۱
مسئله حل‌کردن ترکیبیاتی

بخش ۱.۱ استنتاج

درآمدی بر ترکیبیات

موضوع ترکیبیات بیشتر مطالعهٔ مجموعه‌های متناهی یا مجموعه‌های گسسته (مانند مجموعهٔ اعداد طبیعی) و ساختارهای گوناگون روی این مجموعه‌هاست. چون داده‌هایی که در رایانه ذخیره می‌شوند باید متناهی باشند و رایانه باید الگوریتم‌ها را در تعدادی متناهی مرحله اجرا کند کاربردهای بسیار مهمی برای ترکیبیات در مطالعهٔ ساختارهای داده و الگوریتم‌ها در علوم رایانه پیدا شده است. به لحاظ تاریخی ترکیبیات کاربردهای بسیاری هم در بازی‌ها و معماها دارد.

در ترکیبیات بسیاری از مُدل‌های ریاضی مختلف را بررسی می‌کنیم که می‌توان آنها را با استفاده از مجموعه‌های متناهی و ساختارهایشان توصیف کرد. در این بررسی، زیرمجموعه‌ها، دنباله‌ها، افرازها و چیزهای دیگر اشیای این مجموعه‌ها را مطالعه می‌کنیم. مثلاً آرایش‌های رقم‌های ۰ و ۱ به شکل دنباله، که آنها را دنباله‌های دودویی می‌نامند، نقشی مهم در مطالعهٔ رایانه‌ها و مدارهای الکتریکی دارند. علاوه براین، انتساب‌ها، توزیع‌ها، رابطه‌ها، تابع‌ها و چیزهای دیگر میان دو مجموعه را بررسی می‌کنیم. بیشتر دانشجویان احتمالاً به یک شکل یا شکل‌های مختلف، تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای متناهی به روی خودش را، که آنها را جایگشت می‌نامند، دیده‌اند. جایگشت‌ها مثال‌های ارزشمندی در ترکیبیات و بسیاری شاخه‌های دیگر ریاضیات‌اند. همچنین تعبیر ترکیبیاتی گراف در مورد رابطه‌ها و تابع‌های میان دو مجموعهٔ متناهی را مطالعه می‌کنیم.

از آنجایی که در ترکیبیات مجموعه‌های متناهی را بررسی می‌کنیم، روش‌ها و مدل‌هایی که به آنها برمی‌خوریم از جهتی ساده‌اند ولی تعدادشان زیاد است. در نتیجه فقط تعداد انگشت‌شماری از مسئله‌های ترکیبیات را می‌توان با روش‌های ساده و عادی حل کرد؛ یعنی بیشتر وقت‌ها دانشجوی

ترکیبیات باید مسئله حل‌کنی خلاق باشد. علاوه براین در بیشتر موارد ترکیبیات مناسب‌ترین شاخهٔ ریاضیات است که می‌توان آن را برای تجزیه و تحلیل الگوریتم‌های رایانه‌ای به‌کار گرفت. به همین دلیل در سراسر این کتاب مسئله حل‌کردن و الگوریتم‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در بقیهٔ فصل ۱ مسئله حل‌کردن را در حالت کلی بررسی می‌کنیم و بعد چند حقیقت اساسی مربوط به مطالعهٔ ترکیبیات را مرور می‌کنیم. دربارهٔ الگوریتم‌ها در فصل‌های ۴، ۶ و ۱۰ بیشتر صحبت می‌کنیم.

مسئله حل‌کردن

نیمی از مسئله حل‌کردن علمی است و نیمهٔ دیگرش هنری، امّا اساساً کاری دشوار است. در این فصل نخست برخی از استراتژی‌های اساسی مسئله حل‌کردن را شرح می‌دهیم. در سراسر این کتاب وقتی یاد می‌گیرید که انواع مختلف مسئله‌هایی را که به آنها برمی‌خورید حل کنید احتمالاً می‌خواهید این روش‌ها را به ذهن بسپارید. به هر حال هر روش کلی مسئله حل‌کردن که یاد می‌گیریم در فقدان معلومات و سعی و کوشش کافی کارایی خود را از دست می‌دهد. بیشتر وقت‌ها برای حل‌کردن هر مسئلهٔ چالشی بصیرتی تعیین‌کننده لازم است. با این حساب باید با مسئله کلنجار بروید، الگوها و حقایق موجود را مطالعه کنید، فکرتان را در مسیر درست هدایت کنید تا به این بصیرت دست یابید. به‌رغم این، با هر بار اتمام موفقیت‌آمیز حل یک مسئله مهارت حل مسئله‌تان افزایش می‌یابد و باعث می‌شود که مسئلهٔ بعدی را آسان‌تر حل کنید.

یکی از دو روش ریاضی اصلی مسئله حل‌کردن روشی است که آن را استنتاج می‌نامند. راه‌حلی استنتاجی، یک روش حل‌کردن مسئله یا ثابت‌کردن جواب با استفاده از دنباله‌ای سر راست از محاسبات یا نتیجه‌گیری‌های منطقی است که از فرض آغاز و به نتیجه منجر می‌شود.

تعریف استنتاج

راه‌حل استنتاجی از سه بخش مهم تشکیل می‌شود:

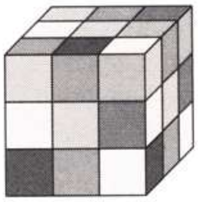
۱. فرض: آغاز یا شروع مسئله.

