

راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

فیلم آموزشی

گام

اول

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Code های صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

درسنامه آموزشی

گام

دوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژه علاقمندان آورده شده است که ویژه آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعه آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.

پرسش‌های تشریحی

گام



سوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام

چهارم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریزطبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.
۶. تست‌های واجب با علامت  و تست‌های دشوار با علامت  مشخص شده است.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

درسنامه آموزشی

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی ۱۰
- قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی ۱۳
- قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دو شرطی ۱۷
- قسمت چهارم: استدلال ریاضی ۲۱

فصل دوم: تابع

- قسمت اول: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ۲۶
- قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق ۳۲
- قسمت سوم: اعمال روی توابع ۳۸

فصل سوم: آمار

- قسمت اول: شاخص‌های آماری ۴۸
- قسمت دوم: سری‌های زمانی ۵۳

FILM

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- جلسه اول: گزاره‌ها، منطق ریاضی، ترکیب عطفی و فصلی و گزاره‌های شرطی و دو شرط 140 min
- جلسه دوم: استدلال ریاضی 65 min

فصل دوم: تابع

- جلسه سوم: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی 107 min
- جلسه چهارم: توابع پلکانی و قدرمطلق 93 min
- جلسه پنجم: اعمال روی توابع 92 min

فصل سوم: آمار

- جلسه ششم: شاخص‌های آماری 36 min
- جلسه هفتم: سری‌های زمانی 44 min

پرسش‌های تشریحی

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی ۱۳۷
- قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی ۱۳۸
- قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دو شرطی ۱۳۹
- قسمت چهارم: استدلال ریاضی ۱۴۰

فصل دوم: تابع

- قسمت اول: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ۱۴۹
- قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق ۱۵۲
- قسمت سوم: اعمال روی توابع ۱۵۳

فصل سوم: آمار

- قسمت اول: شاخص‌های آماری ۱۶۵
- قسمت دوم: سری‌های زمانی ۱۶۶

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی ۵۷
- قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی ۵۸
- قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دو شرطی ۶۲
- قسمت چهارم: استدلال ریاضی ۶۸

فصل دوم: تابع

- قسمت اول: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ۸۵
- قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق ۹۰
- قسمت سوم: اعمال روی توابع ۹۵

فصل سوم: آمار

- قسمت اول: شاخص‌های آماری ۱۱۹
- قسمت دوم: سری‌های زمانی ۱۲۳

فصل

۱

قسمت اول

گزاره‌ها - منطق ریاضی

منطق ریاضی

در این فصل قرار است کاربرد علم منطق را در ریاضی شاهد باشیم به این بخش از علم منطق که در ریاضی کاربرد دارد، «منطق ریاضی» گفته می‌شود. منطق ریاضی به کمک روابط و قوانین خاص خود، روش‌های درست و منطقی استدلال کردن در ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

تعریف گزاره: گزاره جمله‌ای خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد.

هر چند درستی یا نادرستی گزاره بر ما معلوم نباشد اما گزاره در یک زمان نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

برای مثال: جمله «عدد ۲ زوج است.» یک گزاره درست است.

عبارت « $1+2$ » گزاره نیست، زیرا جمله کاملی نیست.

جمله «عدد ۳ عدد خیلی کوچکی است.» گزاره نیست، زیرا ملاک خاصی نداریم که بگوییم چه اعدادی، کوچک‌اند و چه اعدادی خیلی کوچک‌اند، بنابراین نمی‌توانیم ارزش آن را تعیین کنیم.

به جمله « a عددی گویاست.» دقت کنید. چون ما نمی‌دانیم a چه عددی است (a مجهول است). پس گزاره محسوب نمی‌شود، زیرا اگر a عددی مثل $\frac{1}{4}$ باشد، گویاست و اگر عددی مثل $\sqrt{2}$ باشد، گنگ است. بد نیست بدانید به این‌گونه عبارت‌ها، گزاره‌نما می‌گوییم.

نکته مهم: در منطق ریاضی جملات خبری که ارزش‌گذاری آن‌ها سلیقه‌ای، نامفهوم و یا بی‌معنی باشد گزاره محسوب نمی‌شوند. هم‌چنین جملات امری پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

«آیا فردا امتحان داریم؟» \Leftarrow چون پرسشی است، گزاره نیست.

«فردا ساعت ۸ برای امتحان در مدرسه باشید.» \Leftarrow چون امری است، پس گزاره نیست.

«عجب سوالات سختی!» \Leftarrow چون عاطفی است، گزاره نمی‌باشد.

تست

در موارد زیر، چند گزاره درست وجود دارد؟

(آ) مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

(پ) هوای بارانی زیباتر از هوای برفی است.

(ث) با فرض $n \in \mathbb{N}$ عدد $3n+1$ همواره عددی فرد است.

(ب) اولین عدد سه‌رقمی بر ۵ بخش پذیر است.

$$(ت) (\sqrt{5})^2 \leq (\sqrt{3})^2$$

(ج) حاصل عبارت $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ عددی طبیعی است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: (آ) درست است. مثل $5+7=12$

(ب) درست است، زیرا اولین عدد سه‌رقمی 100 است که بر ۵ بخش‌پذیر است.

(پ) چون سلیقه‌ای است، گزاره محسوب نمی‌شود.

(ت) $3 \leq \frac{5}{4}$ گزاره‌ای نادرست است.

(ث) نادرست است. برای مثال اگر $n=1$ باشد، حاصل $(3n+1)$ برابر با $(3+1=4)$ می‌گردد که عددی زوج است.

(ج) $1=4-3=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ پس حاصل، عددی طبیعی است لذا این گزاره درست است. بنابراین گزینه (۳) درست است.

جبر گزاره‌ها

گاهی اوقات گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که ترکیبی از چند گزاره است. برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره‌ها که به گزاره‌های ترکیبی معروف هستند از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌کنیم که به مجموعه این قراردادها و نمادها «جبر گزاره‌ها» یا «حساب گزاره‌ها» گفته می‌شود. گزاره‌ها را معمولاً با حروفی مانند p, q, r, s, \dots نمایش می‌دهیم. هم‌چنین ارزش درست یک گزاره را با حرف «T» یا «د» و ارزش نادرست یک گزاره را با حرف «F» یا «ن» نشان می‌دهیم.

p	p	q	p	q	r
د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	ن
$2^1 = 2$	ن	د	د	ن	د
↓	ن	ن	د	ن	ن
یک گزاره	$2^2 = 4$	ن	د	د	د
	↓	ن	د	ن	ن
	دو گزاره	ن	د	د	د
		ن	ن	ن	ن
		$2^3 = 8$			
		↓			
		سه گزاره			

جدول‌های ارزش‌گذاری مربوط به ۱، ۲ و ۳ گزاره، در حالت کلی به صورت مقابل می‌باشند. در این جدول‌ها می‌بینید که مثلاً اگر ۳ گزاره داشته باشیم، جدول ارزش‌گذاری، دارای ۸ ردیف می‌باشد.

