فصل ۱ ماتریس و کاربردها

(ابتدا درسنامه مربوط به این فصل را در بخش درسنامه مطالعه نمایید.)

قسمت اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تساوی، جمع و تفاضل ماتریس‌ها

ماتریس اگر خوب مطالعه شود، بهترین نتیجه را در این بخش خواهید گرفت و همهٔ تست‌های آن را به درستی در کنکور جواب خواهید داد.

☆۱. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با فرض $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i\geq j \\ j & j>i \end{cases}$ تعریف می‌شود، مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۱   ۳) ۱۲   ۴) ۱۳

۲. اگر $A=[ij]_{۳\times۳}$ و $B=[(i-j)^۲]_{۲\times۲}$، آن‌گاه مقدار $a_{۱۱}b_{۲۲}+b_{۲۱}a_{۳۲}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

☆۳. اگر $A=\begin{bmatrix} x-۲y & ۱ \\ z^۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & x+۲y \\ -۸ & -۴ \end{bmatrix}$ در صورتی‌که $A=B$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) −۲   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۰

☆۴. اگر $A=\begin{bmatrix} x-۳y & x \\ ۱ & y \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۶-y \\ ۱ & ۶-x \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ با فرض $A=B$ حاصل $۲B+C$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

☆۵. اگر برای ماتریس‌های A و B داشته باشیم $A+B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ آن‌گاه درایهٔ واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) −۱   ۴) −۲

★۶. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$، $a_{ij}=\begin{cases} ۳i+۴j & i\leq j \\ ۲i-j & i>j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲x+y & ۴a+b-۷ \\ a-b+۱ & ۳x+۵y \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه با فرض $A=B$ حاصل $(۳x+۲y-۳a)^b$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۴   ۳) ۹   ۴) ۲۵

★۷. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ i-j & i\neq j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه با فرض این‌که مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس $xA+yB$ برابر باشند، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $-\frac{۳}{۸}$

☆۸. اگر $\begin{bmatrix} x^۲ & y^۲ \\ z^۴ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار xyz کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) −۱   ۴) صفر

☆۹. اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۷ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که $A+B=I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی B کدام است؟

۱) −۴   ۲) −۲   ۳) −۳   ۴) −۵

دانش‌آموزان عزیز! در صورت کمبود وقت حتماً به تست‌های دارای علامت ☆ پاسخ دهید. تست‌های دارای علامت ★ کمی دشوارتر هستند.

☆۱۰. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}۳ & i=j\\ \sin\pi(i+j) & i\neq j\end{cases}$ کدام است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس همانی ۳) ماتریس سطری ۴) ماتریس اسکالر

✪۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $xA+yB=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ آن‌گاه مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ x و y به‌دست نمی‌آید.

☆۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & b\\ ۳ & -۱\\ ۲ & a\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}a & ۳\\ b & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $C=A+B$ باشد و $c_{۱۱}=۲c_{۲۲}$ ، $c_{۳۱}-۲=c_{۱۲}$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۳ ۴) −۲

☆۱۳. اگر $C=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ k & ۲\end{bmatrix}$ و $C+۲D=۳I$ ، آن‌گاه مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) −۱ ۴) −۲

★۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B=A+۲A+۳A+\cdots+nA$ (n عددی طبیعی است) کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $n(n+۱)$ ۴) $\frac{n}{۲}(n+۱)$

☆۱۵. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}۳-a_{ij} & i\neq j\\ -a_{ij} & i=j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس $A-\frac{۱}{۲}I$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۷/۵ ۴) ۸/۵

✪۱۶. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}۲i-a_{ji} & i<j\\ ۶-a_{ji} & i=j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۰ ۳) ۱۷ ۴) ۲۴

ضرب ماتریس‌ها، ماتریس‌های تعویض پذیر

◎ *درست نوشتن درایه‌های ماتریس و تسلط بر محاسبات ریاضی در این‌جا بسیار مهم است. با کمی دقت اغلب سؤال‌های این بخش را پاسخ خواهید داد.*

☆۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۵ & b\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-۲a & ۳\\ ۱ & c\end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix}۰ & -۵\\ -۶ & -۱\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه abc کدام است؟

۱) −۴ ۲) −۸ ۳) −۱۶ ۴) −۲

۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix}x & x\\ y & y\end{bmatrix}$ و $A^۲=A$ ، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟ $(xy\neq ۰)$

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆۱۹. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ، $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{۴\times۶}$ ، $b_{ij}=۲i+۳j$ آن‌گاه با فرض $C=AB$ ، $c_{۳۴}$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

✪۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ a^۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ a\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و $AC=B$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) −۱ ۲) −۲ ۳) ۱ ۴) صفر

☆۲۱. اگر $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $A\times B=C$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

☆۲۲. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۴ & ۲\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۳ & -۹\\ ۶ & ۱۲\\ ۰ & ۱۵\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۴ & -۱ & ۵\\ ۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه با فرض $D=(۲A-\frac{۱}{۳}B)C$ ، $d_{۲۲}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) −۶ ۴) −۲

۲۳. ☆ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $A^۲B+BAB$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲ & ۶\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -\frac{۳}{۲} & \frac{۷}{۴}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۳ & -۱\\ -\frac{۳}{۲} & -\frac{۷}{۴}\end{bmatrix}$

۲۴. ☆ با توجه به تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$، مقدار b کدام است؟

۱) $\cos(\alpha-\beta)$ ۲) $\sin(\alpha-\beta)$ ۳) $\sin(\beta-\alpha)$ ۴) $\sin(\alpha+\beta)$

۲۵. جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ کدام‌اند؟

۱) $-۱,-۳$ ۲) $۱,-۳$ ۳) $-۱,۳$ ۴) $۱,۳$

۲۶. ✪ اگر ماتریس $A_{۲\times۲}$ چنان باشد که $A\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\ -a\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^۲\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۲\\ -۱\end{bmatrix}$

۲۷. ✪ کدام گزینه می‌تواند $A\times B-B\times A$ باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۷\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$

۲۸. ⍟ ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\times\cdots\times\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۷ & ۱\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲۸ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲۱ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳۶ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲۵ & ۱\end{bmatrix}$

۲۹. ⍟ اگر $A+I=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ و $B+۲I=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $AB+۲A+B+۲I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۷ & ۲\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۷ & -۲\\ -۶ & ۶\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۷ & -۲\\ -۶ & ۶\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۷ & ۲\\ ۶ & -۶\end{bmatrix}$

۳۰. ☆ ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ را با فرض $a_{ij}=\begin{cases}i & i>j\\ j & i\le j\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ چقدر بیش‌تر از مجموع درایه‌های ماتریس A است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۳۱. ✪ اگر $AB=\begin{bmatrix}۶ & -۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$، $BC=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ و $CA=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $(ABC)^۲$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۷ & -۲\\ ۴ & -۴\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۳ & -۴\\ ۳ & -۸\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۱۸ & -۱۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۱۲ & ۱\\ -۳۶ & ۰\end{bmatrix}$

۳۲. ⍟ اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & a\\ b & -۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و ماتریس $A\times B$ قطری باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳. ☆ به ازای کدام مقدار x, y ماتریس $\begin{bmatrix}x & -۱ & ۴\\ ۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۱ & ۰\\ y & ۱\end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

۱) $x=۱, y=-۷$ ۲) $x=۲, y=-۷$ ۳) $x=۲, y=-۵$ ۴) $x=۱, y=-۵$

۳۴. ★ اگر $A=\begin{bmatrix}-۴ & p & -۲\\ ۴ & ۲ & q\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}q & -۴\\ ۲ & ۲q\\ ۴p & ۶\end{bmatrix}$ و AB یک ماتریس قطری باشد، آن‌گاه $q-p$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵. ☆ اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$ باشد، آن‌گاه زوج‌مرتب (α,β) کدام است؟

۱) $(-۱,۶)$ ۲) $(۱,-۶)$ ۳) $(-۱,-۶)$ ۴) $(۱,۶)$

۳۶.☆ اگر $A=\begin{bmatrix} x & -۱ & -x \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ y & z & z \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۲z & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۲z & ۰ & -۴y \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y\in\mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۱)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۷.✪ اگر $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۱ \\ a & ۴ & ۲ \\ b & c & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & z \\ ۰ & t & u \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۰ & ۰ \\ y & t & ۰ \\ z & u & r \end{bmatrix}$ و همهٔ پارامترها مثبت باشند، آن‌گاه r کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۳۸.☆ از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$، عدد غیرصفر x، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۸)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۹.☆ حاصل $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱۵ \\ ۲۵ \\ ۳۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱۰ \\ ۲۰ \\ ۳۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱۵ \\ ۲۵ \\ ۳۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱۰ \\ ۱۵ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$

۴۰.✪ اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $AB+BA=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۳ \\ ۵ & -۷ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲+B^۲$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۴۱.☆ ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۲ & i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های $A^۲-۴A$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۴۲.★ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & x & ۰ \\ ۰ & ۰ & y \\ ۰ & ۰ & z \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ x & ۰ & ۰ \\ ۰ & y & z \end{bmatrix}$ و ستون سوم ماتریس $A^۲B$ برابر $\begin{bmatrix} -۶ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۵

۴۳.★ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & c \\ a & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و ستون دوم ماتریس $A^۲-B$ برابر $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۴.✪ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۷ & ۲۲ & ۳۶ \\ ۱۰ & ۳۱ & ۵۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۷ & ۱۵ \\ ۴ & ۲۰ & ۱۷ \\ ۳۰۲ & ۱۵۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲۸ & -۱ & -۲ \\ -۴ & ۲ & -۱ \\ -۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۴۵.☆ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۶ & -۱ & -۱ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^۲B^۳$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱ ۳) ۱۹ ۴) ۲

۴۶.☆ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ & -۲ \\ -۲ & -۴ & ۱ \\ -۲ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$، p و q دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ماتریس $pA^۲+qB^۲$ همواره کدام است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس ستونی ۳) ماتریس اسکالر ۴) ماتریس همانی

☆۴۷. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & ۲ & ۰ \\ b & c & ۴ \end{bmatrix}$ و $AB = I$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A + B$ کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۸/۷۵ ۳) ۸/۲۵ ۴) ۸

☆۴۸. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $AB = I$ ، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس B کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) -۳

☆۴۹. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^۲$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴ (سراسری ریاضی- ۹۷)

☆۵۰. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A ، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۳) ۱۹ ۴) ۲۱

☆۵۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A ، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵۲. اگر برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ A و B رابطهٔ $A \times B = -۲B \times A$ برقرار باشد، ماتریس $(A+B)^۲$ کدام است؟

۱) $A^۲ + A \times B + B^۲$ ۲) $A^۲ - B \times A + B^۲$ ۳) $A^۲ - A \times B + B^۲$ ۴) $A^۲ + B^۲$

☆۵۳. اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ، چند ماتریس مانند $B = \begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۲ & b \end{bmatrix}$ وجود دارد که A با B تعویض‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

☆۵۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ و $AX = ۳X$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{a-b+c}{c}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

☆۵۵. اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a & ۱ \\ c & ۵ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه $a + c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

✪۵۶. اگر $(A+I)^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A-I)^۲ = -\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A_{۲\times۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\sqrt{۲}$

✪۵۷. اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند و $AB = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^۲B^۲$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲۵ & ۵ \\ ۵ & ۲۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲۶ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۲۶ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲۶ \\ ۲۶ & ۱۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۵ & ۲۵ \\ ۲۵ & ۵ \end{bmatrix}$

★۵۸. اگر $A = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & b & a \\ ۳ & a & ۲ \\ a & -۲ & b \end{bmatrix}$ و $B = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & a \\ b & a & -۲ \\ a & ۲ & b \end{bmatrix}$ و $AB = I$ ، آن‌گاه مقادیر a و b به ترتیب کدامند؟

۱) ۶ و ۳ ۲) ۶ و -۳ ۳) -۶ و -۳ ۴) -۶ و ۳

☆۵۹. اگر $A^۲ = -A - I$ ، آن‌گاه حاصل $A(A+۲I)$ کدام است؟

۱) $A - I$ ۲) $A + I$ ۳) $-A + I$ ۴) $۲A - I$

★۶۰. اگر $A=\begin{bmatrix} a-2 & 4 & -7 \\ b & 0 & b+2 \\ 7 & a & 0 \end{bmatrix}$ و به ازای هر i و j رابطه $a_{ij}=-a_{ji}$ باشد. آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2 کدام است؟

۱) -120
۲) -130
۳) -138
۴) -200

☆۶۱. اگر A ، B و C ماتریس‌های مربع باشد به طوری‌که $A+B=I$ و $A=BC$ ، آن‌گاه $AC-C$ کدام است؟

۱) $-B$
۲) $-C$
۳) $-A$
۴) $-I$

۶۲. اگر A ، B و C ماتریس‌های مربع باشد به طوری‌که $A+B=I$ و $A=BC=CB$ ، آن‌گاه حاصل $AC-CA$ کدام است؟

۱) I
۲) B
۳) $\bar{O}$
۴) A

★۶۳. اگر برای ماتریس A داشته باشیم $A^2+3A+I=\bar{O}$ و ماتریس‌های B و C چنان باشند که $2A=B^3+C^3$ ، آن‌گاه $B-C$ کدام است؟

۱) A
۲) $2A$
۳) $A+2I$
۴) $A-2I$

★۶۴. اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ و $AB=B$ و $BA=A$ باشد آن‌گاه $(A+B)^3$ کدام است؟

۱) $8A$
۲) $2A+6B$
۳) $8B$
۴) $4(A+B)$

☆۶۵. اگر برای ماتریس ۲×۲، A داشته باشیم $A^2=I-A$ آن‌گاه حاصل $A^2(A+I)^2$ کدام است؟

۱) I
۲) A
۳) $\bar{O}$
۴) $-A$

۶۶. اگر برای ماتریس ۲×۲، A داشته باشیم $A^2=\bar{O}$ ، آن‌گاه $A(I-A)^3$ کدام است؟

۱) A
۲) $-A$
۳) $\bar{O}$
۴) I

☆۶۷. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ و $A^3=mA+nI$ آن‌گاه n^m کدام است؟

۱) -1
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) 2
۴) -2

☆۶۸. اگر A و B ماتریس‌های مربعی ۲×۲ باشند به طوری‌که $A+B=2AB$ ، آن‌گاه حاصل $A^2+B^2+AB+BA$ کدام است؟

