ها را پر کرده‌ایم. چنانچه جدول را کامل کنیم، خانه‌ای که با علامت ؟ نشان‌دار شده است، کدام است؟



- (۱) $\{b \cdot d\}$
- (۲) $\{a \cdot c\}$
- (۳) $\{b \cdot c \cdot d\}$
- (۴) $\{a \cdot b \cdot c\}$
- (۵) $\{a \cdot c \cdot d\}$

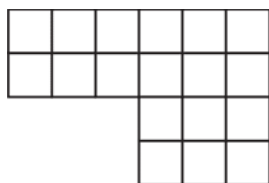
۳۵. خانه‌های جدول مربع شکل زیر را با اعداد ۱ تا ۸ پر می‌کنیم طوری که مجموع اعداد هر ۴ ضلع مربع با هم برابر باشند. این مجموع



کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۳
(۳) ۱۴
(۴) ۱۵
(۵) ۱۶

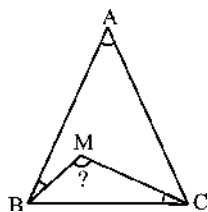
۳۶. نقشه خانه‌های یک روستا به صورت زیر است. متأسفانه چندین ماه است که از بارندگی خبری نیست و خشکسالی همه جا را فراگرفته است. دولت در راستای تأمین آب مصرفی خانواده‌های این روستا تعدادی تانکر آب در تعدادی از خانه‌ها قرار داده است، اما با این شرط که اگر در خانه‌ای تانکر آب قرار داده شد، این تانکر علاوه بر تأمین آب مصرفی آن خانه، خانه‌هایی که با آن خانه دیوار مشترک دارند (ضلع مشترک دارند) را نیز تأمین کند. حداقل چه تعداد تانکر آب لازم است که آب مصرفی تمامی خانه‌های



این روستا تأمین شود؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷
(۵) ۸

۳۷. مثلث ABC متساوی‌الساقین و زوایای ABM و MCB با هم برابر هستند. اگر $\hat{A} = 22^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی BMC

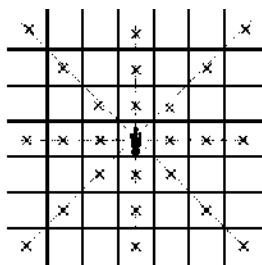
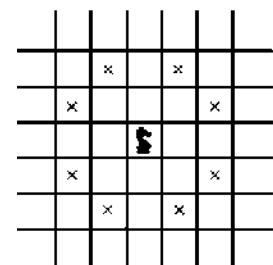


کدام است؟

- (۱) 158°
(۲) 90°
(۳) 120°
(۴) 101°

(۵) اطلاعات مسئله کافی نمی‌باشد.

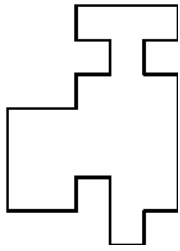
۳۸. یک صفحه‌ی شطرنج 4×4 داریم. می‌خواهیم یک وزیر و دو اسب یکسان را در این صفحه طوری قرار دهیم که تمامی ۱۳ خانه‌ی اشغال نشده، توسط حداقل یکی از مهره‌ها تهدید شود. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ (وزیر و اسب مطابق شکل زیر، در هر صفحه‌ی شطرنجی خانه‌های علامت زده را تهدید می‌کنند اگر اسب در مسیر حرکت وزیر قرار گیرد، فقط خانه‌های بین اسب و وزیر توسط وزیر تهدید می‌شوند. وزیر در سمت راست و اسب در سمت چپ)



(۱) امکان‌پذیر نیست.