نکته اگر n تعداد گزاره‌های دلخواه باشد، جدول ارزش‌گذاری دارای 2^n ردیف خواهد بود. مثلاً اگر ۴ گزاره داشته باشیم آن‌گاه $2^4 = 16 = 2^n$ پس جدول ارزش‌گذاری دارای ۱۶ ردیف خواهد بود.

تست

جدول ارزش‌گذاری مربوط به تعدادی از گزاره‌ها شامل ۳۲ ردیف می‌باشد. تعداد گزاره‌ها کدام است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow n = 5 \Rightarrow 2^5 = 32 = 2^n \Rightarrow$ تعداد ردیف‌ها

پاسخ:

نقیض گزاره‌ها

نقیض یک گزاره مثل p را با $\sim p$ نمایش می‌دهند که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش p می‌باشد. برای ساختن نقیض گزاره از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم: (آ) در جملات فارسی «است» را به «نیست» و «نیست» را به «است» تبدیل می‌کنیم. البته «نباشد» و «باشد» هم نقیض یکدیگرند.

مثال: گزاره‌های مقابل نقیض یکدیگرند:

۱ عددی اول نیست. p
 ۱ عددی اول است. $\sim p$
(ب) می‌توانیم در ابتدای گزاره از عبارت «چنین نیست که» استفاده کنیم تا نقیض شود.

مثال: دو گزاره مقابل نقیض یکدیگرند:

۲۴ مضرب ۳ می‌باشد. p
 چنین نیست که ۲۴ مضرب ۳ باشد. $\sim p$

(پ) اگر نمادهای ریاضی داشته باشیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- نمادهای \geq و $<$ نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $x \geq y$ و $x < y$ نقیض یکدیگرند.
- نمادهای $>$ و \leq نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $5 < -2$ و $5 \geq -2$ نقیض یکدیگرند.
- نمادهای $=$ و \neq نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $a = b$ و $a \neq b$ نقیض یکدیگرند.
- نمادهای \in و \notin نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $3 \in \mathbb{N}$ و $3 \notin \mathbb{N}$ نقیض یکدیگرند.
- نمادهای \subseteq و $\not\subseteq$ نقیض هم هستند. **مثال** ← گزاره‌های $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$ نقیض یکدیگرند.

تست

کدام یک از گزاره‌های زیر، نقیض گزاره « a^2 عددی منفی است.» نمی‌باشد؟ (a عددی حقیقی و دلخواه است.)

- (۱) a^2 عددی منفی نیست.
 (۲) چنین نیست که a^2 عددی منفی باشد.
 (۳) a^2 عددی مثبت است.
 (۴) $a^2 \geq 0$

پاسخ: دو گزاره نقیض هم باید دقیقاً مخالف هم باشند. « a^2 عددی منفی است» و « a^2 عددی مثبت است» در ظاهر مخالف هم هستند. ولی مخالف گزاره « $a^2 < 0$ » می‌شود « $a^2 \geq 0$ ». به عبارت دیگر اگر a^2 منفی نباشد، می‌تواند مثبت یا صفر باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

گزاره‌های هم‌ارز

دو گزاره را زمانی هم‌ارز می‌گوییم که ارزش آن‌ها یکسان باشد، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. هم‌ارزی دو گزاره p و q را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً دو گزاره «۲ عددی فرد است» و « $\sqrt{3} \in \mathbb{N}$ » هم‌ارز هستند، زیرا هر دو نادرست هستند.

نکته اگر داشته باشیم $p \equiv q$ ، آن‌گاه $\sim p \equiv \sim q$ ، به عبارتی هرگاه دو گزاره هم‌ارز هم باشند، نقیض آن‌ها نیز هم‌ارز هستند.

مثال

طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

نمونه: $\sim(3 \in \mathbb{Z}) \equiv (3 \notin \mathbb{Z})$

(آ) $\sim(15 \leq -2) \equiv ?$ (ب) $\sim(\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv ?$ (پ) $\sim(\mathbb{N} \subset \mathbb{R}) \equiv ?$

پاسخ: (آ) $\sim(15 \leq -2) \equiv (15 > -2)$

(ب) $\sim(\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv (\frac{1}{3} \in \mathbb{Q})$

(پ) $\sim(\mathbb{N} \subset \mathbb{R}) \equiv (\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R})$

تذکر اگر از گزاره‌ای دو بار نقیض گرفته شود، جواب همان گزاره اولیه خواهد بود. به عبارتی نقیض نقیض هر گزاره، همان گزاره می‌شود. به عنوان مثال، می‌توان گفت:

$\sim(\sim q) \equiv q$

$\sim(\sim(\sqrt{3} < \sqrt{5})) \equiv (\sqrt{3} < \sqrt{5})$

تست

گزاره « $\frac{5^7}{5^3} = 5^4$ » با کدام گزاره زیر، هم‌ارز است؟

- (۱) معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ جواب حقیقی ندارد.
 (۲) حاصل عبارت $(x^2 - 1)$ به ازای هر مقدار x همواره مثبت است.
 (۳) رابطه $f = \{(3, 5), (4, 7), (\sqrt{9}, 1)\}$ تابع است.
 (۴) قد دانش‌آموزان یک کلاس، متغیر کمی نسبی است.

پاسخ: گزاره مورد نظر در سؤال، طبق قانون اعداد توان‌دار در تقسیم درست می‌باشد. گزینه‌ای پاسخ سؤال است که ارزش آن درست باشد.

گزینه (۱): $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$ ، پس معادله دارای ریشه مضاعف می‌باشد. لذا گزاره مربوط به گزینه (۱) نادرست است.

گزینه (۲): اگر برای مثال به جای x صفر قرار دهیم، حاصل منفی می‌شود پس این گزاره نیز نادرست است.

گزینه (۳): چون $\sqrt{9} = 3$ می‌باشد، فقط عضوهای اول (۳، ۱) و (۳، ۵) با هم برابرند. پس f تابع نمی‌باشد و گزاره‌ای نادرست داریم.

گزینه (۴): طبق دانسته‌های شما از سال گذشته، وزن، قد، درآمد و ... متغیرهای کمی نسبی هستند، پس این گزاره درست است و با گزاره مورد نظر سؤال هم‌ارز می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) درست است.

قسمت دوم

فصل

۱

ترکیب عطفی و فصلی

ترکیب گزاره‌ها

در این درسنامه می‌خواهیم گزاره‌های مرکب را بشناسیم و در مورد چگونگی ساخت این گزاره‌ها آشنایی پیدا کنیم. در علم منطق ریاضی، به کمک حروف ربطی مثل «و» و «یا»، «اگر ... آن‌گاه ...» و «اگر ... آن‌گاه ... و بالعکس» می‌توانیم دو گزاره p و q را با هم ترکیب کنیم و یک گزاره مرکب بسازیم. دو گزاره مرکب $p \wedge q$ و $p \vee q$ به ترتیب ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره p و q نام دارند.

