





مجموعه کتاب‌های علامه حلی

تست آزمون ریاضی نهم

• پریسا پرمور
• مرتضی قلی‌زاده





شناسنامه
کتاب

سرشناسه : پرمور، پریسا، ۱۳۶۱
عنوان و نام پدیدآور : تست آزمون ریاضی نهم / پریسا پرمور، مرتضی قلی‌زاده، ویراستار علمی زهرا معصومی.
مشخصات نشر : تهران: انتشارات حلی: دانش پژوهان جوان، ۱۴۰۱.
مشخصات ظاهری : ۲۴۰ ص (۲۱*۲۹).
فروست : مجموعه کتاب‌های علامه‌حلی
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۴۹۶-۲۴۰-۷
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
شناسه افزوده : قلی‌زاده، مرتضی، ۱۳۷۶
شناسه افزوده : معصومی، زهرا، ۱۳۶۰ ویراستار
شماره کتابشناسی ملی : ۸۸۵۵۵۶۵
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا



عنوان کتاب : تست آزمون ریاضی نهم
ناشر : انتشارات حلی
ناشر همکار : انتشارات دانش پژوهان جوان
مؤلفان : پریسا پرمور، مرتضی قلی‌زاده
ویراستار علمی : زهرا معصومی
مسئول هماهنگی : سمیه‌سادات فاطمی
صفحه‌آرا : راضیه‌فرهانیان
طراح جلد : زهره شیروانی‌هرندی
سال چاپ : ۱۴۰۲
نوبت چاپ : دوم
چاپ و صحافی : واژه‌پرداز اندیشه
شمارگان : ۲۰۰۰ جلد
قیمت : ۲۴۹۰۰۰ تومان
شماره شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۴۹۶-۲۴۰-۷



تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کویه براتی، پلاک ۱۶ ول ۱۴

تلفن > دفتر مرکزی: ۵-۸۴۴۴۴۳۶۶

کلیه حقوق این اثر برای ناشر محفوظ است.

هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق برداشت تمام یا قسمتی از اثر را به صورت چاپ، فتوکپی، جزوه و مجازی ندارد.

متخلفان به موجب بند ۵ از ماده ۲ قانون حمایت از ناشران تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



بایب است
براتی



فصل ۷: عبارتهای گویا

۱۴۱	تست‌های آموزشی
۱۴۴	پاسخ تست‌های آموزشی
۱۵۲	تست‌های تمرینی
۲۲۷	پاسخ تست‌های تمرینی
۱۵۴	آزمون جامع ۱
۲۳۰	پاسخ آزمون جامع ۱
۱۵۶	آزمون جامع ۲
۲۳۲	پاسخ آزمون جامع ۲

فصل ۸: حجم و مساحت

۱۶۰	تست‌های آموزشی
۱۶۲	پاسخ تست‌های آموزشی
۱۶۹	تست‌های تمرینی
۲۳۵	پاسخ تست‌های تمرینی
۱۷۱	آزمون جامع ۱
۲۳۷	پاسخ آزمون جامع ۱
۱۷۳	آزمون جامع ۲
۲۳۹	پاسخ آزمون جامع ۲

پاسخنامه کلیدی ۱۷۵

فصل ۴: توان و ریشه

۶۶	تست‌های آموزشی
۶۹	پاسخ تست‌های آموزشی
۷۹	تست‌های تمرینی
۲۰۱	پاسخ تست‌های تمرینی
۸۳	آزمون جامع ۱
۲۰۶	پاسخ آزمون جامع ۱
۸۵	آزمون جامع ۲
۲۰۷	پاسخ آزمون جامع ۲

فصل ۵: عبارتهای جبری

۸۸	تست‌های آموزشی
۹۲	پاسخ تست‌های آموزشی
۱۰۸	تست‌های تمرینی
۲۰۹	پاسخ تست‌های تمرینی
۱۱۲	آزمون جامع ۱
۲۱۵	پاسخ آزمون جامع ۱
۱۱۴	آزمون جامع ۲
۲۱۶	پاسخ آزمون جامع ۲

فصل ۶: خط و معادله خطی

۱۱۸	تست‌های آموزشی
۱۲۱	پاسخ تست‌های آموزشی
۱۳۴	تست‌های تمرینی
۲۱۸	پاسخ تست‌های تمرینی
۱۳۷	آزمون جامع ۱
۲۲۲	پاسخ آزمون جامع ۱
۱۳۹	آزمون جامع ۲
۲۲۵	پاسخ آزمون جامع ۲

فصل ۱: مجموعه‌ها

۶	تست‌های آموزشی
۹	پاسخ تست‌های آموزشی
۱۶	تست‌های تمرینی
۱۷۹	پاسخ تست‌های تمرینی
۲۰	آزمون جامع ۱
۱۸۳	پاسخ آزمون جامع ۱
۲۲	آزمون جامع ۲
۱۸۵	پاسخ آزمون جامع ۲

فصل ۲: عددهای حقیقی

۲۶	تست‌های آموزشی
۲۸	پاسخ تست‌های آموزشی
۳۶	تست‌های تمرینی
۱۸۶	پاسخ تست‌های تمرینی
۳۹	آزمون جامع ۱
۱۹۰	پاسخ آزمون جامع ۱
۴۱	آزمون جامع ۲
۱۹۱	پاسخ آزمون جامع ۲

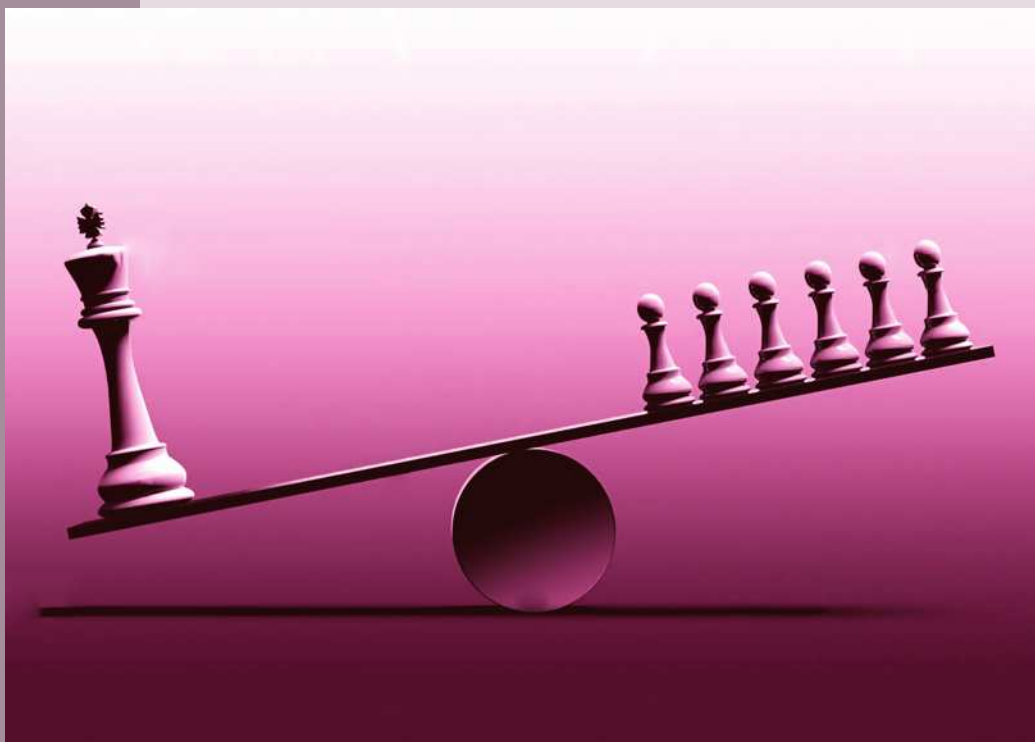
فصل ۳: استدلال و اثبات در هندسه

۴۴	تست‌های آموزشی
۴۷	پاسخ تست‌های آموزشی
۵۵	تست‌های تمرینی
۱۹۳	پاسخ تست‌های تمرینی
۶۰	آزمون جامع ۱
۱۹۷	پاسخ آزمون جامع ۱
۶۲	آزمون جامع ۲
۱۹۹	پاسخ آزمون جامع ۲

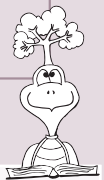


فصل پنجم

عبارت‌های جبری



در بازی شطرنج هر مهره ارزشی مخصوص به خود دارد، برای مثال هر پیاده برابر با یک ارزش، فیل سه ارزش و اسب سه ارزش، رخ پنج ارزش و وزیر نه ارزش دارد و شاه ارزشمندترین است. در ریاضیات مفهوم نابرابری نقش مهمی در نتیجه‌گیری‌ها و اثبات‌ها ایفا می‌کند.



اگر تست‌های آموزشی و تست‌های تمرینی این فصل را حل کنی:

- با چند جمله‌ای‌ها آشنا می‌شوی و می‌توانی درجه چندجمله‌ای را نسبت به یک یا چند متغیر به دست بیاوری.
- با مفهوم کلی اتحاد جبری آشنا می‌شوی و اتحاد مربع دوجمله‌ای و مربع سه‌جمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک را یاد می‌گیری.
- می‌توانی با کمک فاکتورگیری و اتحادها، عبارت‌های جبری را تجزیه کنی.
- می‌توانی نامعادله یک مجهولی درجه اول را حل کنی و مجموعه جواب آن را مشخص کنی.



تست‌های آموزشی

فصل ۵

۱. کدام یک از عبارتهای زیر یک جمله‌ای است؟

(۱) xy (۲) $xy \times yz^2$ (۳) 7 (۴) همه موارد

۲. ضریب عددی یک جمله‌ای $\frac{x^5}{\sqrt{2}}$ چیست؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۳. یک جمله‌ای $-\sqrt{2}x^2y^3$ با کدام یک از یک جمله‌های زیر متشابه است؟

(۱) $-\sqrt{2}x^3y^2$ (۲) $\frac{1}{5}yxy^2x^2$ (۳) $2xyxy^2$ (۴) $-\sqrt{2}x^2y^2$

۴. درجه یک جمله‌ای $7a^2b^3c$ نسبت به متغیر b چیست؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 6

۵. درجه یک جمله‌ای $7a^2b^3c$ نسبت به متغیرهای a و b چند است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 5

۶. چند جمله‌ای $3x^5 - 4y^2 + 4x^2 - 2x^5 - 7$ چند جمله دارد؟

(۱) 5 (۲) 4 (۳) 3 (۴) 2

۷. درجه چند جمله‌ای $4x^3y^2 - 5xy^2 + 4x^3y^2$ به ترتیب (از راست به چپ)، نسبت به متغیر x ، نسبت به متغیر y و نسبت به متغیرهای

x و y چند است؟

(۱) 3 و 2 (۲) 3 و 2 و 5 (۳) 1 و 2 و 3 (۴) 2 و 3 و 5

۸. اگر عبارت جبری $1 - 3x^2 + 4x^2 - 3x^5 + \frac{2}{3}x^3$ را براساس توان‌های نزولی x مرتب کنیم، کدام گزینه درست است؟

(۱) $-1 + 4x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 3x^5$ (۲) $3x^5 + 4x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 1$

(۳) $3x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 1$ (۴) $-3x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 1$

۹. اگر $A = 4x^2y^2$ و $B = 3x^2y^4$ و $C = \frac{5y^4}{x^{-5}}$ باشد، ساده شده عبارت $\frac{1}{3}A \times \frac{1}{3}B \times C$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $1 \cdot x^1 \cdot y^1$ (۲) $1 \cdot y^1$ (۳) $1 \cdot x^{-1} \cdot y^1$ (۴) $1 \cdot x^1 \cdot y^{-1}$



۱۰. اگر $A = 8xy$ و $B = \frac{y}{4} - \frac{x}{4}$ باشد، حاصل قرینه AB برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $-2xy^2$ (۲) $-2x^2y$ (۳) $-4xy^2 + 2x^2y$ (۴) $-4xy^2 - 2x^2y$

۱۱. اگر $A = (x+1)$ ، $B = (x-1)$ و $C = (x+1)$ باشد، حاصل ABC برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $x^3 + x^2 - x - 1$ (۲) $x^3 + x^2 + x + 1$ (۳) $x^3 + x^2 + x - 1$ (۴) $x^3 - x^2 + x + 1$

۱۲. کدام یک از عبارتهای زیر درباره تعداد جملات حاصل ضرب دو جمله‌ای در دو جمله‌ای درست است؟

(۱) ۴ جمله است. (۲) بیشتر از ۴ جمله است.

(۳) حداکثر ۴ جمله است. (۴) کمتر از ۴ جمله است.