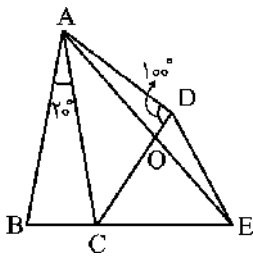
- (۲) ۴ طریق
(۳) ۸ طریق
(۴) ۱۶ طریق
(۵) ۳۲ طریق

۳۹. شکل زیر را حداقل با چند مستطیل می توان پوشاند؟ (مستطیل ها می توانند با هم، هم پوشانی داشته باشند)



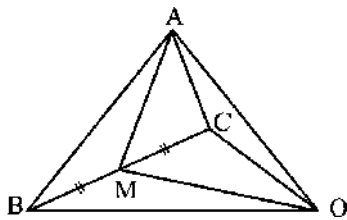
- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) ۸
- (۵) ۹

۴۰. در شکل زیر $AB = AC$ و $AD = DC = CE$ و همچنین $\hat{A} = 20^\circ$ و $\hat{D} = 100^\circ$ می باشد. با توجه به مطالب گفته شده کدام گزینه صحیح نمی باشد؟



- (۱) $\triangle ADE$ متساوی الساقین است.
- (۲) $\hat{AOC} = 120^\circ$
- (۳) $\hat{DEA} = 10^\circ$
- (۴) $\triangle ABE$ متساوی الساقین است.
- (۵) $\hat{EAC} = 30^\circ$

۴۱. در شکل زیر مساحت مثلث AOB برابر است با ۲۴ و مساحت مثلث AOC برابر است با ۱۳. از طرفی می دانیم که $BM = MC$



است. مساحت مثلث AOM برابر است با:

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۸/۵
- (۳) ۲۲
- (۴) ۱۶/۵
- (۵) ۱۶

۴۲. یکی از سه نفر بهنام، جواد و احمد مرتکب اشتباهی می شوند. ضمن سؤال و جواب، هر یک از آن ها دو جمله به این ترتیب بیان کردند:

بهنام: من این اشتباه را نکرده ام. جواد هم مرتکب اشتباه نشده است.

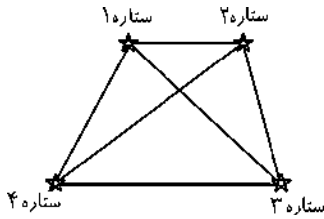
جواد: بهنام این کار را نکرده است. احمد مقصر بوده است.

احمد: من خلافی نکرده ام. بهنام مرتکب اشتباه شده است.

معلوم شد که یکی از این سه نفر هر دو جواب را نادرست داده است، دیگری هر دو جواب را صحیح گفته است و سومی یکی از جواب ها را درست و جواب دیگر را نادرست داده است. کار اشتباه را کدام یک مرتکب شده است؟ چه کسی تمام جواب ها را نادرست داده است؟

- (۱) بهنام اشتباه کرده، جواد هر دو بار دروغ گفته است.
- (۲) احمد اشتباه کرده، بهنام هر دو بار دروغ گفته است.
- (۳) جواد اشتباه کرده، احمد هر دو بار دروغ گفته است.
- (۴) جواد اشتباه کرده، بهنام هر دو بار دروغ گفته است.
- (۵) بهنام اشتباه کرده، احمد هر دو بار دروغ گفته است.

۴۳. ۴ ستاره به صورت زیر قرار گرفته‌اند. یعنی به صورت یک چهارضلعی محدب که چهار رأس آن روی یک صفحه قرار دارد. با استفاده از مطالعات و محاسبات نجومی، فاصله‌ی بین ستاره‌ی ۱ و ستاره‌ی ۳ و فاصله‌ی بین ستاره‌ی ۲ و ستاره‌ی ۴ به ترتیب ۱۰۰ سال نوری و ۲۰۰ سال نوری به دست آمده است. قرار است با استفاده از یک سفینه نوری برای انجام برخی مطالعات نجومی از ستاره ۱ به ستاره ۲ و از ستاره ۲ به ستاره ۳ و سپس از ستاره ۳ به ستاره ۴ و در انتها از ستاره ۴ به ستاره ۱ مسیری طی شود. کدام گزینه در مورد مجموع مسافتی که سفینه طی خواهد نمود دقیق‌تر است؟ (مسافت طی شده را با d نشان می‌دهیم.)