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر حرف ربط «و» را بین دو گزاره p و q قرار دهیم، گزاره $p \wedge q$ ساخته می‌شود. این گزاره مرکب زمانی درست است که هم p و هم q درست باشند. یعنی حتی اگر یکی از دو گزاره p و q نادرست باشند، کل گزاره $p \wedge q$ نادرست خواهد بود. جدول ارزش‌گذاری $p \wedge q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

نادرستی حتی یکی از گزاره‌ها، باعث نادرستی کل گزاره $p \wedge q$ می‌شود. \Rightarrow

مثال

درستی یا نادرستی گزاره‌های عطفی زیر را بررسی کنید.

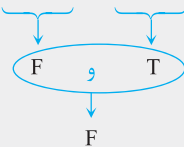
(ب) $(-3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$

(آ) ۳۶ مربع کامل است و $\frac{7}{3}$ عددی گویاست.

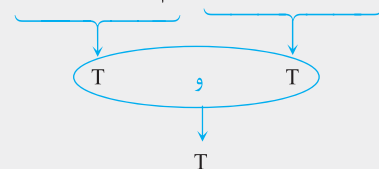
(ت) 5^2 عددی فرد است و a^2 همواره عددی نامنفی است.

(پ) $(x(x-2) = x^2 - 2x) \wedge [(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) \geq 1]$

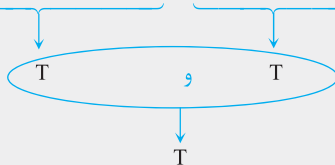
(ب) $(-3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$



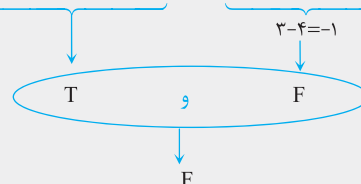
(آ) ۳۶ مربع کامل است و $\frac{7}{3}$ عددی گویاست. **پاسخ:** (آ)



(ت) 5^2 عددی فرد است و a^2 همواره عددی نامنفی است.



(پ) $(x(x-2) = x^2 - 2x) \wedge [(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) \geq 1]$



در گزاره عطفی «p و معادله $x^2 - x + 3 = 0$ جواب حقیقی ندارد»، کدام گزاره باشد تا ارزش کل گزاره عطفی، درست باشد؟

- (۱) معادله $x^2 - 1 = 0$ یک ریشه حقیقی دارد.
 (۲) ۵ مضرب ۲۵ است.
 (۳) رابطه $\{(3, 5), (2, 7), (4, 4)\}$ یک تابع است.
 (۴) $\frac{\sqrt{5x}}{3x+2}$ عبارتی گویا است.

پاسخ: ارزش گزاره «معادله $x^2 - x + 3 = 0$ جواب حقیقی ندارد»، درست است، زیرا اگر Δ را به دست آوریم حاصل منفی می‌شود، پس معادله

ریشه حقیقی ندارد $(\Delta = (-1)^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11)$. لذا گزاره p هم باید درست باشد تا ارزش کل گزاره $p \wedge q$ درست باشد.

از بین گزینه‌ها فقط گزاره گزینه (۳) ارزش درست دارد، زیرا مؤلفه‌های اول تکراری نیستند. پس تابع است. اما در مورد نادرستی گزینه‌های دیگر باید

گفت در گزینه (۱) معادله $x^2 - 1 = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی است $(x = \pm 1)$. در مورد گزینه (۲) عدد ۵ مضرب ۲۵ نیست، بلکه مقسوم‌علیه ۲۵ است.

در مورد گزینه (۴) هم، چون x زیر رادیکال است پس عبارت $\frac{\sqrt{5x}}{3x+2}$ گویا نیست. بنابراین گزینه (۳) درست است.

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر بین دو گزاره p و q از حرف ربط «یا» استفاده شود، گزاره $p \vee q$ ساخته می‌شود. این گزاره مرکب زمانی درست است که یکی از گزاره‌ها یا هر دو گزاره، درست باشند و به عبارتی زمانی نادرست است که هر دو نادرست باشند. جدول ارزش‌گذاری ترکیب فصلی $p \vee q$ به شکل زیر می‌باشد:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

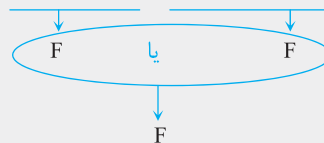
درستی حداقل یکی از گزاره‌ها، باعث درستی کل گزاره $p \vee q$ می‌شود. \Rightarrow

درستی یا نادرستی گزاره‌های فصلی زیر را تعیین کنید.

(آ) $\frac{1}{p}$ عددی طبیعی است یا $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

(پ) ۹۰ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.

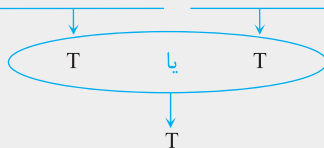
پاسخ: (آ) $\frac{1}{p}$ عددی طبیعی است یا $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$



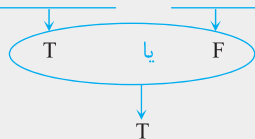
(ب) ۵ عددی اول است یا $(-5)^2$ عددی منفی است.

(ت) $(\sqrt{2} > \sqrt{2} - 1) \vee [(-2)^{-4} = 16]$

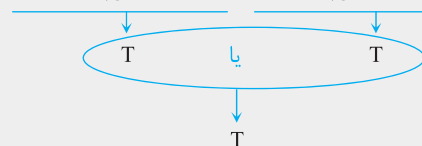
(ب) ۵ عددی اول است یا $(-5)^2$ عددی منفی است.



(ت) $(\sqrt{2} > \sqrt{2} - 1) \vee [(-2)^{-4} = 16]$



(پ) ۹۰ بر ۳ بخش پذیر است یا ۹۰ بر ۵ بخش پذیر است.



$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

تذکره: می‌دانید اگر توان عددی منفی باشد می‌توانیم آن عدد را معکوس کنیم تا علامت توان مثبت شود. لذا:

تست

در گزارهٔ فصلی « p یا ۸۰۰۰ عددی اول است.» گزارهٔ p کدام باشد تا ارزش کل گزارهٔ فصلی «درست» باشد؟

- (۱) از نمودار پراکنش نگاشت برای نمایش سه متغیر استفاده می‌شود.
- (۲) از نمودار میله‌ای برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود.
- (۳) از نمودار حبابی، برای نمایش حداکثر ۳ متغیر استفاده می‌شود.
- (۴) از نمودار نقطه‌ای برای نمایش دو متغیر استفاده می‌شود.