۲. دنبالهٔ گام‌های میانی: هرگام یا محاسبه را باید بتوان بر اساس ادعاهایی که قبلاً ثابت شده‌اند یا دیگر اطلاعات واقعی توجیه کرد.

۳. حکم: گزارهٔ پایانی که پاسخ مسئله را به‌دست می‌دهد.

هنگامی که به مسئله‌ای برای نخستین بار برمی‌خوریم بیشتر وقت‌ها شروع مسئله و هدف مورد نظر را می‌دانیم و باید دنبالهٔ گام‌های میانی را به دست آوریم. بعضی راه‌حل‌ها خود به خود به شکل پشت سر هم ظاهر می‌شوند امّا در حالت کلی نمی‌توان روشی برای به دست آوردن همهٔ راه‌حل‌های استنتاجی ارائه کرد. از آنجایی که مسئله حل‌کردن با بررسی و تجزیه و تحلیل راه‌حل‌های تعداد زیادی مسئله فراگرفته می‌شود با آوردن چند نمونه از مسئله‌هایی که راه‌حلشان استنتاجی است بحث را آغاز می‌کنیم.

مثال ۱ مسئلهٔ تقسیم‌کردن مکعبی $۳ \times ۳ \times ۳$ (مانند مکعبی روبیک) به ۲۷ مکعب کوچک‌تر را در نظر بگیرید. توجه کنید که در شکل ۱.۱ شش برش ــ دوتا افقی، دوتا از یک پهلو به پهلوی دیگر و دوتا از جلو به عقب ــ کافی است که مکعب اولیه را به ۲۷ مکعب کوچک‌تر تقسیم کند. با وجود این اگر جابه‌جایی تکه‌ها در مراحل میانی (میان برش‌ها) مجاز باشد آیا باکمتر از شش برش هم می‌توان این کار را انجام داد؟



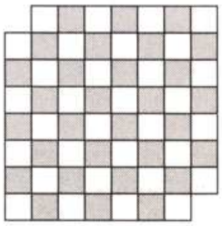
شکل ۱.۱

راه‌حل روی ۲۷ مکعب تکی و مکانشان در مکعب اولیه تمرکز کنید. یک برش حداکثر یک وجه جدید روی هر مکعب تکی ایجاد می‌کند. بنابراین برای جداکردن مکعب‌های گوشه‌ای ۳ برش لازم است زیرا سه وجه آنها به وجه مکعبی دیگر نچسبیده است و سه وجه دیگرشان این‌طور نیستند. به همین ترتیب برای جداکردن مکعب‌های وسط هر یال ۴ برش، برای مکعب‌های وسط هر وجه ۵ برش و برای مکعب غیرقابل رؤیت مرکزی ۶ برش لازم است. به این ترتیب، تکه‌های مکعب اولیه در میان برش‌ها هر طور هم که چیده شوند، کمتر از ۶ برش برای تکه‌تکه‌کردن مکعب $۳ \times ۳ \times ۳$ به ۲۷ مکعب کوچک کافی نیست. (برای تعمیمی از این مثال، مسئلهٔ ۱۶ را ببینید.) ◀

ایدهٔ سادهٔ زوجیت مفهومی مهم در مسئله حل‌کردن است که کاربردهای بسیار متنوعی دارد. یکی از این کاربردها این است که مجموعه‌ای از اشیا را به دو نوع مختلف تقسیم می‌کنیم، مثلاً زوج یا فرد و سیاه یا سفید (علاوه براین مبحث گراف‌های دو بخشی در فصل ۵ را هم ببینید). با وجود این ممکن است تقسیم‌کردن مجموعه‌ای از اشیا به بیش از دو نوع هم مفید باشد؛ رابطه‌های هم‌ارزی و همنهشتی به پیمانهٔ n در بخش ۳.۱ را ببینید.

مثال ۲ ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنجی معمولی را می‌توان به آسانی با سی‌ودو دومینوی ۲×۱

به راه‌های بسیاری پوشاند. از صفحهٔ شطرنج معمولی همان‌طورکه در شکل ۲.۱ نشان داده‌ایم دو خانهٔ گوشه‌ای دو سر یک قطر را برمی‌داریم. آیا می‌توان خانه‌های باقی‌ماندهٔ این صفحهٔ شطرنج را با سی‌ویک دومینوی ۲ × ۱ پوشاند؟



شکل ۲.۱

راه‌حل چون خانه‌های صفحهٔ شطرنج یا سیاه‌اند یا سفید و دو خانهٔ مجاور همرنگ نیستند هر دومینوی تکی هر طور هم که گذاشته شود (البته روی دو خانهٔ مجاور افقی یا عمودی) یک خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه را می‌پوشاند. بنابراین با ۳۱ دومینو می‌توان ۳۱ خانه از هر رنگ را پوشاند؛ امّا خانه‌های گوشه‌ایِ دو سرِ یک قطر همرنگ‌اند پس در این صفحهٔ شطرنج ۳۲ خانه از یک رنگ و ۳۰ خانه از رنگ دیگر وجود دارد. پس نمی‌توان خانه‌های این صفحهٔ شطرنج را با ۳۱ دومینو پوشاند. (برای دیدن شکل دیگری از این مثال به مسئلهٔ ۱۸ رجوع کنید.) ◀

مثال ۳ کارل فریدریش گاوس یکی از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان همهٔ اعصار است. نقل شده است که معلم ازگاوس و همکلاسی‌هایش می‌خواهد که مجموع ۱۰۰ + ۹۹ + ⋯ + ۳ + ۲ + ۱ را حساب کنند.

