فصل ۱

عبارت‌های جبری، اتحادها و تجزیه

۱.۱ عبارت‌های جبری

همان‌گونه که در دوران راهنمایی آموخته‌اید برای نمایش یک متغیر می‌توان از نمادهای x، y، ... و مانند اینها استفاده کرد. ساده‌ترین عبارت‌های جبری جملاتی مانند x، xy، $y^۲$ و ... می‌باشند که به آنها تک‌جمله‌ای نیز می‌گویند. در اصل هر عبارت جبری از جمع یا تفریق تعدادی تک‌جمله‌ای به‌وجود می‌آید. به عنوان مثال، $x^۲ + ۲y$ یک عبارت جبری شامل دو تک‌جمله‌ای y و $x^۲$ با ضرایب ۲ و ۱ است. عبارت $x^۲ - ۲xy + ۱$ شامل ۳ تک‌جمله‌ای با ضرایب ۱، ۲− و ۱ است.

هر دو عبارت جبری را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. همچنین می‌توان آن دو عبارت را در هم ضرب کرد. برای جمع دو عبارت جبری کافی است ضرایب تک‌جمله‌ای‌های مشابه را با هم جمع کنیم. به عنوان مثال مجموع دو عبارت $y^۲ + x + y$ و $x^۲ + ۳x - y$ برابر با $x^۲ + y^۲ + ۴x$ است. برای محاسبه‌ی حاصل‌ضرب دو عبارت جبری باید تک‌جملات از هر کدام را در هم ضرب و سپس حاصل را با هم جمع کرد.

مثال ۱.۱ حاصل‌ضرب دو عبارت $x + y$ و $x^۲ + y + x$ را بیابید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned}(x^۲ + y + x)(y + x) &= x^۲y + y^۲ + xy + x^۳ + yx + x^۲ \\ &= x^۳ + ۲xy + x^۲ + y^۲ + x^۲y\end{aligned}$$

مثال ۲.۱ حاصل‌ضرب $(x^۲ + ۱)(x^۳ + x + ۱)$ را بیابید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned}(x^۳ + x + ۱)(x^۲ + ۱) &= x^۵ + x^۳ + x^۲ + x^۳ + x + ۱ \\ &= x^۵ + ۲x^۳ + x^۲ + x + ۱\end{aligned}$$

به تعداد مجهول‌های یک تک‌جمله‌ای درجه‌ی آن می‌گویند. به عنوان مثال درجه‌ی $x^۳$ برابر ۳ و درجه‌ی $x^۲y^۳$ برابر ۵ است. درجه‌ی یک عبارت جبری بزرگ‌ترین درجه در میان تک‌جمله‌ای‌های آن عبارت است. به عنوان مثال درجه‌ی عبارت جبری $x^۵y + x^۴ + z^۵$ شش است.

مثال ۳.۱ درجه‌ی عبارت $(x^۲ + x + ۱)(x^۳ + ۱)$ را بیابید.

راه‌حل.

$$(x^۲ + x + ۱)(x^۳ + ۲) = x^۵ + ۲x^۲ + x^۴ + ۲x + x^۳ + ۲$$

بنابراین درجه‌ی این عبارت ۵ است.

نکته‌ی ۴.۱ درجه‌ی حاصل‌ضرب دو عبارت جبری برابر با مجموع درجه‌های آن دو عبارت است.

دو عبارت جبری وقتی با هم برابرند که ضرایب جملات متشابه (تک‌جمله‌ای) آنها یکسان باشد. به عنوان مثال دو عبارت $x^۶ - ۱$ و $(x^۳ - ۱)(x^۳ + ۱)$ برابرند، زیرا

$$(x^۳ - ۱)(x^۳ + ۱) = x^۶ + x^۳ - x^۳ - ۱ = x^۶ - ۱$$

مثال ۵.۱ به‌ازای کدام مقدار a دو عبارت جبری $x^۲ - ax + ۲$ و $(x + ۱)(x + ۲)$ برابرند.