پاسخ: گزارهٔ « ۸۰۰۰ عددی اول است.» گزاره‌ای نادرست است، پس برای آن‌که گزارهٔ فصلی درست باشد باید گزارهٔ « p » درست باشد، چون در این صورت خواهیم داشت: q
 $(p \vee q) \equiv (T \vee F) \equiv T$
 طبق مطالب کتاب دهم، فقط گزارهٔ «از نمودار میله‌ای، برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود.» ارزش درست دارد. بد نیست بدانید که از نمودار پراکنش نگاشت برای نمایش دو متغیر، از نمودار حبابی برای نمایش حداقل سه متغیر و از نمودار نقطه‌ای برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تست

اگر p و q دو گزارهٔ دلخواه باشند، کدام گزینه در مورد ستون نتیجهٔ گزارهٔ $\sim(p \wedge \sim q) \vee q$ درست است؟

- (۱) شامل ۳ نادرست و ۱ درست می‌باشد.
- (۲) شامل ۲ درست و ۲ نادرست می‌باشد.
- (۳) شامل ۱ نادرست و ۳ درست می‌باشد.
- (۴) شامل ۴ نادرست می‌باشد.

پاسخ:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \wedge \sim q) \vee q$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

گزینهٔ (۳) صحیح است. \Rightarrow ۳ درست و ۱ نادرست

خواص و فرمول‌های اصلی ترکیب عطفی و فصلی

در بسیاری از تست‌ها برای حل سریع‌تر و بدون رسم جدول ارزش‌گذاری می‌توانیم از فرمول‌های زیر استفاده کنیم. با فرض آن‌که p و q دو گزارهٔ دلخواه باشند و T گزاره‌ای همواره درست و F گزاره‌ای همواره نادرست باشد، خواهیم داشت:

روابط اصلی ترکیب عطفی	روابط اصلی ترکیب فصلی
$(p \wedge p) \equiv p$	$(p \vee p) \equiv p$
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$	$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$
$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$	$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$
$(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F$	$(p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$

در روابط بالا اگر به جای هر یک از گزاره‌های p و q ، گزاره‌های دیگری مثل r یا s یا حتی $\sim p$ و $\sim q$ قرار گیرد، روابط به همان شکل جواب می‌دهد.

برای مثال: $(r \vee F) \equiv r$ ، $(s \wedge \sim s) \equiv F$ ، $(s \vee \sim s) \equiv T$
 $(\sim p \vee F) \equiv \sim p$ ، $(r \wedge F) \equiv F$

تست

کدام هم‌ارزی زیر، درست است؟

- (۱) $(\sim p \wedge T) \equiv p$ (۲) $(\sim p \wedge \sim F) \equiv T$ (۳) $[(\sim p \wedge T) \vee (\sim p \vee F)] \equiv p$ (۴) $[\sim p \vee \sim(\sim p)] \equiv T$

پاسخ: سمت چپ هم‌ارزی‌های داده‌شده را نوشته و حاصل آن‌ها را خودمان حساب می‌کنیم:

- (۱) گزینهٔ (۱): $(\sim p \wedge T) \equiv \sim p$
 (۲) گزینهٔ (۲): $(\sim p \wedge \sim F) \equiv (\sim p \wedge T) \equiv \sim p$
 (۳) گزینهٔ (۳): $[(\sim p \wedge T) \vee (\sim p \vee F)] \equiv [(\sim p) \vee (\sim p)] \equiv \sim p$
 (۴) گزینهٔ (۴): $[\sim p \vee \sim(\sim p)] \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

خواص و فرمول‌های تکمیلی ترکیب عملی و شمعی

در زیر روابطی را می‌خواهیم یاد بگیریم که فقط در تست‌ها کاربرد دارد. در تمام روابط زیر می‌توانیم از جدول ارزش‌گذاری استفاده کنیم و آن‌ها را اثبات نماییم ولی نیازی به این کار نیست.

تذکره همان‌طور که در روابط قبلی اشاره شد به جای هر کدام از گزاره‌های p و q ، می‌توان از گزاره‌های دیگری مانند r ، s ، $\sim p$ ، $\sim q$ و ... استفاده کرد.

$$\text{روابط شرکت‌پذیری} \begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{cases} \Rightarrow \text{مثال: } [p \wedge (\sim p \wedge q)] \equiv [(p \wedge \sim p) \wedge q] \equiv (F \wedge q) \equiv F$$

$$\text{روابط پخشی} \begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

$$\text{روابط دموگن} \begin{cases} \sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \\ \sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \end{cases} \Rightarrow \text{مثال: } \begin{cases} \sim(\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim q) \\ \sim(\sim p \vee \sim q) \equiv (p \wedge q) \end{cases}$$

$$\text{قوانین جذب} \begin{cases} [p \wedge (p \vee q)] \equiv p \\ [p \vee (p \wedge q)] \equiv p \end{cases} \Rightarrow \text{مثال: } \begin{cases} \sim p \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p \\ p \vee (p \wedge \sim q) \equiv p \end{cases}$$

$$\text{قوانین شبه‌جذب} \begin{cases} [p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q) \\ [p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q) \end{cases} \Rightarrow \text{مثال: } \begin{cases} [\sim p \wedge (p \vee q)] \equiv (\sim p \wedge q) \\ [p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv (p \vee \sim q) \end{cases}$$

توجه برای نمونه رابطه $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$ را به کمک جدول ارزش‌گذاری اثبات می‌کنیم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	p
د	د	د	د	د
د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن

این ۲ ستون یکسان شدند پس هم‌ارزی، درست است.

تست

در صورتی که گزاره $p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ نادرست باشد، ارزش گزاره $\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)$ کدام است؟

$$\sim r \quad (۴) \qquad r \quad (۳) \qquad F \quad (۲) \qquad T \quad (۱)$$

$$[p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \equiv [p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv (p \vee \sim q)$$

شبه‌جذب جابه‌جا می‌کنیم.

پاسخ:

چون طبق فرض، گزاره $p \vee \sim q$ نادرست است پس هم p نادرست است و هم $\sim q$ ، لذا خود q درست است. بنابراین:

$$[\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)] \equiv [\sim(F \vee T) \wedge r] \equiv (F \wedge r) \equiv F \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

تست

در کدام گزینه، با یک هم‌ارزی نادرست مواجه هستیم؟

$$\begin{aligned} \sim r \wedge (\sim r \vee s) &\equiv s \quad (۲) & \sim(\sim p \wedge q) &\equiv p \vee \sim q \quad (۱) \\ p \vee (p \wedge \sim r) &\equiv p \quad (۴) & q \vee (s \wedge \sim p) &\equiv (q \vee s) \wedge (q \vee \sim p) \quad (۳) \end{aligned}$$

پاسخ: با توجه به قوانین ذکرشده، فقط هم‌ارزی (۲) نادرست است که اصلاح‌شده آن به صورت مقابل است:

$$\sim r \wedge (\sim r \vee s) \equiv \sim r$$

عین هم هستند. جذب

پس گزینه (۲) جواب تست می‌باشد.