۱) $(AB)^2$
۲) $4(AB)^2$
۳) $(BA)^2$
۴) $4(BA)^2$

★۶۹. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری‌که $A+B+AB=\bar{O}$ آن‌گاه $(A+I)(B+I)$ کدام است؟

۱) $2AB$
۲) $2BA$
۳) O
۴) I

☆۷۰. اگر A ماتریس مربعی باشد، به طوری‌که $A^2-A-2I=\bar{O}$ آن‌گاه حاصل A^3+I کدام است؟

۱) $3A+3I$
۲) $2A+2I$
۳) $3A-3I$
۴) $2A-2I$

۷۱. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $A^3-7A^2+2A+4I$ کدام است؟

۱) $4I$
۲) $3I$
۳) $5I$
۴) $6I$

☆۷۲. اگر $A^2=A$ باشد و $AB=I$ ، آن‌گاه حاصل A^3B^2 کدام است؟

۱) I
۲) A
۳) B
۴) $\bar{O}$

★۷۳. اگر A و B ماتریس‌های مربعی ۲×۲ باشند، به طوری‌که $AB+BA=I$ آن‌گاه حاصل A^2B-BA^2 کدام است؟

۱) I
۲) $\bar{O}$
۳) A
۴) B

★۷۴. A یک ماتریس ۲×۲ است، به طوری‌که $A^2+3A-I=O$ می‌باشد و اگر $AU=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ به طوری‌که $U=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ در این‌صورت A^3U کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} 7 \\ -10 \end{bmatrix}$

☆۷۵. اگر $AB=\lambda BA$ ، آن‌گاه حاصل $(AB)^2-A^2B^2$ کدام است؟

۱) λA^2B^2
۲) $\frac{\lambda-1}{\lambda}A^2B^2$
۳) $\frac{1-\lambda}{\lambda}A^2B^2$
۴) $\bar{O}$

۷۶. اگر $AB-BA=2I$ ، آن‌گاه حاصل $(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)$ کدام است؟

۱) $2I$
۲) $-2I$
۳) I
۴) $\bar{O}$

توان ماتریس‌ها

در این مبحث با توجه به خواص ضرب ماتریس‌ها و نتیجه‌گیری صحیح استقرایی می‌توانیم بدون دردسر زیاد، توان‌های بالای ماتریس‌ها را به‌دست آوریم.

☆۷۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{۵}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۶

☆۷۸. اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) A ۲) $\frac{۱}{۲^{۱۰۰}}A$ ۳) $۲^{۱۰۰}A$ ۴) I

☆۷۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^{n}=I$ است، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

✪۸۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ آن‌گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $\frac{۱}{۲^{۸-n}}(A-A^{۲})^{n}$ برابر I باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆۸۱. اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۱\\ ۰ & a\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{n} کدام است؟

۱) a^{n} ۲) $۲a^{n}$ ۳) na^{n} ۴) صفر

★۸۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۷\end{bmatrix}$ و $B=A^{۵۰}$ آن‌گاه $b_{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷^{۵۰}-۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷^{۵۰}-۲}{۳}$ ۳) $\frac{۷^{۵۰}+۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷^{۵۰}+۲}{۴}$

★۸۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=A+A^{۲}+A^{۳}+\cdots+A^{۲۰۲۲}$ آن‌گاه B کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $۲۰۲۲A$ ۴) $A-I$

۸۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۲۰۱۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\overline{O}$ ۴) $-I$

✪۸۵. اگر $M=\begin{bmatrix}۲\cos^{۲}\theta & \sin ۲\theta\\ \sin ۲\theta & ۲\sin^{۲}\theta\end{bmatrix}$، آن‌گاه $M^{۳}$ کدام است؟

۱) M ۲) $۲M$ ۳) $۳M$ ۴) $۴M$

☆۸۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $A^{۸}\times B^{۹}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۸\\ ۹ & ۷\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۸\\ ۹ & ۷۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۸\\ ۹ & ۷۲\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۹\\ ۸ & ۷۳\end{bmatrix}$

✪۸۷. اگر A ماتریس مربعی ۲×۲ و $A^{۲}-A+I=\overline{O}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $A^{۳۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

☆۸۸. اگر $A^{۲}=B^{۲}=I$، $AB=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $((A+B)(A-B))^{۱۴۰۱}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) $\overline{O}$ ۴) $۲I$

☆۸۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول $A^{۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

★۹۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=(A+I)^{۶}$، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۶

☆ **۹۱.** اگر $A^{۲} = \overline{O}$، حاصل $(I - A)^{۴}(I + A)^{۵}$ کدام است؟

۱) $I + A$ ۲) $I - A$ ۳) $۲۰A$ ۴) O

☆ **۹۲.** اگر $A^{۲} = A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(I + A)^{۴}$ کدام است؟

۱) $۱۵A$ ۲) $۱۶A$ ۳) $I + ۱۵A$ ۴) $I + ۱۶A$

☆ **۹۳.** اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{۴۰}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲^{۴۰} & ۰ \\ ۰ & ۲^{۴۰} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲^{۳۹} & ۲^{۳۹}\sqrt{۳} \\ -۲^{۳۹}\sqrt{۳} & ۲^{۳۹} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۲^{۳۹} & ۲^{۳۹}\sqrt{۳} \\ -۲^{۳۹}\sqrt{۳} & -۲^{۳۹} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲^{۳۹}\sqrt{۳} & -۲^{۳۹} \\ ۲^{۳۹} & ۲^{۳۹}\sqrt{۳} \end{bmatrix}$

★ **۹۴.** اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ و $AB = A$ و $BA = B$ باشد حاصل $A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots + A^{۱۴۰۱}$ کدام است؟

۱) $۱۴۰۰A$ ۲) $۱۴۰۱A$ ۳) $۱۴۰۰B$ ۴) $۱۴۰۱A$

☆ **۹۵.** اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = AB$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $C^{n} + A^{۲}$ کدام است؟ (n عدد طبیعی)

۱) صفر ۲) $۲ + ۲(-۱)^{n}$ ۳) $(-۱)^{n} + ۱$ ۴) $۲(-۱)^{n} + ۳$

☆ **۹۶.** اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & -۱ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشد و $AB = I$ باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

☆ **۹۷.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{n} برابر ۲۴۴ باشد آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۹۸. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{n} کدام است؟

۱) $-n$ ۲) صفر ۳) $۲ - n$ ۴) $۱ - n$

☆ **۹۹.** اگر $A^{۲} = ۲A - I$ آن‌گاه $A^{۱۰} = aA + bI$. زوج مرتب (a ,b) کدام است؟

۱) $(۱۰,-۹)$ ۲) $(۱۰,۹)$ ۳) $(۹,-۱۰)$ ۴) $(۹,۱۰)$

☆ **۱۰۰.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots + A^{n}$ (n عدد طبیعی) آن‌گاه مجموع درایه‌های B کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(n - n^{۲})$ ۲) $۲n - ۲n^{۲}$ ۳) $۲n - n^{۲}$ ۴) $n - n^{۲}$

★ **۱۰۱.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B = A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots + A^{۲۰۰}$ کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۳۹۸ ۴) ۳۹۹

☆ **۱۰۲.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & \sqrt[۵]{۲} & ۰ \\ \sqrt[۵]{۸} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt[۵]{۴} \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۲

★ **۱۰۳.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ ۳ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۳} - ۲A^{۲} + ۵I$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

☆ **۱۰۴.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^{۴}$ کدام است؟

۱) ۹۶ ۲) ۹۷ ۳) ۹۹ ۴) ۹۸

☆**۱۰۵.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۴}$، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

☆**۱۰۶.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۴}$ کدام می‌باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است.
۲) درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.
۳) قطری غیرهمانی
۴) همانی

☆**۱۰۷.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول $A^{۳}$، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix} ۳۰ & ۶ & ۶۴ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۳۰ & ۶ & ۷۸ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۲۴ & ۸ & ۸۶ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۳۰ & ۶ & ۸۶ \end{bmatrix}$

☆**۱۰۸.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۱)

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۹ & ۱۲ & ۱۶ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۹ & ۵ & -۷ \end{bmatrix}$

☆**۱۰۹.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{۱۱}$ از مجموع درایه‌های قطر اصلی چقدر بیش‌تر است؟

۱) $۲^{۹}$
۲) $۲^{۱۰}$
۳) $۲^{۱۱}$
۴) $۲^{۱۲}$

☆**۱۱۰.** اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۴۲} + A^{۵۵}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$

☆**۱۱۱.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) A
۲) $-A$
۳) I
۴) $۳I$

☆**۱۱۲.** اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$، $a_{ij} = |i-j| + j - i$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B = A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots + A^{۱۴۰۱}$ کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴۰۱

۱۱۳. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $\frac{۱}{۳۶^{۶}} A^{۴۰}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۳۶
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۳۶}$

☆**۱۱۴.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^{۱۰۰} = ۲^{K} A^{۲}$ باشد آن‌گاه K کدام است؟

۱) ۱۰۰
۲) ۹۹
۳) ۹۸
۴) ۱۰۱

☆**۱۱۵.** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{n+۱}$ (n عدد طبیعی) کدام است؟

۱) $۲^{n+۱} + ۱$
۲) $۲^{n+۲} + ۱$
۳) $۲^{n} - ۱$
۴) $۲^{n-۱} + ۱$

☆۱۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $A^{۴۹}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۴۹ & ۱ & ۰\\ x & ۴۹ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) ۱۲۳۵   ۲) ۱۲۲۵   ۳) ۱۱۲۵   ۴) ۱۲۷۵

★۱۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $۲I+A+A^۲+\dots+A^{۲۴}+A^{۲۵}$ کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

✪۱۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۸\\ ۳ & -۱ & ۶\\ -۲ & ۰ & -۵\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^۲+۲A)^{۱۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

★۱۱۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & -۴ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۱\\ -۴ & ۴ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^۲-۲A+۲I)^۶$ کدام است؟

۱) I ۲) $\overline{O}$ ۳) A ۴) $-I$

✪۱۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۳ & ۴\\ ۱ & -۴ & -۵\\ -۱ & ۳ & ۴\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^۳+۳I)^۴$ کدام است؟

۱) $۲۷I$ ۲) $۸۱I$ ۳) $۱۶I$ ۴) $۶۴I$

☆۱۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۲\\ -۱ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$، با فرض $(A-kI)^n=\overline{O}$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $k+n$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

☆۱۲۲. اگر $۴A^۲=۳A$، آن‌گاه ماتریس $A^۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}A$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}A$ ۳) $\frac{۲۷}{۶۴}A$ ۴) $\frac{۸۱}{۲۵۶}A$

⍟۱۲۳. اگر $A^۲=A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A-\frac{I}{۲})^۶$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶۴}I$ ۲) $\frac{۱}{۳۲}I$ ۳) $\frac{۱}{۳۲}A$ ۴) $\frac{۱}{۶۴}A$

★۱۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های $(۲I-A)^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) ۳۰۱   ۲) ۳۰۲   ۳) ۳۰۰   ۴) ۳۰۳

★۱۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(ABC)^n=I$. کم‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

قسمت دوم: وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان ۲×۲

◎ *محاسبهٔ دترمینان ۲ × ۲ ساده می‌باشد. در این مبحث دانستن خواص دترمینان و دقت در محاسبه بسیار مهم است.*

☆۱۲۶. اگر $\begin{vmatrix}a & -b\\ ۲ & ۳\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & b\\ ۶ & -۵\end{vmatrix}=۳۲$ آن‌گاه $\begin{vmatrix}۴a & b\\ -۴ & ۱\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۱۶   ۳) ۳۲   ۴) ۶۴

☆۱۲۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $\frac{|A^۲+AB|}{|B^۲+BA|}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☆۱۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=A+A^{۳}+A^{۵}+\cdots+A^{۲n-۱}$ (n عدد طبیعی) آن‌گاه $|B|$ کدام است؟

۱) $n^{۲}$
۲) $-n^{۲}$
۳) $-(۲n-۱)^{۲}$
۴) $(۲n-۱)^{۲}$

☆۱۲۹. اگر A و B ماتریس‌های ۲ × ۲ باشند، به طوری‌که $A+۲B=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ و $۲A-B=\begin{bmatrix} ۵ & -۱۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $|A|+|B|$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۷
۳) ۷−
۴) ۱۰−

✪۱۳۰. اگر A یک ماتریس ۲ × ۲ باشد، به طوری‌که $|A|=۳$، آن‌گاه حاصل $|A-I|+|A+I|$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۳
۳) ۸
۴) ۴

✪۱۳۱. دترمینان ماتریس ۲ × ۲، A را Δ و مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^{۲}$ را T می‌نامیم. مربع مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

۱) $T+\Delta$
۲) $T^{۲}+۲\Delta$
۳) $۲\Delta+T$
۴) $\Delta+۲T$

☆۱۳۲. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$، $a_{ij}=\begin{cases} ۲i-j & i<j \\ i & i\geq j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$، $b_{ij}=\begin{cases} i+۲j & i\leq j \\ ۲+j & i>j \end{cases}$. آن‌گاه با فرض $AX=B$ حاصل $|X|$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱−
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

☆۱۳۳. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ به طوری‌که $a_{ij}=(-۱)^{i}-j$ و $b_{ij}=(-۱)^{j}+i$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A\times B$ کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۴−
۳) ۲۰
۴) ۲۰−

★۱۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=A+A^{۲}+A^{۳}+\cdots+A^{۲۰۲۲}$ آن‌گاه دترمینان ماتریس B کدام است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۱−

☆۱۳۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^{۲}-۴x+۱=۰$ باشد آن‌گاه دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۹
۳) ۱۶
۴) ۲۵

★۱۳۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -a \\ a & ۰ \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس $A^{۴n}+A^{۴n+۱}$ برابر $a^{n+۳۷}+a^{n+۳۵}$ باشد، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۳

۱۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=A+I$ آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^{۲۰۲۲}+B$ کدام است؟

۱) ۱−
۲) ۲۰۲۱−
۳) ۲۰۲۱
۴) ۱

✪۱۳۸. اگر $۲A=\begin{bmatrix} |A| & -۲ \\ ۲ & |A| \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل دترمینان $|A|A$ کدام است؟

۱) ۸−
۲) ۴−
۳) ۸
۴) ۴

۱۳۹. اگر $۲A+۳I=\begin{bmatrix} ۹ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^{۲}-۳A$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴−
۳) ۲
۴) ۲−

☆۱۴۰. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ a & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & a \\ -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=A\times B$، آن‌گاه به ازای کدام مجموعه مقادیر a، حاصل دترمینان C منفی است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶، با کمی تغییر)