۱۳. کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد جبری است؟

(۱) $x + 1 = 2$ (۲) $x + x = 2x$ (۳) $5x + y = x + 5y$ (۴) گزینه‌های «۱» و «۳»

۱۴. حاصل $(x + \sqrt{2}y)^2$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $x^2 + 2y^2$ (۲) $x^2 + 2y^2 + 2\sqrt{2}xy$

(۳) $x^2 + 2y^2 + \sqrt{8}xy$ (۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۱۵. کدام یک از گزینه‌های زیر اتحاد مربع دو جمله‌ای را به صورت کلامی بیان می‌کند؟

(۱) مجموع مربع‌های دو عدد برابر است با مجموع مربع‌های دو عدد به علاوه دوبرابر حاصل ضرب آن دو عدد

(۲) مربع مجموع دو عدد برابر است با مجموع مربع‌های دو عدد به علاوه دوبرابر حاصل ضرب آن دو عدد

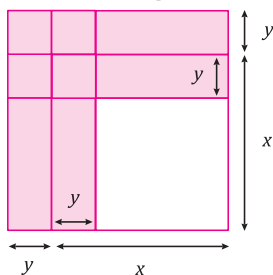
(۳) مربع مجموع دو عدد برابر است با مجموع مربع‌های آن دو عدد

(۴) گزینه‌های «۱» و «۲»

۱۶. حاصل $(x+y)^2 - (x-y)^2$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $2y^2$ (۲) ۰ (۳) $4xy$ (۴) $2y^2 + 4xy$

۱۷. کدام گزینه تساوی جبری درستی را برای محاسبه مساحت قسمت هاشورخورده نشان می‌دهد؟



(۱) $4y(x+y) - 4y^2 = 4xy$

(۲) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$

(۳) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

(۴) گزینه‌های «۱» و «۳»

۱۸. حاصل $(a-b-c)^2$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$ (۲) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

(۳) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$ (۴) $a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

۱۹. حاصل $(4x - \sqrt{2})(4x + \sqrt{2})$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $8x^2 - 2$ (۲) $16x^2 - 2$ (۳) $8x^2 - 4$ (۴) $16x^2 - 4$

۲۰. حاصل 102×98 کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

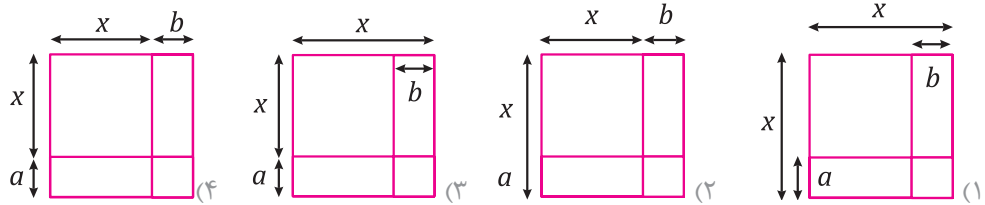
(۱) $100^2 - 2^2$ (۲) ۹۹۹۶ (۳) ۹۹۶ (۴) گزینه‌های «۱» و «۲»

۲۱. اگر a و b دو عدد باشند که $a + b = 1$ ، کدام یک از تساوی‌های زیر درست است؟

(۱) $a^2 - a = b^2 - b$ (۲) $a(a+1) + b(b+1) = 2(1-ab)$

(۳) $a^2 + b = a + b^2$ (۴) گزینه‌های «۱» و «۲» و «۳»

۲۲. کدام شکل متناظر با اتحاد جبری $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ است؟



۲۳. در اتحاد جمله مشترک اگر جمله‌های غیرمشترک قرینه یکدیگر باشند، کدام اتحاد به دست می‌آید؟

(۱) اتحاد مربع دو جمله‌ای (۲) اتحاد مربع سه جمله‌ای

(۳) اتحاد مزدوج (۴) هیچ کدام

۲۴. در اتحاد جمله مشترک، اگر جمله‌های مشترک با یکدیگر برابر باشند، کدام اتحاد به دست می‌آید؟

(۱) اتحاد مربع دو جمله‌ای (۲) اتحاد مربع سه جمله‌ای (۳) اتحاد مزدوج (۴) هیچ کدام

۲۵. جواب‌های معادله $16x^2 - 4x = 0$ چیست؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ (۳) 0 (۴) $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ و 0

۲۶. حاصل $105 \cdot 2 - 95 \cdot 2$ چیست؟

(۱) 2×10^3 (۲) 2×10^4 (۳) 2×10^5 (۴) 2×10^6

۲۷. عبارت $x^2 - y^2 + 4x + 4$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $(x+y+2)(x-y+2)$ (۲) $(x+2+y)^2$

(۳) $(x+2-y)^2$ (۴) گزینه‌های «۱» و «۲»

۲۸. اگر بخواهیم عبارت $x^2 - 2x - 15$ را به صورت حاصل ضرب دو عبارت جبری بنویسیم، با کدام گزینه برابر است؟

(۱) $(x+5)(x-3)$ (۲) $(x-5)(x+3)$ (۳) $(x-5)(x-3)$ (۴) $(x+5)(x+3)$

۲۹. اگر عبارت $6x^2 + 13x + 5$ به صورت حاصل ضرب دو عبارت نوشته شود، حاصل برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $(6x+3)(6x+10)$ (۲) $(2x+1)(3x+5)$

(۳) $(6x+15)(6x+2)$ (۴) $(3x+1)(2x+5)$

۳۰. جواب‌های معادله $6x^2 + 13x + 5 = 0$ چیست؟

(۱) $-\frac{5}{3}$ و $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ و $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$ و $\frac{1}{3}$

۳۱. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a < b$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) عدد حقیقی مثبتی مانند c وجود دارد، به طوری که $a+c = b$.

(۲) هیچ عدد حقیقی مثبتی وجود ندارد، به طوری که $a+c = b$.

(۳) اگر m عدد حقیقی مثبتی باشد، $ma > mb$.

(۴) اگر m عدد حقیقی منفی باشد، $ma < mb$.

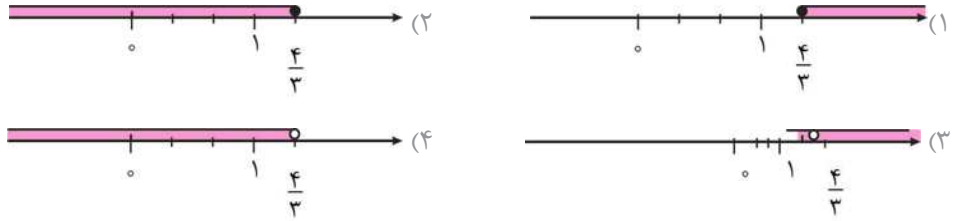


۳۲. اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند، کدام گزینه درست نیست؟

(۱) اگر $a < b$ ، آنگاه $a + c < b + c$.
 (۲) اگر $a < b$ ، آنگاه $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

(۳) اگر $ab > 0$ باشد، آنگاه a و b هم‌علامت هستند.
 (۴) اگر $a^2 b^2 c < 0$ باشد، آنگاه c منفی است.

۳۳. مجموعه جواب نامعادله $\frac{1-x}{16} \geq \frac{2+x}{8}$ را روی محور اعداد مشخص کنید:



پاسخ تست‌های آموزشی (فصل ۵)



۱. گزینه ۴

به هر عبارت که بتوان آن را به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر نوشت، «یک جمله‌ای» می‌گوییم.

گام ۱ ابتدا توجه می‌کنیم که در یک جمله‌ای یک یا چند متغیر در یکدیگر ضرب شده‌اند:

برای مثال در گزینه «۱»، متغیر X در متغیر Y ضرب شده است و در گزینه «۲» با توجه به ویژگی جابه‌جایی در ضرب داریم:

$$XY \times YZ^2 = Y \times X \times Y \times Z^2 = YXYZ^2$$

پس متغیرهای X و Y و Z^2 در یکدیگر ضرب شده‌اند.

گام ۲ در مرحله دوم توجه می‌کنیم که توان متغیرهایی که در هم ضرب شده‌اند، باید عددی صحیح و نامنفی باشد که در گزینه «۱»، توان X یک و توان Y یک است و در گزینه «۲»، توان X یک و توان Y یک و توان Z دو است. در گزینه «۳» توان متغیر صفر بوده است، چون می‌توان Y را به صورت YX^0 نوشت، که X^0 برابر یک است؛ بنابراین توان متغیر در گزینه «۳» را می‌توان مساوی با صفر در نظر گرفت که عددی صحیح و نامنفی است.

گام ۳ در هر یک جمله‌ای، حاصل ضرب یک یا چند متغیر با توان‌های صحیح و نامنفی باید در یک عدد حقیقی ضرب شود که در گزینه «۱»، $(XY = 1XY)$ این عدد حقیقی یک است. در گزینه‌های «۲» و «۳» این اعداد حقیقی Y هستند. بنابراین هر سه مورد یک جمله‌ای هستند و گزینه «۴» صحیح است.

۲. گزینه ۴

ضرب عددی یک جمله‌ای، عدد حقیقی است که در قسمت حرفی یک جمله‌ای ضرب شده است.

گام ۱ با توجه به تعریف، ضرب عددی $\frac{X^5}{\sqrt{2}}$ را پیدا می‌کنیم. عددی که در X^5 ضرب شده $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است؛ زیرا داریم:

$$\frac{1 \times X^5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times X^5$$

گام ۲ بین گزینه‌ها عدد $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را پیدا می‌کنیم، همان‌طور که می‌بینیم گزینه «۲» درست است؛ اما باید چک کنیم گزینه دیگری با $\frac{1}{\sqrt{2}}$

برابر هست یا نه؟

گام ۳ به وضوح مشخص است که $\sqrt{2}$ با $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر نیست، چون طبق تعریف معکوس (وارون) یک عدد، این دو عدد معکوس یکدیگرند.

با توجه به این که مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را می‌توانیم گویا کنیم و عددی مساوی با آن به دست آوریم، داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس گزینه‌های «۲» و «۳» درست هستند.

۳. گزینه ۳

اگر قسمت حرفی دو یا چند یک جمله‌ای یکسان باشد، به آن یک جمله‌ای‌ها، یک جمله‌ای‌های «متشابه» گفته می‌شود و یک جمله‌ای‌هایی که متشابه نیستند را «غیرمتشابه» می‌گوییم.

گام ۱ ابتدا باید قسمت حرفی یک جمله‌ای $-\sqrt{2}X^2Y^3$ را پیدا کنیم. قسمت حرفی $-\sqrt{2}X^2Y^3$ برابر با X^2Y^3 است.



گام ۳ باید قسمت حرفی گزینه‌های داده‌شده را نیز پیدا کنیم: قسمت حرفی گزینه «۱»، x^3y^2 است.

برای به‌دست آوردن قسمت حرفی گزینه‌های «۲» و «۳» باید یک جمله‌ای‌ها را با ضرب متغیرهایشان ساده‌تر کنیم: قسمت حرفی گزینه «۲»، xy^2x^2 است که پس از ساده شدن برابر با y^3x^3 می‌شود.

$$\underline{y^1x^1}y^2x^2 = y^{1+2} \times x^{1+2} = y^3x^3$$

و برای قسمت حرفی گزینه «۳» داریم:

$$\underline{x^1y^1}x^1y^2 = x^{1+1} \times y^{1+2} = x^2y^3$$

و قسمت حرفی گزینه «۴»، x^2y^2 است.

گام ۳ حالا باید ببینیم قسمت حرفی کدام گزینه با یک جمله‌ای داده‌شده یکسان است. با توجه به توضیح **گام ۳**، گزینه «۳» با $-\sqrt{2}x^2y^3$ قسمت حرفی یکسان دارد پس باهم متشابه هستند.

توجه می‌کنیم که در پیدا کردن یک جمله‌ای‌های متشابه، تنها به یکسان بودن قسمت حرفی آن‌ها توجه داریم و به عدد حقیقی که در متغیرها ضرب شده است، توجه نمی‌کنیم. بنابراین گزینه «۳» درست است.

۴. گزینه ۳

درجه یک جمله‌ای نسبت به یکی از متغیرهای آن برابر است با توان آن متغیر در یک جمله‌ای. توجه کنید که ابتدا اگر لازم بود، یک جمله‌ای را ساده می‌کنیم.

گام ۱ اگر یک جمله‌ای ساده شدنی بود، ابتدا آن را ساده می‌کنیم. در اینجا یک جمله‌ای ساده‌تر نمی‌شود.

گام ۲ متغیری که نسبت به آن می‌خواهیم درجه را به‌دست آوریم، مشخص می‌کنیم. در این سؤال درجه نسبت به متغیر b خواسته‌شده است.

گام ۳ توان متغیری که نسبت به آن درجه خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم.

به این ترتیب در این سؤال چون توان b ، ۳ است، درجه نسبت به متغیر b برابر با ۳ است. بنابراین گزینه «۴» درست است.

۵. گزینه ۴

درجه یک جمله‌ای نسبت به چند متغیر برابر است مجموع توان‌های آن متغیرها در یک جمله‌ای.

گام ۱ درجه یک جمله‌ای را نسبت به هر کدام از متغیرهای خواسته‌شده مشخص می‌کنیم. در این سؤال درجه یک جمله‌ای نسبت به متغیر a ، ۲ و نسبت به متغیر b ، ۳ است.

گام ۲ مجموع درجات نسبت به متغیرهای موردنظر را به‌دست می‌آوریم. در این سؤال مجموع درجات نسبت به متغیرهای a و b ، $3+2=5$ است؛ بنابراین گزینه «۴» درست است.

۶. گزینه ۲

عبارت‌های جبری که به‌صورت جمع (تفریق) چند یک جمله‌ای غیرمتشابه نوشته می‌شود، «چندجمله‌ای» نامیده می‌شود. یک جمله‌ای‌ها نیز چندجمله‌ای محسوب می‌شوند، در واقع یک جمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای هستند که تعداد جملات آن یک است.

گام ۱ برای به‌دست آوردن تعداد جملات یک چندجمله‌ای، باید ابتدا آن را ساده کنیم، برای ساده کردن، یک جمله‌ای‌های متشابه را باهم جمع یا تفریق کنیم.

بنابراین برای حل این سؤال داریم:

$$3x^5 - 4y^2 + 4x^2 - 2x^5 - 7 = x^5 - 4y^2 + 4x^2 - 7$$

جملات متشابه

گام ۱ پس از ساده کردن، چندجمله‌ای به صورت جمع یا تفریق یک یا چند یک‌جمله‌ای غیرمتشابه نوشته شده است پس تعداد جملاتی که با جمع (تفریق) از هم جدا می‌شوند را می‌شماریم.
در این سؤال چندجمله‌ای $x^5 - 4y^2 + 4x^2 - 7$ چهار جمله دارد و گزینه «۲» درست می‌باشد.