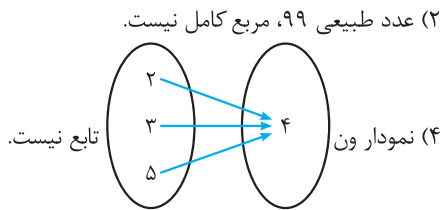
آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل ۱

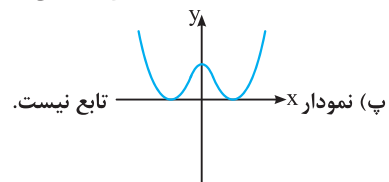
قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی

مفهوم گزاره - ارزش درستی گزاره‌ها

۱. کدام گزینه در مورد «مفهوم گزاره» صحیح است؟
 (۱) بعضی از جملات پرسشی، گزاره هستند.
 (۲) اگر یک جمله خبری قابل ارزش‌گذاری نباشد، گزاره نیست.
 (۳) هر جمله خبری، یک گزاره است.
 (۴) ارزش یک گزاره، می‌تواند گاهی درست و گاهی نادرست باشد.
۲. کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) هر گزاره، جمله‌ای است خبری ولی هر جمله خبری ممکن است گزاره نباشد.
 (۲) جملات امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.
 (۳) منطق ریاضی به کمک یک سری قانون و قاعده، روش درست استدلال کردن را به ما می‌آموزد.
 (۴) اگر ارزش یک جمله خبری برای ما معلوم نباشد، ولی دقیقاً درست یا نادرست باشد آن جمله گزاره نیست.
۳. کدام گزینه زیر ارزش نادرست دارد؟
 (۱) بزرگ‌ترین عدد اول دو رقمی، ۹۷ است.
 (۲) عدد طبیعی ۹۹، مربع کامل نیست.
 (۳) حجم یک لیوان متغیر کمی نسبتی است.
 (۴) بزرگ‌ترین عدد اول دو رقمی، ۹۷ است.



۴. کدام گزینه گزاره محسوب نمی‌شود؟
 (۱) هر عدد طبیعی، عدد صحیح نیز می‌باشد.
 (۲) a^2 عددی نامنفی است.
 (۳) ساده‌ترین درس کنکور، زبان انگلیسی است.
 (۴) قرآن ۱۱۴ سوره دارد.
۵. کدام گزاره زیر ارزش درست دارد؟
 (۱) واریانس داده‌های ۷، ۷ و ۷ برابر صفر است.
 (۲) ۵۱ عددی اول است.
 (۳) تمام مقسوم‌علیه‌های طبیعی 3^0 عبارتند از $1, 2, 3, 5, 10, 15, 30, 50, 150, 300, 500, 1500, 3000$.
 (۴) به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $(-3)^{n+1}$ همواره مثبت است.
۶. تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری مربوط به n گزاره، ۲۵۶ می‌باشد. مقدار n کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
۷. تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری مربوط به ۵ گزاره چند برابر تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری ۷ گزاره‌ای است؟
 (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{1}{5}$
۸. چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟
 (آ) نمودار خط $y = 2x + 5$ از ربع اول نمی‌گذرد.
 (ب) نمودار $y = x^2 - 5x + 6$ تابع نیست.
 (ج) میانه، همان چارک اول است.
 (ت) مرزه غذاها (خوب، متوسط، بد) متغیر کیفی ترتیبی است.



- (ث) عدد ۱ نه اول است نه مرکب.
 (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

هم‌ارزی - نقیض گزاره‌ها

۹ ☆. کدام هم‌ارزی درست است؟

(۲) $\sim(\sqrt{5} \in \mathbb{Q}) \equiv \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

(۱) $\sim(a^2 < b^2) \equiv (a^2 > b^2)$

(۴) (وزن افراد، متغیر کیفی ترتیبی است.) $\equiv (1 + x^4 \text{ همواره مثبت است})$

(۳) $\sim[\sim(\frac{1}{3} < \frac{2}{9})] \equiv (\frac{1}{3} \geq \frac{2}{9})$

۱۰ ☆. در کدام گزینه دو عبارت کنار هم، نقیض یکدیگر نیستند؟

(۱) $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

(۲) $x^2 - 3x \neq 2, x^2 - 3x = 2$
 (۳) a عددی فرد است، a عددی زوج است.
 (۴) a عددی مرکب است، a عددی اول است.

۱۱ ☆. کدام هم‌ارزی درست است؟

(۱) (مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.) \equiv (حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، الزاماً گنگ نیست.)

(۲) $(\sqrt{5} \text{ عددی گنگ است.}) \equiv (\frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ عددی گویاست.})$

(۳) $(a < b) \equiv \sim(a > b)$

(۴) $(-3)^2 \geq 0 \equiv \sqrt{9+16} = 3+4$

۱۲ ☆. گزاره $\sim[\sim(3 \notin \mathbb{N})]$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

(۱) مکعب هر عدد حقیقی منفی، عددی منفی است.
 (۲) مقدار آماره ممکن است با مقدار پارامتر در یک جامعه، برابر شود.

(۳) طول رأس سهمی $y = -x^2 - 6x + 1$ برابر $x = -3$ می‌باشد.
 (۴) برد تابع $f(x) = 5$ کل اعداد حقیقی (\mathbb{R}) می‌باشد.

۱۳ ☆. با توجه به جدول زیر اگر ارزش درست را با T و نادرست را با F نمایش دهیم، گزینه درست برای ارزش‌های شماره‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) به ترتیب

از راست به چپ کدام است؟

گزاره p	ارزش p	ارزش $\sim p$
نمودار جعبه‌ای، ۲ متغیر یا بیش تر را نمایش می‌دهد.	۱	۲
برای جمع‌آوری داده‌های آماری ۴ روش وجود دارد.	۳	۴

F, T, T, F (۴)

T, F, T, F (۳)

T, F, F, T (۲)

F, T, F, T (۱)

۱۴ ☆. کدام گزاره با گزاره «مختصات رأس سهمی $y = (x-1)^2 + 4$ برابر $S(2,4)$ است.» هم‌ارز می‌باشد؟

(۱) میانه داده‌های ۱۵، ۱۲، ۱۰، ۹، ۵، ۲، ۱ برابر ۹ می‌باشد.
 (۲) میانگین داده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ برابر ۵ است.

(۳) دامنه تابع $y = 3$ برابر $\{3\}$ است.
 (۴) مد داده‌های ۱، ۳، ۳، ۱۷، ۱۷، ۵، ۳، ۱ برابر ۳ است.

قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی

ترکیب عطفی گزاره‌ها

۱۵ ☆. کدام گزینه، ستون آخر (نتیجه) جدول مقابل را نشان می‌دهد؟

p	q	$p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
د	د	?
د	ن	?
ن	د	?
ن	ن	?

د
د
ن
د (۴)

د
ن
د
ن (۳)

د
د
د
د (۲)

ن
ن
ن
ن (۱)

۲۴☆ حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟

$\sim (q \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge \sim p) \equiv ?$

F (۴)	T (۳)	q (۲)	p (۱)
-------	-------	-------	-------

۲۵☆ اگر ارزش گزاره $\sim (\sim p \vee \sim q)$ درست باشد و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $q \vee (p \wedge r)$ با کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟

T (۴)	q (۳)	p (۲)	F (۱)
-------	-------	-------	-------

۲۶☆ حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟

$(\sim q \vee T) \wedge (F \wedge p) \equiv ?$

$\sim q$ (۴)	p (۳)	F (۲)	T (۱)
--------------	-------	-------	-------

۲۷☆ ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

(۱) 537 عددی فرد است و 81 عدد اول است. (۲) $\sqrt{3}$ عددی گنگ است و ضرب دو عدد فرد، عددی زوج است.