(۱) $d > 300$

(۲) $200 < d < 300$

(۳) $100 < d < 400$

(۴) $150 < d < 300$

(۵) $300 < d < 600$

۴۴. حداقل چند عدد از مجموعه A انتخاب شود که حاصل ضرب حداقل دو تا از این اعداد مربع کامل باشد؟

$A = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 25\}$

(۵) ۸

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۴۵. پاره‌خط‌های بین نقاط زیر چند بار نیم‌ساز ربع اول و سوم را قطع می‌کنند؟

$A(-10, 2), B(-9, 11), C(3, 7), D(8/5, 4), E(7, -1), F(10, -2/5), G(6, -3), H(8, -7), I(9, -4)$

(۵) ۳۶

(۴) ۱۸

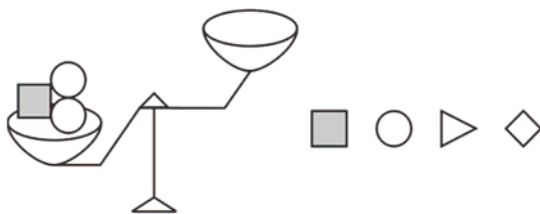
(۳) ۱۴

(۲) ۹

(۱) ۸

۴۶. چهار نوع شکل داریم:

دو نوع مربع، مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره که در زیر نشان داده شده‌اند. هریک از آن‌ها به اندازه مساحت خود وزن دارند. در کفه دوم ترازو اشکال موجود در کدام گزینه را قرار دهیم تا دو کفه کم‌ترین فاصله را داشته باشند؟



(۱) ۴ مربع سفید و ۱ مثلث

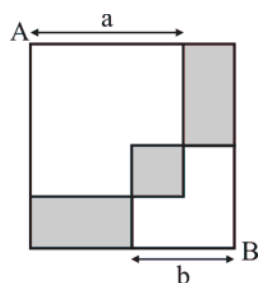
(۲) ۵ مثلث

(۳) ۴ مربع سفید و ۱ دایره

(۴) ۳ مربع رنگ شده

(۵) ۵ مربع سفید

۴۷. دو مربع به ضلع‌های a و b در دو گوشه A و B از یک مستطیل 22×20 رسم کرده‌ایم. محیط سه مستطیل رنگی نشان داده شده در شکل با هم برابر است. با توجه به داده‌های مسأله کدام تساوی نتیجه می‌شود؟



(۱) $a + b = 28$

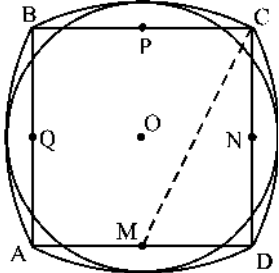
(۲) $a - b = 20$

(۳) $a = 18$

(۴) $a = 16$

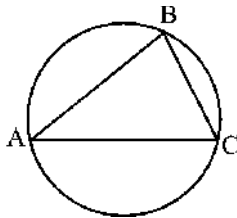
(۵) $a = 2b$

۴۸. در شکل زیر طول ضلع مربع برابر با ۲ است. به مرکز وسط هر ضلع کمانی رسم می‌کنیم که از دو رأس روبه‌روی آن نقطه بگذرد. بنابراین شکل کماکان متقارن است. سپس به مرکز مربع دایره‌ای رسم می‌کنیم تا بر این ۴ کمان مماس شود. شعاع این دایره چند است؟



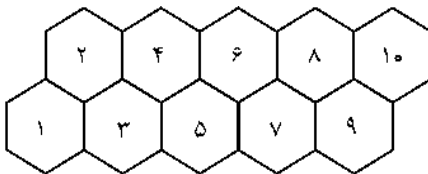
- (۱) $2\sqrt{5} - 2$
- (۲) $\sqrt{5} - 1$
- (۳) $\sqrt{5} - 2$
- (۴) $1 + \sqrt{5}$
- (۵) $\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$

۴۹. مثلث ABC و دایره محیطی آن (دایره‌ای که از هر سه رأس آن می‌گذرد) مفروض هستند. می‌دانیم $BC < AB$ است. عمود منصف ضلع AC را می‌کشیم و از دو طرف امتداد می‌دهیم. این عمود منصف از یک طرف ضلع AB را در نقطه D و از طرف دیگر امتدادش دایره را در E قطع می‌کند. C را به D وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در F قطع کند. چنان‌چه پاره‌خط AE با پاره‌خط CF موازی باشد، کدام گزینه درست است؟