۱) $\varnothing$
۲) $\{a:a<۱\}$
۳) $\{a:a>۱\}$
۴) $\mathbb{R}$

☆۱۴۱. اگر A و B ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ ۲ بوده و $A\times B=\begin{bmatrix} ۷ & ۸ \\ ۷ & ۱۰ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $B\times A$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۵ & ۲ \\ ۸ & ۲ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} -۱۵ & -۲ \\ -۸ & ۲ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۱۵ & ۲ \\ ۸ & -۲ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -۱۵ & ۲ \\ -۸ & -۲ \end{bmatrix}$

☆۱۴۲. فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & a & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $ACB=۵۲I$، اگر $|B|=۱۰۴$ باشد آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰، با کمی تغییر)

۱) ۲−
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ فصل ۱ ماتریس و کاربردها

۱ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$a_{ij}=\begin{cases} i-j & i\geq j \\ j & j>i \end{cases}\Rightarrow a_{۱۱}=۱-۱=۰,\ a_{۲۲}=۲-۲=۰,\ a_{۳۳}=۳-۳=۰$$

$$a_{۱۲}=۲\ ,\ a_{۱۳}=۳\ ,\ a_{۲۱}=۲-۱=۱\ ,\ a_{۲۳}=۳$$

$$,\ a_{۳۱}=۳-۱=۲, a_{۳۲}=۳-۲=۱$$

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۱+۲+۱+۲+۳+۳=۱۲$$

۲ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$A=[ij]_{۳\times۳}\Rightarrow a_{۱۱}=۱\ ,\ a_{۳۲}=۳\times۲=۶$$

$$B=[(i-j)^۲]_{۲\times۲}\Rightarrow b_{۲۲}=(۲-۲)^۲=۰,\ b_{۲۱}=(۲-۱)^۲=۱$$

$$a_{۱۱}b_{۲۲}+b_{۲۱}a_{۳۲}=۱\times۰+۱\times۶=۶$$

۳ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

نکته: دو ماتریس A و B برابرند، هرگاه مرتبهٔ آن‌ها یکی باشد و درایه‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix} -۳ & x+۲y \\ -۸ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-۲y & ۱ \\ z^۳ & -۴ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x-۲y=-۳ \\ x+۲y=۱ \\ z^۳=-۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=-۱ \\ y=۱ \\ z=-۲ \end{cases}\Rightarrow x+y+z=-۱+۱-۲=-۲$$

۴ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix} x-۳y & x \\ ۱ & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۶-y \\ ۱ & ۶-x \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x-۳y=۲ \\ x=۶-y \\ y=۶-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x-۳y=۲ \\ x+y=۶ \end{cases}\Rightarrow x-۳y+۳x+۳y=۲+۱۸\Rightarrow ۴x=۲۰$$

$$\Rightarrow x=۵\ ,\ y=۶-۵=۱$$

$$۲B+C=۲\begin{bmatrix} ۲ & ۶-۱ \\ ۱ & ۶-۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱۰ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

۵ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$(A+B)+(A-B)=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow a_{۱۲}=-۱$$

۶ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$a_{ij}=\begin{cases} ۳i+۴j & i\leq j \\ ۲i-j & i>j \end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱ \\ ۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

$$B=A\Rightarrow\begin{bmatrix} ۲x+y & ۴a+b-۷ \\ a-b+۱ & ۳x+۵y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱ \\ ۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ۲x+y=۷ \\ ۳x+۵y=۱۴ \end{cases},\ \begin{cases} ۴a+b-۷=۱۱ \\ a-b+۱=۳ \end{cases}$$

از حل دو دستگاه نتیجه می‌شود $x=۳$، $y=۱$، $a=۴$ و $b=۲$ و نهایتاً داریم:

$$(۳x+۲y-۳a)^b=(۳\times۳+۲\times۱-۳\times۴)^۲=(۱۱-۱۲)^۲=۱$$

۷ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ i-j & i\neq j \end{cases}\Rightarrow A=[a_{ij}]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$xA+yB=x\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲x+۲y & -x-y & -۲x \\ x+y & ۴x+۲y & -x+۳y \\ ۲x+y & x+y & ۶x+۲y \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$\Rightarrow ۲x+۲y+۴x+۲y+۶x+۲y=۲x+y+۴x+۲y-۲x$$

$$\Rightarrow ۳y=-۸x\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{۳}{۸}$$

۸ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix} x^۲ & y^۲ \\ z^۴ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x^۲+x & y^۲+۱ \\ z^۴-۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x^۲+x=-\frac{۱}{۴} \\ y^۲+۱=۲y \\ z^۴-۲=-۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (x+\frac{۱}{۲})^۲=۰ \\ (y-۱)^۲=۰ \\ z^۴=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}, y=۱, z=\pm۱$$

$$\max(xyz)=-\frac{۱}{۲}\times۱\times(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

۹ ☑ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴

مجموع درایه‌های قطر اصلی B =

مجموع درایه‌های قطر اصلی A − مجموع درایه‌های قطر اصلی I

با توجه به اینکه $A=\begin{bmatrix}۵&۸&۴\\۳&۲&۵\\۷&۶&۰\end{bmatrix}$ و $I=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ داریم:

مجموع درایه‌های قطر اصلی B $=۳-(۵+۲+۰)=۳-۷=-۴$

۱۰ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☑ ۴

نکته: اگر k یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه $\sin k\pi=۰$

$$a_{ij}=\begin{cases}۳ & i=j\\ \sin\pi(i+j) & i\neq j\end{cases}\Rightarrow a_{۱۱}=a_{۲۲}=a_{۳۳}=۳$$

$$,a_{۱۲}=a_{۱۳}=a_{۲۱}=a_{۲۳}=a_{۳۱}=a_{۳۲}=۰$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&۳\end{bmatrix}\Rightarrow$$ A یک ماتریس اسکالر است.

۱۱ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☑ ۴

$$xA+yB=\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۱&۳\end{bmatrix}\Rightarrow x\begin{bmatrix}۰&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۰&-x\\-x&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y&۰\\y&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۱&۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}y&-x\\y-x&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$$

تساوی فوق امکان‌پذیر نیست؛ زیرا به ازای $y=۱$ یا $y=۳$ همهٔ درایه‌های نظیر برابر نیستند؛ پس x و y ای وجود ندارد که داشته باشیم $xA+yB=\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$

۱۲ ☐ ۱ ☑ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴

$$C=A+B=\begin{bmatrix}۱&b\\۳&-۱\\۲&a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&۳\\b&۲\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+۱&b+۳\\b+۳&۱\\۳&a+۱\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}c_{۱۱}=۲c_{۲۲}\Rightarrow a+۱=۲\times۱\Rightarrow a=۱\\ c_{۳۱}-۲=c_{۱۲}\Rightarrow ۳-۲=b+۳\Rightarrow b=-۲\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=۱-۲=-۱$$

۱۳ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☑ ۴

$$C+۲D=۳I\Rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰\\۴&-۱\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۱&۰\\k&۲\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۳&۰\\۴+۲k&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}\Rightarrow ۴+۲k=۰\Rightarrow k=-۲$$

۱۴ ☑ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴

$$B=A+۲A+۳A+\cdots+nA=(۱+۲+۳+\cdots+n)A$$

$$=\frac{n(n+۱)}{۲}\begin{bmatrix}-۲&۰\\۴&-۲\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-n(n+۱)&۰\\۲n(n+۱)&-n(n+۱)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۲n(n+۱)-۲n(n+۱)=۰$$

۱۵ ☐ ۱ ☐ ۲ ☑ ۳ ☐ ۴

$$a_{ij}=\begin{cases}۳-a_{ij} & i\neq j\\ -a_{ij} & i=j\end{cases}\Rightarrow a_{۱۱}=-a_{۱۱}\Rightarrow a_{۱۱}=۰$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{۲۲}=a_{۳۳}=۰$$

$$a_{۱۲}=۳-a_{۱۲}\Rightarrow a_{۱۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{۱۳}=a_{۲۱}=a_{۲۳}=a_{۳۱}=a_{۳۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$A=\begin{bmatrix}۰&\frac{۳}{۲}&\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۲}&۰&\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۲}&\frac{۳}{۲}&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A-\frac{۱}{۲}I=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲}&\frac{۳}{۲}&\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۲}&-\frac{۱}{۲}&\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۲}&\frac{۳}{۲}&-\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۶\times\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

۱۶ ☐ ۱ ☐ ۲ ☑ ۳ ☐ ۴

$$a_{ij}=\begin{cases}۲i-a_{ji} & i<j\\ ۶-a_{ji} & i=j\end{cases}\Rightarrow a_{۱۱}=۶-a_{۱۱}\Rightarrow a_{۱۱}=۳$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{۲۲}=a_{۳۳}=۳$$

$$a_{۱۲}=۲-a_{۲۱}\Rightarrow a_{۱۲}+a_{۲۱}=۲\,,\,a_{۱۳}=۲-a_{۳۱}\Rightarrow a_{۱۳}+a_{۳۱}=۲$$

$$a_{۲۳}=۴-a_{۳۲}\Rightarrow a_{۲۳}+a_{۳۲}=۴$$

$$A=\begin{bmatrix}۳&a_{۱۲}&a_{۱۳}\\a_{۲۱}&۳&a_{۲۳}\\a_{۳۱}&a_{۳۲}&۳\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}$$

$$۹+(a_{۱۲}+a_{۲۱})+(a_{۱۳}+a_{۳۱})+(a_{۲۳}+a_{۳۲})=۹+۲+۲+۴=۱۷$$

۱۷ ☐ ۱ ☐ ۲ ☑ ۳ ☐ ۴

$$AB=\begin{bmatrix}۱&۲\\۵&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲a&۳\\۱&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲a+۲&۳+۲c\\b-۱۰a&۱۵+bc\end{bmatrix}$$

$$(\text{فرض})\ AB=\begin{bmatrix}۰&-۵\\-۶&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-۲a+۲&۳+۲c\\b-۱۰a&۱۵+bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۵\\-۶&-۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۲a+۲=۰\\۳+۲c=-۵\\b-۱۰a=-۶\\۱۵+bc=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=۱,\ c=-۴\ ,b=۴\Rightarrow abc=۱\times۴\times(-۴)=-۱۶$$

۱۸ ☑ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^{۲}+xy&x^{۲}+xy\\yx+y^{۲}&yx+y^{۲}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\text{فرض})\,A^{۲}=A}\begin{bmatrix}x^{۲}+xy&x^{۲}+xy\\yx+y^{۲}&yx+y^{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}+xy=x\\yx+y^{۲}=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=۱\\x+y=۱\end{cases}$$

۱۹

۱ [✓ ۲] ۳ ۴

بنا به فرض $a_{ij}=i-j$ و $b_{ij}=۲i+۳j$ داریم:

$$C_{۳\times۶}=A_{۳\times۴}\times B_{۴\times۶}\Rightarrow c_{۳۴}=(\text{سطرسوم}\,A)\times(\text{ستون‌چهارم}\,B)$$

$$\Rightarrow c_{۳۴}=\begin{bmatrix}۳-۱ & ۳-۲ & ۳-۳ & ۳-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲+۱۲\\۴+۱۲\\۶+۱۲\\۸+۱۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۴\\۱۶\\۱۸\\۲۰\end{bmatrix}=۲۸+۱۶-۲۰=۲۴$$

۲۰

۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$AC=B\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۱\\a^۲ & ۱\\۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۱\\a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x+y\\a^۲x+y\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۱\\a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=۲\\x-y=a\\a^۲x+y=۱\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a+۲}{۲},y=\frac{۲-a}{۲}$$

$$\xrightarrow{a^۲x+y=۱}a^۲\times\frac{a+۲}{۲}+\frac{۲-a}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow a^۳+۲a^۲+۲-a=۲\Rightarrow a(a^۲+۲a-۱)=۰$$

$$\Rightarrow a=۰ \text{ یا } a^۲+۲a-۱=۰\xrightarrow{a_۲+a_۳=-۲}a_۱+a_۲+a_۳$$

$$=۰-۲=-۲$$

۲۱

۱ ۲ [✓ ۳] ۴

بنا به فرض $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\۰ & ۱ & ۰\\۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times۳}$ و $C=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & ۲\\۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۳}$ با توجه به تساوی $A\times B=C$ ماتریس A نیز ۲×۳ می‌باشد. فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}x & y & z\\t & u & v\end{bmatrix}_{۲\times۳}$ در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix}x & y & z\\t & u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\۰ & ۱ & ۰\\۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & ۲\\۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x & -x+y-z & z\\t & -t+u-v & v\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & ۲\\۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow x=۱,\ z=۲,\ t=۰, v=۱,\ -x+y-z=-۳$$

$$,\ -t+u-v=-۱\Rightarrow y=۰,\ u=۰$$

$$x+y+z+t+u+v=۱+۰+۲+۰+۰+۱=۴$$

۲۲

۱ ۲ [✓ ۳] ۴

بنا به فرض $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\۴ & ۲\\۱ & ۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳ & -۹\\۶ & ۱۲\\۰ & ۱۵\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}۴ & -۱ & ۵\\۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$

و $D=(۲A-\frac{۱}{۳}B)C$ می‌باشد.

$$d_{۲۲}=(۲A-\frac{۱}{۳}B)_{\text{سطر دوم}}\times C_{\text{ستون دوم}}$$

$$=\begin{bmatrix}۲\times۴-\frac{۱}{۳}\times۶ & ۲\times۲-\frac{۱}{۳}\times۱۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix}=-۶$$

۲۳

[✓ ۱] ۲ ۳ ۴

در این‌جا محاسبهٔ ماتریس‌های BAB و $A^۲B$ وقت‌گیر است؛ به همین جهت به کمک خواص ضرب ماتریس‌ها عبارت داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^۲B+BAB=A(AB)+B(AB)=(A+B)AB$$

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\-۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$,AB=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\-۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\\frac{۳}{۲} & \frac{۷}{۴}\end{bmatrix}$$

$$A^۲B+BAB=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\\frac{۳}{۲} & \frac{۷}{۴}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۲\\۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۲۴

۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\-\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta) & \sin(\beta-\alpha)\\\sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b=\sin(\beta-\alpha)$$

۲۵

۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-x^۲+۲x+۳\end{bmatrix}=۰\Rightarrow-x^۲+۲x+۳=۰\Rightarrow-(x+۱)(x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow x=-۱ \text{ یا } x=۳$$

۲۶

۱ ۲ [✓ ۳] ۴

روش اول: بنابه فرض، ماتریس $A_{۲\times۲}$ چنان است که $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\-a\end{bmatrix}$ داریم:

$$A^۲\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}=A(A\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix})=A\begin{bmatrix}-(-۲)\\-(-۱)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$$

روش دوم: یکی از ماتریس‌های A که در تساوی $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\-a\end{bmatrix}$ صدق می‌کند، $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\-۱ & ۰\end{bmatrix}$ است. داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\-۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱\\-۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$,A^۲\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$$

۲۷

۱ ۲ [✓ ۳] ۴

> **نکته:** اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند، آن‌گاه درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A\times B-B\times A$ قرینهٔ یکدیگرند.