(۳) $(2 + \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}) \vee [(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^6 = 32]$ (۴) $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}) \vee (\frac{3}{5} < \frac{5}{9})$

۲۸☆ کدام هم‌ارزی، درست است؟

$[\sim (\sim p) \vee (\sim p \wedge T)] \equiv F$ (۲)	$(\sim p \wedge p) \equiv T$ (۱)
$[\sim p \wedge (\sim q \vee r)] \equiv [\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge r)]$ (۴)	$[\sim (q \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim p)] \equiv F$ (۳)

۲۹☆ طرف دوم هم‌ارزی $\sim q \vee \sim (p \vee q) \equiv ?$ کدام است؟

$\sim q$ (۴)	$\sim p$ (۳)	q (۲)	p (۱)
--------------	--------------	-------	-------

۳۰☆ چند مورد از هم‌ارزی‌های زیر درست است؟

$\sim (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim q)$ (ب)	$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ (آ)		
$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ (ت)	$[r \vee (p \wedge r)] \equiv p$ (پ)		
$\sim [\sim (\sim p \vee \sim q)] \equiv \sim (p \wedge q)$ (ج)	$(q \vee \sim q) \equiv (\sim q \vee q) \equiv F$ (ث)		
۴ (۴)	۲ (۲)	۱ (۱)	۳ (۳)

۳۱☆ چند تا از هم‌ارزی‌های زیر نادرست است؟

$\sim [\sim (p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$ (ب)	$(\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim (p \vee q)$ (آ)		
$[\sim p \wedge (p \vee q)] \equiv (\sim p \wedge q)$ (ت)	$[\sim p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv \sim p$ (پ)		
۴ (۴)	۲ (۲)	۱ (۱)	۳ (۳)

۳۲☆ ارزش چند گزاره از گزاره‌های زیر درست است؟

(آ) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ یا $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ب) معادله $x^2 - 3x = 0$ دو ریشه غیرصفر دارد و عدد 20 مضرب 5 است.

(پ) در تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ متغیر x وابسته است و شیب‌های هر دو خط موازی با هم برابرند.

(ت) درآمد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا انحراف معیار جذر واریانس است.

۱ (۴)	۲ (۳)	۳ (۲)	۴ (۱)
-------	-------	-------	-------

۳۳☆ چند مورد از هم‌ارزی‌های زیر درست است؟

$[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$ (ب)	$[\sim p \vee (p \wedge q)] \equiv (\sim p \vee q)$ (آ)		
$[p \vee (\sim p \vee \sim q)] \equiv T$ (ت)	$[\sim p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \equiv \sim q$ (پ)		
۳ (۴)	۲ (۳)	۱ (۲)	صفر (۱)

۳۴☆ اگر گزاره $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ درست باشد و r نیز نادرست باشد، گزاره $\sim p \vee (q \wedge r)$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

T (۴)	F (۳)	q (۲)	p (۱)
-------	-------	-------	-------

۳۵☆ طرف دوم هم‌ارزی $(\sim p \vee F) \wedge (\sim p \vee q) \equiv ?$ کدام است؟

$\sim q$ (۴)	q (۳)	$\sim p$ (۲)	p (۱)
--------------	-------	--------------	-------

۳۶☆ چند گزاره زیر، ارزش درست دارند؟

(آ) 17 عددی اول یا عددی گنگ است.

(ب) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است یا 20 عددی اول است.

(پ) $((\frac{\sqrt{3}}{4})^0 = 1) \wedge (10^{-2} = 0.01)$

(ت) میانه، داده وسط داده‌های مرتب‌شده است و اگر مقدار ثابتی به داده‌ها اضافه شود، به میانگین نیز همان مقدار اضافه می‌شود.

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

۳۷. گزاره [«مجموع ریشه‌های معادله $0 = 2 + 5x - 3x^2$ برابر $\frac{5}{3}$ است.» و «در یک جامعه آماری، پارامتر همیشه از هر آماره‌ای بزرگ‌تر است.»] با

چند تا از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

(آ) یکی از مشکلات سرشماری، عدم امکان استفاده از آن در بررسی‌های مخرب است و مراحل رشد انسان، متغیر کیفی ترتیبی است.

(ب) در تجزیه $6 - 5x - x^2$ عبارت $x - 2$ وجود ندارد یا ۲۱ عددی اول است.

(پ) معکوس هر عدد حقیقی از خود آن عدد کوچک‌تر است یا تعداد دوچرخه‌ها متغیر کمی فاصله‌ای است.

(ت) جامعه آماری، زیرمجموعه نمونه تصادفی است و نمودار دایره‌ای برای نمایش متغیرهای کیفی کاربرد دارد.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۳۸★. اگر $F \equiv (p \wedge q) \sim$ باشد، حاصل هم‌ارزی $F \equiv ? \sim (p \vee q) \wedge p$ کدام است؟

(۱) p (۲) $\sim p$ (۳) همیشه نادرست (۴) بستگی به p و q دارد.

۳۹★. ستون پایانی جدول مقابل کدام است؟

p	q	$\sim(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$
د	د	؟
د	ن	؟
ن	د	؟
ن	ن	؟

د
ن
د
ن (۴)

ن
ن
ن
د (۳)

ن
ن
د
د (۲)

ن
د
ن
د (۱)

۴۰★. با توجه به جدول زیر به جای A، B و C چه ارزش‌هایی قرار خواهند داشت؟

گزاره p: $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ عددی گویا است.	گزاره q: $\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \text{میانگین}$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \vee \sim q)$
A	B	C

(۲) $A \equiv T, B \equiv F, C \equiv F$

(۱) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv F$

(۴) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv T$

(۳) $A \equiv F, B \equiv F, C \equiv F$

۴۱★. با توجه به جدول زیر به جای A، B، C و D چه ارزش‌هایی باید قرار گیرد؟

گزاره	ارزش
گزاره p: $(\frac{1}{p})^{-3} < 0$	A
گزاره q: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	B
گزاره r: $(1 - \sqrt{2}) \in \mathbb{R}$	C
گزاره s: $\sim [(p \wedge q) \vee r]$	D

(۲) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv T, D \equiv F$

(۱) $A \equiv T, B \equiv T, C \equiv F, D \equiv F$

(۴) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv F, D \equiv F$

(۳) $A \equiv F, B \equiv T, C \equiv T, D \equiv T$

۴۲★. در جدول زیر ارزش هر گزاره مشخص شده است. چند مورد از این ارزش‌گذاری‌ها، اشتباه است؟

گزاره مرکب	درست	نادرست
عدد ۹ مربع کامل یا اول است.	✓	
خط $y = 3x - 2$ از ناحیه سوم می‌گذرد و اعداد منفی جذر ندارند.		✓
در حل معادله $0 = 2 + 5x - 3x^2$ به روش مربع کامل باید در ابتدا همه را به ۳ تقسیم کنیم و نمودار دایره‌ای برای متغیرهای کیفی مناسب است.	✓	

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

۴۳☆ چند مورد از گزاره‌های زیر ارزش درست دارند؟

(آ) در معادله $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{x+1}{2x+1}$ دو ریشه قابل قبول وجود دارد و نمودار $y = 3$ محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.