- (۱) $\hat{B} = 2\hat{A}$
- (۲) $\hat{A} = 2\hat{B}$
- (۳) $\hat{A} = \hat{B}$
- (۴) $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$
- (۵) $\hat{A} + 2\hat{B} = 90^\circ$

۵۰. در شکل زیر، بخشی از یک کندو نشان داده شده است. زنبوری که در خانه ۱ قرار دارد، در هر حرکت می‌تواند به یکی از خانه‌های مجاور که شماره آن‌ها از شماره خانه‌ای که در آن قرار دارد بیش‌تر است، برود. او با چند راه مختلف می‌تواند به خانه شماره ۱۰ برود؟



- (۱) 2^9
- (۲) $2^8 - 2^9$
- (۳) ۵۵
- (۴) ۹!
- (۵) ۳۴

۵۱. اگر a, b, c سه عدد صحیح مثبت و غیرمساوی باشند و $a^2 + b^2 + c^2 = 121$ باشد، کدام گزینه بر $a + b + c$ بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۴۸
- (۲) ۴۹
- (۳) ۵۰
- (۴) ۵۱
- (۵) ۵۲

۵۲. اعداد p, q, r سه عدد طبیعی اول هستند که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$5(p^2 + q^2 + r^2) = 1250 - 2pqr$$

چنان‌چه مقادیر p, q, r را در رابطه بالا پیدا کنیم، بزرگ‌ترین آن‌ها برابر با کدام است؟

- (۱) ۷
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۷
- (۵) ۱۹

۵۳. در چهارضلعی ABCD داریم:

$$AB=7 \text{ و } BC=4 \text{ و } CD=1 \text{ و } DA=8$$

کدام عبارت‌ها درست هستند؟

(I) اگر $B=90^\circ$ باشد، آن گاه $D=90^\circ$ می‌شود.

(II) اگر $B>90^\circ$ باشد، آن گاه $D>90^\circ$ می‌شود.

(III) اگر $B<90^\circ$ باشد، آن گاه $D<90^\circ$ می‌شود.

(۵) I، II و III

(۴) I و III

(۳) I و II

(۲) II و III

(۱) I

۵۴. پنج شناگر: رضا، نیما، احسان، کامران و آرش در غیاب مربی یک مسابقه شنا بین خود ترتیب دادند. وقتی مربی آمد و نتیجه را

پرسید، این پاسخ‌ها را شنید:

رضا: ① کامران به مقام دوم رسید ② خود من سوم شدم.

نیما: ③ من بهترین نتیجه را به دست آوردم ④ ولی احسان دوم شد.

احسان: ⑤ من سوم شدم ⑥ ولی نیما آخر شد.

کامران: ⑦ من دوم شدم ⑧ ولی آرش چهارم شد.

آرش: ⑨ من توانستم فقط یک شناگر را پشت سر بگذارم ⑩ رضا مسابقه را برد.

بعد از سردرگمی مربی، شناگران گفتند که هریک از آن‌ها یک آگاهی درست داده‌اند و یک آگاهی نادرست. چه کسی مسابقه را

برده است؟

(۵) آرش

(۴) کامران

(۳) احسان

(۲) نیما

(۱) رضا

۵۵. سه نقطه را روی یک کره علامت می‌زنیم، کدام گزینه درست است؟

(۱) این سه نقطه حتماً روی یک نیم‌کره یا مرز آن با نیم‌کره دیگر قرار می‌گیرند.

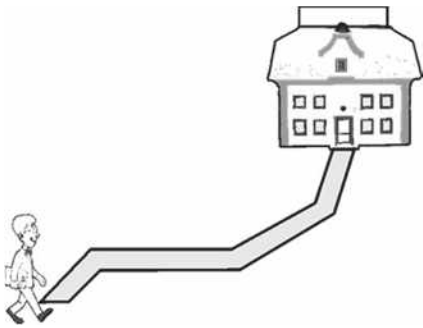
(۲) این سه نقطه حتماً روی یک نیم‌کره یا مرز آن با نیم‌کره دیگر قرار نمی‌گیرند.