راه‌حل گاوس این مسئله را از راه میان‌بُرِ زیرکه کسی فکرش را هم نمی‌کرد در چند ثانیه حل کرد:

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
۱ & + & ۲ & + & ۳ & + & \cdots & + & ۹۹ & + & ۱۰۰ & & \\
۱۰۰ & + & ۹۹ & + & ۹۸ & + & \cdots & + & ۲ & + & ۱ & & \\
\hline
۱۰۱ & + & ۱۰۱ & + & ۱۰۱ & + & \cdots & + & ۱۰۱ & + & ۱۰۱ & = & ۱۰۰(۱۰۱) = ۱۰۱۰۰
\end{array}$$

چون دوبرابر مجموع خواسته شده برابر با (۱۰۱)۱۰۰ است پاسخ مسئلهٔ اصلی $\frac{۱۰۰(۱۰۱)}{۲}$ یا ۵۰۵۰ است. به همین ترتیب می‌توان مجموع n جملهٔ اول هر دنبالهٔ حسابی را هم پیدا کرد. (مسئلهٔ ۹ را ببینید.) ◀

کشف راه‌حل

هنگام حل‌کردن یک مسئله کشف راه‌حل و ارائهٔ آن اغلب دو مرحلهٔ جداگانه‌اند. در این فصل، استنتاج و استقرا، دو روش ریاضی اصلیِ ارائهٔ راه‌حل مسئله‌ها را بررسی می‌کنیم. علاوه براین با چهار راهکار مهم زیر برای کشف راه‌حل مسئله‌ها هم آشنا می‌شویم:

۱. در صورت امکان فرض و حکم موردنظر مسئله، هر دو، را به خاطر بسپارید؛ بعضی وقت‌ها مناسب است که مسئله را از اول به آخر، یعنی از فرض به حکم، حل کنیم و در دیگر موارد بهتر است این کار را از آخر به اول انجام دهیم، یعنی از حکم شروع کنیم.

۲. آزمایش و جستجو برای یافتن الگو؛ با بررسی‌کردن مسئله در حالت‌های کوچک بعضی وقت‌ها بصیرتی در مورد حالت کلی به‌دست می‌آوریم.

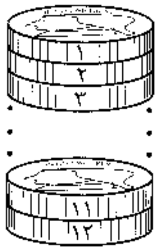
۳. خردکردن مسئله به مسئله‌های کوچک‌ترِ مرتبط؛ راه‌حل مسئله را بعضی وقت‌ها می‌توان با حل‌کردن مسئله‌ای نسبتاً کوچک‌تر و پروراندن راه‌حل آن به‌دست آورد و بعضی وقت‌های دیگر با حل‌کردن چند مسئلهٔ کوچک‌تر و ترکیب‌کردن راه‌حل آنها.

۴. بازنویسی‌کردن مسئله به شکل مسئلهٔ معادلِ دیگری که حل‌کردن آن آسان‌تر است؛ این راهکار به‌ویژه در صورتی مؤثر است که بتوانیم مسئلهٔ موردنظر را برحسب مدل ریاضی اساسی‌ای بیان کنیم. در این مدل‌سازی همین که از نمادگذاری مناسب ریاضی استفاده شود گامی بسیار مهم است.

حل‌کردن مسئله از آخر به اول

معمولاً راه‌حل‌هایی که می‌بینیم به شکل آراستهٔ نهایی‌شان نوشته شده‌اند. بنابراین همهٔ راه‌حل‌های آغازین و حدس‌های نادرست حذف شده‌اند. هنگام نوشتن راه‌حل، گام‌ها همیشه از اول به آخر یعنی از فرض به حکم ادامه می‌یابند. با وجود این، این دنبالهٔ گام‌ها بیشتر وقت‌ها برای حل‌کردن مسئله مناسب نیست زیرا اغلب، جزئیات راه‌حل را درست در مسیر عکس کشف می‌کنیم. بیشتر وقت‌ها بصیرت تعیین‌کننده برای کشف راه‌حل با بررسی هدف و از آخر به اول حل‌کردن مسئله به‌دست می‌آید نه اینکه حل مسئله را از ابتدای آن شروع کنیم. در هر صورت راه‌حل همیشه از اول به آخر نوشته می‌شود و با این حساب ممکن است معلوم نشود که راه‌حل چطور کشف شده است.