راه‌حل.

$$(x + ۱)(x + ۲) = x^۲ + ۲x + x + ۲ = x^۲ + ۳x + ۲$$

بنابراین اگر $-a = ۳$ یا $a = -۳$، دو عبارت برابرند.

نکته‌ی ۶.۱ اگر دو عبارت جبری برابر باشند حتماً درجه‌های آنها نیز برابرند.

عبارت‌های جبری در زندگی روزمره کاربرد دارند. به عنوان مثال فرض کنید در یک کارخانه به هر کارگر ساده به‌ازای هر ساعت کار در روز ۱۰۰۰ تومان و به‌ازای هر ساعت کار در شب ۱۵۰۰ تومان می‌دهند. در این صورت برای محاسبه‌ی حقوق یک شبانه‌روز یک کارگر می‌توان از عبارت جبری $۱۰۰۰x + ۱۵۰۰y$ استفاده کرد. (کارگر x ساعت در روز و y ساعت در شب کار کرده است.) مثلاً اگر یک کارگر در یک شبانه‌روز ۸ ساعت کار در روز و ۳ ساعت کار در شب داشته باشد حقوق او در آن شبانه‌روز برابر است با

$$۱۰۰۰ \times ۸ + ۱۵۰۰ \times ۳ = ۱۲۵۰۰$$

یعنی در عبارت مقادیر ۸ و ۳ به‌ترتیب جایگزین x و y شده‌اند.

مطابق مثال فوق می‌توان حاصل هر عبارت جبری را به‌ازای مقادیر متغیرهای آن محاسبه کرد.

مثال ۷.۱ حاصل عبارت $x^3 + xy + 2$ را به‌ازای $x = 10$ و $y = 1$ بیابید.

راه‌حل.

$$10^3 + 10 \times 1 + 2 = 1012$$

مثال ۸.۱ حاصل عبارت $x^2 + x + y$ را به‌ازای $x = 2y$ بیابید.

راه‌حل.

$$(2y)^2 + (2y) + y = 4y^2 + 3y$$

برای محاسبه‌ی سریع‌تر در جبر تعدادی از محاسبات به این الگوهای خاص مربوط به عبارت‌های جبری به شکل الگوهای خاص بیان و تمرین می‌شوند، اتحاد می‌گوییم.

۲.۱ اتحادها

اتحاد اول. برای رعایت اختصار $(a+b)(a+b)$ را با $(a+b)^2$ نشان می‌دهیم. اتحاد اول به صورت زیر است:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

زیرا

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

مثال ۹.۱ با استفاده از اتحاد اول حاصل $(2x+3)^2$ را بیابید.

راه‌حل.

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

برای اطمینان خاطر می‌توانید این حاصل را بدون استفاده از اتحاد هم پیدا کنید.

مثال ۱۰.۱ حاصل $(x^2 + x + 1)^2$ را با استفاده از اتحاد اول پیدا کنید.

راه‌حل. اگر نقش a و b را به x^2 و $x + 1$ بدهیم، داریم

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)^2 &= (x^2)^2 + 2(x^2)(x+1) + (x+1)^2\\ &= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + (x^2 + 2x + 1)\\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

اتحاد دوم. برای رعایت اختصار $(a-b)(a-b)$ را با $(a-b)^{۲}$ نشان می‌دهیم. اتحاد دوم به صورت زیر است:

$$(a-b)^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲}$$

زیرا

$$\begin{aligned}(a-b)^{۲} &= (a-b)(a-b) = a^{۲} - ab - ba + b^{۲}\\ &= a^{۲} - ۲ab + b^{۲}\end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد اول نیز می‌توان اتحاد دوم را بدست آورد. کافی است در اتحاد اول b را با $-b$ جایگزین کنیم.