(ب) در داده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۸، ۲۰، ۲۱ اختلاف میانگین و میانه کم‌تر از ۲ واحد است یا میانه بزرگ‌تر از میانگین است.

(پ) عبارت $x^3 - 4x = 0$ به ۳ عامل اول تجزیه می‌گردد و مجموع ریشه‌های آن صفر می‌باشد.

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۴☆ اگر گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ درست باشد، ارزش گزاره $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$ کدام است؟

- (۱) T (۲) F

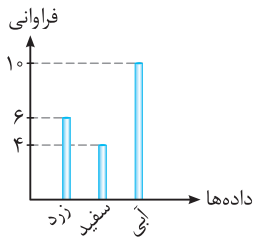
(۳) به I بستگی دارد. (۴) می‌تواند درست یا نادرست باشد.

۴۵☆ ارزش چند گزاره از گزاره‌های زیر درست است؟

(آ) در تابع $f(x) = |x^2 + 3x|$ مقدار $f(-2)$ برابر با ۲ می‌باشد و عبارت $x^2 + 1$ قابل تجزیه است.

(ب) در نمودار راداری با ۹ متغیر، زاویه هر دو محور متوالی ۴۰ درجه است و در نمودار میله‌ای روبه‌رو، درصد رنگ زرد برابر ۳۰ است.

(پ) با توجه به جدول مقابل، زاویه مربوط به گروه خونی O در نمودار دایره‌ای ۶۰ درجه است یا $(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ عددی گویا است.



گروه خونی	A	B	AB	O
فراوانی	۲۴	۱۶	۸	۱۲

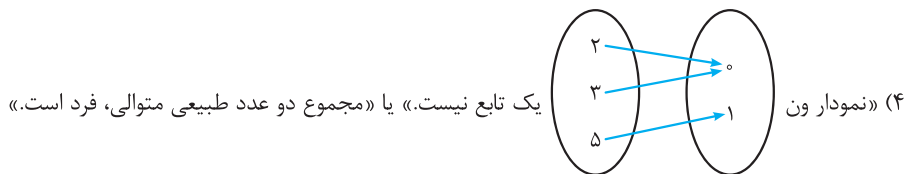
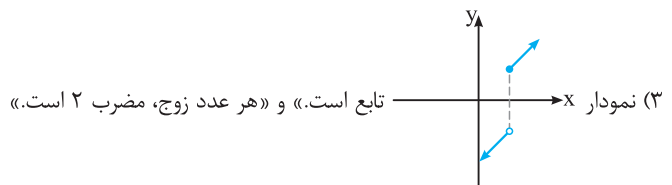
(ت) $f = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$ یک تابع است و معادله $x^2 - 9 = 0$ فقط دارای یک جواب $x = 3$ است.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۴۶☆ ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

(۱) «طول رأس سهمی $y = x^2 - 12x + 1$ برابر $x = 6$ است.» و «مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.»

(۲) «وزن دانش‌آموزان پایه یازدهم متغیر کمی نسبتی است.» و «مربع هر عدد مثبت از همان عدد بزرگ‌تر است.»



قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دوشروطی

گزاره شرطی

۴۷☆ نقیض گزاره $\sim p \Rightarrow q$ کدام است؟

- (۱) $q \Rightarrow p$ (۲) $p \Rightarrow q$ (۳) $p \wedge q$ (۴) $\sim p \wedge \sim q$

۴۸☆ عکس نقیض گزاره مقابل چیست؟

- (۱) $(\sqrt{2})$ گنگ است. \Rightarrow (اگر ۲ زوج باشد)
 (۲) $(\sqrt{2})$ گنگ است. \Rightarrow (اگر ۲ فرد باشد)
 (۳) $(\sqrt{2})$ گویا است. \Rightarrow (اگر ۲ زوج باشد)
 (۴) $(\sqrt{2})$ گنگ نباشد. \Rightarrow (اگر ۲ زوج نباشد)



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل ۱

قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی

۱. جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$3^9 \times 3^5 \times 3^{-2} = 3^{10}$			
میانۀ داده‌های ۴۰۵، ۶۰۷، عدد ۵/۵ است.		$+26 \geq -1400$	
معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.		مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد، کوچک‌تر است.	
		عبارت $\frac{\sqrt{2x}-1}{x^3}$ گویا است.	

۲. کدامیک از جملات یا عبارات‌های زیر، گزاره محسوب می‌شوند؟ ارزش هر گزاره را مشخص کنید.

(آ) کسر $\frac{3x-2}{5\sqrt{x}+1}$ عبارتی گویا است.

(ب) عدد طبیعی x، مربع کامل است.

(پ) روزی چند عدد تست حل می‌کنی؟

(ت) دامنه تابع $f = \{(2,5), (7,2), (3,1)\}$ برابر است با $D_f = \{2, 3, 7\}$

(ث) کوچک‌ترین عدد اول طبیعی، عدد ۱ است.

(ج) تعداد دندان‌های خراب هر فرد، متغیر کمی نسبتی است.

(چ) اگر همه داده‌های آماری با هم برابر باشند دامنه تغییرات آن‌ها صفر است.

(ح) عدد $(-6)^n$ همیشه عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

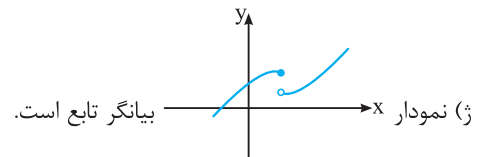
(خ) روزی ۲ ساعت ریاضی بخوان.

(د) عدد 2^{10} عدد بسیار بزرگی است.

(ذ) $-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}$

(ر) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ز) نمودار خط $y = 3x - 4$ از نواحی اول و سوم نمی‌گذرد.



۳. هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید.