۷. گزینه ۲

درجه یک چندجمله‌ای نسبت به یک متغیر، برابر است با بزرگ‌ترین توان آن متغیر که در آن چندجمله‌ای وجود دارد.
درجه یک چندجمله‌ای نسبت به چند متغیر، بزرگ‌ترین درجه یک‌جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر می‌باشد.

گام ۱ ابتدا متغیرهای چندجمله‌ای را مشخص کنیم که در این سؤال متغیرها X و Y هستند.

گام ۲ درجه نسبت به هر متغیر را مشخص می‌کنیم.

در این سؤال بین X^1 و X^3 ، توان ۳ بزرگ‌تر است پس درجه چندجمله‌ای نسبت به X برابر است با ۳ است. بین Y^2 و Y^2 هر دو توان برابر است پس درجه چندجمله‌ای نسبت به متغیر Y برابر با ۲ است.

گام ۳ درجه هر یک‌جمله‌ای را در چندجمله‌ای حساب می‌کنیم. در این سؤال ۲ یک‌جمله‌ای غیرمتشابه $5XY^2$ و $4X^3Y^2$ داریم که

درجه $5XY^2$ نسبت به متغیرهای X و Y جمع توان‌های X و Y است؛ یعنی $1+2=3$. درجه $4X^3Y^2$ نسبت به متغیرهای X و Y ، $3+2=5$ است. بین آن‌ها بزرگ‌ترین درجه ۵ می‌باشد پس گزینه «۲» درست است.

۸. گزینه ۴

اگر بخواهیم یک چندجمله‌ای را براساس توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب کنیم؛ یعنی یک‌جمله‌ای‌ها را به ترتیبی از چپ به راست بنویسیم که توان آن متغیر از بزرگ به کوچک مرتب شده باشد. به این شکل، شکل استاندارد یک چندجمله‌ای گفته می‌شود.

گام ۱ متغیر موردنظر که براساس آن باید چندجمله‌ای را مرتب کنیم، مشخص می‌کنیم. در اینجا این متغیر X است.

گام ۲ به ترتیب از توان بزرگ به توان کوچک، یک‌جمله‌ای‌ها را از سمت چپ به راست می‌نویسیم و توجه می‌کنیم که علامت‌های ضرایب عددی را درست بنویسیم:

$$-3x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 1x^0$$

گام ۳ توجه می‌کنیم که عدد ثابت، یک‌جمله‌ای از درجه صفر می‌باشد، چون هر عدد ثابت را می‌توان به صورت یک ضریب عددی ضربید

یک متغیر به توان صفر نوشت، مثلاً داریم: $-1 = -1x^0$

پس توان‌ها به ترتیب $0 < 2 < 3 < 5$ نسبت به متغیر X مرتب شده‌اند و گزینه «۴» درست است.

۹. گزینه ۱

برای ضرب چند یک‌جمله‌ای یکدیگر، ابتدا ضرایب عددی آن‌ها را ضرب می‌کنیم و سپس متغیرهای آن‌ها را در همدیگر ضرب می‌کنیم. برای ضرب متغیرها از قوانین محاسبات با اعداد توان‌دار استفاده می‌کنیم.

گام ۱ ابتدا $\frac{1}{3}A$ و $\frac{1}{3}B$ را به دست می‌آوریم و C را طوری می‌نویسیم که توان X در آن عددی مثبت باشد:

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} \times \frac{6}{1} x^2 y^2 = 2x^2 y^2$$



$$\frac{1}{3}B = \frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x}^3 y^4 = x^2 y^4$$

$$C = \frac{\Delta y^4}{x^{-5}} = \frac{\Delta y^4}{(\frac{1}{x})^5} = \frac{\Delta y^4}{\frac{1}{x^5}} = \frac{x^5 \times \Delta y^4}{1} = \Delta y^4 x^5$$

حالا یک جمله‌ای‌های $\frac{1}{3}A$ ، $\frac{1}{3}B$ و C را در هم ضرب می‌کنیم و برای این کار ابتدا ضرایب عددی و سپس متغیرها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{3}A \times \frac{1}{3}B \times C = \underbrace{2x^2 y^2 \times x^3 y^4 \times \Delta y^4 x^5}_{= 1} = 1 \cdot x^2 \times x^3 \times x^5 \times y^2 \times y^4 \times y^4$$

با کمک قوانین محاسبات اعداد توان‌دار عبارت را ساده می‌کنیم:

$$x^2 \times x^3 \times x^5 = x^{2+3+5} = x^{10}$$

$$y^2 \times y^4 \times y^4 = y^{2+4+4} = y^{10}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{3}A \times \frac{1}{3}B \times C = 1 \cdot x^{10} y^{10}$$

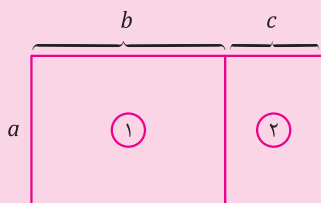
دقت کنید که می‌توانستیم ابتدا $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ را حساب کنیم و حاصل آن را در $A \times B \times C$ ضرب کنیم.

بنابراین گزینه «۱» درست است.

۱۰. گزینه ۳

برای ضرب یک جمله‌ای در چندجمله‌ای از خاصیت پخش یا توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع (تفریق) استفاده می‌کنیم:

$$a \times (b + c) = ab + ac$$



درستی این تساوی را می‌توانیم با کمک برابری مساحت‌ها نشان دهیم، فرض کنیم مستطیلی به عرض a و طول $b+c$ داریم:

اگر مساحت این مستطیل را با S نشان دهیم داریم:

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} \Rightarrow S = a(b+c) \quad (*)$$

از طرفی مساحت مستطیل بزرگ برابر است با مجموع مساحت‌های ۲ مستطیل کوچک‌تر؛ یعنی:

$$S = \underbrace{S_1}_{\text{مساحت مستطیل ۱}} + \underbrace{S_2}_{\text{مساحت مستطیل ۲}} = ab + ac \quad (**)$$

بنابراین با توجه به (*) و (**) داریم:

$$\underbrace{a}_{\text{جمله ۱}} \underbrace{(b+c)}_{\text{جمله ۲}} = ab + ac$$

توجه می‌کنیم که اگر تعداد جملات داخل پرانتز بیشتر از ۲ جمله باشد، به همان تعداد می‌توانیم مستطیل بزرگ را به مستطیل‌های کوچک‌تر تقسیم کنیم و خاصیت پخش را به کار ببریم.

از خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع (تفریق) استفاده می‌کنیم و AB ، یعنی حاصل ضرب A در B را حساب می‌کنیم:

$$AB = \cancel{8xy}^2 \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{4} \right) = \frac{8xy^2}{2} - \frac{8x^2y}{4} = 4xy^2 - 2x^2y$$

اگر در حاصل عبارت جمله‌های متشابه وجود داشت عبارت را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. در اینجا دقت می‌کنیم که xy^2 و x^2y (قسمت‌های حرفی)، یکسان نیستند پس عبارت ساده‌تر نمی‌شود.

گام ۱ (دست‌ها) قرینه هر عبارت یعنی (-1) در آن عبارت ضرب شود پس در این سؤال قرینه AB یعنی $-AB$ و داریم:

$$-AB = -(4xy^2 - 2x^2y)$$

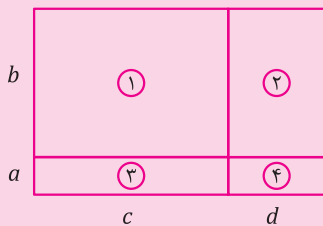
گام ۲ (دست‌ها) با استفاده از خاصیت پخش، قرینه را به دست می‌آوریم:

$$-AB = -4xy^2 + 2x^2y$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

۱۱. گزینه ۱

برای ضرب دو یا چند چندجمله‌ای در یکدیگر نیز از خاصیت پخش استفاده می‌کنیم:



$$(a+b)(c+d) = \underbrace{ac}_{\text{دو جمله}} + \underbrace{ad}_{\text{دو جمله}} + bc + bd$$

درستی تساوی را می‌توانیم با کمک برابری مساحت‌ها نشان دهیم: فرض کنیم مستطیلی به عرض $(a+b)$ و طول $(c+d)$ داریم:

اگر مساحت مستطیل بزرگ را با S نشان دهیم، داریم: $S = (a+b)(c+d)$ (*۱) = طول \times عرض

از طرفی مساحت مستطیل بزرگ برابر است با مجموع مساحت‌های ۴ مستطیل کوچک‌تر؛ یعنی:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = bc + bd + ac + ad \quad (*2)$$

بنابراین با توجه به (*۱) و (*۲) داریم: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

توجه می‌کنیم که اگر تعداد جملات داخل پرانتزها بیشتر باشد نیز با همین روش می‌توانیم مستطیل بزرگ را به مستطیل‌های کوچک‌تر تقسیم کنیم و خاصیت پخش را به کار ببریم. همچنین زمانی که تعداد پرانتزهایی که در هم ضرب می‌شوند بیشتر از دو پرانتز باشد، می‌توانیم خاصیت پخش را ابتدا برای دو پرانتز که در هم ضرب شده‌اند، به کار ببریم و سپس حاصل آن را در پرانتز بعدی ضرب کنیم و ...

گام ۱ (دست‌ها) برای حل این سؤال باید سه عبارت A و B و C را در هم ضرب کنیم. ابتدا دو عبارت را در هم ضرب کرده و سپس حاصل را در عبارت سوم ضرب می‌کنیم. توجه می‌کنیم که چون ضرب خاصیت جابه‌جایی دارد بنابراین مهم نیست با چه ترتیبی ضرب عبارت‌ها را انجام می‌دهیم. برای مثال ابتدا A و B را در هم ضرب می‌کنیم:

$$AB = (x+1)(x-1) = x^2 - \cancel{x} + \cancel{x} - 1 = x^2 - 1$$

گام ۲ (دست‌ها) اکنون حاصل AB را در پرانتز سوم ضرب می‌کنیم:

$$ABC = (x^2 - 1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

گام ۳ (دست‌ها) اگر در حاصل ABC یک جمله‌ای متشابه وجود داشت، حاصل آن را ساده‌تر می‌کنیم؛ اما در این سؤال x^3 و x^2 و $-x$ و -1 یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه هستند و بنابراین عبارت ساده‌تر نمی‌شود. بنابراین پاسخ صحیح گزینه «۱» است.

۱۲. گزینه ۳

برای پاسخ این سؤال ابتدا حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\underbrace{(a+b)}_{\text{جمله ۱}} \underbrace{(c+d)}_{\text{جمله ۲}} = ac + ad + bc + bd$$



اگر در ضرب دو جمله در دو جمله هیچ یک جمله‌ای مشترکی ایجاد نشود، حاصل ۲ جمله در ۲ جمله، ۴ جمله خواهد بود.
گام ۴ اما آیا تنها حالت گام ۱ می‌تواند اتفاق بیفتد؟ یا به عبارت دیگر آیا می‌توانیم مثالی بزینم که حاصل ضرب ۲ جمله در ۲ جمله دقیقاً ۴ جمله نشود؟

برای مثال $(x+1)(x-1)$ را در نظر می‌گیریم:

$$(x+1)(x-1) = x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1 = \underbrace{x^2 - 1}_{\text{جمله ۲}}$$

یا:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{جمله ۳}}$$

گام ۴ با توجه به گام‌های ۱ و ۲ مشخص می‌شود که ضرب ۲ جمله در ۲ جمله حداکثر ۴ جمله دارد و همان‌طور که دیدیم در حالتی که جملات متشابه باهم ساده می‌شوند، تعداد جملات کمتر از ۴ جمله می‌شود.
 بنابراین گزینه «۳» درست است.

۱۳. گزینه ۲

اگر در یک تساوی جبری، دو طرف تساوی (طرف چپ و طرف راست تساوی) به‌گونه‌ای باشند که به‌ازای هر مقدار حقیقی برای متغیرهایشان، مقدار عددی یکسانی داشته باشند، این تساوی جبری را یک **اتحاد جبری** می‌گوییم.
 باید توجه کنیم که اگر یک تساوی جبری به‌ازای بعضی از اعداد حقیقی به تساوی عددی تبدیل شود، به آن یک **معادله جبری** می‌گوییم.

گام ۱ ابتدا سعی می‌کنیم تساوی‌های جبری را تا حد امکان ساده کنیم:

گزینه ۱ $x+1=2 \xrightarrow[\text{یک را کم می‌کنیم}]{\text{دو طرف تساوی عدد}} x=1$

گزینه ۲ $x+x=2x \Rightarrow 2x=2x \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}} x=x$

گزینه ۳ $5x+y=x+5y \Rightarrow 4x=4y \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} x=y$

گام ۲ باید ببینیم هر کدام از گزینه‌ها به‌ازای چه مقدار یا مقدارهایی به تساوی عددی تبدیل می‌شوند:

- تساوی گزینه «۱» فقط برای $x=1$ برقرار است پس اتحاد نیست و معادله است.

- تساوی گزینه «۲» برای هر عدد حقیقی x برقرار است پس اتحاد است.

- تساوی گزینه «۳» برای هر دو عدد x و y که برابر باشند، برقرار است ولی برای هر عدد حقیقی برقرار نیست، مثلاً اگر $x=2$ و $y=1$ باشد، تساوی برقرار نیست پس اتحاد نیست.