مثال ۱۱.۱ حاصل $(x^{۲}-۱)^{۲}(x+۱)^{۲}$ را بیابید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned}(x^{۲}-۱)^{۲}(x+۱)^{۲} &= (x^{۴} - ۲x^{۲} + ۱)(x^{۲} + ۲x + ۱)\\ &= x^{۶} + ۲x^{۵} + x^{۴} - ۲x^{۴} - ۴x^{۳} - ۲x^{۲} + x^{۲} + ۲x + ۱\\ &= x^{۶} + ۲x^{۵} - x^{۴} - ۴x^{۳} - x^{۲} + ۲x + ۱\end{aligned}$$

اتحاد سوم. اتحاد سوم به اتحاد مزدوج نیز موسوم و به صورت زیر است:

$$(a-b)(a+b) = a^{۲} - b^{۲}$$

زیرا

$$(a-b)(a+b) = a^{۲} + ab - ba - b^{۲} = a^{۲} - b^{۲}$$

مثال ۱۲.۱ حاصل $(x^{۲}-۱)^{۲}(x^{۲}+۱)^{۲}$ را با استفاده از اتحاد مزدوج پیدا کنید.

راه‌حل.

$$(x^{۲}-۱)^{۲}(x^{۲}+۱)^{۲} = [(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۱)]^{۲} = (x^{۴}-۱)^{۲} = x^{۸} - ۲x^{۴} + ۱$$

اتحاد چهارم. اگر $(a+b)(a+b)(a+b)$ را با $(a+b)^{۳}$ نشان دهیم، اتحاد چهارم به صورت زیر است:

$$(a+b)^{۳} = a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + b^{۳}$$

با ضرب مستقیم عبارات، تساوی بالا را تحقیق می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

اتحاد پنجم. اتحاد پنجم به‌صورت زیر است:

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3a^2b-b^3$$

درستی این اتحاد را می‌توانید مشابه روش بالا و یا با جایگزینی b با $-b$ در اتحاد چهارم تحقیق کنید.

مثال ۱۳.۱ حاصل $(x^2+x+1)^3$ را با استفاده از اتحادهای بالا بیابید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)^3 &= (x^2)^3+3(x^2)^2(x+1)+3x^2(x+1)^2+(x+1)^3\\ &= x^6+3x^4(x+1)+3x^2(x^2+2x+1)+x^3+3x^2+3x+1\\ &= x^6+3x^5+3x^4+3x^4+6x^3+3x^2+x^3+3x^2+3x+1\\ &= x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1\end{aligned}$$

مثال ۱۴.۱ حاصل $(2a-1)^3$ را بیابید.

راه‌حل.

$$(2a-1)^3 = 8a^3-12a^2+6a-1$$

دو اتحاد زیر نیز کاربرد بسیار دارند:

اتحاد ششم. $$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

اتحاد هفتم. $$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

اتحادهای ششم و هفتم به اتحادهای چاق و لاغر نیز مشهورند. درستی اتحاد ششم را می‌توان با ضرب مستقیم عبارات طرف راست تحقیق کرد:

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

مثال ۱۵.۱ حاصل $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۳}$ را بیابید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۳} &= x^{۳}+۳x^{۲}\times\frac{۱}{x}+۳x\left(\frac{۱}{x}\right)^{۲}+\frac{۱}{x^{۳}}\\ &= x^{۳}+۳x+\frac{۳}{x}+\frac{۱}{x^{۳}}\end{aligned}$$

عبارت‌هایی شبیه عبارت بالا به عبارت‌های جبری گویا موسوم‌اند. زیرا می‌توان آنها را به‌صورت یک کسر که صورت و مخرج آن عبارت جبری است نشان داد. به‌عنوان مثال $x+\frac{۱}{x}$ یک عبارت گویاست، زیرا

$$x+\frac{۱}{x}=\frac{x^{۲}+۱}{x}$$

مثال ۱۶.۱ فرض کنید $a+\frac{۱}{a}=k$. حاصل $a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}$ را برحسب k بیابید.

راه‌حل.

$$\left(a+\frac{۱}{a}\right)^{۲}=k^{۲} \;\Rightarrow\; a^{۲}+۲a\frac{۱}{a}+\frac{۱}{a^{۲}}=k^{۲}$$

بنابراین $a^{۲}+۲+\frac{۱}{a^{۲}}=k^{۲}$. درنتیجه $a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}=k^{۲}-۲$.