بنابراین از بین گزینه‌ها تنها ماتریس $\begin{bmatrix}۳ & ۰\\۳ & -۳\end{bmatrix}$ می‌تواند $A\times B-B\times A$ باشد.

۲۸ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۱+۲&۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱&۰\\۱+۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۱+۲+۳&۱\end{bmatrix}$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۳&۱\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}۱&۰\\۷&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۱+۲+\cdots+۷&۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱&۰\\\frac{۷(۷+۱)}{۲}&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۲۸&۱\end{bmatrix}$$

۲۹ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$AB+۲A+B+۲I=AB+B+۲A+۲I$$
$$=(A+I)B+(A+I)(۲I)=(A+I)(B+۲I)$$
$$=\begin{bmatrix}۳&-۱\\۴&۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۲\\۶&۶\end{bmatrix}$$

۳۰ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$a_{ij}=\begin{cases}i & i>j\\ j & i\le j\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۶\\۶&۸\end{bmatrix}$$

(مجموع درایه‌های ماتریس A) - (مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$)

$$=(۵+۶+۶+۸)-(۱+۲+۲+۲)=۲۵-۷=۱۸$$

۳۱ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

به کمک خواص ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$(ABC)^۲=(ABC)(ABC)=(AB)C(ABC)$$
$$=(AB)(CA)(BC)$$
$$(ABC)^۲=\begin{bmatrix}۶&-۱\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\۵&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۲\\۵&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&-۲\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\۳&-۸\end{bmatrix}$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A\times B=\begin{bmatrix}۵&a\\b&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳a+۵&a-۱۰\\b-۶&-۲b-۲\end{bmatrix}$$

برای این‌که ماتریس $A\times B$ قطری باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}a-۱۰=۰\\b-۶=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱۰\\b=۶\end{cases}\Rightarrow a-b=۱۰-۶=۴$$

۳۳ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

حاصل‌ضرب زیر یک ماتریس ۲×۲ است.

$$\begin{bmatrix}x&-۱&۴\\۲&۳&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۲\\۱&۰\\y&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x-۱+۴y&-۲x+۴\\۴+۳+y&-۴+۱\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}۲x+۴y-۱&-۲x+۴\\y+۷&-۳\end{bmatrix}$$

برای این‌که ماتریس فوق قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}-۲x+۴=۰\\y+۷=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\y=-۷\end{cases}$$

۳۴ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$AB=\begin{bmatrix}-۴&p&-۲\\۴&۲&q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q&-۴\\۲&۲q\\۴p&۶\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-۴q+۲p-۸p&۱۶+۲pq-۱۲\\۴q+۴+۴pq&-۱۶+۴q+۶q\end{bmatrix}$$

برای این‌که AB قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}۱۶+۲pq-۱۲=۰\\۴q+۴+۴pq=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}pq=-۲\\q+۱+pq=۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow q+۱-۲=۰\Rightarrow q=۱,\ p=-۲$$
$$q-p=۱-(-۲)=۳$$

۳۵ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

روش اول:

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۱&۱\\۴&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۱\\۴&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۱\\۴&۸\end{bmatrix},\ A^۲=\alpha A+\beta I$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۵&۱\\۴&۸\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-۱&۱\\۴&۲\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۵&۱\\۴&۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta-\alpha&\alpha\\۴\alpha&۲\alpha+\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\beta-\alpha=۵\\۲\alpha+\beta=۸\\\alpha=۱\end{cases}$$

با قرار دادن $\alpha=۱$ در دو معادلهٔ دیگر مقدار $\beta=۶$ می‌شود؛ پس $(\alpha,\beta)=(۱,۶)$

روش دوم:

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم: $A^۲-(a+d)A+(ad-bc)I=\overline{O}$

$$A=\begin{bmatrix}-۱&۱\\۴&۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲-(-۱+۲)A+(-۲-۴)I=\overline{O}$$
$$\Rightarrow A^۲-A-۶I=\overline{O}\Rightarrow A^۲=A+۶I=\alpha A+\beta I$$
$$\Rightarrow(\alpha,\beta)=(۱,۶)$$

۳۶ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$AB=\begin{bmatrix}x&-۱&-x\\۰&۰&۴\\y&z&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲z&\frac{۱}{۲}&۲\\۲z&۰&-۴z\\۰&\frac{۱}{۲}&۰\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}۲xz-۲z&۰&۲x+۴z\\۰&۲&۰\\۲yz+۲z^۲&\frac{y}{۲}+\frac{z}{۲}&۲y-۴z^۲\end{bmatrix}$$

برای این‌که AB ماتریس اسکالر باشد باید درایه‌های غیر از قطر اصلی صفر و درایه‌های قطر اصلی برابر باشند. z نمی‌تواند صفر باشد زیرا درایه سطر اول و ستون اول صفر می‌شود.

$$\begin{cases}۲x+۴z=۰\\۲yz+۲z^۲=۰\\\frac{y}{۲}+\frac{z}{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۲z\\y=-z\end{cases},\ \begin{cases}۲xz-۲z=۲\\۲y-۴z^۲=۲\end{cases}$$

با قرار دادن $x = -۲z$ و $y = -z$ در دستگاه سمت چپ داریم:

$$\begin{cases}-۴z^۲ - ۲z = ۲\\ -۲z - ۴z^۲ = ۲\end{cases} \Rightarrow ۲z^۲ + z - ۱ = ۰ \Rightarrow z = -۱ \text{ یا } z = -\frac{۱}{۲}$$

چون بنا به فرض y عددی صحیح است پس $z = -\frac{۱}{۲}$ قابل قبول نیست

و نهایتاً داریم: $xy = (-۲z)(-z) = ۲z^۲ = ۲(-۱)^۲ = ۲$

۳۷ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$\begin{bmatrix} x & ۰ & ۰\\ y & t & ۰\\ z & u & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z\\ ۰ & t & u\\ ۰ & ۰ & r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۱\\ a & ۴ & ۲\\ b & c & ۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^۲ & xy & xz\\ xy & y^۲ + t^۲ & yz + tu\\ zx & zy + ut & z^۲ + u^۲ + r^۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۱\\ a & ۴ & ۲\\ b & c & ۴\end{bmatrix}$$

$$x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲ \,,\, xy = ۲ \Rightarrow y = ۱ ,\, xz = ۱ \Rightarrow z = \frac{۱}{۲}$$

$$a = xy = ۲ \,,\, b = zx = ۱ ,\, y^۲ + t^۲ = ۴ \Rightarrow ۱ + t^۲ = ۴ \Rightarrow t = \sqrt{۳}$$

$$yz + tu = c = ۲ \Rightarrow ۱ \times \frac{۱}{۲} + \sqrt{۳} \times u = ۲ \Rightarrow u = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$z^۲ + u^۲ + r^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴} + r^۲ = ۴ \Rightarrow r^۲ = ۴ - ۱ = ۳ \Rightarrow r = \sqrt{۳}$$

۳۸ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱\\ ۴ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳x + ۸x - ۱ & -x - ۲ & x - ۴x\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱۱x - ۱ & -x - ۲ & -۳x\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow x(۱۱x - ۱) - ۲x(x + ۲) + ۳x = ۰ \xrightarrow{x \neq ۰}$$

$$۱۱x - ۱ - ۲x - ۴ + ۳ = ۰ \Rightarrow ۹x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۲}{۹}$$

۳۹ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱\\ ۲ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴\\ ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱\\ ۳ & ۳\\ ۵ & ۵\\ ۷ & ۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴\\ ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵\\ ۱۵\\ ۲۵\\ ۳۵\end{bmatrix}$$

۴۰ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$(A + B)^۲ = (A + B)(A + B) = (A + B)A + (A + B)B$$

$$= A^۲ + BA + AB + B^۲$$

$$(A + B)^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۶ & ۶\\ ۸ & -۳ & ۷\\ ۸ & -۴ & ۸\end{bmatrix}$$

$$A^۲ + B^۲ = (A + B)^۲ - (AB + BA) = \begin{bmatrix} ۴ & -۶ & ۶\\ ۸ & -۳ & ۷\\ ۸ & -۴ & ۸\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۳\\ ۵ & -۷ & ۵\\ ۴ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & \bigcirc & \bigcirc\\ \bigcirc & ۴ & \bigcirc\\ \bigcirc & \bigcirc & ۵\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^۲ + B^۲ = ۲ + ۴ + ۵ = ۱۱$

۴۱ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

بنا به فرض $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j\\ ۲ & i \neq j\end{cases}$، پس درایه‌های ماتریس A به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix}$$

$$A^۲ - ۴A = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۴ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۴\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} ۱۵$$

۴۲ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

نکته: اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$، آن‌گاه داریم:

(ستون j ام B) $\times$ (ماتریس A) $=$ ستون j ام $(A \times B)$

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & x & ۰\\ ۰ & ۰ & y\\ ۰ & ۰ & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & ۰\\ ۰ & ۰ & y\\ ۰ & ۰ & z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & x & xy\\ ۰ & ۰ & yz\\ ۰ & ۰ & z^۲\end{bmatrix} ,\, B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ x & ۰ & ۰\\ ۰ & y & z\end{bmatrix}$$

ستون سوم ماتریس $A^۲B = \begin{bmatrix} ۱ & x & xy\\ ۰ & ۰ & yz\\ ۰ & ۰ & z^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰\\ ۰\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xyz\\ yz^۲\\ z^۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶\\ ۲\\ -۱\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} xyz = -۶\\ yz^۲ = ۲\\ z^۳ = -۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = -۶\\ yz^۲ = ۲\\ z = -۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow y = ۲, x = ۳, x + y + z = ۳ + ۲ - ۱ = ۴$$

۴۳ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & c & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & c & ۰\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ac & a\\ ۰ & b^۲ & ۰\\ ۰ & bc & ۰\end{bmatrix} ,\, B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & b & c\\ a & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

ستون دوم ماتریس $(A^۲ - B) = \begin{bmatrix} ac\\ b^۲\\ bc\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰\\ b\\ ۰\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac\\ b^۲ - b\\ bc\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳\\ ۲\\ ۶\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac = ۳\\ b^۲ - b = ۲ \Rightarrow b^۲ - b - ۲ = ۰ \Rightarrow (b + ۱)(b - ۲) = ۰\\ bc = ۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -۱ ,\, c = -۶ ,\, a = -\frac{۱}{۲}\\ b = ۲ ,\, c = ۳ ,\, a = ۱\end{cases}$$

پس برای $a + b + c$ دو مقدار ۶ و ۷/۵- به‌دست می‌آید.

۴۴ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

نکته: برای هر دو ماتریس مربعی و هم مرتبه A و B، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $A \times B$ با حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $B \times A$ برابر است.

اگر فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۵\\ ۷ & ۲۲ & ۳۶\\ ۱۰ & ۳۱ & ۵۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۰ & ۱۷ & ۱۵\\ ۴ & ۲۰ & ۱۷\\ ۳۰۲ & ۱۵۳ & -۲\end{bmatrix}$

و $C=\begin{bmatrix}۲۸ & -۱ & -۲\\ -۴ & ۲ & -۱\\ -۳ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ در این صورت $A=BC$ و می‌توان گفت مجموع درایه‌های قطر اصلی BC با مجموع درایه‌های قطر اصلی CB است.

مجموع درایه‌های قطر اصلی A $=\begin{bmatrix}۲۸ & -۱ & -۲\\ -۴ & ۲ & -۱\\ -۳ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۵\\ ۷ & ۲۲ & ۳۶\\ ۱۰ & ۳۱ & ۵۲\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}۱۰ & ۱۷ & ۱۵\\ ۴ & ۱۲۰ & ۱۷\\ ۳۰۲ & ۱۵۳ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۰ & ۱۷ & ۱۵\\ ۴ & ۲۰ & ۱۷\\ ۳۰۲ & ۱۵۳ & -۲\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر $۲۸=۲-۲۰+۱۰$ است.

۴۵ ① ❷ ③ ④

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۲\\ ۳ & ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶ & -۱ & -۱\\ -۲ & ۱ & ۰\\ -۳ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$A^۲B^۳=A(AB)B^۲=AIB^۲=AB^۲=(AB)B=IB=B$$

$$=\begin{bmatrix}۶ & -۱ & -۱\\ -۲ & ۱ & ۰\\ -۳ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲B^۳$ برابر مجموع درایه‌های ماتریس B می‌باشد یعنی عدد یک.

۴۶ ① ② ❸ ④

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ -۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ -۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$B^۲=\begin{bmatrix}۳ & ۶ & -۲\\ -۲ & -۴ & ۱\\ -۲ & -۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۶ & -۲\\ -۲ & -۴ & ۱\\ -۲ & -۳ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$M=pA^۲+qB^۲=pI+qI=(p+q)I$$

پس M یک ماتریس اسکالر است.

۴۷ ① ❷ ③ ④

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ a & ۲ & ۰\\ b & c & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & n & p\\ q & r & s\\ t & u & v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق بلافاصله نتیجه می‌شود $n=p=s=۰$ و داریم:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ a & ۲ & ۰\\ b & c & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & ۰ & ۰\\ q & r & ۰\\ t & u & v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}m & ۰ & ۰\\ \bigcirc & ۲r & ۰\\ \bigcirc & \bigcirc & ۴v\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m=۱,\ r=\frac{۱}{۲},\ v=\frac{۱}{۴}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی A = مجموع درایه‌های قطر اصلی $(A+B)$

= مجموع درایه‌های قطر اصلی B+

$$۱+۲+۴+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=۸+\frac{۳}{۴}=\frac{۳۵}{۴}=۸/۷۵$$

۴۸ ① ② ③ ❹

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۳\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق بلافاصله نتیجه می‌شود $a=۱$، $b=۰$ و $c=۰$ و در ادامه داریم:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۳\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ \bigcirc & \bigcirc & f+۳i\\ \bigcirc & \bigcirc & i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow f+۳i=۰,\ i=۱\Rightarrow f=-۳i=-۳$$

پس درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس B برابر ۳- است.