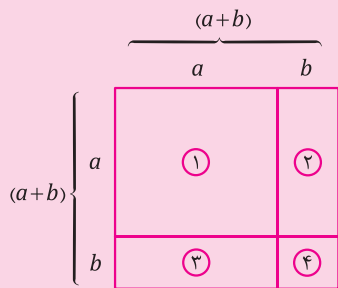
بنابراین فقط تساوی گزینه «۲» یک اتحاد است و پاسخ گزینه «۲» می‌باشد.

۱۴. گزینه ۴

فرض کنیم می‌خواهیم مربع مجموع دو جمله a و b را حساب کنیم:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ba + ab + b^2 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

به تساوی حاصل اتحاد «مربع دو جمله‌ای» می‌گوییم. درستی این اتحاد را می‌توان با کمک برابری مساحت‌ها نشان داد:



$$s = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مساحت مربع بزرگ $S =$

خودش \times یک ضلع $S =$

از طرفی داریم:

بنابراین داریم:

توجه کنیم که زمانی که می‌خواهیم درستی این اتحاد را با کمک مساحت مربع نشان دهیم، چون a و b طول اضلاع هستند، باید مقداری مثبت باشند. اما در حالت کلی اتحاد مربع دوجمله‌ای برای هر عدد حقیقی a و b برقرار است. اگر در $(a+b)^2$ ، b را به $-b$ تبدیل کنیم، داریم:

$$(a+(-b))^2 = a^2 + b^2 + 2(a)(-b) \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

گام ۴ برای به دست آوردن حاصل عبارت، ابتدا مربع‌های هر یک از دو جمله را به دست می‌آوریم:

$$\left(\underbrace{x}_{\text{جمله اول}} + \underbrace{\sqrt{2}y}_{\text{جمله دوم}} \right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x \text{ مربع} = x^2 \\ \sqrt{2}y \text{ مربع} = (\sqrt{2}y)^2 = (\sqrt{2})^2 y^2 = 2y^2 \end{cases}$$

گام ۴ دو برابر حاصل ضرب دو جمله را حساب می‌کنیم:

$$2 \times \text{جمله اول} \times \text{جمله دوم} = 2 \times x \times \sqrt{2}y = 2\sqrt{2}xy = \sqrt{2^2} \times 2xy = \sqrt{8}xy$$

گام ۴ مجموع مربع‌های هر جمله را با دو برابر حاصل ضرب دو جمله به دست می‌آوریم:

$$(x + \sqrt{2}y)^2 = x^2 + 2y^2 + \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}xy$$

بنابراین گزینه «۴» درست است.

۱۵. گزینه ۲

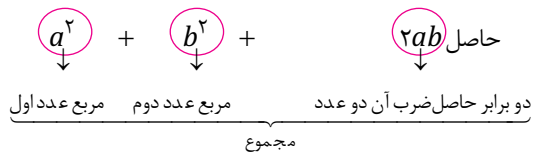
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

گام ۴ اتحاد مربع دوجمله‌ای را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

گام ۴ طرف چپ تساوی را با توجه به اولویت‌های اعمال حسابی به زبان کلامی (فارسی) می‌نویسیم.

ابتدا باید دو عدد a و b جمع شوند (داخل پرانتز) و سپس به توان دو برسد.

گام ۴ طرف راست تساوی را نیز با توجه به اولویت‌های اعمال حسابی به زبان کلامی (فارسی) می‌نویسیم:



پس با توجه به گام ۲ و ۳ و برابر بودن دو طرف تساوی داریم: مربع مجموع دو عدد برابر است با مجموع مربع‌های دو عدد به علاوه دو برابر حاصل ضرب آن دو عدد؛ بنابراین گزینه «۲» درست است.

توجه کنید که اگر بخواهیم گزینه‌های «۱» و «۳» را به صورت کلامی بنویسیم، داریم:

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \times$$

گزینه ۱

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad \times$$

گزینه ۳

که هر دو آن‌ها نادرست هستند (می‌توانیم برای a و b عددی جایگزین کنید و ببینیم که تساوی برقرار نیست).

گزینه ۳ .۱۶

گام ۱: حاصل $(x+y)^2$ را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آوریم:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

گام ۲: حاصل $(x-y)^2$ را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آوریم:

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

گام ۳: قرینه $(x-y)^2$ را با خاصیت پخشی به دست می‌آوریم و با حاصل گام اول جمع می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2 + 2xy = 4xy$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

گزینه ۴ .۱۷

روش اول

گام ۱: ابتدا رابطه‌ای برای مساحت قسمت هاشور خورده با توجه به شکل می‌نویسیم:

(مساحت مربع به ضلع $(x-y)$) - (مساحت مربع به ضلع $(x+y)$) = مساحت قسمت هاشور خورده

گام ۲: این رابطه را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

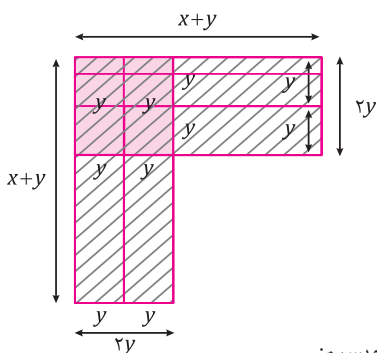
$$(x+y)^2 - (x-y)^2$$

گام ۳: با کمک اتحادها حاصل را محاسبه می‌کنیم:

$$= x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 + y^2 - 2xy) = x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2 + 2xy = 4xy$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

روش دوم



گام ۱: با توجه به قسمت هاشور خورده روی شکل می‌توانیم رابطه دیگری برای مساحت آن بنویسیم:

$$2y(x+y) + 2y(x+y) - (y^2 + y^2 + y^2 + y^2)$$

این قسمت ۲ بار در محاسبه مساحت در نظر گرفته شده بود و به همین دلیل یک بار تفریق انجام شد.

گام ۲: با خاصیت پخش ساده می‌کنیم:

$$= 2yx + 2y^2 + 2yx + 2y^2 - 4y^2$$

$$= 4yx + 4y^2 - 4y^2 = 4yx$$

گام ۳: بنابراین تساوی زیر برای مساحت هاشور خورده برقرار است:

$$2y(x+y) + 2y(x+y) - (y^2 + y^2 + y^2 + y^2) = 4xy$$

$$2 \times 2y(x+y) - 4y^2 = 4xy \Rightarrow 4y(x+y) - 4y^2 = 4xy$$

بنابراین گزینه «۴» درست است.

گزینه ۳ ۱۸.

اتحاد مربع سه جمله‌ای ابتدا حاصل مربع سه جمله‌ای را به دست می‌آوریم:

$$(a+b+c)^2 = \underbrace{(a+b+c)}_{\text{جمله ۳}} \underbrace{(a+b+c)}_{\text{جمله ۳}}$$

$$= a^2 + \underbrace{ab}_{\times} + \underbrace{ac}_{\times} + \underbrace{ba}_{\times} + b^2 + \underbrace{bc}_{\times\times} + \underbrace{ca}_{\times\times} + \underbrace{cb}_{\times\times} + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc (*)$$

در اتحاد مربع سه جمله‌ای، در عبارت $(a+b+c)^2$ ، به جای b ، $-b$ و به جای c ، $-c$ می‌گذاریم و حاصل را به دست می‌آوریم:

$$(a+(-b)+(-c))^2 = a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + 2a(-b) + 2a(-c) + 2(-b)(-c)$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

گام ۴ حاصل را ساده می‌کنیم:

بنابراین گزینه «۳» درست است.

گزینه ۲ ۱۹.

اگر حاصل ضرب $(a+b)(a-b)$ را حساب کنیم، داریم:

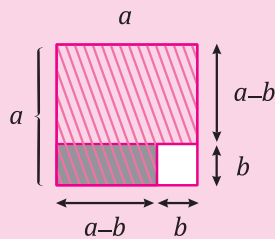
$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

به تساوی جبری $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ اتحاد مزدوج می‌گویند. اتحاد مزدوج را

به صورت عبارت کلامی می‌توان به صورت زیر نوشت:

حاصل جمع عدد اول به اضافه عدد دوم ضربدر حاصل تفریق عدد اول منهای عدد دوم برابر است با مربع عدد اول منهای مربع عدد دوم.

اگر بخواهیم با کمک مساحت، درستی اتحاد مزدوج را بررسی کنیم، فرض کنیم $a > b$ باشد (برای این که طول اضلاع عددی مثبت هستند) و $(a+b)(a-b)$ را می‌توانیم مساحت مستطیلی به اضلاع $(a+b)$ و $(a-b)$ در نظر بگیریم:



با توجه به شکل مساحت مستطیل هاشورخورده در این حالت برابر است با:

$$S_1 = (a+b)(a-b)$$

از طرفی می‌توانیم $a^2 - b^2$ ، $(a > b)$ ، را مساحت مربعی به ضلع a منهای مساحت مربعی به ضلع b در نظر بگیریم:

$$a = a + 0 = a + b - b = a - b + b$$

مساحت قسمت هاشورخورده در شکل برابر است با:

$$S_2 = a^2 - b^2$$

با توجه به مقایسه دو شکل، می‌بینیم که مساحت قسمت هاشورخورده در دو شکل با هم برابر است؛ بنابراین برابری $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ واضح است. برای مشاهده این برابری با کمک شکل کافیت نوار مستطیلی شکل با طول

$a-b$ و عرض b به سمت راست مستطیل با طول a و عرض $a-b$ انتقال داده شود.

گام ۵ مربع جمله اول و مربع جمله دوم را به دست می‌آوریم:

$$16x^2 = (4x)^2 = \text{مربع جمله اول} \Rightarrow 4x = \text{جمله اول}$$



$$2 = (\sqrt{2})^2 = \text{مربع جمله دوم} \Rightarrow \sqrt{2} = \text{جمله دوم}$$

با توجه به اتحاد مزدوج مربع جمله اول را منهای مربع جمله دوم می‌کنیم:

$$(4x - \sqrt{2})(4x + \sqrt{2}) = 16x^2 - 2$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

۲۰. گزینه ۴

ما می‌خواهیم بدون این که مستقیماً ضرب کنیم، حاصل را به دست آوریم:

$$102 = 100 + 2$$

$$98 = 100 - 2$$

می‌توانیم ۱۰۲ و ۹۸ را به صورت زیر بنویسیم:

ما $a = 100$ و $b = 2$ را انتخاب می‌کنیم.

ما با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\underbrace{(100+2)}_{a+b} \underbrace{(100-2)}_{a-b} = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

۲۱. گزینه ۴

درستی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱ با کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

با توجه به فرض مسئله که $a+b=1$ است، داریم:

$$a^2 - b^2 = a - b$$

از دو طرف تساوی a را کم می‌کنیم:

$$a^2 - b^2 - a = \cancel{a} - b - \cancel{a} \Rightarrow a^2 - b^2 - a = -b$$

و حالا به دو طرف تساوی b^2 را اضافه می‌کنیم:

$$a^2 - \cancel{b^2} - a + \cancel{b^2} = -b + b^2 \Rightarrow a^2 - a = b^2 - b$$

پس گزینه «۱» درست است.

گزینه ۲ برای این که ببینیم گزینه «۲» درست است یا نه، طرف چپ تساوی را با کمک خاصیت پخش ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a(a+1) + b(b+1) &= a^2 + a + b^2 + b = a^2 + b^2 + \underbrace{a+b}_1 \\ &= a^2 + b^2 + 1 \xrightarrow{(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2} \underbrace{(a+b)^2}_1 - 2ab + 1 = 2 - 2ab \end{aligned}$$

حالا طرف راست تساوی گزینه «۲» را ساده می‌کنیم.

$$2(1-ab) = 2 - 2ab$$

پس طرف راست تساوی با طرف چپ تساوی برابر شد و گزینه «۲» نیز درست است.

گزینه ۳ چون $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b) \Rightarrow a^2 - b^2 = a - b$ اگر به هر دو طرف تساوی $b + b^2$ را اضافه کنیم، داریم:

$$a^2 - \cancel{b^2} + \underbrace{b + \cancel{b^2}} = a - \cancel{b} + \underbrace{\cancel{b} + b^2} \Rightarrow a^2 + b = a + b^2$$

پس گزینه «۳» نیز درست است.

بنابراین گزینه «۴» درست است.

۲۲. گزینه ۴

اتحادی که از حاصل ضرب $(x+a)(x+b)$ به دست می‌آید، اتحاد جمله مشترک نامیده می‌شود، چون همان‌طور که دیده می‌شود، در دو پرانتز، یک جمله مشترک است.

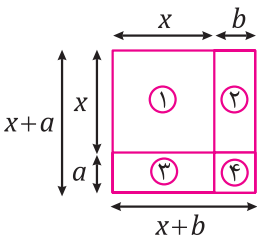
$$(a+b+c)^2 = \underbrace{(a+b+c)}_{\text{جمله ۳}} \underbrace{(a+b+c)}_{\text{جمله ۳}}$$

اتحاد جمله مشترک را می‌توانیم به صورت کلامی زیر بنویسیم:
حاصل ضرب دو عبارت دو جمله‌ای که در یک جمله مشترک هستند برابر است با مربع جمله مشترک، به علاوه مجموع جمله‌های غیرمشترک، ضربدر جمله مشترک، به علاوه حاصل ضرب دو جمله غیرمشترک.

گام ۴ ابتدا طرف چپ تساوی را به صورت هندسی تفسیر می‌کنیم:

طرف چپ تساوی $(x+a)(x+b)$

$\Rightarrow S = (y+b)$ مساحت مستطیل به طول $(x+a)$ و عرض



گام ۴ شکلی برای طرف چپ تساوی رسم می‌کنیم:

گام ۴ با توجه به تقسیم‌بندی‌های ایجاد شده روی شکل، مساحت مستطیل بزرگ برابر است با مساحت چهار مستطیل کوچک؛ بنابراین داریم:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = x^2 + xb + xa + ab = x^2 + x(b+a) + ab$$

بنابراین گزینه «۴» درست است.