مثال ۱۷.۱ اگر $a+b=r$ و $ab=s$، حاصل $a^{۳}+b^{۳}$ را برحسب r و s بیابید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned}a^{۳}+b^{۳} &= (a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})\\ &= (a+b)[(a+b)^{۲}-۲ab]\\ &= r[r^{۲}-۲s]\\ &= r^{۳}-۲rs\end{aligned}$$

مثال ۱۸.۱ اگر $a+b=۱۰$ و $ab=۲$، حاصل عددی $a^{۲}+b^{۲}$ چند است؟

راه‌حل.

$$\begin{aligned}a^{۲}+b^{۲} &= a^{۲}+b^{۲}+۲ab-۲ab\\ &= (a+b)^{۲}-۲ab\\ &= ۱۰^{۲}-۴=۹۶\end{aligned}$$

مثال ۱۹.۱ اگر $a^۲ = ۲a - ۱$، a را بیابید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} a^۲ - ۲a + ۱ &= ۰ \\ (a-۱)^۲ &= ۰ \\ a - ۱ &= ۰ \\ a &= ۱ \end{aligned}$$

نکته‌ی ۲۰.۱ اگر حاصل‌جمع چند عبارت مربع کامل صفر باشد، آنگاه همگی آنها برابر صفراند.
برای مثال اگر $(a-b)^۲ + (c-b)^۲ = ۰$، آنگاه $c = b$ و $a = b$. درنتیجه $a = b = c$.

مثال ۲۱.۱ اگر $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ab + ac + bc$، نشان دهید $a = b = c$.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} & a^۲ + b^۲ + c^۲ = ab + ac + bc \\ & ۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ = ۲ab + ۲ac + ۲bc \\ & a^۲ - ۲ab + b^۲ + a^۲ - ۲ac + c^۲ + b^۲ - ۲bc + c^۲ = ۰ \\ & (a-b)^۲ + (a-c)^۲ + (b-c)^۲ = ۰ \\ & a - b = ۰\ ,\ b - c = ۰\ ,\ a - c = ۰ \\ & a = b = c \end{aligned}$$

اتحاد لاگرانژ. این اتحاد به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ac + bd)^۲ + (ad - bc)^۲$$

درستی این اتحاد با استفاده از اتحاد اول و به آسانی تحقیق می‌شود.

مثال ۲۲.۱ حاصل ۴۰۱×۱۷ را به‌صورت مجموع دو عدد مربع‌کامل بیان کنید.

$$۴۰۱ \times ۱۷ = (۲۰^۲ + ۱^۲)(۴^۲ + ۱^۲) = ۸۱^۲ + ۱۶^۲$$

اتحاد اویلر. این اتحاد به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = (a + b + c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - ac - bc)$$

درستی این اتحاد را می‌توان با ضرب مستقیم عبارات سمت راست و مقایسه‌ی نتیجه با عبارت سمت چپ تحقیق کرد.

با فرض $c=0$ اتحاد اویلر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$a^3+b^3+0-0=(a+b+0)(a^2+b^2+0-ab-0-0)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$$

که همان اتحاد ششم است.

مثال ۲۳.۱ اگر $a+b+c=0$، نشان دهید $a^3+b^3+c^3=3abc$.

راه‌حل. با فرض $a+b+c=0$ اتحاد اویلر به‌صورت $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ یا $a^3+b^3+c^3=3abc$ درمی‌آید.

مثال ۲۴.۱ نشان دهید

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

راه‌حل. اگر در اتحاد اویلر $a=x-y$، $b=y-z$ و $c=z-x$ فرض شوند، آنگاه با استفاده از نتیجه‌ی مثال ۲۳.۱ داریم

$$a+b+c=x-y+y-z+z-x=0$$
$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

یا

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

روشی که در مثال ۲۴.۱ به‌کار گرفته شد به‌روش تغییرمتغیر موسوم است. در این مثال $x-y$ را با a، $(y-z)$ را با b و ... نشان دادیم. برای حل مسائل این فصل در چند مورد از تغییر متغیر استفاده شده است.

مثال ۲۵.۱ اگر $a^2+b^2+1=ab+a+b$، نشان دهید $a=b=1$.