مثال ۴ در یک جور بازی ۱۲ سکه به شکل یک ستون روی هم چیده می‌شوند (همان‌طور که در شکل ۳.۱ نشان داده شده است) و دو بازیکن می‌توانند در هر حرکت نوبتی ۱، ۲، ۳ یا ۴ سکه

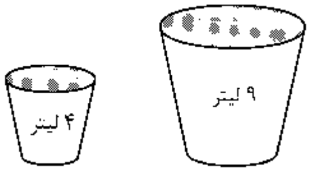


شکل ۳.۱

از این ستون بردارند. بازیکنی که آخرین سکه (یا سکه‌ها) را بردارد بازی را می‌بَرد. بازیکن اول در نخستین حرکتش چند سکه بردارد تا بُردش تضمین شود؟

راه‌حل تحلیل بازی از نقطهٔ شروع آن دشوار است و بنابراین روی پایان بازی تمرکز می‌کنیم. بعد از آخرین حرکت بازیکنِ اول باید هیچ سکه‌ای نماند. برای اطمینان یافتن از اینکه آخرین حرکت را بازیکن اول انجام می‌دهد او باید در حرکت ماقبل آخرش ۵ سکه باقی بگذارد. بازیکن دوم باید حداقل ۱ و حداکثر ۴ سکه بردارد و این باعث می‌شود که بازیکن اول بتواند در حرکت بعدیش بازی را بِبَرد. بازیکن اول در دومین حرکت ماقبل آخرش باید ۱۰ سکه را باقی بگذارد تا مطمئن شود که می‌تواند در حرکت بعدیش ۵ سکه را باقی بگذارد. بنابراین بازیکن اول باید در نخستین حرکتش ۲ سکه را بردارد. (برای آشنایی با چند بازی سکه‌ای دیگر، مسئله‌های ۶ و ۷ را ببینید.) ◄

مثال ۵ فرض کنید دو سطل ۴ و ۹ لیتری خالی (مانند آنهایی که در شکل ۴.۱ نشان داده‌ایم) و ذخیرهٔ آبی نامحدود داریم. اگر با این سطل‌ها بتوان مقدارهای ۴ و ۹ لیتر آب را مستقیماً (با یک بار استفاده از هر سطل) وزن کرد ولی نتوان مقدارهای میان این دو را مستقیماً اندازه گرفت، دنباله‌ای از مراحل را مشخص کنید که بتوانیم با این دو سطل ۶ لیتر آب را وزن کنیم.



شکل ۴.۱

راه‌حل وضعیتی را که در آن i لیتر آب در سطل ۴ لیتری و j لیتر آب در سطل ۹ لیتری وجود دارد، با زوج مرتب (i, j) نشان می‌دهیم. اگر از وضعیت ابتدای مسئله شروع کنیم به آسانی می‌توانیم

وضعیت‌های زیر را به‌دست آوریم:

$$(0,0)\to(0,9)\to(4,5)\to(0,5)\to(4,1)\to(0,1)$$

از وضعیت پایانی مسئله هم می‌توانیم به روش زیر به وضعیت $(1,0)$ برگردیم:

$$(0,6)\to(4,6)\to(1,9)\to(1,0)\to(0,1)$$

اکنون به آسانی می‌توان بررسی کرد که این دو دنباله را می‌توان به هم وصل کرد و رویِ هم راه‌حل زیر را به‌دست آورد:

$$(0,0)\to(0,9)\to(4,5)\to(0,5)\to(4,1)\to(0,1)\to(1,0)$$
$$\to(1,9)\to(4,6)\to(0,6)$$

(مسئلهٔ توزین دیگری شبیه این در مسئلهٔ ۲ آمده است؛ برای دیدن مسئله‌های متنوع دیگری از این دست به کتاب اوبیرن [۸] رجوع کنید.) ◀

مثال ۶ همهٔ جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^2-5}=x+1$ را بیابید.

راه‌حل ابتدا هر دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم تا رادیکال از بین برود و بعد معادلهٔ حاصل، $x^2-5=(x+1)^2$، را حل می‌کنیم. جواب‌های معادلهٔ اولیه همیشه در میان جواب‌های معادلهٔ جدیدند امّا عکس این مطلب ممکن است درست نباشد. تنها جواب معادلهٔ جدید $x=-3$ است که جواب معادلهٔ اولیه نیست. بنابراین نباید تصورکردکه همهٔ اعمالی راکه از آخر به اول مسئله انجام می‌دهیم در جهت عکس، یعنی از اول به آخر مسئله، هم درست‌اند مگر آنکه کاملاً با دقت بررسی شوند. ◀

مسئله‌ها

۱. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{3x+10}=x+2$ را بیابید.

۲. دو مرد تصمیم می‌گیرند که سطلی ۸ لیتری پُر از شیر را با هم شریک شوند. نشان دهید که آنها چطور می‌توانند این شیر را به‌طور برابر میان خودشان تقسیم کنند درصورتی که به آنها فقط یک سطل ۳ لیتری و یک سطل ۵ لیتری خالی (بدون علامت) داده شود. (تارتاگلیا، قرن شانزدهم میلادی)

۳. عددی دلخواه انتخاب کنید و دنبالهٔ اعمال زیر را روی آن انجام دهید. به عددتان ۶ را اضافه کنید. عدد حاصل را در ۲ ضرب کنید. از عدد به‌دست آمده ۴ را کم کنید. عدد حاصل را بر ۲ تقسیم کنید. از عدد به‌دست آمده عدد اولیه‌تان را کم کنید. در مورد عدد حاصل چه می‌توان گفت؟

۴. این حقهٔ عددی با عدد سه رقمی دلخواه و عدد سنتان انجام می‌شود. سنتان را در ۷ ضرب کنید، از عدد حاصل ۱ را کم کنید. بعد عدد به‌دست آمده را در ۱۱ ضرب کنید. به عدد حاصل ۸ را اضافه کنید. عدد به‌دست آمده را در ۱۳ ضرب کنید. به عدد حاصل عدد سه رقمی دلخواهتان را اضافه کنید. از عدد به‌دست آمده سنتان را کم کنید. به عدد حاصل ۳۹ را اضافه کنید. نشان دهید در عددی که دست آخر به‌دست می‌آید همیشه سه رقم آخر، عدد سه رقمی اولیه‌تان و رقم‌های نخست سنتان است.