(۳) این سه نقطه حتماً روی یک ربع کره یا مرز میان آن با بقیه کره قرار می‌گیرند.

(۴) این سه نقطه حتماً روی یک ربع کره یا مرز میان آن با بقیه کره قرار نمی‌گیرند.

(۵) هیچ‌یک از گزینه‌ها همیشه درست، نیست.

۵۶. این مسیر نشان‌دهنده خطی روی یک نمودار است که نشان می‌دهد چه قدر طول کشیده است که علی تا مدرسه پیاده برود. محور افقی زمان را نشان می‌دهد و محور عمودی مسیر پیموده شده را نشان می‌دهد. شما فکر می‌کنید در مسیر حرکت علی تا مدرسه چه اتفاقی افتاده است؟



(۱) در تمام طول مسیر حرکت از خانه تا مدرسه علی با سرعت ثابت حرکت کرده است.

(۲) علی ابتدا سریع حرکت کرده است و سپس سرعت خود را کم کرده است.

(۳) ابتدا با سرعت زیادی حرکت کرد و سپس ایستاده است و در انتهای راه سرعت خود را کم کرده است.

(۴) بیش‌ترین سرعت را در ابتدای حرکت و کم‌ترین سرعت را در انتهای حرکت داشته است.

(۵) بیش‌ترین سرعت را در انتهای حرکت داشته و گاهی در طول مسیر ایستاده است.

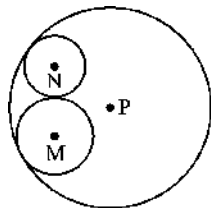
۵۷. چند جفت عدد x و y می‌توان یافت که سه جمله xy ، $\frac{x}{y}$ و $x - y$ با هم مساوی بشوند؟

(۱) هیچ جفت (۲) ۱ جفت (۳) ۲ جفت (۴) ۳ جفت (۵) ۴ جفت

۵۸. خارج‌قسمت تقسیم $a + a^2 + \dots + a^{100}$ بر $a^{-1} + a^{-2} + \dots + a^{-100}$ برابر است با:

(۱) a^{100} (۲) a^{101} (۳) a^{-100} (۴) a^{-101} (۵) a

۵۹. سه دایره مانند شکل زیر بر هم مماس هستند، به طوری که $MN = 9$ و $PM = 5$ و $PN = 7$ می‌باشد، حاصل ضرب بزرگ‌ترین و



کوچک‌ترین شعاع‌ها چه قدر است؟

(۱) $36/75$ (۲) $38/5$

(۳) $40/25$ (۴) 45

(۵) $52/25$

۶۰. چهار نقطه روی یک صفحه‌اند. آیا ممکن است:

(الف) فاصله دو به دوی آن‌ها، به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ سانتی‌متر شود؟

(ب) از این فاصله‌های دو به دو نقاط، پنج تا برابر ۱ و ششمی برابر $\sqrt{3}$ سانتی‌متر باشد.

(ج) از این فاصله‌های دو به دو نقاط، پنج تا برابر ۱ و ششمی برابر ۲ سانتی‌متر باشد.

(۱) (الف) ممکن است، (ب) ممکن است، (ج) ممکن است.

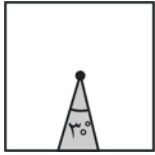
(۲) (الف) ممکن نیست، (ب) ممکن نیست، (ج) ممکن نیست.

(۳) (الف) ممکن نیست، (ب) ممکن نیست، (ج) ممکن است.

(۴) (الف) ممکن نیست، (ب) ممکن است، (ج) ممکن نیست.

(۵) (الف) ممکن است، (ب) ممکن است، (ج) ممکن نیست.