۴۹ ❶ ② ③ ④

با فرض $A=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}$

و $C=\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$، داریم:

$$D=C^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}$$

لزومی به محاسبهٔ همهٔ درایه‌های $C^۲$ نیست چون درایه‌های قطر اصلی $C^۲$ را می‌خواهیم:

$$D_{۱۱}=۱\times۱+۳\times\frac{۱}{۳}+۶\times\frac{۱}{۶}+۲۴\times\frac{۱}{۲۴}=۱+۱+۱+۱=۴$$

$$D_{۲۲}=\frac{۱}{۳}\times۳+۱\times۱+۲\times\frac{۱}{۲}\times۸\times\frac{۱}{۸}=۱+۱+۱+۱=۴$$

$$D_{۳۳}=\frac{۱}{۶}\times۶+\frac{۱}{۲}\times۲+۱\times۱+۴\times\frac{۱}{۴}=۱+۱+۱+۱=۴$$

$$D_{۴۴}=\frac{۱}{۲۴}\times۲۴+\frac{۱}{۸}\times۸+\frac{۱}{۴}\times۴+۱\times۱=۱+۱+۱+۱=۴$$

$$D_{۱۱}+D_{۲۲}+D_{۳۳}+D_{۴۴}=۴+۴+۴+۴=۱۶$$

۵۰ ① ② ③ ❹

روش اول:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۸ & ۴\\ ۳ & ۲ & ۵\\ ۶ & ۹ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

درایهٔ سطر اول و ستون اول A $=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۸ & ۴\\ ۳ & ۲ & ۵\\ ۶ & ۹ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}۶ & ۹ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}=۹$$

درایهٔ سطر دوم و ستون دوم A $=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۸ & ۴\\ ۳ & ۲ & ۵\\ ۶ & ۹ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}۷ & ۸ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}=۷$$

درایهٔ سطر سوم و ستون سوم $A = \begin{bmatrix}۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۰\\۱\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}۳&۲&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۰\\۱\end{bmatrix} = ۵$$

مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس $A = ۹+۷+۵ = ۲۱$

روش دوم:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۱&۰&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}}_{C}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی BC با مجموع درایه‌های قطر اصلی CB فرقی نمی‌کند بنابراین داریم:

مجموعه درایه‌های قطر اصلی $CB =$ مجموعه درایه‌های قطر اصلی A

$$CB = \begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۱&۰&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۰&۱\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $CB = (۷+۰+۰)+(۰+۰+۹)+(۰+۵+۰) = ۲۱$

۵۱ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

> **نکته:** سطر iام ماتریس ABC برابر است با: $($سطر iام $A) \times B \times C$

سطر سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix}۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}۳&۷&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}۷&۱&-۵\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} ۷+۱-۵ = ۳$$

۵۲ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B$$

$$= A^۲ + B \times A + A \times B + B^۲$$

بنابه فرض $A \times B = -۲B \times A$ است؛ پس نتیجه می‌شود:

$$(A+B)^۲ = A^۲ + B \times A - ۲B \times A + B^۲$$

$$= A^۲ - B \times A + B^۲$$

۵۳ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

برای اینکه ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix}-۱&۳\\۱&-۱\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}۱&a\\۲&b\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، باید داشته باشیم:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix}-۱&۳\\۱&-۱\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}۱&a\\۲&b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&a\\۲&b\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-۱&۳\\۱&-۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}۵&۳b-a\\-۱&a-b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a-۱&۳-a\\b-۲&۶-b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a-۱=۵\\۳b-a=۳-a\\b-۲=-۱\\a-b=۶-b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۶\\b=۱\end{cases}$$

بنابراین ماتریس $B = \begin{bmatrix}۱&۶\\۲&۱\end{bmatrix}$ با ماتریس A تعویض‌پذیر است.

۵۴ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$AX = ۳X \Rightarrow \begin{bmatrix}۱&۰&۲\\۰&۲&-۲\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = ۳\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a+۲c\\۲b-۲c\\-b+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۳a\\۳b\\۳c\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+۲c=۳a\\۲b-۲c=۳b\\-b+c=۳c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=a\\b=-۲c\\b=-۲c\end{cases} \Rightarrow \frac{a-b+c}{c} = \frac{c+۲c+c}{c} = ۴$$

۵۵ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}a&۱\\c&۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&۱\\c&۵\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}۲a-c&-۳\\۳a+c&۸\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲a+۳&-a+۱\\۲c+۱۵&-c+۵\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}۲a-c=۲a+۳\\-۳=-a+۱\\۳a+c=۲c+۱۵\\۸=-c+۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}c=-۳\\a=۴\\c+۱۵=۳a\\c=-۳\end{cases}$$

مقادیر $a=۴$ و $c=-۳$ در تساوی $c+۱۵=۳a$ صدق می‌کنند پس دو ماتریس $A = \begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}۴&۱\\-۳&۵\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند و $a+c = ۴-۳ = ۱$ است.

۵۶ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

> **نکته:** ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبهٔ A و I همواره تعویض‌پذیرند و اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است.

$$(A+I)^۲ - (A-I)^۲ = \begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲&۲\\۰&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^۲+۲A+I) - (A^۲-۲A+I) = \begin{bmatrix}۲&۲\\۰&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۴A = \begin{bmatrix}۲&۲\\۰&۲\end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&\frac{۱}{۲}\\۰&\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

و مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر است با $۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$

۵۷ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$(AB)^۲ = (AB)(AB) = A(BA)B \xrightarrow{AB=BA}$$

$$(AB)^۲ = A(AB)B = (A^۲B)B = A^۲B^۲$$

$$\Rightarrow A^۲B^۲ = \begin{bmatrix}۵&۱\\۱&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵&۱\\۱&۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲۶&۱۰\\۱۰&۲۶\end{bmatrix}$$

۵۸ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$AB = I \Rightarrow \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۲&b&a\\۳&a&۲\\a&-۲&b\end{bmatrix} \times \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۲&۳&a\\b&a&-۲\\a&۲&b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}۴+b^۲+a^۲&ab+۲a+۶&۲a-۲b+ab\\۶+ab+۲a&۱۳+a^۲&a+۲b\\۲a-۲b+ab&a+۲b&a^۲+b^۲+۴\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۴۹&۰&۰\\۰&۴۹&۰\\۰&۰&۴۹\end{bmatrix}$$

$$۱۳+a^{۲}=۴۹\Rightarrow a^{۲}=۳۶\Rightarrow a=\pm۶$$

$$\Rightarrow ۴+b^{۲}+a^{۲}=۴۹\Rightarrow b^{۲}=۴۹-۴-۳۶=۹\Rightarrow b=\pm۳$$

چون $a+۲b=۰$ پس a و b مختلف العلامت هستند.

اگر $a=۶$ و $b=-۳$ باشند در تساوی‌های $۶+ab+۲a=۰$ و $۲a-۲b+ab=۰$ صدق می‌کنند. اما $a=-۶$ و $b=۳$ در تساوی‌های فوق صدق نمی‌کنند پس تنها جواب قابل قبول $a=۶$ و $b=-۳$ است.

۵۹ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A(A+۲I)=A^{۲}+۲AI=A^{۲}+۲A\xrightarrow{(\text{فرض})A^{۲}=-A-I}$$

$$A(A+۲I)=-A-I+۲A=A-I$$

۶۰ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

بنا به فرض در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a-۲ & ۴ & -۷\\ b & ۰ & b+۲\\ ۷ & a & ۰\end{bmatrix}$ برای هر i و j داریم $a_{ij}=-a_{ji}$ پس نتیجه می‌شود:

$$a_{۱۱}=-a_{۱۱}\Rightarrow a_{۱۱}=۰,\ a_{۲۲}=-a_{۲۲}\Rightarrow a_{۲۲}=۰,\ a_{۳۳}=-a_{۳۳}$$

$$\Rightarrow a_{۳۳}=۰$$

بنابراین $a-۲$ باید صفر باشد که نتیجه می‌دهد $a=۲$ و در ادامه داریم:

$$a_{۱۲}=-a_{۲۱}\Rightarrow ۴=-b\Rightarrow b=-۴$$

$$a_{۲۳}=-a_{۳۲}\Rightarrow b+۲=-a\Rightarrow b=-۲-۲=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix}۰ & ۴ & -۷\\ -۴ & ۰ & -۲\\ ۷ & ۲ & ۰\end{bmatrix}$ و داریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۰ & ۴ & -۷\\ -۴ & ۰ & -۲\\ ۷ & ۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۴ & -۷\\ -۴ & ۰ & -۲\\ ۷ & ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶۵ & \bigcirc & \bigcirc\\ \bigcirc & -۲۰ & \bigcirc\\ \bigcirc & \bigcirc & -۵۳\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A^{۲}}-۶۵-۲۰-۵۳=-۱۳۸$$

۶۱ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

بنا به فرض $A+B=I$ و $A=BC$ می‌باشد. داریم:

$$AC-C=(A-I)C=(I-B-I)C=-BC=-A$$

۶۲ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

بنا به فرض $A+B=I$ و $A=BC=CB$ می‌باشد. داریم:

$$AC-CA=CBC-CA=C(BC-A)=C(BC-BC)$$

$$=C\times\bar{O}=\bar{O}$$

۶۳ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$A^{۲}+۳A+I=\bar{O}\xrightarrow{\times A}A^{۳}+۳A^{۲}+IA=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^{۳}+۳A^{۲}+A=\bar{O}\Rightarrow A^{۳}+۳A^{۲}+۳A+I=۲A+I$$

$$\Rightarrow (A+I)^{۳}=۲A+I\Rightarrow (A+I)^{۳}-I=۲A$$

$$\Rightarrow (A+I)^{۳}+(-I)^{۳}=۲A$$

با فرض $B=A+I$ و $C=-I$ داریم $B^{۳}+C^{۳}=۲A$ در نتیجه:

$$B-C=A+I-(-I)=A+I+I=A+۲I$$

۶۴ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$(\text{فرض})BA=A\xrightarrow{A\times}ABA=A^{۲}\xrightarrow{(\text{فرض})AB=B}BA=A^{۲}$$

$$\xrightarrow{BA=A}A^{۲}=A$$

$$(\text{فرض})AB=B\xrightarrow{B\times}BAB=B^{۲}\xrightarrow{(\text{فرض})BA=A}AB=B^{۲}$$

$$\xrightarrow{AB=B}B^{۲}=B$$

$$(A+B)^{۲}=(A+B)(A+B)=A^{۲}+BA+AB+B^{۲}$$

$$=A+A+B+B=۲(A+B)$$

$$(A+B)^{۳}=(A+B)^{۲}(A+B)=۲(A+B)(A+B)$$

$$=۲(A+B)^{۲}=۲\times۲(A+B)=۴(A+B)$$

۶۵ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

بنا به فرض $A^{۲}=I-A$ داریم:

$$A^{۲}(A+I)^{۲}=(I-A)(A^{۲}+۲A+I)=(I-A)(I-A+۲A+I)$$

$$=(I-A)(۲I+A)=۲I-A-A^{۲}=۲I-A-(I-A)=I$$

۶۶ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

چون $A^{۲}=\bar{O}$ پس $A^{۳}=\bar{O}$ و می‌توان نوشت:

$$A(I-A)^{۳}=A(I-۳A+۳A^{۲}-A^{۳})=A(I-۳A+\bar{O}-\bar{O})$$

$$=AI-۳A^{۲}=A-\bar{O}=A$$

۶۷ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم $A^{۲}-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}-(۱+۰)A+(۱\times۰-(-۲)\times۱)I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^{۲}=A-۲I\Rightarrow A\times A^{۲}=A\times(A-۲I)\Rightarrow A^{۳}=A^{۲}-۲A$$

$$\xrightarrow{A^{۲}=A-۲I}A^{۳}=A-۲I-۲A\Rightarrow A^{۳}=-A-۲I$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ n=-۲\end{cases}\Rightarrow n^{m}=(-۲)^{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۶۸ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$A^{۲}+B^{۲}+AB+BA=A^{۲}+AB+B^{۲}+BA$$
$$=A(A+B)+B(B+A)$$

$$=A(A+B)+B(A+B)=(A+B)(A+B)=(A+B)^{۲}$$

$$\xrightarrow{A+B=۲AB}A^{۲}+B^{۲}+AB+BA=(۲AB)^{۲}=۴(AB)^{۲}$$

۶۹ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$M=(A+I)(B+I)=(A+I)B+(A+I)I=AB+IB+AI+I^{۲}$$

$$=AB+B+A+I\xrightarrow{(\text{فرض})\ A+B+AB=\bar{O}}M=\bar{O}+I=I$$

۷۰ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A^{۳}+I=A^{۳}+I^{۳}=(A+I)(A^{۲}-AI+I^{۲})$$

$$=(A+I)(A^{۲}-A+I)\qquad(۱)$$

$$(\text{فرض})\ A^{۲}-A-۲I=\bar{O}\Rightarrow A^{۲}-A=۲I\qquad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A^{۳}+I=(A+I)(۲I+I)=۳AI+۳I^{۲}=۳A+۳I$$

۷۱ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم:

$$A^{۲}-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & ۶ \end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}-(۱+۶)A+(۶\times ۱-۴\times ۱)I=\bar{O}\Rightarrow A^{۲}=۷A-۲I$$

$$\Rightarrow A\times A^{۲}=A\times(۷A-۲I)\Rightarrow A^{۳}=۷A^{۲}-۲A$$

با قرار دادن $A^{۳}$ در عبارت داده‌شده داریم:

$$A^{۳}-۷A^{۲}+۲A+۴I=۷A^{۲}-۲A-۷A^{۲}+۲A+۴I=۴I$$

۷۲ ۱ ۲ **۳** ۴

بنابه فرض $A^{۲}=A$ و $AB=I$ است. داریم:

$$A^{۳}B^{۲}=A(A^{۲}B^{۲})\xrightarrow{A^{۲}=A}A^{۳}B^{۲}=A(AB^{۲})$$

$$=A^{۲}B^{۲}=AB^{۲}=(AB)B=IB=B$$

۷۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\text{(فرض)}\ AB+BA=I\Rightarrow A\times(AB+BA)=A\times I$$

$$\Rightarrow A^{۲}B+ABA=A$$

$$\text{(فرض)}\ AB+BA=I\Rightarrow(AB+BA)\times A=I\times A$$

$$\Rightarrow ABA+BA^{۲}=A$$

از تفاضل دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$A^{۲}B-BA^{۲}=A-A=\bar{O}$$