۵. سکه‌های ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ و ۵۰ تومانی را در نظر بگیرید. بیشترین مقدار پولی از این سکه‌ها طوری که مبلغ هیچ تعدادی از آنها درست صد تومان نشود، چقدر است؟ **راهنمایی**: این پول بیشتر از ۹۹ تومان است. (برای یافتن پاسخ این سؤال مشخص کنید که به چند طریق مختلف می‌توان اسکناسی صد تومانی را با این سکه‌ها خُرد کرد؟ بخش ۲.۷ را ببینید.)

۶. در یک جور بازی نیم در ابتدا دو دسته هر کدام شامل سه سکه داریم. هر بازیکن می‌تواند در نوبتش هر تعداد سکه را که می‌خواهد از یک دسته بردارد. بازیکنی که سکه (یا سکه‌های) آخر را بردارد بازی را می‌بَرَد. بازیکن دوم از چه استراتژیی استفاده کند تا همیشه برندهٔ بازی شود؟

۷. در یک جور بازی دو بازیکن نوبتی به ستونی از سکه‌ها ۱، ۲ یا ۳ سکه اضافه می‌کنند.

الف) فرض کنید که ابتدا در ستون سکه‌ها، سکه‌ای نباشد و بازیکنی که سکهٔ صدم را بگذارد کل ستون سکه‌ها را می‌بَرَد. کدام بازیکن می‌تواند با اتخاذ استراتژی مناسب همیشه برندهٔ بازی شود و از چه استراتژیی باید استفاده کند؟

ب) قسمت (الف) را در حالتی حل کنید که بازیکنی که صدمین سکه را بگذارد می‌بازد.

۸. فرض کنید از شما بخواهند که عددی طبیعی را که کسی دیگر از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۶\}$ انتخاب کرده است پیدا کنید. شما مجازید هر سؤالی را که می‌توان به آن با بله یا نه پاسخ داد بپرسید. نشان دهید که همیشه می‌توانید عدد انتخاب شده را بعد از سؤال چهارمتان پیدا کنید.

۹. مجموع‌های زیر را حساب کنید:

الف) $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$

ب) $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + ۲n - ۱$

ج) $۱ + ۴ + ۷ + \cdots + ۳n - ۲$

د) $a + (a + d) + (a + ۲d) + \cdots + \big(a + (n - ۱)d\big)$

۱۰. در جدول زیر مقدارهای $d(n)$، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی متمایز عدد طبیعی n که $۱ \leq n \leq ۱۶$، آمده‌اند. در مورد اعدادی طبیعی که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی‌شان، فرد است چه می‌فهمید؟ می‌توانید توضیح دهید که چرا این مطلب همیشه درست است؟

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
$d(n)$	۱	۲	۲	۳	۲	۴	۲	۴	۳	۴	۲	۶	۲	۴	۴	۵

مسئله‌های پیشرفته

۱۱. ثابت کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مثبت مانند a و b، $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ و حالت تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $a = b$. (نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی)

۱۲. بیست و پنج دانش‌آموز به شکل آرایشی مربعی در ۵ ردیف که هر ردیف شامل ۵ میز است، نشسته‌اند. معلم به همهٔ آنها می‌گوید که میزهایشان را طوری عوض کنند که هر دانش‌آموز به میزی که درست یا جلو، یا عقب، یا در سمت راست یا در سمت چپ میز اولیه‌اش است برود. آیا همهٔ دانش‌آموزان می‌توانند همزمان به میزی جدید بروند؟

۱۳. مکعبی $۳ \times ۳ \times ۳$ به ۲۷ مکعب کوچک که طول هر ضلعشان ۱ واحد است تقسیم می‌شود. بعد این ۲۷ مکعب را دو به‌دو به هم می‌چسبانیم تا سیزده مکعب‌مستطیل $۲ \times ۱ \times ۱$ ساخته شود و مکعب اضافی را دور می‌اندازیم. آیا می‌توان با این ۱۳ مکعب‌مستطیل، مکعب اولیه را طوری بازسازی کرد که یک فضای خالی غیرقابل رؤیت در مرکز آن بیفتد؟

۱۴. در مهمانی‌ای چند نفر راستگو (کسانی که همیشه راست می‌گویند)، چند نفر دروغگو (کسانی که همیشه دروغ می‌گویند) و چند نفر مردم عادی (کسانی که بعضی وقت‌ها دروغ و بعضی وقت‌ها راست می‌گویند) حضور دارند. در این مهمانی مکالمهٔ زیر میان بِراد (راستگو) و باب (دروغگو) به گوش می‌رسید:

باب: تام شخصی عادی است.

بِراد: از میان تام، دیک و هاری یکی راستگو، یکی دروغگو و یکی شخصی عادی است.

باب: دیک راستگوست.

بِراد: تام دانشجوی ریاضی است و می‌گوید که $۳۲ = ۲^۵$.