۲۳. گزینه ۳

گام ۳ فرم کلی اتحاد جمله مشترک را می‌نویسیم و جمله‌های غیرمشترک را مشخص می‌کنیم:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

جمله‌های غیرمشترک a و b هستند.

گام ۳ چون جمله‌های غیرمشترک قرینه یکدیگر هستند پس در اتحاد جمله مشترک قرار می‌دهیم $b = -a$ و داریم:

$$(x+a)(x+(-a)) = x^2 + \underbrace{(a+(-a))}_0 x + a \times (-a)$$

گام ۳ با ساده کردن رابطه گام ۲ متوجه می‌شویم که اتحاد مزدوج به دست می‌آید:

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.


۲۴. گزینه ۱

گام ۳ فرم کلی اتحاد جمله مشترک را می‌نویسیم و جمله‌های غیرمشترک را مشخص می‌کنیم:


$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

جمله‌های غیرمشترک a و b هستند.



کام  چون جمله‌های غیرمشترک برابر هستند پس $b = a$ را جایگزین می‌کنیم:

$$(x+a)(x+a) = x^2 + (a+a)x + a^2$$

کام  با توجه به فرم ساده شده، متوجه می‌شویم که اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آید:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.


۲۵. گزینه ۴

یکی از کاربردهای فاکتورگیری و تجزیه عبارت‌های جبری، حل معادلات است.

اگر یک عبارت جبری را به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسیم، می‌گوییم آن عبارت جبری را تجزیه کرده‌ایم. یکی از روش‌هایی که می‌توانیم یک عبارت جبری را تجزیه کنیم، فاکتورگیری است. برای فاکتورگیری، ابتدا باید عاملی که در همه جملات مشترک است را پیدا کنیم.

در حالت کلی، برای این کار، بزرگ‌ترین شمارنده مشترک بین آن جمله‌ها را پیدا می‌کنیم و آن را بیرون پرانتز می‌نویسیم سپس هر کدام از جملات عبارت جبری را بر عامل فاکتورگیری تقسیم می‌کنیم و درون پرانتز می‌نویسیم و یک جمله‌ای‌های داخل پرانتز را با هم جمع می‌کنیم.

کاربردهای فاکتورگیری در ساده کردن عبارت‌های جبری و حل بعضی معادلات می‌باشد.


کام  ب.م.م $4x$ و $16x^3$ را به دست می‌آوریم:

یادآوری: برای به دست آوردن ب.م.م دو یا چند عبارت، ابتدا اعداد را به پایه‌های اول تجزیه می‌کنیم و در متغیرهایشان ضرب می‌کنیم سپس عوامل مشترک بین آن‌ها را با کمترین توان می‌نویسیم.
به عنوان مثال:

$$4x = 2^2 x^1$$

$$16x^3 = 2^4 x^3$$


$$(4x, 16x^3) = 2^2 x^1 = 4x$$

کام  برای فاکتورگیری، از ب.م.م بین دو عبارت فاکتور می‌گیریم:

$$16x^3 - 4x = 4x(4x^2 - 1) = 0$$

کام  عبارت داخل پرانتز را می‌توانیم با اتحاد مزدوج تجزیه کنیم:

$$4x(4x^2 - 1) = 4x(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

کام  با توجه به این که حاصل ضرب چند عبارت زمانی صفر است که حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد. برای به دست آوردن همه جواب‌های معادله کفایت هر کدام از عبارت‌هایی که در هم ضرب شده‌اند را مساوی صفر قرار دهیم.

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه «۴» درست است.

۲۶. گزینه ۳

با کمک اتحادها می‌توانیم عبارت‌های جبری را تجزیه کنیم یعنی به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسیم. برای تجزیه باید به فرم کلی یک اتحاد توجه کنیم و در صورت مطابق بودن با اتحادی مشخص، طرف دیگر تساوی که به صورت ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای می‌باشد بنویسیم. با کمک اتحاد مزدوج می‌توان تفریق دو مقدار (عبارت) را به صورت حاصل ضرب دو عبارت نوشت. همین‌طور برای ساده‌سازی انجام برخی محاسبات می‌توان از اتحادهای جبری کمک گرفت:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

تفریق دو عبارت حاصل ضرب دو عبارت

گام ۳ چون تفاضل مربع‌های دو عدد را داریم، به یاد اتحاد مزدوج می‌افتیم؛ در واقع داریم:

$$a^2 - b^2 = 1050^2 - 950^2$$

گام ۴ با توجه به گام ۱ مشخص می‌شود که:

$$a = 1050, b = 950$$

گام ۵ با استفاده از اتحاد مزدوج حاصل را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = \underbrace{(1050+950)}_{2000} \underbrace{(1050-950)}_{100} = 2000 \times 100 = 200000$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

۲۷. گزینه «۱»

گام ۱ ابتدا توجه می‌کنیم که x^2 مربع x و $4x + 4$ مربع 2 است و دو برابر حاصل ضرب $2 \times x$ برابر است با $4x$ پس می‌توانیم عبارت بالا را به دو بخش زیر تفکیک کنیم:

$$\text{عبارت} = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{بخش اول}} - \underbrace{y^2}_{\text{بخش دوم}}$$

گام ۲ $x^2 + 4x + 4$ را با کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

گام ۳ حالا باید ببینیم آیا می‌توانیم عبارت $(x+2)^2 - y^2$ را تجزیه کنیم؟ پاسخ مثبت است چون می‌توانیم از اتحاد مزدوج استفاده کنیم:

$$(x+2)^2 - y^2 = (x+2+y)(x+2-y)$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

۲۸. گزینه ۲

گام ۱ سعی می‌کنیم با توجه به شکل عبارت $x^2 - 2x - 15$ ببینیم از بین اتحادهای معروف جبری یعنی اتحاد مربع دوجمله‌ای، مربع سه‌جمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک و ... کدام را می‌توانیم انتخاب کنیم.

گام ۲ حاصل عبارت اتحاد مزدوج از تفاضل مربع‌های دو عبارت تشکیل شده است ولی اینجا سه جمله داریم پس نمی‌توانیم از اتحاد مزدوج کمک بگیریم. همین‌طور با شکل اتحاد مربع دوجمله‌ای و مربع سه‌جمله‌ای نیز تطابق ندارد اما می‌توانیم از اتحاد جمله مشترک استفاده کنیم.

گام ۳ توجه می‌کنیم که فرم کلی اتحاد جمله مشترک به صورت زیر است:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

جمله مشترک \times مجموع جملات غیرمشترک



پس با تطبیق دادن $x^2 + (a+b)x + ab$ و $x^2 - 2x - 15$ نتیجه می‌گیریم که برای تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک باید دو عدد را پیدا کنیم که ضرب آن‌ها (-15) و جمع آن‌ها (-2) شود. واضح است که داریم:

$$-15 = (-5) \times 3$$

$$-2 = (-5) + (3)$$

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

پس آن دو عدد -5 و 3 هستند یعنی:

بنابراین گزینه «۲» درست است.

گزینه ۲ .۲۹

اگر بخواهیم از اتحاد جمله مشترک استفاده کنیم، $6x^2$ مربع کامل نیست؛ بنابراین فرض می‌کنیم:

$$A = 6x^2 + 13x + 5$$

اکنون هر دو طرف تساوی بالا را در 6 ضرب می‌کنیم تا $6x^2$ به $36x^2$ تبدیل شود:

$$6A = 6(6x^2 + 13x + 5)$$

$$6A = 36x^2 + 6 \times 13x + 6 \times 5$$

$$6A = 36x^2 + 13 \times 6x + 30$$

$$6A = (6x)^2 + 13 \times (6x) + 30$$

با توجه به گام ۱، جمله مشترک $6x$ است پس با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$6A = (6x + 10)(6x + 3)$$

توجه می‌کنیم که:

$$10 \times 3 = 30, \quad 10 + 3 = 13$$

هدف ما تجزیه عبارت A بود پس باید دوباره هر دو طرف را بر 6 تقسیم کنیم:

$$A = \frac{(6x + 10)(6x + 3)}{6}$$

در پرانتز اول از 2 و در پرانتز دوم از 3 می‌توانیم فاکتور بگیریم:

$$A = \frac{\cancel{2} \times (3x + 5) \times \cancel{3} (2x + 1)}{\cancel{2} \times \cancel{3}} = (3x + 5)(2x + 1)$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

گزینه ۱ .۳۰

با توجه به تجزیه $6x^2 + 13x + 5 = 0$ که در سؤال قبل توضیح داده شده داریم:

$$6x^2 + 13x + 5 = (2x + 1)(3x + 5) = 0$$

برای به دست آوردن یکی از جواب‌ها، پرانتز اول را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

برای به دست آوردن جواب دوم، معادله پرانتز دوم را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

۳۱. گزینه ۱

هر گاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a < b$ ، آنگاه عدد حقیقی مثبتی مانند c وجود دارد به طوری که

$$a + c = b$$

با توجه به مفهوم نابرابری گزینه «۱» درست است و گزینه «۲» نادرست می‌باشد. برای نادرست بودن گزینه «۲» کافی است یک مثال بزنیم. اگر $2 < 3$ باشد آنگاه عدد یک موجود است که این نابرابری را تبدیل به تساوی می‌کند:

$$2 + 1 = 3$$

در صورتی که گزینه «۲» می‌گوید هیچ عدد حقیقی مثبتی وجود ندارد پس نادرست است.

فرض کنیم $a < b$ باشد:

- اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد حقیقی مثبتی ($c \in \mathbb{R}, c > 0$) ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار می‌ماند یعنی

$$ac < bc$$

- اما اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد حقیقی منفی ($c \in \mathbb{R}, c < 0$) ضرب کنیم، داریم $ac > bc$.

بنابر ویژگی‌های نابرابری، گزینه «۳» نادرست است. برای مثال اگر $2 < 3$ ، طرفین نابرابری را در $(+2)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$4 < 6$$

و اگر طرفین نابرابری را در (-2) ضرب کنیم، داریم:

$$-4 > -6$$

پس گزینه «۴» نیز نادرست است و پاسخ درست گزینه «۱» است.

۳۲. گزینه «۲»

فرض کنیم a و b و c ، سه عدد حقیقی باشند:

اگر طرفین یک نابرابری را با عددی حقیقی مانند c جمع کنیم، نابرابری همچنان برقرار می‌ماند؛ یعنی اگر $a < b$ آنگاه $a + c < b + c$. بایستی توجه کنیم که عدد حقیقی c می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

با توجه به ویژگی‌های نابرابری‌ها گزینه «۱» درست است. برای گزینه «۲» توجه می‌کنیم که برای مثال اگر $2 < 4$ باشد، $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ است؛ بنابراین گزینه «۲» نادرست است.

برای گزینه «۳»، اگر حاصل ضرب دو عدد مثبت باشد، آن دو عدد یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی هستند، زیرا داریم:

$$(+)\times(+)=+$$

$$(-)\times(-)=+$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

گزینه «۴» نیز درست است، چون مجذور یا مربع یا توان دوم هر عدد حقیقی نامنفی است؛ بنابراین اگر $a^2 b^2 c < 0$ باشد، اولاً $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ است چون اگر حداقل یکی از a و b و c برابر با صفر باشد، حاصل صفر می‌شود. ثانیاً وقتی $a \neq 0$ و $b \neq 0$ باشد، $a^2 > 0$ و $b^2 > 0$ است پس چاره‌ای نیست که c عددی منفی باشد.

$$\underbrace{a^2 b^2}_c < 0$$

منفی \times مثبت

بنابراین عبارت گزینه «۲» درست نیست و پاسخ سؤال است.



هر نابرابری (نامساوی) بین دو عبارت جبری، شامل یک متغیر را نامعادله یک مجهولی می‌گوییم و اگر درجه نسبت به آن متغیر یک باشد، آن را نابرابری (نامعادله) یک مجهولی درجه اول می‌نامیم.

با توجه به ویژگی‌های نابرابری‌ها، مجموعه جواب را به دست می‌آوریم. ابتدا دو طرف نابرابری را در ک.م.م.مخرج‌ها یعنی $16 = [8, 16]$ ضرب می‌کنیم. چون ۱۶ مثبت است، نابرابری همچنان برقرار می‌ماند:

$$\cancel{16} \times \left(\frac{8-x}{\cancel{16}} \right) \geq \cancel{16} \left(\frac{2+x}{8} \right)$$

$$8-x \geq 2(2+x)$$

$$8-x \geq 4+2x$$

از دو طرف نابرابری عدد ۸ را کم می‌کنیم:

$$\cancel{8} - x - \cancel{8} \geq \overbrace{4+2x-8}^{-4}$$

$$-x \geq -4+2x$$

از دو طرف نابرابری $2x$ را کم می‌کنیم:

$$-x-2x \geq -4 + \cancel{2x} - \cancel{2x}$$

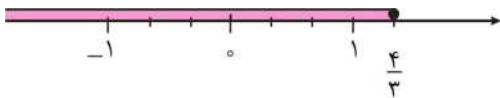
$$-3x \geq -4$$

دو طرف نابرابری را به عدد -3 تقسیم می‌کنیم و چون این عدد منفی است، جهت نابرابری تغییر می‌کند و داریم:

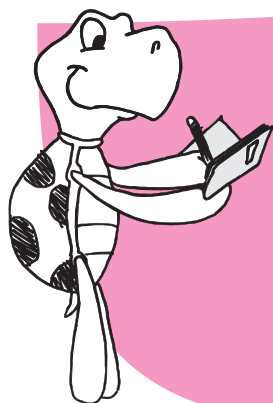
$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-4}{-3}$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

بنابراین همه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی $\frac{4}{3}$ جواب نامعادله است.