راه‌حل. داریم $a^2+b^2+1=ab+a+b$. طرفین تساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a^2+2b^2+2=2ab+2a+2b$$
$$a^2-2ab+b^2+b^2-2b+1+a^2-2a+1=0$$
$$(a-b)^2+(b-1)^2+(a-1)^2=0$$

پس $a - b = 0$، $b - 1 = 0$ و $a - 1 = 0$ درنتیجه

$$a = b = 1$$

مثال ۲۶.۱ اگر a، b و c اعداد حقیقی نابرابر، x و y اعداد حقیقی، و تساوی‌های زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} a^3 + ax + y = 0 \\ b^3 + bx + y = 0 \\ c^3 + cx + y = 0 \end{cases}$$

نشان دهید $a + b + c = 0$.

راه‌حل. اگر معادله‌ی دوم را از معادله‌ی اول کم کنیم به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + x) = 0$$

چون $a - b \neq 0$ پس

$$a^2 + ab + b^2 + x = 0$$

به همین ترتیب اگر معادله‌ی سوم را از معادله‌ی دوم کم کنیم به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$b^2 + bc + c^2 + x = 0$$

بنابراین،

$$a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2$$

یا

$$a^2 - c^2 + ab - bc = 0$$

درنتیجه

$$(a-c)(a+c+b) = 0$$

چون $a - c \neq 0$ پس

$$a + b + c = 0$$

نکته‌ی ۲۷.۱ اگر $AB = 0$ آنگاه $A = 0$ یا $B = 0$.

تعمیم اتحاد چاق و لاغر. موارد کاربرد دو اتحاد زیر بسیار است:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}), \quad \text{فرد است } n$$

این اتحادها که تعمیم یافته‌ی اتحاد ششم و هفتم ($n = ۳$)اند نیز به اتحادهای چاق و لاغر معروف‌اند. توجه کنید اتحاد اول به‌ازای هر n طبیعی و اتحاد دوم تنها برای nهای فرد برقرار است، ضرایب جملات پرانتز دوم اتحاد دوم یکی درمیان مثبت و منفی است.

مثال ۲۸.۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر حاصل $۱ + ۲ + \cdots + ۲^{n-۲} + ۲^{n-۱}$ را بیابید.

راه‌حل. با فرض $a = ۲$ و $b = ۱$ داریم:

$$۲^n - ۱^n = (۲ - ۱)(۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + \cdots + ۱^{n-۱})$$

بنابراین

$$۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + \cdots + ۱ = ۲^n - ۱$$

مثال ۲۹.۱ نشان دهید به‌ازای هر n طبیعی $۸^n - ۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. داریم

$$\begin{aligned} ۸^n - ۱ = ۸^n - ۱^n &= (۸ - ۱)(۸^{n-۲} + \cdots + ۱) \\ &= ۷(۸^{n-۲} + \cdots + ۱) \end{aligned}$$

طرف راست مضرب ۷ است، بنابراین $۸^n - ۱$ نیز بر ۷ بخش‌پذیر است.

اتحاد سه‌جمله‌ای. این اتحاد به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(a + b + c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

برای تحقیق درستی این اتحاد می‌توان سمت چپ را به‌صورت زیر نوشت

$$(a + b + c)^۲ = (a + b + c)(a + b + c)$$

و مستقیماً محاسبه کرد.

۳.۱ تجزیه

اگر یک عبارت جبری را بتوان به‌صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت جبری نوشت، آن عبارت جبری را اصطلاحاً تجزیه‌پذیر می‌گوییم. به‌عنوان مثال عبارت $x^۲ - ۴$ را می‌توان تجزیه کرد و به‌صورت $(x + ۲)(x - ۲)$ نوشت یا به‌صورت حاصل‌ضرب $(۲ + x)(۲ - x)$ تجزیه کرد.

تجزیه در جبر نقش مهمی دارد، به‌عنوان مثال می‌توان آن را برای یافتن ریشه‌های معادلات یا محاسبه‌ی مقادیر عبارات جبری به‌کار برود. یکی از روش‌های تجزیه استفاده از اتحادهایی است که در این فصل با آنها آشنا شدید.