باب: هاری دروغگوست.

در مورد تام، دیک و هاری چه می‌توانید نتیجه بگیرید؟

۱۵. در مهمانی‌ای دو نفر راستگو و یک شخص عادی حضور دارند. فرض کنید که این سه نفر همه چیز را دربارهٔ یکدیگر می‌دانند و هرکدامشان باید به هر سؤالی که از او پرسیده می‌شود و پاسخش را می‌توان با بله یا نه داد، پاسخ دهد. نشان دهید که چطور می‌توان شخص عادی را فقط با استفاده از دو سؤال مشخص کرد.

۱۶. الف) می‌خواهیم مکعبی ۴ × ۴ × ۴ را به شصت و چهار مکعب ۱ × ۱ × ۱ تقسیم کنیم. در صورتی که در مراحل میانیِ تقسیم‌کردن تغییر چیدمان تکه‌های حاصل مجاز باشد، کمترین تعداد برش‌های لازم چندتاست؟

*ب) کمترین تعداد برش‌های لازم برای تقسیم‌کردن مکعبی $n \times n \times n$ به $n^۳$ تا مکعب ۱ × ۱ × ۱ (با شرط قسمت (الف)) چندتاست؟

۱۷. n تیم در یک تورنمنتِ بسکتبال شرکت کرده‌اند.

الف) در تورنمنت دوره‌ای هر تیم با هر تیم دیگر درست یک بار بازی می‌کند. اگر تورنمنت بسکتبال دوره‌ای باشد چند بازی برگزار می‌شود؟

ب) در تورنمنت یک حذفی تیم‌ها بعد از نخستین باختشان حذف می‌شوند. اگر تورنمنت بسکتبال یک حذفی باشد تا وقتی که فقط یک تیم (تیم قهرمان) در تورنمنت بماند چند بازی برگزار می‌شود؟

ج) در تورنمنت دو حذفی تیم‌ها بعد از دومین باختشان حذف می‌شوند. اگر تورنمنت بسکتبال دو حذفی باشد تا وقتی که فقط یک تیم بماند چند بازی باید برگزار شود (در اینجا دو امکان وجود دارد)؟

*‌**۱۸.** از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید حذف کرده‌ایم. ثابت کنید ۶۲ خانهٔ باقی‌مانده را همیشه می‌توان با ۳۱ دومینو پوشاند.

*. مسئله‌هایی که پیش از آنها علامت * آمده است معمولاً از دیگر مسئله‌های پیشرفته دشوارترند.

پروژهٔ رایانه‌ای تکمیلی

۱. بازی ویتوف

بازی ویتوف در سال ۱۹۰۷ میلادی ابداع شد. این بازی برای دو بازیکن ممکن است شما را به یاد بازی معروف‌تر نیم بیندازد. بازی را با دو ستون، هر کدام شامل تعدادی دلخواه سکه، آغاز می‌کنیم. وضعیت موجود بازی را که در آن x سکه در ستون اول و y سکه در ستون دوم وجود دارد با (x, y) نشان می‌دهیم. می‌توان فرض کرد که $x \leq y$ زیرا همیشه می‌توان جای دو ستون را با هم عوض کرد. بازیکنان نوبتی از این دو ستون طبق قاعده‌های زیر، سکه‌ها را برمی‌دارند:

۱. هر تعداد سکه را که می‌خواهند یا از ستون اول برمی‌دارند یا از ستون دوم، یا

۲. یک تعداد سکه را از هر دو ستون برمی‌دارند.

برنده کسی است که آخرین سکه را بردارد.

برای آنکه استراتژی بُردی برای این بازی بیابیم ابتدا می‌گوییم که (x, y) موقعیت بُرد برای شماست به شرطی که بدون توجه به حرکت حریفتان در نوبت بعدی پیروزی نهایی شما تضمین شده باشد (به شرطی که استراتژی مناسبی را دنبال کنید). از طرف دیگر (x, y) موقعیت باخت حریفتان است به شرطی که حرکت بعدی شما منجر به موقعیت بُردتان شود.

اکنون مجموعهٔ موقعیت‌های بُرد را با W نشان می‌دهیم. ویتوف نشان داد که $W = \{(۱, ۲), (۳, ۵), (۴, ۷), (۶, ۱۰), \ldots\}$. اگر nاُمین زوج مرتب W را با (c_n, d_n) نشان دهیم ویتوف متوجه شد که این زوج مرتب را می‌توان این‌طور تعیین کرد: مختص اول این زوج مرتب، c_n، برابر با کوچک‌ترین عدد طبیعی است که در $n - ۱$ زوج مرتب اول نیامده است و $d_n = c_n + n$.

الف) ثابت کنید Δc_k، که $\Delta c_k = c_{k+۱} - c_k$، همیشه برابر با ۱ یا ۲ است. نتیجه بگیرید که $c_{۱۰۰} < ۲۰۰$ و $d_{۱۰۰} < ۳۰۰$.

ب) با استفاده از این حقیقت که $d_{۱۰۰} < ۳۰۰$ برنامه‌ای بنویسید که زوج مرتب‌های (c_n, d_n) را تا وقتی که $n = ۱۰۰$ فهرست کند. **راهنمایی**: فرض کنید A بُردار $(a_۱, a_۲, \ldots, a_{۲۰۰})$ باشد که در ابتدا مقدار آن را برابر با $(۰, ۰, \ldots, ۰)$ می‌گیریم. مختص a_i را بعد از آنکه i در یکی از زوج مرتب‌ها استفاده شد، قبل از انتخاب زوج مرتب بعدی، برابر با ۱ می‌گیریم.