بنابراین گزینه «۲» درست است.



تست‌های تمرینی

فصل ۵

۱. کدام یک از عبارتهای زیر یک جمله‌ای است؟

(۱) $3x^2y^2 - 4y^2x^3$ (۲) $\frac{3}{x^2y^2}$ (۳) $\sqrt[3]{27x^4y^3}$ (۴) $\frac{1}{y}$

۲. ضریب عددی $(\frac{x}{4-2})^4$ چیست؟

(۱) 2^{16} (۲) 2^{-16} (۳) 16^3 (۴) -16^4

۳. یک جمله‌ای $\frac{1}{\pi}x^2y$ با کدام یک از گزینه‌های زیر متشابه نیست؟

(۱) $\frac{xyx}{2}$ (۲) $-2yx^2$ (۳) $\frac{\sqrt{3}x^2y^2}{x^2y^2}$ (۴) $\frac{x^4y^2}{-5x^2y}$

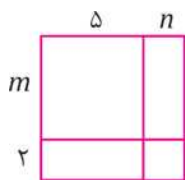
۴. اگر درجه یک جمله‌ای $7x^{2-3n}y^{4+5n}$ نسبت به x و y برابر با ۱۸ باشد، آنگاه n کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۴

۵. درجه یک جمله‌ای $(\frac{a^x b^3}{c^{-2} \times d^{-4}}) \times (\frac{c^y}{ab^2})$ نسبت به متغیرهای a و b و c و d چند است؟

(۱) ۳ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

۶. اگر مساحت مستطیل زیر به صورت $xmn + ym + zn + w$ باشد، با توجه به شکل x و y و z و w برابر با کدام گزینه است؟



(۱) $x=1$ و $y=2$ و $z=5$ و $w=10$

(۲) $x=1$ و $y=5$ و $z=2$ و $w=10$

(۳) $x=2$ و $y=10$ و $z=5$ و $w=1$

(۴) $x=2$ و $y=5$ و $w=1$ و $z=10$

۷. درجه $(a+b)^2$ به ترتیب نسبت به متغیر a ، نسبت به متغیر b و نسبت به متغیرهای a و b (از راست به چپ) چند است؟

(۱) ۱ و ۱ و ۲ (۲) ۲ و ۲ و ۱ (۳) ۲ و ۲ و ۲ (۴) ۱ و ۱ و ۱

۸. کدام یک از عبارتهای زیر همیشه درست است؟

(۱) جمع دو یک جمله‌ای، بیشتر از یک جمله دارد.

(۲) ضرب دو یک جمله‌ای، یک چندجمله‌ای با بیش از یک جمله است.

(۳) ضرب تعداد متناهی یک جمله‌ای، یک جمله دارد.

(۴) هیچ کدام



۹. اگر x یک عدد طبیعی باشد حاصل عبارت $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ برابر با چند تا از اعداد زیر می تواند باشد؟

۰, ۴۲۰, ۴۰۰, ۴۵۱, ۰

(۱) یکی (۲) دو تا (۳) سه تا (۴) هیچی

۱۰. a و b دو عدد هستند به طوری که تساوی زیر اتحاد شده است. مقدار $a+b$ برابر است با:

$$4 + 2x^2 - x^3 = a(x-2) + b(x-2)^2 - (x-3)^3 + 3$$

(۱) -۸ (۲) -۱۴ (۳) ۸ (۴) ۱۴

۱۱. با توجه به تساوی $(3x - \dots)^2 = \dots - 3x + \dots$ کدام گزینه درست است؟

(۱) $(3x-1)^2 = 9x^2 - 3x + 1$ (۲) $(3x - \frac{1}{3})^2 = 9x^2 - 3x + \frac{1}{9}$

(۳) $(3x-2)^2 = 9x^2 - 3x + 4$ (۴) $(3x - \frac{1}{4})^2 = 9x^2 - 3x + \frac{1}{16}$

۱۲. حاصل $(x+y)^2 + (x-y)^2$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $2x^2 + 2y^2$ (۲) x^2 (۳) $x^2 + y^2 + 4xy$ (۴) $2x^2 + 2y^2 + 4xy$

۱۳. اگر $a + \frac{1}{a} = \sqrt{5}$ باشد، حاصل $a^2 + \frac{1}{a^2}$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۱

۱۴. اگر $x + \frac{1}{x+1} = 3$ باشد حاصل $(x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2}$ کدام است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۱۵. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

(۱) اگر $a^2 > b^2$ ، آنگاه $a > b$ (۲) اگر $a, b > 0$ و $a^2 > b^2$ ، آنگاه $a > b$

(۳) اگر $ab > 0$ و $a^2 > b^2$ ، آنگاه $a > b$ (۴) اگر $ab < 0$ و $a^2 > b^2$ ، آنگاه $a > b$

۱۶. اگر $a^2 + 2bc = 4$ و $b^2 + 2ac = 3$ و $c^2 + 2ab = 9$ باشد، آنگاه $a+b+c$ برابر با کدام یک از عددهای زیر می تواند باشد؟

(۱) ۷ (۲) ۶ (۳) -۵ (۴) -۴

۱۷. کدام عبارت جبری در $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ضرب شود تا حاصل برابر با $a^2 - b^2$ شود؟ ($a, b \geq 0$)

(۱) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a+b)$ (۲) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a+b)$

(۳) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a-b)$ (۴) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a-b)$

۱۸. عبارت $(3x^2 - x - 2)(3x^2 - x + 1)$ برابر با کدام عبارت زیر است؟

(۱) $9x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x + 2$ (۲) $9x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x - 2$

(۳) $(3x^2 - x) - 2 - (3x^2 - x)$ (۴) گزینه های «۲» و «۳»

۱۹. در تجزیه عبارت $4x^4 + 4x^2 - 3$ کدام عامل وجود ندارد؟

(۱) $\sqrt{2}x - 1$ (۲) $\sqrt{2}x + 1$ (۳) $2x^2 + 3$ (۴) $2x^2 - 3$

۲۰. حاصل عبارت $(x^2 - 3x)(x^2 + x)$ برابر است با:

(۱) $x^4 + 2x^3 - 3x^2$ (۲) $x^4 - 2x^3 + 3x^2$ (۳) $x^4 + 2x^3 - 3x^2$ (۴) $x^4 - 2x^3 - 3x^2$

۲۱. اگر عبارت $x^3 + 4x^2 - 21x$ را تا جای ممکن تجزیه کنیم مجموع چند جمله‌ای‌های به دست آمده کدام گزینه است؟

(۱) $4x - 21$ (۲) $3x + 4$ (۳) $x^2 - 21$ (۴) $2x - 4$

۲۲. جواب‌های معادله $x^2 + 3 = 0$ چیست؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ (۴) این معادله هیچ جوابی در مجموعه اعداد حقیقی ندارد.

۲۳. جواب‌های معادله $x^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0$ چیست؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$

(۳) $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ (۴) این معادله در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد.

۲۴. جواب‌های معادله $x(x + \sqrt{2})(x - \pi) = 0$ چیست؟

(۱) $\pi, \sqrt{2}$ (۲) $\pi, -\sqrt{2}$ (۳) $0, \pi, \sqrt{2}$ (۴) $0, \pi, -\sqrt{2}$

۲۵. a و c عددهایی صحیح هستند. کدام عبارت جبری به ازای همه مقادیر a و c ، عددی صحیح و زوج است؟

(۱) $8a + 2ac$ (۲) $3a + 2c$ (۳) $2a + c$ (۴) $ac + a^2$

۲۶. اگر $2ac + bd - 2ad - bc = 90$ و $c - d = 15$ حاصل $2a + d - b - c$ چند است؟

(۱) ۹ (۲) ۲۱ (۳) -۲۱ (۴) -۹

۲۷. ساده شده عبارت $2(2a + 3b)^2 - 7(2a + 3b)^2 + 4(2a + 3b)^2$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $4a^2 + 9b^2 + 12ab - (2a + 3b)^2$ (۲) $4a^2 + 9b^2$

(۳) $-4a^2 - 9b^2 - 12ab$ (۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۲۸. مقدار عددی عبارت $\sqrt{a^5 - 4a^3b^2}$ به ازای $a = 5$ و $b = 2$ کدام است؟

(۱) $3\sqrt{125}$ (۲) $15\sqrt{5}$ (۳) $75\sqrt{5}$ (۴) گزینه‌های «۱» و «۲»

۲۹. عبارت $x^2 - 7x + 12$ برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) $(x + 3)(x - 4)$ (۲) $(x - 3)(x - 4)$ (۳) $(x + 3)(x + 4)$ (۴) $(x - 3)(x + 4)$

۳۰. کدام یک از تساوی‌های زیر درست نیست؟

(۱) $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ (۲) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

(۳) $4x^2 + 12x + 5 = (2x + 5)(2x + 1)$ (۴) $4x^2 + 12x + 5 = (2x + 2)(2x + 3)$

۳۱. اگر $z - \frac{1}{z} = \sqrt{7}$ ، حاصل $z^2 - \frac{1}{z^2}$ با شرط $z > 0$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{49}$ (۲) $-\sqrt{49}$ (۳) $\sqrt{77}$ (۴) $-\sqrt{77}$



۳۲. مجموع همه جواب‌های معادله $(x^2 + 9x + 21)^3 x^2 + 5x + 2 = 1$ چیست؟

(۱) $-\frac{32}{3}$ (۲) -9 (۳) -10 (۴) $-\frac{23}{2}$

۳۳. اگر بدانیم $\frac{a}{c} < 0$ است کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $b^2 + 4ac > 0$ (۲) $b^2 + 4ac < 0$ (۳) $b^2 - 4ac > 0$ (۴) $b^2 - 4ac < 0$

۳۴. شخصی هنگام حل نامعادله $-5x > -25$ مسیر عجیب زیر را طی کرده و به نامساوی اشتباه $0 > 5$ رسیده است. در کدام مرحله از استدلال، اشتباه صورت گرفته است؟

- ۱) $-5x > -25$
- ۲) $x^2 - 5x > x^2 - 25$
- ۳) $x(x-5) > (x-5)(x+5)$
- ۴) $x > x+5$
- ۵) $0 > 5$

(۱) ۴ به ۵ (۲) ۳ به ۴ (۳) ۲ به ۳ (۴) ۱ به ۲

۳۵. جواب نامعادله $-2x + 4 \leq -2x + 4 \leq 3x - 2 \leq -2x + 1$ به صورت $a \leq x \leq b$ است. حاصل $b - a$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) 5 (۴) 6

۳۶. مجموعه جواب نامعادله $\frac{1-2x}{3} - \frac{2x-1}{2} \geq 2$ برابر است با:

(۱) $x \geq -\frac{7}{10}$ (۲) $x \leq -\frac{7}{10}$ (۳) $x \geq -\frac{9}{10}$ (۴) $x \leq -\frac{9}{4}$

۳۷. اگر $x \in \mathbb{N}$ و $x \geq 2$ باشد، نامعادله $\frac{x}{-x+1} \leq \frac{2}{3}$ چند جواب دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۳۸. معادله جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را با نام همان معادله جای‌گذاری می‌کنیم. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

$A: 1 + |x| \leq 2$

$B: 2 + |x| \geq 2$

$C: 3 + x \leq 6$

$D: 4 + x \geq 7$

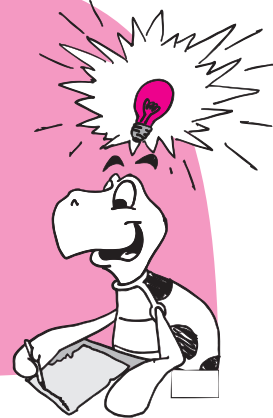
(۱) $B \cap A = \emptyset$ (۲) $C \subset B$ (۳) $D \subset B$ (۴) $C \cap B = \emptyset$





آزمون جامع ۱

(فصل ۵)



۱. کدام یک از عبارتهای زیر یک جمله‌ای نیست؟

(۱) π^x (۲) $|x|$ (۳) $\frac{1}{x^2}$ (۴) همه موارد

(حلی ۹۵-۹۶)

۲. درجه کدام یک از چندجمله‌ای‌های زیر نسبت به x و y برابر با ۵ است؟

(۱) $xy^3 - 3x^2y^4 - x^2y$ (۲) $x^2y^3 + 4x^3y^2 - x^5y$
 (۳) $xy^5 + 3x^2y^3 + 5x^4y$ (۴) $xy^4 - 3x^2y^2 - x^4y$

(حلی ۹۰-۹۱)

۳. اگر تساوی $(x-1)^2 + (2x-1)(2x+K) = 5x^2 + 2x - 2$ یک اتحاد باشد، مقدار K کدام است؟

(x متغیر و K عددی ثابت است)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(حلی ۹۵-۹۶)

۴. $(\sqrt{2}+1)^{22}(\sqrt{2}-1)^{20}$ برابر با کدام است؟

(۱) $2+3\sqrt{2}$ (۲) $1+4\sqrt{2}$ (۳) $(\sqrt{2}+1)^{22}$ (۴) $3+2\sqrt{2}$

(حلی ۹۵-۹۶)

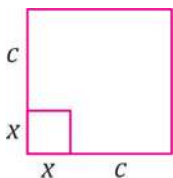
۵. کدام یک از گزینه‌های زیر برابر با حاصل عبارت $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$ است؟

(۱) $14+2\sqrt{6}$ (۲) $12+2\sqrt{6}$ (۳) $14+4\sqrt{6}$ (۴) $12+4\sqrt{6}$

۶. در شکل روبه‌رو، دو ضلع مربعی به ضلع x واحد، روی ضلع‌های مربعی بزرگ‌تر قرار گرفته‌اند. هر ضلع مربع بزرگ‌تر C واحد