۷۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\text{(فرض)}\ A^{۲}+۳A-I=o\Rightarrow A^{۲}=-۳A+I\xrightarrow[\text{از راست}]{\text{ضرب در } U=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}}$$

$$A^{۲}U=(-۳A+I)U=-۳AU+U\xrightarrow{\text{ضرب در } A \text{ از چپ}}A^{۳}U$$

$$=A(-۳AU+U)=-۳A^{۲}U+AU$$

$$\xrightarrow{A^{۲}U=-۳AU+U}A^{۳}U=-۳(-۳AU+U)+AU$$

$$\Rightarrow A^{۳}U=۱۰AU-۳U\xrightarrow{U=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix},AU=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}}A^{۳}U=۱۰\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$$

۷۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$(AB)^{۲}=(AB)(AB)=A(BA)B\xrightarrow{\text{(فرض)}\ AB=\lambda BA}$$

$$(AB)^{۲}=A(\frac{AB}{\lambda})B\Rightarrow(AB)^{۲}=\frac{۱}{\lambda}(A^{۲}B)B=\frac{۱}{\lambda}A^{۲}B^{۲}$$

$$\Rightarrow(AB)^{۲}-A^{۲}B^{۲}=\frac{۱}{\lambda}A^{۲}B^{۲}-A^{۲}B^{۲}$$

$$\Rightarrow(AB)^{۲}-A^{۲}B^{۲}=(\frac{۱}{\lambda}-۱)A^{۲}B^{۲}=\frac{۱-\lambda}{\lambda}A^{۲}B^{۲}$$

۷۶ **۱** ۲ ۳ ۴

$$(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)$$

$$=(A+I)B-(A+I)I-(B-I)A-(B-I)I$$

$$=AB+IB-AI-I^{۲}-BA+IA-BI+I^{۲}$$

$$=AB+B-A-I-BA+A-B+I=AB-BA$$

اما بنابه فرض، $AB-BA=۲I$ است؛ پس نتیجه می‌شود:

$$(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)=۲I$$

۷۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=۲A$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=۲A\times A=۲A^{۲}$$

$$\Rightarrow A^{۳}=۲(۲A)=۴A\ ,\ A^{۴}=A^{۳}\times A=۴A\times A$$

$$=۴A^{۲}=۴(۲A)=۸A\ ,\ A^{۵}=A^{۴}\times A=۸A\times A$$

$$=۸A^{۲}=۸(۲A)=۱۶A$$

پس جمع درایه‌های $A^{۵}$ برابر $۶۴=(۱+۱+۱+۱)۱۶$ است.

۷۸ **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $A^{۲}=\lambda A$ باشد، آن‌گاه $A^{k}=\lambda^{k-۱}A$ است. (k عدد طبیعی است)

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}=A$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=A\times A=A^{۲}=A\xrightarrow{\text{به طور استقرایی}}A^{n}=A$$

پس $A^{۱۰۰}=A$ می‌باشد.

۷۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-I$$

$$A^{۴}=A^{۳}\times A=(-I)\times A=-A\ ,\ A^{۵}=A^{۴}\times A=(-A)\times A=-A^{۲}$$

$$A^{۶}=A^{۵}\times A=(-A^{۲})\times A=-A^{۳}=-(-I)=I$$

پس کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^{n}=I$ است، $n=۶$ می‌باشد.

۸۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$A-A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=۲I$$

$$B=\frac{۱}{۲^{۸-n}}(A-A^{۲})^{n}=\frac{۱}{۲^{۸-n}}(۲I)^{n}=\frac{۲^{n}}{۲^{۸-n}}I^{n}=\frac{۲^{n}}{۲^{۸-n}}I$$

برای این‌که ماتریس B برابر I باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{۲^{n}}{۲^{۸-n}}=۱\Rightarrow ۲^{n}=۲^{۸-n}\Rightarrow n=۸-n\Rightarrow ۲n=۸\Rightarrow n=۴$$

۸۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ ۰ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ ۰ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^{۲} & ۲a \\ ۰ & a^{۲} \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix} a^{۲} & ۲a \\ ۰ & a^{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ ۰ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^{۳} & ۳a^{۲} \\ ۰ & a^{۳} \end{bmatrix}$$

$$A^{۴}=A^{۳}\times A=\begin{bmatrix} a^{۳} & ۳a^{۲} \\ ۰ & a^{۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ ۰ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^{۴} & ۴a^{۳} \\ ۰ & a^{۴} \end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^n=\begin{bmatrix} a^n & ۴a^{n-۱} \\ ۰ & a^n \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}}a^n+a^n=۲a^n$$

۸۲ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۶ \\ ۰ & ۴۹ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ \text{ درایهٔ سطر اول و ستون دوم} = ۱۶ = \frac{۷^۲-۱}{۳}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۶ \\ ۰ & ۴۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۱۴ \\ ۰ & \bigcirc \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۳ \text{ درایهٔ سطر اول و ستون دوم} = ۱۱۴ = \frac{۷^۳-۱}{۳}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$B=A^{۵۰}=\begin{bmatrix} ۱ & b_{۱۲} \\ ۰ & \bigcirc \end{bmatrix}\Rightarrow b_{۱۲}=\frac{۷^{۵۰}-۱}{۳}$$

۸۳ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-I$$

$$A^۳=A^۲\times A=-I\times A=-A \;,\; A^۴=A^۲\times A^۲=(-I)^۲=I$$

$$A^۵=A^۴\times A=I\times A=A \;,\; A^۶=A^۵\times A=A\times A=A^۲=-I$$

بنابراین به طور استقرایی نتیجه می‌شود توان‌های A با دوره تناوب ۴ تکرار می‌شود:

$$(A+A^۲+A^۳+A^۴)+(A^۵+A^۶+A^۷+A^۸)+\cdots$$
$$+(A^{۲۰۱۷}+A^{۲۰۱۸}+A^{۲۰۱۹}+A^{۲۰۲۰})+A^{۲۰۲۱}+A^{۲۰۲۲}$$
$$=\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar{O}}+\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar{O}}+\cdots+\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar{O}}$$
$$+A+(-I)=A-I$$

۸۴ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \;,\; A^۳=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$A^{۲۰۱۰}=(A^۳)^{۶۷۰}=I^{۶۷۰}=I$$

۸۵ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$M^۲=M\times M=\begin{bmatrix} ۲\cos^۲\theta & \sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & ۲\sin^۲\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲\cos^۲\theta & \sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & ۲\sin^۲\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^۲=\begin{bmatrix} ۴\cos^۴\theta+\sin^۲ ۲\theta & ۲\cos^۲\theta\sin ۲\theta+۲\sin^۲\theta\sin ۲\theta \\ ۲\cos^۲\theta\sin ۲\theta+۲\sin^۲\theta\sin ۲\theta & \sin^۲ ۲\theta+۴\sin^۴\theta \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta}$$

$$\begin{bmatrix} ۴\cos^۲\theta(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta) & ۲\sin ۲\theta(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta) \\ ۲\sin ۲\theta(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta) & ۴\sin^۲\theta(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta) \end{bmatrix}$$

$$=۲\begin{bmatrix} ۲\cos^۲\theta & \sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & ۲\sin^۲\theta \end{bmatrix}=۲M$$

$$M^۳=M^۲\times M=(۲M)M=۲M^۲=۲(۲M)=۴M$$

۸۶ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}, A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود $A^۸=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۸ & ۱ \end{bmatrix}$

$$B^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, B^۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و مجدداً به طریق استقرایی نتیجه می‌شود $B^۹=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، پس می‌توان نوشت:

$$A^۸\times B^۹=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۸ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ ۸ & ۷۳ \end{bmatrix}$$

۸۷ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A^۲-A+I=\bar{O}\Rightarrow A^۲=A-I\Rightarrow AA^۲=A(A-I)$$

$$\Rightarrow A^۳=A^۲-AI=A^۲-A$$

با قرار دادن $A^۲=A-I$ در تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$A^۳=(A-I)-A=-I$$

$$A^{۳۰}=(A^۳)^{۱۰}=(-I)^{۱۰}=(-۱)^{۱۰}I^{۱۰}=I$$

۸۸ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

نکته: اگر $C^k=\bar{O}$ باشد، آن‌گاه $(n\ge k)C^n=\bar{O}$

$$C=(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B$$
$$=A^۲+BA-AB-B^۲$$

بنابه فرض $A^۲=B^۲=I$، $AB=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ می‌باشد. پس داریم:

$$C=(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$C^۲=C\times C=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow C^{۱۴۰۱}=\bar{O}$$

۸۹ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

بنابه فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ می‌باشد. داریم:

نکته: اگر $(A\times B)\times C=[d_{ij}]$ آن‌گاه:

$d_{ij}=$ (سطر iام A) (ماتریس B) (ستون jام C)

$A^۳$ درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول $=$ (سطر سوم A)(ماتریس A)(ستون اول A)

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$A^۳$ درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول $=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}=۱\times ۱+۰\times ۰+۰\times ۱=۱$

۹۰ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$A+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$(A+I)^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$(A+I)^{۶}=(A+I)^{۲}(A+I)^{۲}(A+I)^{۲}$$

$a=(A+I)^{۶}$ درایهٔ سطر اول و ستون اول

$=((A+I)^{۲}$ سطر اول $)((A+I)^{۲}$ ماتریس $)((A+I)^{۲}$ ستون اول $)$

$$=\begin{bmatrix}۵ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ ۴\end{bmatrix}$$

$$a=\begin{bmatrix}۴۱ & ۴۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ ۴\end{bmatrix}=۴۱\times ۵+۴\times ۴۰=۲۰۵+۱۶۰=۳۶۵$$

$b=(A+I)^{۶}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$=((A+I)^{۲}$ سطر اول $)((A+I)^{۲}$ ماتریس $)((A+I)^{۲}$ ستون اول $)$

$$=\begin{bmatrix}۵ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۵\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}۴۱ & ۴۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۵\end{bmatrix}=۴\times ۴۱+۵\times ۴۰=۱۶۴+۲۰۰=۳۶۴$$

بنابراین $a-b=۳۶۵-۳۶۴=۱$ می‌باشد.

۹۱   **۱**   ۲   ۳   ۴

> **نکته:**
>
> $$(I+A)^{n}=\binom{n}{۰}I+\binom{n}{۱}A+\binom{n}{۲}A^{۲}+\cdots+\binom{n}{n}A^{n}$$
>
> **نتیجه:** اگر $A^{n}=O\ (n\geq ۲)$ آن‌گاه: $(I+A)^{n}=I+nA$

بنابه فرض، $A^{۲}=O$ است. پس می‌توان نوشت:

$$(I-A)^{۴}(I+A)^{۵}=(I-۴A)(I+۵A)$$

$$=I^{۲}+۵A-۴A-۲۰A^{۲}=I+A-۲۰A^{۲}=I+A$$

۹۲   ۱   ۲   **۳**   ۴

$$(I+A)^{۴}=\binom{۴}{۰}I+\binom{۴}{۱}A+\binom{۴}{۲}A^{۲}+\binom{۴}{۳}A^{۳}+\binom{۴}{۴}A^{۴}$$

$$\Rightarrow (I+A)^{۴}=I+۴A+۶A^{۲}+۴A^{۳}+A^{۴}$$

$(فرض)$ $A^{۲}=A\Rightarrow A^{۳}=A^{۲}=A\Rightarrow A^{۴}=A^{۲}=A$

> **نکته:** اگر ماتریس A چنان باشد که $A^{۲}=A$، آن‌گاه: $A^{n}=A\,(n\geq ۲)$

$$(I+A)^{۴}=I+۴A+۶A+۴A+A=I+۱۵A$$

۹۳   ۱   ۲   **۳**   ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}-۱ & \sqrt{۳}\\ -\sqrt{۳} & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & \sqrt{۳}\\ -\sqrt{۳} & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-۳ & -۲\sqrt{۳}\\ ۲\sqrt{۳} & -۳+۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۲ & -۲\sqrt{۳}\\ ۲\sqrt{۳} & -۲\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}A=\begin{bmatrix}-۲ & -۲\sqrt{۳}\\ ۲\sqrt{۳} & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & \sqrt{۳}\\ -\sqrt{۳} & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}=۸I$$

$$A^{۴۰}=(A^{۳})^{۱۳}A=(۸I)^{۱۳}A=۲^{۳۹}I^{۱۳}A=۲^{۳۹}IA$$

$$=۲^{۳۹}A=\begin{bmatrix}-۲^{۳۹} & ۲^{۳۹}\sqrt{۳}\\ -۲^{۳۹}\sqrt{۳} & -۲^{۳۹}\end{bmatrix}$$

۹۴   ۱   **۲**   ۳   ۴

$$(فرض)\ AB=A\xrightarrow{\times A}ABA=A^{۲}\xrightarrow{BA=B\,(فرض)}AB=A^{۲}$$

$$\Rightarrow A=A^{۲}$$

در نتیجه $A^{n}=A\ (n\geq ۲)$ و می‌توان نوشت:

$$A+A^{۲}+A^{۳}+\cdots+A^{۱۴۰۱}=\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{\text{۱۴۰۱ مرتبه}}=۱۴۰۱A$$

۹۵   ۱   **۲**   ۳   ۴

$$C=AB=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{۲}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{۲}=-C\Rightarrow C^{۳}=C^{۲}\times C=-C\times C=-C^{۲}=C$$

$$\Rightarrow C^{۴}=C^{۳}\times C=C^{۲}=-C$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $C^{n}=(-۱)^{n-۱}C$ و در ادامه داریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$C^{n}+A^{۲}=(-۱)^{n-۱}\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-۱)^{n} & (-۱)^{n}\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-۱)^{n}+۱ & (-۱)^{n}\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $C^{n}+A^{۲}$ برابر است با $۲+۲(-۱)^{n}$.