ج) نسبت‌های $\frac{c_j}{j}$ و $\frac{d_j}{c_j}$ را وقتی $۱ \leq j \leq ۱۰۰$، چاپ کنید.

د) فرض کنید $C = \{c_۱, c_۲, \ldots, c_n, \ldots\}$ و $D = \{d_۱, d_۲, \ldots, d_n, \ldots\}$. ثابت کنید هر عدد طبیعی یا در C است یا در D ولی نه در هر دو.

هـ) ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، (c_n, d_n) موقعیت بُرد است.

و) فرض کنید x و y عددهای طبیعی دلخواهی باشند. اگر (x, y) عضو W نباشد ثابت کنید (x, y) موقعیت باخت است.

ز) عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ را با t نشان می‌دهیم. ویتوف همچنین متوجه شد که $c_j = [jt]$ و $d_j = [jt^۲]$ که در اینجا $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x یا برابر با آن است. با استفاده از رایانه درستی این مطلب را در مورد همهٔ اعداد طبیعی مانند j که $j \leq ۱۰۰$ بررسی کنید.

بخش ۲.۱ استقرا

روش مهم دیگری را که در مسئله حل‌کردن به کار می‌رود استقرا می‌نامند. این روش بی‌تردید یکی از مفیدترین روش‌ها در ریاضیات ترکیبیاتی و علوم رایانه است. باز هم میان کشف راه‌حل و ارائهٔ آن تمایز قائل می‌شویم.

در علوم بیشتر وقت‌ها با مشاهده و آزمایش به جستجوی حقایق می‌پردازیم و این شیوه را معمولاً روش تجربی می‌نامند.

تعریف روش تجربی

روش تجربی از سه مرحلهٔ زیر تشکیل می‌شود:

۱. انجام آزمایش و جمع‌آوری داده‌ها.

۲. یافتن الگویی میان داده‌ها.

۳. ارائهٔ حدسی که علت درستی الگو را توضیح دهد.

روش تجربی در ریاضیات هم سودمند است. هنگام مسئله حل‌کردن اغلب مفید است که حالت‌های ویژه را بررسی کنیم و دنبال الگو بگردیم که این فرایند روش دیگر کشف راه‌حل مسئله است که پیش از این در بخش ۱.۱ بیان کردیم. بیشتر وقت‌ها به حدسی دست می‌یابیم که به نظر می‌رسد به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی مانند n پاسخ مسئله باشد. با وجود این لازم است این حدس را پیش از

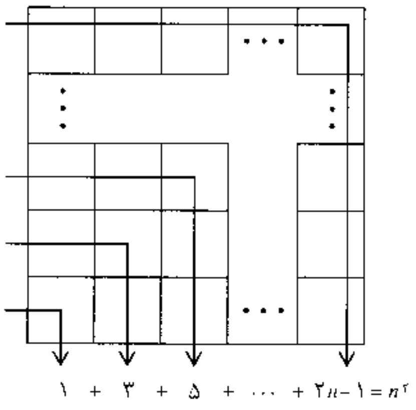
آنکه بیشتر به آن امید ببندیم بررسی کنیم. هرگز نمی‌توان فقط با اثبات درستی حدسی در مورد چند عدد طبیعی، هر چند عدد را هم که امتحان کرده باشیم، صددرصد مطمئن شد که همیشه درست است.

مثال ۱ مجموع نخستین ۱۰۰ عدد طبیعی فرد را پیدا کنید.

راه‌حل به‌جای آنکه بلافاصله کل مجموع را حساب کنیم ابتدا مجموع‌های جزیی را بررسی می‌کنیم که در آن الگویی به شکل زیر برقرار است:

$$
\begin{aligned}
&۱ = ۱\\
&۱ + ۳ = ۴\\
&۱ + ۳ + ۵ = ۹\\
&۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۶\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

این مجموع‌ها مربع‌های عددهای طبیعی متوالی‌اند که از ۱ شروع می‌شوند. از این مشاهده احتمالاً به نظر می‌رسد که مجموع نخستین ۱۰۰ عدد طبیعی فرد برابر با $۱۰۰^۲$ یا ۱۰,۰۰۰ است. به‌طور کلی می‌توان حدس زد که (بعداً معلوم می‌شود که این حدس درست است) مجموع نخستین n عدد طبیعی فرد برابر با $n^۲$ است. (مسئلهٔ ۹ در بخش ۱.۱ و شکل ۵.۱ را ببینید.) بنابراین $۱ + ۳ + ۵ + \ldots + ۱۹۹ = ۱۰,۰۰۰$. (آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا صدمین عدد طبیعی فرد ۱۹۹ است؟ مسئلهٔ ۳ را ببینید.) ◀



شکل ۵.۱

برای آنکه مطمئن شویم حکمی همیشه درست است باید آن را ثابت کرد. هیچ وقت اثبات درستی آن در چند حالت برای این منظور کافی نیست. همان‌طور که در مثال زیر توضیح می‌دهیم بعضی وقت‌ها الگوهایی که در داده‌ها وجود دارند از مرحله‌ای به بعد دیگر ادامه نمی‌یابند یا از آنچه که در وهلهٔ نخست به نظر می‌رسند پیچیده‌ترند.