(حلی ۹۰-۹۱)

بلندتر از x است. مساحت مربع بزرگ چند واحد بیشتر از مساحت مربع کوچک است؟



(۱) $c^2 - x^2$
 (۲) $c^2 + 2xc$
 (۳) $(x+c)^2$
 (۴) $4c + c^2$

(حلی ۹۷-۹۸)

۷. اگر $a < b < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$ کدام است؟

(۱) $b-a$ (۲) $-a-b$ (۳) $-2b$ (۴) $-2a$

(حلی ۹۸-۹۹)

۸. اگر $\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} = 6$ باشد، حاصل $\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۰

(حلی ۹۹-۰۰)

۹. اگر $a^2 > b^2$ و $a < b$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $|a-b| + |a+b|$ برابر با کدام است؟

- (۱) $-2b$ (۲) $-2a - 2b$ (۳) $-2a$ (۴) $2b - 2a$

(حلی ۹۵-۹۶)

۱۰. در تجزیه عبارت جبری $(x^2 - 25) + (x^2 - x - 20)$ چند تا از عبارت‌های زیر دیده نمی‌شود؟

$x + 5$ و $x - 5$ و $2x + 9$

- (۱) یکی (۲) دوتا (۳) سه‌تا (۴) هیچی

(حلی ۹۹-۰۰)

۱۱. در تجزیه $17x^2 - 15x - 2$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $x + 1$ (۲) $17x - 2$ (۳) $17x + 2$ (۴) $x + 2$

(حلی ۹۸-۹۹)

۱۲. کدام عبارت در تجزیه $x^8 - 16$ ظاهر نمی‌شود؟

- (۱) $x^2 - 2$ (۲) $x^2 + 2$ (۳) $x^4 + 4$ (۴) $x^2 + 8$

(حلی ۹۸-۹۹)

۱۳. اگر a, b, c و n اعداد طبیعی باشند و $a > n$ و $a < c$ و $c < b$ ، کدام گزینه همیشه درست است؟

- (۱) $a < b$ (۲) $b < n$ (۳) $c < n$ (۴) $2n > a$

(حلی ۹۵-۹۶)

۱۴. کدام یک از ادعاهای زیر همواره درست است؟
ادعای اول: اگر $\frac{ab}{c} < 0$ باشد، آنگاه a و b و c منفی هستند.

ادعای دوم: اگر $a^2 b < 0$ باشد، آنگاه b منفی است.

- (۱) ادعای اول (۲) ادعای دوم (۳) هر دو ادعا (۴) هیچ‌کدام

(حلی ۹۹-۰۰)

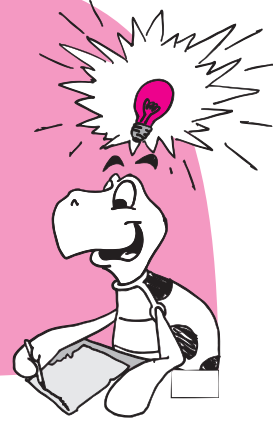
۱۵. چند عدد اول در مجموعه جواب نامعادله $\frac{2-x}{3} \geq -1$ قرار دارند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) بی‌شمار



آزمون جامع ۲

(فصل ۵)



۱. چند تا از عبارتهای روبه‌رو یک جمله‌ای جبری هستند؟ (حلی ۹۵-۹۶)

$$|x^2|, -\sqrt{2x}, \sqrt{4x^2}$$

(۱) یکی (۲) دو تا (۳) سه تا (۴) هیچی

۲. دو چندجمله‌ای جبری به نام‌های P و Q داریم که تنها دارای متغیر x هستند. اگر درجه P و Q نسبت به x برابر ۳ باشد، کدام یک از ادعاهای زیر درست است؟

ادعای اول: درجه $P + Q$ نسبت به x برابر ۳ است.

ادعای دوم: درجه PQ نسبت به x برابر ۶ است.

(۱) ادعای اول (۲) ادعای دوم (۳) هر دو ادعا (۴) هیچ کدام

۳. ضریب x^8 در حاصل عبارت $(x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x + 1)(x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1)$ برابر کدام است؟ (حلی ۹۹-۱۰۰)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۴. حاصل عبارت جبری $(x - 2y + 5)(x + 2y - 5)$ برابر با کدام یک از عبارتهای زیر است؟ (حلی ۹۵-۹۶)

$$(1) x^2 - 4y^2 + 20y - 25 \quad (2) x^2 + 4y^2 - 20y + 25$$

$$(3) x^2 - 4y^2 - 20y - 25 \quad (4) x^2 + 4y^2 + 20y - 25$$

۵. حاصل $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1998}(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2000}$ برابر با کدام یک از عبارات زیر است؟ (حلی ۹۵-۹۶)

$$(1) 5 - 2\sqrt{6} \quad (2) 5 + 2\sqrt{6} \quad (3) (5 - 2\sqrt{6})^2 \quad (4) (5 + 2\sqrt{6})^2$$

۶. اگر $x^2 - 2x = 1$ باشد، حاصل $(x-1)(x+2)(x-1)(x-4)$ کدام است؟ (حلی ۹۹-۱۰۰)

(۱) -۸ (۲) -۱۲ (۳) -۱۴ (۴) -۱۶

۷. اگر $x^2 - \frac{1}{x^2} = 6$ باشد، حاصل $x^4 + \frac{1}{x^4}$ برابر کدام است؟ (حلی ۹۹-۱۰۰)

(۱) ۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۰



۸. اگر x عددی منفی باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

(پیشرفت تحصیلی ۰۰-۰۱)

$$\sqrt{x^2(x-5)^2} + \sqrt{(9x^2-6x+1)^2} - \sqrt{x^2-4x+4}$$

- (۱) $10x^2 - 10x - 1$ (۲) $10x - 1$ (۳) x^2 (۴) $4x^2 - x - 1$

۹. حاصل عبارت زیر برابر با کدام گزینه است؟

(حلی ۹۸-۹۹)

$$\sqrt{1398}(\sqrt{1398} - \sqrt{1399}) - \sqrt{1399}(\sqrt{1399} - \sqrt{1398})$$

- (۱) صفر (۲) -1 (۳) $\sqrt{1398}$ (۴) $\sqrt{1398} - \sqrt{1399}$

۱۰. اختلاف مجذور دو عدد طبیعی متوالی $4n+1$ است. حاصل جمع این دو عدد برابر کدام است؟

(حلی ۹۹-۰۰)

- (۱) n (۲) $2n$ (۳) $2n+2$ (۴) $4n+1$

۱۱. حاصل عبارت $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$ برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(حلی ۹۵-۹۶)

- (۱) 4850 (۲) 4950 (۳) 5050 (۴) 5150

۱۲. در تجزیه عبارت $(x-1)(a^2+2bc) + (1-x)(b^2+c^2)$ کدام یک از عبارات زیر نمی‌تواند ظاهر شود؟

(حلی ۹۵-۹۶)

- (۱) $a+b-c$ (۲) $a-b+c$ (۳) $-a+b-c$ (۴) $-a+b+c$

۱۳. حاصل عبارت $\sqrt[3]{\frac{999^2+1998+1}{55^2-45^2}}$ کدام است؟

(حلی ۹۷-۹۸)

- (۱) 10 (۲) 12 (۳) 15 (۴) 17

۱۴. فرض کنید a و b و c سه عدد صحیح هستند و $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{b}$ دو عدد گویا هستند. کدام گزینه درست است؟

(حلی ۹۸-۹۹)

الف) اگر $a < c$ ، آنگاه $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$

ب) اگر $a \times b < c \times b$ ، آنگاه $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$

(۱) الف و ب همواره درست است.

(۲) فقط ب همواره درست است.

(۳) فقط الف همواره درست است.

(۴) فقط وقتی $b > 0$ باشد، الف و ب درست است.

۱۵. جواب نامعادله $6-x \leq 2x \leq 4$ برابر با کدام گزینه است؟

(حلی ۹۸-۹۹)

- (۱) $\{x \mid 2 < x\}$ (۲) $\{x \mid 2 \leq x\}$ (۳) $\{x \mid -2 < x < 2\}$ (۴) $\{2\}$

پاسخ تست‌های تمرینی فصل ۵



گزینه ۴ $\frac{1 \times x^4 y^2}{-5x^2 y} = -\frac{1}{5} \times \frac{x^4}{x^2} \times \frac{y^2}{y} = -\frac{1}{5} \times x^{4-2} \times y^{2-1}$
 $= -\frac{1}{5} x^2 \times y = -\frac{1}{5} x^2 y$

با توجه به جواب‌های ساده شده، عبارت گزینه «۳» با $\frac{1}{\pi} x^2 y$ دارای قسمت حرفی یکسان نیست؛ بنابراین پاسخ سؤال گزینه «۳» است.

متوسط

گزینه ۳

درجه یک‌جمله‌ای داده شده نسبت به x و y برابر است با مجموع درجات آن نسبت به هر کدام از این دو متغیر؛ بنابراین داریم:

$$2 - 2n + 4 + 5n = 18$$

$$2n + 6 = 18$$

$$2n = 12 \Rightarrow n = 6$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

متوسط

گزینه ۳

ابتدا با استفاده از قوانین ضرب و تقسیم عبارت‌های توان دار، تا جای ممکن عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{a^2 b^3 c^4}{c^{-2} d^{-2} a^1 b^2} = \frac{a^2}{a^1} \times \frac{b^3}{b^2} \times \frac{c^4}{c^{-2}} \times \frac{1}{d^{-2}}$$

$$= a^{2-1} \times b^{3-2} \times c^{4-(-2)} \times d^2$$

$$= a^1 \times b^1 \times c^6 \times d^2$$

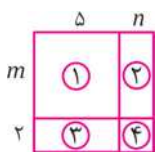
با توجه به این که درجه نسبت به متغیر a و b و c و d به ترتیب، ۱، ۱، ۶ و ۲ است و درجه نسبت به این ۴ متغیر مجموع درجات نسبت به آن‌ها است، داریم:

$$1 + 1 + 6 + 2 = 10$$

همچنین باید توجه کنیم که $abc^6 d^2$ یک یک‌جمله‌ای است، چون از ضرب متغیرها با توان صحیح نامنفی به دست آمده است و ضریب عددی آن عدد حقیقی ۱ است.

متوسط

گزینه ۲



فرض کنیم S مساحت مستطیل بزرگ باشد. با توجه به شکل داریم:

$$S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$= \Delta m + mn + 10 + 2n$$

اکنون مساحت‌ها را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$xmn + ym + zn + w = \Delta m + mn + 10 + 2n$$

با تطبیق دادن دو طرف تساوی باهم داریم:

$$xmn = mn \Rightarrow x = 1$$

$$ym = \Delta m \Rightarrow y = \Delta$$

$$zn = 2n \Rightarrow z = 2$$

$$w = 10$$

در واقع چاره‌ای نیست جز این که ضرایب عددی قسمت‌های حرفی یکسان برابر باشد، تا دو طرف تساوی باهم برابر شوند. بنابراین گزینه «۲» درست است.

متوسط

گزینه ۱

عبارات داده شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه ۱

$$3x^2 y^2 - 4y^2 x^2 = 3x^2 y^2 - 4x^2 y^2 = x^2 y^2 (3 - 4) = -x^2 y^2$$

چون توان‌های متغیرهایی که در هم ضرب شده‌اند ۲ و ۲ است و اعداد صحیح نامنفی هستند و ضریب عددی نیز عدد حقیقی ۱- است پس $-x^2 y^2$ یک جمله‌ای است.

گزینه ۲

$$\frac{3}{x^3 y^2} = 3 \times x^{-3} y^{-2}$$

چون توان‌های متغیرها اعداد صحیح منفی هستند پس گزینه «۲»، یک جمله‌ای نیست؛

گزینه ۳

$$\sqrt[3]{3^3 \times x^3 \times x \times y^3} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{x^3} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y^3}$$

$$= 3 \times x \sqrt[3]{x} \times y = 3x^1 y^1 \sqrt[3]{x}$$

اگرچه در $3xy \sqrt[3]{x}$ توان متغیرهای x و y یک است اما عبارت $\sqrt[3]{x}$ ساده‌تر نمی‌شود و توان x یک عدد صحیح نیست؛ بنابراین گزینه «۳» یک جمله‌ای نیست.

گزینه ۴

$$\frac{1}{y} = y^{-1}$$

۱- عددی صحیح و نامنفی نیست، بلکه منفی است پس عبارت گزینه «۴» هم یک جمله‌ای نیست؛ بنابراین گزینه «۱» درست است.

متوسط

گزینه ۱

ابتدا باید عبارت را ساده کنیم. چون $\frac{1}{4^2} = 4^{-2}$ ، داریم:

$$\frac{x}{4^{-2}} = \frac{x}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16x$$

حالا باید $16x$ را به توان ۴ برسانیم:

$$(16x)^4 = 16^4 \times x^4 = (2^4)^4 \times x^4 = 2^{16} x^4$$

پس این عبارت یک جمله است و ضریب عددی آن 2^{16} است.

بنابراین گزینه «۱» درست است.