۹۶   **۱**   ۲   ۳   ۴

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & -۱\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۰ & d & e\\ ۰ & ۰ & f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b-d & c-e+f\\ ۰ & \frac{۱}{۲}d & \frac{۱}{۲}e-f\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴}f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow a=۱, d=۲, f=۴$$

$$\Rightarrow b-d=۰\Rightarrow b=d=۲,\ \frac{۱}{۲}e-f=۰\Rightarrow e=۲\times ۴=۸$$

$$c-e+f=۰\Rightarrow c-۸+۴=۰\Rightarrow c=۴$$

بنابراین $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۴\\ ۰ & ۲ & ۸\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس B برابر است با:

$$۴+۴+۲+۲+۸+۱=۲۱$$

۹۷   ۱   ۲   **۳**   ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۸\\ ۰ & ۹\end{bmatrix},\ A^{۳}=A^{۲}\times A$$

$$=\begin{bmatrix}۱ & ۸\\ ۰ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲۶\\ ۰ & ۲۷\end{bmatrix}$$

$$A^{۴}=A^{۳}\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۲۶\\ ۰ & ۲۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۸۰\\ ۰ & ۸۱\end{bmatrix}$$

بنابراین به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 1 & \bigcirc \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$. بنا به فرض مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۲۴۴ است. داریم:

$$3^n + 1 = 244 \Rightarrow 3^n = 243 = 3^5 \Rightarrow n = 5$$

۹۸ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های A^n برابر $2 - n$ است.

۹۹ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A^3 = A^2 \times A = (2A - I) \times A = 2A^2 - A$$
$$= 2(2A - I) - A = 3A - 2I$$
$$A^4 = A^3 \times A = (3A - 2I)A = 3A^2 - 2A$$
$$= 3(2A - I) - 2A = 4A - 3I$$
$$A^5 = A^4 \times A = (4A - 3I)A = 4A^2 - 3A$$
$$= 4(2A - I) - 3A = 5A - 4I$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^{10} = 10A - 9I$ لذا $a = 10$ و $b = -9$ و $(a, b) = (10, -9)$.

۱۰۰ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و در ادامه داریم:

$$B = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} n & -2-4-6-\cdots-2n \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & -n(n+1) \\ 0 & n \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 2n - n^2 - n = n - n^2$$

۱۰۱ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^3 = A^2A = IA = A$$
$$A^4 = A^2A^2 = I \times I = I$$
$$A^5 = A^4A = IA = A$$

بنابراین به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^n = \begin{cases} A & \text{فرد } n \\ I & \text{زوج } n \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{200} = A + I + A + I + \cdots + I$$
$$= 100A + 100I = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100 \end{bmatrix}$$

۱۰۲ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt[5]{2} & 0 \\ \sqrt[5]{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt[5]{2} & 0 \\ \sqrt[5]{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{4} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt[5]{16} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[5]{16} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{16} \end{bmatrix} = \sqrt[5]{16}\, I$$
$$A^{10} = (A^2)^5 = (\sqrt[5]{16}\, I)^5 = 16I^5 = 16I$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{10} برابر $16 + 16 + 16 = 48$ است.

۱۰۳ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 2A^2 + 5I = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها برابر ۲۱ است.

۱۰۴ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 15 & 39 \\ 0 & 2^2 & 35 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1^2 & 15 & 39 \\ 0 & 2^2 & 35 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^3 & \bigcirc & \bigcirc \\ 0 & 2^3 & \bigcirc \\ 0 & 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

پس ملاحظه می‌کنیم برای محاسبهٔ درایه‌های قطرهای اصلی نیازی به محاسبهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی نیست و داریم:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1^4 & \bigcirc & \bigcirc \\ 0 & 2^4 & \bigcirc \\ 0 & 0 & 3^4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{مجموع درایه‌های}} 1^4 + 2^4 + 3^4 = 1 + 16 + 81 = 98$$

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & x & y \\ ۰ & b & z \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^n=\begin{bmatrix} a^n & \bigcirc & \bigcirc \\ ۰ & b^n & \bigcirc \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$

۱۰۵ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A^۴ \text{ سطر اول}=(A^۲ \text{ سطر اول})\times A^۲$$

$$=[۳ \ \ -۴ \ \ ۴]\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}=[۱ \ \ ۰ \ \ ۰]$$

۱۰۶ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹-۶ & -۹+۹-۴ & ۱۲-۱۲+۴ \\ ۶-۶ & -۶+۹-۴ & ۸-۱۲+۴ \\ -۲ & ۳-۱ & -۴+۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A^۴=A^۲A^۲=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۹-۸ & -۱۲+۴+۸ & ۱۲-۱۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۶+۶ & ۸-۲-۶ & -۸+۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

۱۰۷ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$\text{سطراول } A^۳=(\text{سطراول}A)\times A\times A=[۲ \ ۱ \ ۵]\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$=[۶ \ \ ۲ \ \ ۲۴]\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=[۳۰ \ \ ۶ \ \ ۸۶]$$

۱۰۸ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } A^۳ \text{ درایه سطر اول ماتریس}=(\text{سطراول}A)\times A\times A$$

$$\Rightarrow A^۳ \text{ درایه سطر اول ماتریس}=[۳ \ \ -۳ \ \ ۴]\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=[۳ \ \ -۴ \ \ ۴]\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=[۱ \ \ -۱ \ \ ۰]$$

۱۰۹ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A^۴=A^۳A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۸ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^{۱۱}=\begin{bmatrix} ۲^{۱۰} & ۰ & ۲^{۱۰} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲^{۱۰} & ۰ & ۲^{۱۰} \end{bmatrix}$$

$$(\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی})-(\text{مجموع درایه‌های } A^{۱۱})$$

$$=(۴\times ۲^{۱۰}+۱)-(۲\times ۲^{۱۰}+۱)=۲\times ۲^{۱۰}=۲^{۱۱}$$

۱۱۰ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=A$$

بنابراین $A^{۲k+۱}=A$ (k عدد طبیعی) و داریم:

$$A^{۴۲}+A^{۵۵}=A^{۴۱}\times A+A^{۲\times ۲۷+۱}=A\times A+A=A^۲+A$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۱۱۱ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$A^{۱۰۰}=(A^۳)^{۳۳}\times A=I^{۳۳}\times A=I\times A=A$$

۱۱۲ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$a_{ij}=|i-j|+j-i\Rightarrow A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow A^k=\bar{O}\,(k\geq ۳)$$

$$B=A+A^۲+A^۳+\cdots+A^{۱۴۰۱}=A+A^۲+\bar{O}+\cdots+\bar{O}$$

$$=A+A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} ۸+۲+۲=۱۲$$

۱۱۳

۱ **۲** ۳ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۰&۰&۲\\۳&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۰&۰&۲\\۳&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۲\\۶&۰&۰\\۰&۳&۰\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۰&۰&۲\\۶&۰&۰\\۰&۳&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۰&۰&۲\\۳&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۰&۰\\۰&۶&۰\\۰&۰&۶\end{bmatrix}=۶I$$

$$A^{۴۰}=(A^{۳})^{۱۳}A=(۶I)^{۱۳}A=۶^{۱۳}I^{۱۳}A=۶^{۱۳}IA=۶^{۱۳}A$$

$$\frac{۱}{۳۶^{۶}}A^{۴۰}=\frac{۶^{۱۳}}{۳۶^{۶}}A=\frac{۶^{۱۳}}{۶^{۱۲}}A=۶A=\begin{bmatrix}۰&۶&۰\\۰&۰&۱۲\\۱۸&۰&۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۳۶$$

۱۱۴

۱ ۲ **۳** ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&-۱&۱\\-۱&۰&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱&۱\\-۱&۰&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۲&۲\\-۱&۱&-۱\\۱&-۱&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۲&-۲&۲\\-۱&۱&-۱\\۱&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱&۱\\-۱&۰&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۴&۴\\-۲&۲&-۲\\۲&-۲&۲\end{bmatrix}=۲A^{۲}$$

$$A^{۴}=A^{۳}\times A=۲A^{۲}\times A=۲A^{۳}=۲\times ۲A^{۲}=۴A^{۲}$$

$$A^{۵}=A^{۴}\times A=۴A^{۲}\times A=۴A^{۳}=۴\times ۲A^{۲}=۸A^{۲}$$

$$\vdots$$

$$A^{n}=۲^{n-۲}A^{۲}(n\geq ۳)\Rightarrow A^{۱۰۰}=۲^{۹۸}A^{۲}=۲^{k}A^{۲}\Rightarrow k=۹۸$$

۱۱۵

۱ **۲** ۳ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰&۲\\۰&۱&۰\\۲&۰&۲\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۲&۰&۲\\۰&۱&۰\\۲&۰&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۰&۴\\۰&۱&۰\\۴&۰&۴\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{n+۱}=\begin{bmatrix}۲^{n}&۰&۲^{n}\\۰&۱&۰\\۲^{n}&۰&۲^{n}\end{bmatrix}(n\geq ۱)$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۴\times ۲^{n}+۱=۲^{n+۲}+۱$$

۱۱۶

۱ **۲** ۳ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۱&۱&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۱&۱&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۲&۱&۰\\۱+۲&۲&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۲&۱&۰\\۳&۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۱&۱&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۳&۱&۰\\۱+۲+۳&۳&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۴}=A^{۳}A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۳&۱&۰\\۱+۲+۳&۳&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۱&۱&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۴&۱&۰\\۱+۲+۳+۴&۴&۱\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^{۴۹}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۴۹&۱&۰\\۱+۲+۳+\cdots+۴۹&۴۹&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=۱+۲+۳+\cdots+۴۹=\frac{۴۹(۴۹+۱)}{۲}=۴۹\times ۲۵=۱۲۲۵$$

۱۱۷

۱ ۲ **۳** ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}A=\begin{bmatrix}-۱&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=-I$$

$$A^{۴}=A^{۳}A=(-I)A=-A\ ,\ A^{۵}=A^{۴}A=-A^{۲}\ ,$$

$$A^{۶}=A^{۵}A=(-A^{۲})A=-A^{۳}=I$$

بنابراین:

$$A+A^{۲}+A^{۳}+A^{۴}+A^{۵}+A^{۶}=A+A^{۲}+A^{۳}-A-A^{۲}-A^{۳}=O$$

و به طور تناوبی نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&A^{۷}+A^{۸}+A^{۹}+A^{۱۰}+A^{۱۱}+A^{۱۲}\\&=A^{۱۳}+A^{۱۴}+A^{۱۵}+A^{۱۶}+A^{۱۷}+A^{۱۸}\\&=A^{۱۹}+A^{۲۰}+A^{۲۱}+A^{۲۲}+A^{۲۳}+A^{۲۴}=O\end{aligned}$$

$$۲I+A+A^{۲}+\cdots+A^{۲۴}+A^{۲۵}=۲I+O+A^{۲۵}$$

$$=۲I+(A^{۳})^{۸}A=۲I+(-I)^{۸}A=۲I-A$$

$$=۲\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع درایه‌ها}}۲+۱-۱+۱=۳$$

۱۱۸

۱ ۲ ۳ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۳&۰&۸\\۳&-۱&۶\\-۲&۰&-۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۰&۸\\۳&-۱&۶\\-۲&۰&-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۷&۰&-۱۶\\-۶&۱&-۱۲\\۴&۰&۹\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}+۲A=\begin{bmatrix}-۷&۰&-۱۶\\-۶&۱&-۱۲\\۴&۰&۹\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶&۰&۱۶\\۶&-۲&۱۲\\-۴&۰&-۱۰\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۱&۰&۰\\۰&-۱&۰\\۰&۰&-۱\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^{۲}+۲A)^{۱۰}=(-I)^{۱۰}=I^{۱۰}=I$$

۱۱۹

۱ ۲ ۳ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۵&-۴&۲\\۲&-۱&۱\\-۴&۴&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵&-۴&۲\\۲&-۱&۱\\-۴&۴&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&-۸&۴\\۴&-۳&۲\\-۸&۸&-۳\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}-۲A=\begin{bmatrix}۹&-۸&۴\\۴&-۳&۲\\-۸&۸&-۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱۰&-۸&۴\\۴&-۲&۲\\-۸&۸&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰&۰\\۰&-۱&۰\\۰&۰&-۱\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^{۲}-۲A+۲I)^{۶}=(-I+۲I)^{۶}=I^{۶}=I$$

۱۲۰

۱ ۲ **۳** ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۳ & ۴\\ ۱ & -۴ & -۵\\ -۱ & ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۳ & ۴\\ ۱ & -۴ & -۵\\ -۱ & ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۴ & ۴\\ -۱ & -۳ & -۳\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۴ & ۴\\ -۱ & -۳ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۳ & ۴\\ ۱ & -۴ & -۵\\ -۱ & ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^{۳}+۳I)^{۴}=(-I+۳I)^{۴}=(۲I)^{۴}=۱۶I^{۴}=۱۶I$$

۱۲۱

۱ ۲ **۳** ۴

$$A-kI=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۲\\ -۱ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۱ & ۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k & ۰ & ۰\\ ۰ & k & ۰\\ ۰ & ۰ & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k & -۱ & -۲\\ -۱ & -k & -۲\\ ۱ & ۱ & ۳-k\end{bmatrix}$$

$$(A-kI)^{۲}=\begin{bmatrix}-k & -۱ & -۲\\ -۱ & -k & -۲\\ ۱ & ۱ & ۳-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k & -۱ & -۲\\ -۱ & -k & -۲\\ ۱ & ۱ & ۳-k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}k^{۲}-۱ & ۲k-۲ & ۴k-۴\\ ۲k-۲ & k^{۲}-۱ & ۴k-۴\\ ۲-۲k & ۲-۲k & k^{۲}-۶k+۵\end{bmatrix}$$

به ازای $k=۱$ داریم $(A-I)^{۲}=\bar{O}$، پس کم‌ترین مقدار $n+k$ برابر $۳=۱+۲$ است.

۱۲۲

۱ ۲ **۳** ۴

$$۴A^{۲}=۳A\Rightarrow A^{۲}=\frac{۳}{۴}A\Rightarrow A^{۲}\times A=\frac{۳}{۴}A\times A\Rightarrow A^{۳}=\frac{۳}{۴}A^{۲}$$

$$=\frac{۳}{۴}(\frac{۳}{۴}A)=\frac{۹}{۱۶}A\ ,\ A^{۴}=A^{۳}A=(\frac{۹}{۱۶}A)A$$

$$=\frac{۹}{۱۶}A^{۲}=\frac{۹}{۱۶}(\frac{۳}{۴}A)=\frac{۲۷}{۶۴}A$$

۱۲۳

۱ ۲ ۳ ۴

$$A^{۲}=A\Rightarrow ۴A^{۲}=۴A\Rightarrow ۴A^{۲}-۴A+I=I\Rightarrow (۲A-I)^{۲}=I$$

$$\Rightarrow ۲^{۲}(A-\frac{I}{۲})^{۲}=I\Rightarrow (A-\frac{I}{۲})^{۲}=\frac{I}{۴}$$

$$\Rightarrow (A-\frac{I}{۲})^{۶}=(\frac{I}{۴})^{۳}=\frac{I^{۳}}{۶۴}=\frac{۱}{۶۴}I$$

۱۲۴

۱ ۲ ۳ **۴**

$$۲I-A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$(۲I-A)^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۴ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$(۲I-A)^{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۴ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۶ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$(۲I-A)^{۱۰۰}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۲۰۰ & ۱ & ۰\\ ۱۰۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۳۰۳$$

۱۲۵

۱ ۲ **۳** ۴

$$ABC=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

$$(ABC)^{۲}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

$$(ABC)^{۳}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار n برابر ۳ است.