مثال ۳۰.۱ عبارت $x^۳ - ۸$ را تجزیه کنید.

$$x^۳ - ۸ = x^۳ - ۲^۳ = (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴)$$

مثال ۳۱.۱ عبارت $x^۴ + ۴$ را تجزیه کنید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} x^۴ + ۴ &= x^۴ + ۴x^۲ - ۴x^۲ + ۴ \\ &= (x^۴ + ۴x^۲ + ۴) - ۴x^۲ \\ &= (x^۲ + ۲)^۲ - (۲x)^۲ \\ &= (x^۲ + ۲ - ۲x)(x^۲ + ۲ + ۲x) \end{aligned}$$

از روش‌های مورد استفاده در تجزیه‌ی عبارات جبری افزودن جمله‌ای خاص به یک عبارت و کم کردن همان جمله از آن عبارت است. در مثال بالا جمله‌ی $۴x^۲$ به عبارت $x^۴ + ۴$ افزوده شد و همین جمله از آن کم شد. با این کار امکان استفاده از اتحادها برای تجزیه‌ی آن عبارت فراهم شد.

مثال ۳۲.۱ عبارت $x^۴ - ۱۶$ را در حد امکان تجزیه کنید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} x^۴ - ۱۶ &= (x^۲)^۲ - ۴^۲ \\ &= (x^۲ - ۴)(x^۲ + ۴) \\ &= (x^۲ - ۲^۲)(x^۲ + ۴) \\ &= (x - ۲)(x + ۲)(x^۲ + ۴) \end{aligned}$$

مثال ۳۳.۱ عبارت $x^۲ + ۳x + ۲$ را تجزیه کنید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} x^۲ + ۳x + ۲ &= x^۲ + ۲x + x + ۲ \\ &= x(x + ۲) + (x + ۲) \\ &= (x + ۲)(x + ۱) \end{aligned}$$

برای تجزیه‌ی عبارت فوق از روش دسته‌بندی استفاده شد، این روش نیز در تجزیه کاربرد بسیار دارد.

مثال ۳۴.۱ عبارت $x^3 + x^2 + x + 1$ را تجزیه کنید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x + 1 &= x^2(x+1) + (x+1) \\ &= (x+1)(x^2+1) \end{aligned}$$

مثال ۳۵.۱ عبارت $x^5 + x + 1$ را تجزیه کنید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 &= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x-1)(x^2+x+1) + x^2 + x + 1 \\ &= (x^2+x+1)(x^3 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

مثال ۳۶.۱ عبارت $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ را در حد امکان تجزیه کنید.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} &(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = [(a+b+c)^3 - a^3] - [b^3 + c^3] \\ &= (a+b+c-a)[(a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2] - (b+c)(b^2 - bc + bc) \\ &= (b+c)[(a+b+c)^2 + a^2 + ab + ac + a^2 - b^2 + bc - c^2] \\ &= (b+c)[3a^2 + 3ab + 3ac + 3bc] = 3(b+c)(a^2 + ab + ac + bc) \\ &= 3(b+c)(a+b)(a+c) \end{aligned}$$

مثال ۳۷.۱ اگر $a+b+c = 0$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 1$، نشان دهید $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

راه‌حل.

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= -2ab - 2ac - 2bc \end{aligned}$$

نمونه۲، توکلی ۸۷٫۱۲٫۲۸

بنابراین

$$ab + ac + bc = \frac{-1}{2}$$

طرفین این رابطه را به توان دو می‌رسانیم

$$(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 = \frac{1}{4}$$

اما،

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 = abc(a + b + c) = 0$$

بنابراین

$$(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 = \frac{1}{4}$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= 1 \\ a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 &= 1 \\ a^4 + b^4 + c^4 &= 1 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال ۳۸.۱ نشان دهید

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$$

راه‌حل. چون $20 + 14\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^3$ و $20 - 14\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^3$، پس

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$$

مثال ۳۹.۱ اگر $abc = 1$ و $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$، نشان دهید حداقل یکی از این سه عدد برابر یک است.