مثال ۲ فرض کنید n دایرهٔ دوبه‌دو متقاطع در صفحه‌ای طوری رسم شده‌اند که هیچ سه‌تایشان از یک نقطهٔ مشترک نمی‌گذرند. این دایره‌ها در صفحه چند ناحیه ایجاد می‌کنند؟

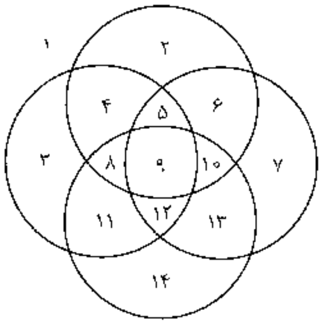
راه‌حل فرض کنید $r(n)$ تعداد ناحیه‌هایی باشد که این n دایره در صفحه ایجاد می‌کنند. با کمی آزمایش معلوم می‌شود که $r(۰) = ۱$، $r(۱) = ۲$، $r(۲) = ۴$ و $r(۳) = ۸$. ممکن است از این داده‌های آزمایشی حدس بزنیم که $r(n) = ۲^n$. با وجود این همان‌طورکه در شکل ۶.۱ نشان داده‌ایم این دستور وقتی که دایرهٔ چهارم اضافه می‌شود دیگر برقرار نیست. دایرهٔ چهارم باید هرکدام از سه دایرهٔ اول را دو بار قطع کند. هر بار که این دایره، دایره‌ای را قطع می‌کند در ناحیه‌ای جدید وارد می‌شود. بنابراین، این دایره از درست شش‌تا از ناحیه‌های اولیه می‌گذرد. چون دایرهٔ چهارم هرکدام از این ناحیه‌ها را به دو ناحیهٔ کوچک‌تر تقسیم می‌کند روی هم، به‌جای ۱۶ ناحیه، ۱۴ ناحیه ایجاد می‌شود. به همین ترتیب وقتی دایرهٔ nاُم ($n > ۱$) رسم می‌شود همیشه $۲(n - ۱)$ ناحیه به ناحیه‌های قبلی اضافه می‌کند. با تکرار این فرایند می‌فهمیم که

$$r(n) = ۲ + ۲ + ۴ + ۶ + \cdots + ۲(n - ۱) = ۲ + ۲(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n - ۱)$$

بنابراین به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n

$$r(n) = ۲ + \frac{۲n(n - ۱)}{۲} = n^۲ - n + ۲$$

▶



شکل ۶.۱

از مثال قبلی معلوم می‌شود که چراکشف راه‌حل و اثبات آن دو بخش مجزای فرایند مسئله حل‌کردن به‌حساب می‌آیند. روش استقرا ابزاری قدرتمند برای اثبات اینکه بعضی حدس‌ها همیشه درست‌اند، به‌دست می‌دهد. فرض کنید k عدد طبیعی ثابتی باشد؛ معمولاً در بیشتر مسئله‌ها، $k = ۱$. فرض کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq k$ حکم متناظری مانند $P(n)$ داریم. با روش استقرا ثابت می‌شود که اگر حکم‌های زیر درست باشند به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq k$، $P(n)$ درست است.

تعریف **استقرا (معمولی)**
راه‌حلی استقرایی از سه گام زیر تشکیل می‌شود:

۱. گام اول: اثبات اینکه $P(k)$ درست است.

۲. فرض استقرا: فرض کنید که به‌ازای عددی طبیعی مانند n که $n \geq k$، $P(n)$ درست باشد.

۳. گام استقرا: با استفاده از فرض استقرا ثابت کنید که $P(n + ۱)$ هم درست است.

به این ترتیب استقرا روشی الگوریتمی برای اثبات این است که راه‌حلی همیشه درست است. از اثبات اینکه حکم اولیه درست است شروع و بعد ثابت می‌کنیم که چطور همیشه می‌توان درستی هر حکمی (بجز اولی) را از درستی حکم پیش از آن نتیجه گرفت. اگر تصور کنیم که گام‌های پیشین استقرا را در برنامه‌ای رایانه‌ای بگنجانیم می‌توان از رایانه، تا وقتی که بگذاریم برنامه به تعداد دفعات کافی اجرا شود، برای اثبات اینکه حکم $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq k$ درست است، استفاده کرد.

برنامه ابتدا ثابت می‌کند که $P(k)$ درست است. چون $P(k)$ درست است بعد ثابت می‌کند که $P(k + ۱)$ درست است. همین که ثابت شد $P(k + ۱)$ درست است بعد ثابت می‌کند $P(k + ۲)$ درست است و همین‌طور تا آخر، همیشه در هر بار یک گام به جلو می‌رود. بر خلافِ وضعیتی که در آن فقط چند مقدار از n را امتحان می‌کردیم در این فرایند به هر مقدار از n دست آخر در مرحله‌ای (در تعدادی متناهی گام) می‌رسیم و از این‌رو لازم نیست در مورد مرحله‌ای اسرارآمیز که در آن الگوی موردنظر تغییر می‌کند و حکم $P(n)$ دیگر درست نیست نگران باشیم.