(آ) $(46 \text{ عددی مرکب است.}) \equiv ?$

(پ) $(-130 \leq -80) \equiv ?$

(ث) $(\sim [3^3 \leq 5^3]) \equiv ?$

نمونه $\sim(x > y) \equiv x \leq y$

(ب) $(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv ?$

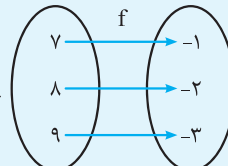
(ت) $(\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}) \equiv ?$

قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی

۴. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	در تابع $f(x) = 3x^2 - 5x $ متغیر مستقل برابر $f(x)$ است و بین افراد متغیر کمی نسبتی است.		
۲	حاصل $(-3)^4$ عددی منفی نیست و رنگ اتومبیل‌ها، متغیر کیفی اسمی نیست.		
۳	۸۱ مضر ۹ است و	✓	
۴ و شیب هر خط عمودی (موازی محور عرض‌ها) تعریف نشده است.		✓
۵	طول رأس سهمی $y = 2x^2 - 8x + 3$ برابر -2 است و $\{0, 1, 2\} \not\subseteq \mathbb{Z}$		
۶	مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۰ عبارتند از $1, 2, 4, 5, 10, 20$ و میانه یک سری از داده‌ها همان چارک دوم است.		
۷	$(\sqrt{121-36} = 11-6) \wedge ((\frac{y}{3})^{-5} \neq (\frac{3}{y})^5)$		
۸	مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچکتر است و مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.		

۵. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	عدد ۲۹ زوج یا اول است.		
۲	عدد ۳۷ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.		
۳	کسر $\frac{5x^2}{ x +4}$ عبارتی گویاست یا ۸۲ عددی مرکب	✓	
۴	$(\sqrt{3} \in \mathbb{N}) \vee ((-4)^2 > (-2)^5)$		
۵	اندازه قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست.		
۶	نمودار ون  تابع نیست یا	✓	
۷	تجزیه عبارت $9x^2 - 6x + 1$ به صورت $(3x-1)^2$ است یا	✓	
۸	معکوس هر عدد مثبت، کوچکتر از خود آن عدد است یا مجموع هر عدد زوج با هر عدد فرد، عددی فرد است.		

۶. با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی یا نادرستی هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

- (الف) $(p \wedge \sim p) \equiv F$ (ب) $(p \vee \sim p) \equiv F$ (پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
- (ت) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ (ث) $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$ (ج) $[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
- (چ) $[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$ (ح) $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$ (خ) $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$
- (د) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ (ویژه علاقمندان) (ذ) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ (ویژه علاقمندان)
- (ز) $[p \wedge (\sim p \wedge \sim q)] \equiv F$ (ز) $[\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] \equiv p$

۷. بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید.

- (الف) $[\sim(\sim p) \vee \sim(\sim T)] \equiv ?$ (ب) $[(\sim p \vee T) \wedge (F \wedge \sim p)] \equiv ?$ (پ) $[\sim(p \vee \sim p) \wedge \sim(q \wedge \sim q)] \equiv ?$
۸. اگر فرض کنیم که گزاره $p \wedge r$ گزاره‌ای درست باشد و q گزاره‌ای دلخواه باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ را تعیین کنید.

۹. بدون رسم جدول، طرف دیگر هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید (T گزاره‌ای همواره درست و F گزاره‌ای همواره نادرست است).
- (الف) $(\sim p \wedge \sim F) \equiv ?$ (ب) $[(p \wedge \sim p) \vee (q \vee T)] \equiv ?$

۱۰. اگر گزاره $p \vee (\sim q \vee p)$ نادرست باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
- (الف) $[\sim p \vee (q \wedge r)] \equiv ?$ (ب) $[\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)] \equiv ?$

ب) در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه a و b و وتر c، مطابق شکل، اگر ضلع a را سه برابر کنیم، آنگاه وتر مثلث جدید، سه برابر وتر مثلث اولیه است.



استدلال: $c^2 = a^2 + b^2$: رابطه فیثاغورس در مثلث اولیه
 $c'^2 = (3a)^2 + b^2 = 9a^2 + b^2 = 9(a^2 + b^2) = 9c^2 \Rightarrow c'^2 = 9c^2 \xrightarrow{\text{جذر}} c' = 3c$
 رابطه فیثاغورس در مثلث جدید

پس وتر مثلث، سه برابر شده است.

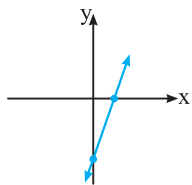
ب) تساوی $\sqrt{\frac{15 \times 7 + 25 \times 2}{14}} = 2\sqrt{10}$ برقرار است.

استدلال: $\sqrt{\frac{15 \times 7 + 25 \times 2}{14}} = \sqrt{\frac{15 + 25 \times 2}{2}} = \sqrt{15 + 25} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$

پاسخ فصل ۱

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- ث) گزاره نادرست است. کوچک‌ترین عدد اول طبیعی، عدد ۲ است نه ۱
- ج) گزاره درست است (سال گذشته خوانده‌اید).
- چ) گزاره درست است (سال گذشته خوانده‌اید).
- ح) گزاره نادرست است، چون اگر n زوج باشد حاصل $(-6)^n$ عددی مثبت می‌شود، مثلاً $(-6)^2 = +36$
- خ) گزاره نیست (جمله امری است).
- د) گزاره نیست (جمله خبری است ولی قابل ارزش‌گذاری نیست).
- ذ) گزاره نادرست است، زیرا می‌دانیم که $-\frac{1}{4} < -\frac{3}{5}$ است.
- ر) گزاره درست است (اتحاد مربع دوجمله‌ای است).
- ز) گزاره نادرست است، زیرا نمودار این خط از نواحی اول، سوم و چهارم می‌گذرد، پس فقط از ناحیه دوم نمی‌گذرد.



$$y = 3x - 4$$

ژ) گزاره درست است، چون هر خط عمودی دلخواه، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

- آ) (۴۶ عددی مرکب نیست) \equiv (۴۶ عددی مرکب است). ~
- ب) $(\sqrt{25+9} = 5+3) \equiv (\sqrt{25+9} \neq 5+3)$ ~
- پ) $(-130 > -80) \equiv (-130 \leq -80)$ ~
- ت) $(\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}) \equiv \sqrt{3} \in \mathbb{Z}$ ~
- ث) $(\sim(3^3 \leq 5^3)) \equiv 3^3 \leq 5^3$ ~

ارزش $\sim p$	گزاره $\sim p$	ارزش p	گزاره p
T	$3^9 \times 3^5 \times 3^{-2} \neq 3^{10}$	F	حاصل، 3^{12} می‌شود.
T	$26 \geq -1400$	F	$-1400 < 26$
F	میانۀ داده‌های $40, 50, 60, 70$ عدد $5/5$ نیست.	T	میانۀ داده‌های $40, 50, 60, 70$ عدد $5/5$ است.
F	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر است.	T	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر نیست.
F	معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز ندارد.	T	چون دلتای معادله مثبت است. دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
T	عبارت $\frac{\sqrt{2}x-1}{x^3}$ گویا است.	F	عبارت $\frac{\sqrt{2}x-1}{x^3}$ گویا نیست.

- آ) گزاره است و ارزش نادرست دارد، چون X زیر رادیکال است و لذا عبارت مذکور، گویا محسوب نمی‌شود.
- ب) گزاره نیست، چون مقدار دقیق X به ما داده نشده است.
- پ) گزاره نیست (جمله پرسشی است).
- ت) گزاره درست است. زیرا می‌دانیم دامنه تابع، شامل عضوهای اول زوج مرتب‌ها می‌باشد.