۱۲۶

۱ **۲** ۳ ۴

نکته: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ برابر $|A|=ad-bc$ است.

$$\begin{vmatrix}a & -b\\ ۲ & ۳\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & b\\ ۶ & -۵\end{vmatrix}=۳۲\Rightarrow ۳a+۲b-(-۵a-۶b)=۳۲$$

$$\Rightarrow ۸b+۸a=۳۲\Rightarrow a+b=۴\ ,\ \begin{vmatrix}۴a & b\\ -۴ & ۱\end{vmatrix}=۴a+۴b$$

$$=۴(a+b)=۴\times ۴=۱۶$$

۱۲۷

۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه $|AB|=|A||B|$.

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۳\times ۱-۱\times ۱=۲$$

$$B=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=۴\times ۳-۰\times ۲=۱۲$$

$$\frac{|A^{۲}+AB|}{|B^{۲}+BA|}=\frac{|A(A+B)|}{|B(B+A)|}=\frac{|A||A+B|}{|B||B+A|}$$

$$=\frac{|A|}{|B|}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

۱۲۸

۱ **۲** ۳ ۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^{۳}=A^{۲}A=IA=A$$

$$A^{۴}=(A^{۲})^{۲}=I^{۲}=I\ ,\ A^{۵}=A^{۴}A=IA=A,\cdots,A^{۲n-۱}=A$$

$$B=A+A^{۳}+A^{۵}+\cdots+A^{۲n-۱}=\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{\text{n مرتبه}}=nA$$

$$\Rightarrow |B|=|nA|=n^{۲}|A|=n^{۲}\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & -۲\end{vmatrix}=n^{۲}(-۴+۳)=-n^{۲}$$

۱۲۹ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A+۲B=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۰ & -۳\end{bmatrix},\ ۲A-B=\begin{bmatrix}۵ & -۱۱\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}$$

$$(A+۲B)+۲(۲A-B)=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۰ & -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱۰ & -۲۲\\ -۱۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱۵ & -۲۵\\ -۱۰ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow ۵A=\begin{bmatrix}۱۵ & -۲۵\\ -۱۰ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=۳-۱۰=-۷$$

$$B=۲A-\begin{bmatrix}۵ & -۱۱\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & -۱۰\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵ & -۱۱\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=-۲-۱=-۳\ ,\ |A|+|B|=-۷-۳=-۱۰$$

۱۳۰ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\ ,\ |A|=۳\Rightarrow ad-bc=۳$$

$$A+I=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+۱ & b\\ c & d+۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+I|=(a+۱)(d+۱)-bc$$

$$A-I=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-۱ & b\\ c & d-۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-I|=(a-۱)(d-۱)-bc$$

$$|A+I|+|A-I|=ad+a+d+۱-bc+ad-a-d+۱-bc$$

$$=۲(ad-bc)+۲\Rightarrow |A+I|+|A-I|=۲\times ۳+۲=۸$$

۱۳۱ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^۲\end{bmatrix}$$

(فرض) $|A|=\Delta\Rightarrow ad-bc=\Delta\Rightarrow ad=bc+\Delta$ (۱)

(فرض) $(a^۲+bc)+(bc+d^۲)=T\Rightarrow a^۲+d^۲+۲bc=T$

$\Rightarrow a^۲+d^۲=T-۲bc$ (۲)

مربع مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A $=(a+d)^۲=a^۲+d^۲+۲ad$

با قرار دادن (۱) و (۲) در تساوی فوق داریم:

$$=T-۲bc+۲(bc+\Delta)=T+۲\Delta$$

۱۳۲ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$a_{ij}=\begin{cases}۲i-j & i<j\\ i & i\geq j\end{cases}\Rightarrow A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۲$$

$$b_{ij}=\begin{cases}i+۲j & i\leq j\\ ۲+j & i>j\end{cases}\Rightarrow B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=۱۸-۱۵=۳$$

$$AX=B\Rightarrow |AX|=|B|\Rightarrow |A||X|=|B|\Rightarrow |X|=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۳ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}=[(-۱)^i-j]_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix}-۲ & -۳ & -۴\\ ۰ & -۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$B=[b_{ij}]_{۳\times ۲}=[(-۱)^j+i]_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳ & -۴\\ ۰ & -۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۱ & -۲۹\\ -۵ & -۱۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A\times B|=(-۱۱)(-۱۱)-(-۵)(-۲۹)=۱۲۱-۱۴۵=-۲۴$$

۱۳۴ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

$$A^۳=A^۲A=(-I)A=-A$$

$$A^۴=(A^۲)^۲=(-I)^۲=I\ ,A^۵=A^۴A=IA=A\ ,$$

$$A+A^۲+A^۳+A^۴=A-I-A+I=\bar{O}$$

توان‌های A با تناوب ۴ تکرار می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$B=(\underbrace{A+A^۲+A^۳+A^۴}_{\bar{O}})+(\underbrace{A^۵+A^۶+A^۷+A^۸}_{\bar{O}})+\cdots$$

$$+(\underbrace{A^{۲۰۱۷}+A^{۲۰۱۸}+A^{۲۰۱۹}+A^{۲۰۲۰}}_{\bar{O}})+A^{۲۰۲۱}+A^{۲۰۲۲}=A-I$$

$$=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=(-۱)(-۱)-(-۱)(۱)=۱+۱=۲$$

۱۳۵ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{-۴}{۱}=۴\ ,\ \alpha\beta=\frac{۱}{۱}=۱$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha+\beta\\ -\beta & \alpha\end{vmatrix}=\alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)^۲=۴^۲=۱۶$$

۱۳۶ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

نکته: اگر A یک ماتریس ۲ × ۲ باشد آن‌گاه $|KA|=K^۲|A|$ (K عدد حقیقی)

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & -a\\ a & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -a\\ a & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a^۲ & ۰\\ ۰ & -a^۲\end{bmatrix}=-a^۲I$$

$$A^{۴n}=(A^۲)^{۲n}=(-a^۲I)^{۲n}=a^{۴n}I^{۲n}=a^{۴n}I$$

$$A^{۴n+۱}=A^{۴n}\times A=a^{۴n}I\times A=a^{۴n}A$$

$$A^{۴n}+A^{۴n+۱}=a^{۴n}I+a^{۴n}A=a^{۴n}(I+A)=a^{۴n}$$

$$(\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & -a\\ a & ۰\end{bmatrix})=a^{۴n}\begin{bmatrix}۱ & -a\\ a & ۱\end{bmatrix}$$

$$|A^{۴n}+A^{۴n+۱}|=a^{۸n}\begin{vmatrix}۱ & -a\\ a & ۱\end{vmatrix}=a^{۸n}(۱+a^۲)$$

بنا به فرض دترمینان فوق برابر $a^{n+۳۷}+a^{n+۳۵}$ می‌باشد در نتیجه داریم:

$$a^{۸n}(۱+a^۲)=a^{n+۳۵}(۱+a^۲)\Rightarrow a^{۸n}=a^{n+۳۵}\Rightarrow ۸n=n+۳۵$$

$$\Rightarrow ۷n=۳۵\Rightarrow n=۵$$

۱۳۷ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}=-A$$

نکته: به طور کلی اگر $A^۲=\lambda A$ آن‌گاه $A^n=\lambda^{n-۱}A$.

$$A^{۲۰۲۲}=(-۱)^{۲۰۲۱}A=-A$$

بنابه فرض $B=A+I$ در نتیجه:

$$A^{۲۰۲۲}+B=-A+A+I=I\Rightarrow |A^{۲۰۲۲}+B|=|I|=۱$$

۱۳۸ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$۲A=\begin{bmatrix}|A| & -۲\\ ۲ & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow|۲A|=\begin{vmatrix}|A| & -۲\\ ۲ & |A|\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲^۲|A|=|A|^۲+۴\Rightarrow|A|^۲-۴|A|+۴=۰$$

$$\Rightarrow(|A|-۲)^۲=۰\Rightarrow|A|=۲\Rightarrow\|A|A|=|A|^۲|A|=۲^۲\times۲=۸$$

۱۳۹ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$۲A+۳I=\begin{bmatrix}۹ & ۴\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{۱}{۲}(\begin{bmatrix}۹ & ۴\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A^۲-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^۲-(۳+۰)A+(۳\times۰-۲(-۱))I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^۲-۳A+۲I=o\Rightarrow A^۲-۳A=-۲I$$

$$|A^۲-۳A|=|-۲I|=(-۲)^۲=۴$$

۱۴۰ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

$$C=A\times B=\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۲\\ a & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & a\\ -۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۴ & ۳a\\ ۳a & a^۲+۵\end{bmatrix}$$

$$|C|=۱۴(a^۲+۵)-۳a\times۳a=۱۴a^۲-۹a^۲+۷۰=۵a^۲+۷۰$$

پس به ازای هر a حقیقی، $|C|$ همواره مثبت است.

۱۴۱ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

> **نکته:** اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|AB|=|BA|=|A||B|$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۷ & ۸\\ ۷ & ۱۰\end{bmatrix}\Rightarrow|A\times B|=۷\times۱۰-۷\times۸=۷۰-۵۶=۱۴$$

چون دترمینان ماتریس $B\times A$ با دترمینان ماتریس $A\times B$ برابر است، پس از بین گزینه‌ها تنها ماتریس $\begin{bmatrix}۱۵ & ۲\\ ۸ & ۲\end{bmatrix}$ برابر $B\times A$ می‌تواند باشد.

۱۴۲ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$$AC=\begin{bmatrix}۱ & a & ۳\\ -۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ a & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+۱۰ & a+۲\\ a+۲ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\text{(فرض)}\ ACB=۵۲I\Rightarrow|ACB|=۵۲^۲\Rightarrow|AC||B|=۵۲^۲$$

$$\Rightarrow((۳a^۲+۳۰)-(a+۲)^۲)\times۱۰۴=۵۲^۲$$

$$\Rightarrow ۳a^۲+۳۰-a^۲-۴a-۴=۲۶$$

$$\Rightarrow ۲a^۲-۴a=۰\Rightarrow a=۰\ \text{یا}\ a=۲\xrightarrow{\text{مجموع}}۲$$

۱۴۳ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

> **یادآوری:** اگر $a>۰$ و مخالف ۱ باشد $(a\neq۱)$ آن‌گاه برای هر x و y مثبت داریم:
>
> الف) $\log_a x+\log_a^y=\log_a^{xy}$
>
> ب) $\log_a^x-\log_a^y=\log_a^{\frac{x}{y}}$

$$A=\begin{bmatrix}\log۵ & \log۲\\ \log۲ & \log۵\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=(\log۵)^۲-(\log۲)^۲$$

$$=(\log۵-\log۲)(\log۵+\log۲)$$

$$\Rightarrow|A|=\log\frac{۵}{۲}\times\log۱۰=\log۲/۵\times۱=\log۲/۵$$

۱۴۴ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$\begin{vmatrix}۱۰۰۰۰^{\log x} & ۱۰۰^{\log x}\\ ۴ & ۱\end{vmatrix}=-۴\Rightarrow۱۰۰۰۰^{\log x}-۴\times۱۰۰^{\log x}=-۴$$

$$\Rightarrow(۱۰۰^۲)^{\log x}-۴\times۱۰۰^{\log x}+۴=۰$$

$$\Rightarrow(۱۰۰^{\log x})^۲-۴\times۱۰۰^{\log x}+۴=۰$$

$$\xrightarrow{۱۰۰^{\log x}=t}t^۲-۴t+۴=۰\Rightarrow(t-۲)^۲=۰$$

$$\Rightarrow t=۲\Rightarrow۱۰۰^{\log x}=۲\Rightarrow\log۱۰۰^{\log x}=\log۲$$

$$\Rightarrow\log x\times\log۱۰^۲=\log۲\Rightarrow\log x=\frac{۱}{۲}\log۲=\log\sqrt{۲}\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

۱۴۵ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

> **نکته:** ۱- اگر A یک ماتریس ۲×۲ یا ۳×۳ باشد، آن‌گاه $|A^n|=|A|^n$ (n عدد طبیعی است)
>
> ۲- اگر A یک ماتریس ۲×۲ و k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA|=k^۲|A|$
>
> ۳- اگر A یک ماتریس ۳×۳ و k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA|=k^۳|A|$

$$|\frac{۱}{۲}A^۳|=(\frac{۱}{۲})^۲|A^۳|=\frac{۱}{۴}|A|^۳=\frac{۱}{۴}\times۲^۳=\frac{۸}{۴}=۲$$

۱۴۶ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

با توجه نکته تست قبل (شماره ۳) داریم:

$$\|A|A|=|A|^۳|A|=|A|^۴=۴^۴=۲۵۶$$

۱۴۷ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$\begin{vmatrix}\tan\theta & \frac{۱}{\cos\theta}\\ \tan\theta+\frac{۱}{\cos\theta} & \tan\theta+\frac{۱}{\cos\theta}\end{vmatrix}$$

$$=\tan\theta(\tan\theta+\frac{۱}{\cos\theta})-\frac{۱}{\cos\theta}(\tan\theta+\frac{۱}{\cos\theta})$$

$$=(\tan\theta+\frac{۱}{\cos\theta})(\tan\theta-\frac{۱}{\cos\theta})=\tan^۲\theta-\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

با استفاده از اتحاد $\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{vmatrix}\tan\theta & \frac{۱}{\cos\theta}\\ \tan\theta+\frac{۱}{\cos\theta} & \tan\theta+\frac{۱}{\cos\theta}\end{vmatrix}=\tan^۲\theta-(۱+\tan^۲\theta)=-۱$$

۱۴۸ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$|A|^۲-۵|A|+۶=۰\Rightarrow(|A|-۲)(|A|-۳)=۰$$

$$\Rightarrow|A|=۲\ \text{یا}\ |A|=۳$$

چون درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی هستند، پس درایه‌های A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۳\times۱-۱\times۱=۳-۱=۲$$

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۴-۱=۳$$

پس کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌ها برابر ۶ $=۱+۱+۲+۲$ $(۳+۱+۱+۱=۶)$ است.