۶۱. یک باغبان زمینی مربع شکل به طول ضلع ۶ متر دارد، در مرکز این باغ، یک فواره وجود دارد که با زاویه چرخش ۳۰ درجه تمامی زمین روبه روی خود را آب می‌پاشد. او می‌خواهد جهت فواره را طوری قرار دهد که بیشترین مساحت از سطح زمین آبیاری شود. این حداکثر مساحت چند است؟ (به عنوان مثال، در شکل زیر ناحیه‌ای از سطح زمین که آبیاری می‌شود را می‌بینید)



$$2 \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad (2)$$

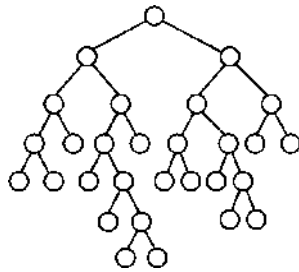
$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{6 + \sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

$$9 - 3\sqrt{3} \quad (4)$$

$$8 - 2\sqrt{3} \quad (3)$$

۶۲. شجره‌نامه جالب یک خانواده را به صورت روبه‌رو نمایش داده‌ایم. این شبکه دارای این خاصیت می‌باشد که یا هر فردی فرزند ندارد و یا اگر دارد، دارای دو فرزند می‌باشد. اگر تعداد کل افراد این شبکه برابر ۲۰۱۱ نفر باشد، تعداد افرادی که فرزند ندارند چه عددی می‌باشد؟



می‌باشد؟

$$1005 \quad (1)$$

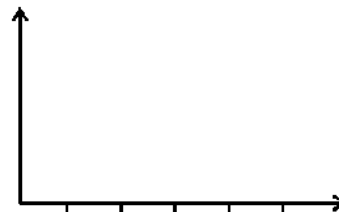
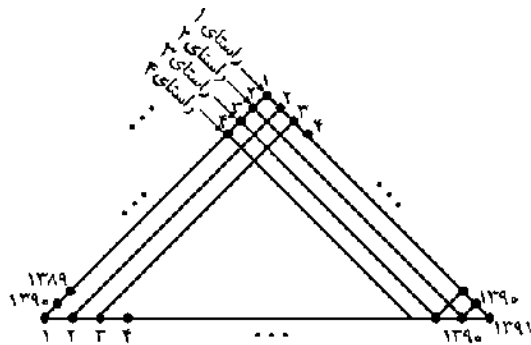
$$1006 \quad (2)$$

$$\text{کم‌تر از } 1000 \text{ نفر} \quad (3)$$

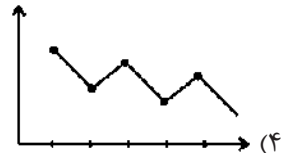
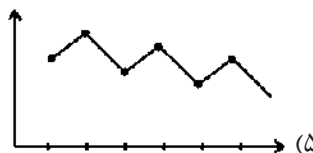
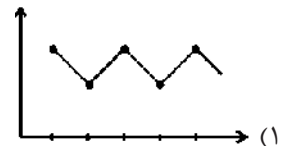
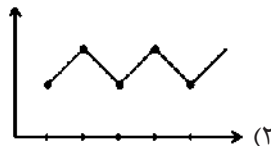
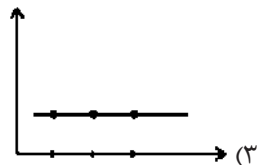
$$\text{بیش از } 1500 \text{ نفر} \quad (4)$$

$$\text{نمی‌توان تعیین نمود.} \quad (5)$$

۶۳. روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع زیر ۱۳۹۱ نقطه وجود دارد که همان‌طور که نشان داده‌ایم به یک‌دیگر وصل شده‌اند. دو برابر ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک) تعداد کل پاره‌خطهای راستای ۱ و ۲، راستای ۲ و ۳، راستای ۳ و ۴ و... را اندازه گرفته‌ایم و می‌خواهیم روی دستگاه مختصات زیر نشان دهیم. کدام گزینه، نمودار درست است؟



- ۲ برابر ب.م.م تعداد کل پاره‌خطهای راستای ۱ و راستای ۲
- ۲ برابر ب.م.م تعداد کل پاره‌خطهای راستای ۲ و راستای ۳
- ۲ برابر ب.م.م تعداد کل پاره‌خطهای راستای ۳ و راستای ۴
- ...
- ...