راه‌حل. چون $abc = 1$، داریم

$$a + b + c = \frac{ab + ac + bc}{abc} = ab + ac + bc$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned}(a-۱)(b-۱)(c-۱) &= abc-ab-ac-bc+a+b+c-۱\\ &= ۱-(ab+ac+bc)+a+b+c-۱\\ &= ۰\end{aligned}$$

بنابراین از سه عبارت $a-۱$، $b-۱$ یا $c-۱$ حداقل یکی صفر است. یعنی از a، b یا c حداقل یکی برابر یک است.

مسائل

۱. درجه‌ی عبارت $(x+۱)(x^۲+۱)(x^۳+۱)(x^۴+۱)$ چند است؟

۲. حاصل $(x^۴+x^۲+۱)^۳$ را بیابید.

۳. اگر $a+b=۵$ و $ab=۱$، حاصل عددی $a^۲+b^۲+۲a+۲b+۲ab$ را بیابید.

۴. اگر $x+\frac{۱}{x}=۹$، مقدار عددی عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$

ب) $x^۴+\frac{۱}{x^۴}$

۵. اگر $a+b=r$ و $ab=s$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب r و s پیدا کنید.

الف) $a^۴+b^۴$

ب) $a^۳b+ab^۳$

۶. عبارت $(x+۲)(x^۲+۲)(x^۳+۲)\dots(x^{۱۰۰}+۲)$ را به‌ازای $x=-۱$ محاسبه کنید.

۷. تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحادها اثبات کنید.

الف) $\sqrt[۳]{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}=\sqrt{۵}$

ب) $\sqrt{۴+\sqrt{۷}}-\sqrt{۴-\sqrt{۷}}=\sqrt{۲}$

ج) $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}=۱$

د) $\sqrt{\sqrt[۳]{۴}-۱}+\sqrt{\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۴}}=\sqrt{۳}$

۸. نشان دهید ۱۰۰۰۰۱ عددی مرکب است.

۹. اگر $a^۲+b^۲+c^۲+d^۲=۰$، حاصل $a^۳+b^۳+c^۳+d^۳$ را بیابید.

۱۰. اگر $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ و در ضمن یک جدول 4×4 داشته باشیم که در خانه‌ی سطر iام و ستون jام آن عدد $x_i \times x_j$ را نوشته باشیم، حاصل‌جمع عددی اعداد درون این جدول را بیابید.

۱۱. اگر a، b و c اعداد حقیقی نابرابر باشند به طوری که

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = t$$

نشان دهید $t^3 = -abc$.

۱۲. اگر a، b و c سه عدد گویا باشند و $a + b + c = 0$، نشان دهید $\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(a+b)^2}$ عددی گویا و مربع کامل است.

۱۳. اگر $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$، نشان دهید $x = y = z = t = 0$.

۱۴. اگر $a + b = c + d$ و $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ (a و b و c و d اعداد حقیقی‌اند) نشان دهید $\{a, b\} = \{c, d\}$.

۱۵. اگر a، b، c و d اعدادی حقیقی باشند و $a + b + c + d = 0$، نشان دهید

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + bcd + cda + dab)$$

۱۶. اگر a، b و c اعداد حقیقی نابرابر باشند، ثابت کنید عبارت زیر

$$\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a}$$

مخالف صفر است.

۱۷. اگر a، b و c سه عدد باشند که حاصل‌ضربشان منفی و مجموعشان نیز منفی باشد و همچنین $ab + ac + bc > 0$، نشان دهید هر سه منفی‌اند.

۱۸. اگر a, b, c اعداد حقیقی مخالف صفر باشند و در ضمن $a + b + c = 0$، و

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$$

نشان دهید $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}$.

۱۹. اگر $a + b + c = 0$، نشان دهید $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + ac + bc)^2$.

۲۰. جواب‌های معادله‌ی $(x+1)^{63} + (x+1)^{62}(x-1) + \cdots + (x-1)^{63} = 0$ را بیابید.