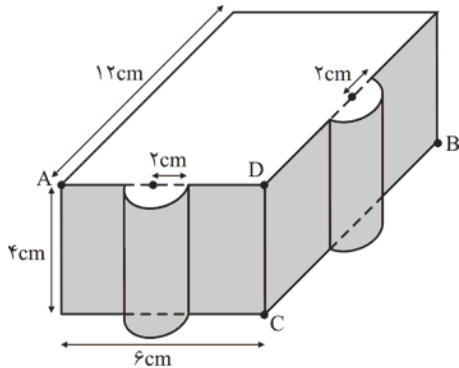


۶۴. از شرکت‌کنندگان در یک دور مسابقه شطرنج، $\frac{1}{4}$ افراد حرفه‌ای و بقیه مبتدی هستند. هر دو شرکت‌کننده، یک بار با هم بازی می‌کنند. برای برد ۱ امتیاز، برای تساوی نیم امتیاز داده می‌شود و به بازنده امتیازی داده نمی‌شود. در پایان مسابقات، افراد مبتدی، در مجموع $\frac{1}{2}$ برابر افراد حرفه‌ای امتیاز آوردند. تعداد افراد حرفه‌ای و مبتدی چند تاست؟ (فرض می‌کنیم مبتدی با مبتدی و حرفه‌ای با حرفه‌ای مساوی می‌کند و حتماً حرفه‌ای از مبتدی می‌برد.)

- (۱) ۶ حرفه‌ای، ۱۸ مبتدی
 (۲) ۳ حرفه‌ای، ۹ مبتدی
 (۳) ۴ حرفه‌ای، ۱۲ مبتدی
 (۴) ۵ حرفه‌ای، ۱۵ مبتدی
 (۵) ۱۲ حرفه‌ای، ۳۶ مبتدی

۶۵. حشره‌ای می‌خواهد روی یک ظرف عسل مطابق شکل زیر از نقطه A به نقطه B برود و روی و جهه‌های رنگی حرکت کند. حداقل مسافتی که باید طی کند و همچنین ارتفاع تقریبی محل برخورد کوتاه‌ترین مسیر با یال DC به طور تقریبی به ترتیب از راست به چپ برابر است با:

(توجه کنید که هر کدام از این دو وجه رنگی برآمدگی‌هایی به شکل یک نیم‌استوانه دارند و در ضمن باید $\pi \simeq 3$ فرض گردد.)

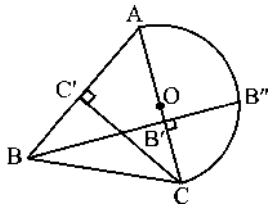


- (۱) $\sqrt{916}$ و $2/5$
 (۲) $\sqrt{180} + 4$ و $2/5$
 (۳) $\sqrt{180}$ و $2/3$
 (۴) $10\sqrt{5}$ و $2/3$
 (۵) $10\sqrt{5}$ و $2/5$

۶۶. روی ۳۰ کارت شماره‌های ۱ تا ۳۰ را نوشته‌ایم، حداقل چند کارت (مثل a, b, c, d) باید از این ۳۰ کارت برداریم که بتوانیم از بین آن‌ها ۴ کارت جدا کنیم که $a+b=c+d$.

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۲۰ (۴) ۱۵ (۵) ۷

۶۷. در شکل زیر O مرکز نیم‌دایره به قطر AC می‌باشد و $AB=12$ ، $AC'=6$ و $CC'=8$ است. در این صورت اندازه $B'B''$ برابر چه می‌باشد؟



- (۱) $\sqrt{24/14}$
 (۲) $\frac{\sqrt{96}}{4}$
 (۳) ۴
 (۴) $\sqrt{20/16}$
 (۵) $\frac{\sqrt{96}}{5}$

۶۸. یک توپ فوتبال از ۱۲ عدد پنج ضلعی و ۲۰ تا ۶ ضلعی که از ضلع‌هایشان به هم دوخته می‌شوند، ساخته شده است. چه تعداد درز در یک توپ فوتبال وجود دارد؟



- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۰ (۵) ۱۵۰