آسان

گزینه ۳

برای حل باید ببینیم قسمت حرفی $\frac{1}{\pi} x^2 y$ با کدام گزینه برابر نیست و اگر

گزینه‌ای را می‌توان به فرم ساده‌تری نوشت، آن را ساده می‌کنیم:

گزینه ۱ $\frac{xyx}{2} = \frac{x^1 y^1 x^1}{2} = \frac{x^1 \times x^1 \times y^1}{2} = \frac{x^{1+1} \times y^1}{2} = \frac{x^2 y}{2}$

گزینه ۲ $-2yx^2 \xrightarrow{\text{یا توجه به ویژگی جابه‌جایی ضرب}} = -2x^2 y$

گزینه ۳ $\frac{\sqrt{3} x^2 y^2}{x^2 y^2} = \sqrt{3} \frac{x^2}{x^2} \times \frac{y^2}{y^2} = \sqrt{3} x^{2-2} = \sqrt{3} x^0 = \sqrt{3} x$



۷. گزینه ۳

متوسط

ابتدا باید عبارت $(a+b)^2$ را ساده کنیم و به صورت جمع (تفریق) یک جمله‌ای‌های متشابه بنویسیم (در واقع به صورت چندجمله‌ای بنویسیم)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

درجه نسبت به a برابر است با ۲.

درجه نسبت به b برابر است با ۲.

درجه نسبت به متغیرهای a و b برابر است با بزرگ‌ترین درجه یک جمله‌ای‌ها نسبت به a و b . درجه یک جمله‌ای a^2b نسبت به a برابر است با ۲، چون a^2 را می‌توانیم به صورت a^2b^0 نمایش دهیم پس درجه آن $2+0=2$ است.

مشابه با آن، درجه یک جمله‌ای b^2a نسبت به a و b برابر با ۲ است و درجه یک جمله‌ای $2ab$ نسبت به a و b برابر است با $1+1=2$.

در واقع درجه هر کدام از یک جمله‌ای‌ها نسبت به a و b برابر با ۲ است پس بیشترین آن‌ها نیز ۲ است؛ بنابراین گزینه «۳» درست است.

۸. گزینه ۳

متوسط

هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱) توجه می‌کنیم که اگر دو یک جمله‌ای را جمع کنیم، ممکن است جواب یک جمله باشد، برای مثال:

$$\begin{array}{r} \text{یک جمله} \\ \text{یک جمله} \\ \hline 2x + 3x = 5x \\ \text{جمع ۲ یک جمله‌ای} \end{array}$$

پس این گزینه درست نیست.

در واقع وقتی جملات متشابه را با هم جمع (تفریق) می‌کنیم پس از ساده کردن، تعداد جملات کمتر می‌شود.

گزینه ۲) می‌دانیم ضرب دو یک جمله‌ای، یک چندجمله‌ای تشکیل می‌دهد (چون یک جمله‌ای‌ها هم چندجمله‌ای محسوب می‌شوند)؛ اما تعداد جملات چندجمله‌ای بیشتر از یک جمله نیست. هر یک جمله‌ای از ضرب یک عدد حقیقی در تعدادی متغیر با توان‌های صحیح نامنفی تشکیل شده است، در واقع ما هر چند تا یک جمله‌ای را در هم ضرب کنیم، چون ضرایب عددی در هم و متغیرها در هم ضرب می‌شوند پس در نهایت یک جمله‌ای خواهیم داشت (هیچ وقت در ضرب دو یا چند یک جمله‌ای، بین یک جمله‌ای‌ها عمل جمع و تفریق وجود ندارد).

پس گزینه «۲» هم نادرست است.

گزینه ۳) با توجه به توضیحاتی که برای گزینه «۲» داده شد، گزینه «۳» درست است. بنابراین پاسخ سؤال گزینه «۳» است.

۹. گزینه ۴

متوسط

از آنجایی که x یک عدد طبیعی متوالی است پس x ، $x+1$ ، $x+2$ و $x+3$ چهار عدد طبیعی متوالی هستند که حتماً ۲ تای آن‌ها زوج و ۲ تای آن‌ها فرد است و حاصل ضرب عدد زوج در فرد زوج است:

$$\underbrace{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}_{\text{زوج}} + 1$$

چون حاصل عبارت فرد است پس نمی‌تواند برابر با ۴۰۰ یا ۴۲۰ باشد. اما حاصل ضرب ۴ عدد متوالی حتماً بر ۲، ۳ و ۴ بخش پذیر است اگر این حاصل برابر با ۴۵۱ باشد داریم:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=451$$

$$\Rightarrow x(x+1)(x+2)(x+3)=450$$

اما ۴۵۰ بر ۴ بخش پذیر نیست.

پس حاصل عبارت نمی‌تواند ۴۵۱ باشد؛ بنابراین گزینه «۴» درست است.

۱۰. گزینه ۱

متوسط

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(x-3)^3 = (x-3)^2(x-3) = (x^2+9-6x)(x-3)$$

$$= (x^2 - 2x^2 + 9x - 27 - 6x^2 + 18x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$$4 + 2x^2 - x^3 = ax - 2a + b(x^2 - 4x + 4) - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 3)$$

$$4 + 2x^2 - x^3 = ax - 2a + bx^2 - 4bx + 4b - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 + 3$$

$$4 + 2x^2 - x^3 = x(a - 4b - 27) + x^2(b + 9) - x^3 + 30 - 2a + 4b$$

حالا هر دو طرف تساوی را با هم تطبیق می‌دهیم چون این تساوی باید برای هر x برقرار باشد. (هر x حقیقی)

$$a - 4b - 27 = 0$$

- ضریب عددی x باید صفر باشد.

$$- \text{ضریب عددی } x^2 \text{ باید برابر ۲ باشد.}$$

$$b + 9 = 2 \Rightarrow b = -7$$

- ضریب عددی x^3 در دو طرف تساوی ۱- است.

- عدد ثابت هر دو طرف تساوی باید برابر با ۴ باشد یعنی:

$$30 - 2a + 4b = 4 \Rightarrow 26 = 2a - 4b$$

$$b = -7 \text{ را جایگزین را در تساوی جایگزین می‌کنیم:}$$

$$26 = 2a - 4 \times (-7) \Rightarrow 26 = 2a + 28 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

پس $a + b = (-1) + (-7) = -8$ است و گزینه «۱» درست است.

۱۱. گزینه ۲

متوسط

فرض کنیم جای خالی سمت چپ تساوی برابر y باشد. با اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(3x - y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(-y) + y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$$

با توجه به طرف دوم تساوی داریم:

$$-3x = 2 \times 3x \times (-y)$$

$$-3x = -6xy \xrightarrow[\text{می‌کنیم } (x \neq 0)]{\text{طرفین را تقسیم بر } -3x} 1 = 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

$$(3x - \frac{1}{2})^2 = 9x^2 + 2 \times 3x \times (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 = 9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$$

آسان

۱۲. گزینه ۱

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = \underbrace{x^2 + y^2 + 2xy}_{(x+y)^2} + \underbrace{x^2 + y^2 - 2xy}_{(x-y)^2} = 2x^2 + 2y^2$$

متوسط

۱۳. گزینه ۳

اگر دو طرف تساوی جبری $(a + \frac{1}{a}) = \sqrt{5}$ را به توان دوم برسانیم، داریم:

$$(a + \frac{1}{a})^2 = (\sqrt{5})^2$$

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای عبارت زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$a^2 + (\frac{1}{a})^2 + 2a \times \frac{1}{a} = 5$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 5 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 5 - 2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 3$$



۱۴. گزینه ۲

با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\left((x+1) + \frac{1}{(x+1)} \right)^2 = (x+1)^2 + \left(\frac{1}{x+1} \right)^2 + \frac{2(x+1)}{(x+1)}$$

$$\left((x+1) + \frac{1}{x+1} \right)^2 = (x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2} + 2$$

چون $x + \frac{1}{x+1} = 3$ پس دو طرف این تساوی را با عدد ۱ جمع می‌کنیم:

$$x + \frac{1}{x+1} + 1 = 4$$

بنابراین:

$$4^2 = (x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2} + 2 \rightarrow 14 = (x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

۱۵. گزینه ۳

برای گزینه‌های «۱»، «۲»، «۳» و «۴» مثال‌هایی می‌آوریم که نشان می‌دهد این گزینه‌ها نادرست هستند:

گزینه ۱) اگر $3^2 > (-4)^2$ باشد، آنگاه $3 < -4$

گزینه ۳) اگر $ab > 0$ باشد؛ یعنی a و b هم‌علامت هستند.

اگر a و b هر دو منفی باشند، مثلاً $(-3)^2 > (-4)^2$ آنگاه $-3 > -4$ نیست.

گزینه ۴) وقتی $ab < 0$ یعنی حاصل‌ضرب دو عدد منفی است پس دو عدد علامت‌های مختلف با یکدیگر دارند. اگر a منفی و b مثبت باشد، مثلاً $a = -4$ و $b = 3$ باشد آنگاه $3 > 9$ است اما $3 < -4$ است.

پس فقط گزینه «۲» باقی می‌ماند اما چرا گزینه «۲» درست است؟ a و b دو عدد مثبت هستند و $a^2 > b^2$ ؛ بنابراین داریم:

مثبت $a^2 > b^2$ را از دو طرف $\rightarrow a^2 - b^2 > 0$ نابرابری کم می‌کنیم

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم $\rightarrow (a-b)(a+b) > 0$
 $a > 0, b > 0$

جمع دو عدد مثبت، مثبت است پس $(a+b)$ مثبت است. حاصل‌ضرب عبارتی مثبت در عبارتی دیگر مثبت شده است پس چاره‌ای نیست که $(a-b)$ نیز مثبت باشد و این یعنی:

$$a - b > 0 \Rightarrow a > b$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

۱۶. گزینه ۴

با توجه به اتحاد مربع سه جمله‌ای داریم:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مقدارهای داده شده را جایگزین می‌کنیم:

$$(a+b+c)^2 = 4 + 3 + 9 = 16$$

$$(a+b+c)^2 = 16$$

بنابراین $a+b+c$ می‌تواند ۴ یا -4 باشد پس گزینه «۴» درست است.

۱۷. گزینه ۱

متوسط

با توجه به صورت سؤال اگر عبارت مجهول را برابر با A در نظر بگیریم داریم:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times A = a^2 - b^2$$

از طرفی با توجه به اتحاد مزدوج داریم:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

و دوباره با توجه به اتحاد مزدوج می‌دانیم که:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

در واقع با دو بار استفاده از اتحاد مزدوج توانستیم A را پیدا کنیم:

$$A = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a+b)$$

می‌توانیم درستی عبارت A را بررسی کنیم:

$$\underbrace{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}_{a-b} (a+b) = a^2 - b^2$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

۱۸. گزینه ۴

سخت

با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک حاصل را به دست می‌آوریم:

$$(3x^2 - x - 2)(3x^2 - x + 1)$$

جمله مشترک

حاصل ضرب جمله‌های غیرمشترک + (جمله مشترک) × (مجموع جملات غیرمشترک) + (جمله مشترک)

$$= (3x^2 - x) \times 1 + (-2 + 1) \times (3x^2 - x) + (-2) \times 1$$

$$= (3x^2 - x) - (3x^2 - x) - 2$$

$$= 9x^4 + x^4 - 6x^3 - 3x^3 + x - 2 = 9x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x - 2$$

بنابراین گزینه «۴» درست است.

۱۹. گزینه ۴

متوسط

ابتدا توجه می‌کنیم که عبارت $4x^4 + 4x^2 - 3$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$(2x^2)^2 + 2 \times (2x^2) - 3$$

حالا با کمک اتحاد جمله مشترک داریم باید دو عدد پیدا کنیم که حاصل‌ضرب آن‌ها (-3) و حاصل جمع آن‌ها ۲ باشد:

$$4x^4 + 4x^2 - 3 = (2x^2 + 3)(2x^2 - 1)$$

از طرفی می‌توانیم $(2x^2 - 1)$ را با اتحاد مزدوج تجزیه کنیم:

$$(2x^2 + 3)(2x^2 - 1) = (2x^2 + 3)(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$$

بنابراین گزینه «۴» پاسخ درست است.

۲۰. گزینه ۴

متوسط

می‌توانیم از ضرب دو جمله در دو جمله استفاده کنیم ولی از ویژگی‌های فاکتورگیری و اتحادها ساده‌تر حل می‌کنیم، در هر یک از پرانتزها از x فاکتور می‌گیریم:

$$(x^2 - 3x)(x^2 + x) = x(x-3) \times x(x+1)$$

$$= x^2(x-3)(x+1) = x^2(x^2 - 2x - 3) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$$

اتحاد جمله مشترک

بنابراین گزینه «۴» درست است.

۲۱. گزینه ۲

متوسط

ابتدا از x فاکتور می‌گیریم:

$$x^3 + 4x^2 - 21x = x(x^2 + 4x - 21)$$

سپس عبارت داخل پرانتز را با کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم. برای این کار باید دو عدد پیدا کنیم که حاصل ضرب آن‌ها -21 و حاصل جمع آن‌ها $+4$ باشد:

$$(+7) \times (-3) = -21$$

$$(+7) + (-3) = +4$$

$$x^2 + 4x - 21 = (x-3)(x+7)$$

بنابراین داریم:

$$x^3 + 4x^2 - 21x = x(x-3)(x+7)$$

بنابراین:

سپس جمع عباراتی که در هم ضرب شده‌اند به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x + x - 3 + x + 7 = 3x + 4$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

۲۲. گزینه ۴

متوسط

چون $x^2 = -3$ است و مربع هیچ عدد حقیقی برابر با عددی منفی نمی‌شود، گزینه «۴» درست است.

۲۳. گزینه ۳

متوسط

روش اول

$$x^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ و } x = -\frac{\pi}{2}$$

از اتحاد مزدوج برای تجزیه معادله استفاده می‌کنیم:

$$x^2 - \frac{\pi^2}{4} = (x - \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ و } x = -\frac{\pi}{2}$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

۲۴. گزینه ۴

متوسط

چون حاصل ضرب ۳ عبارت برابر با صفر شده است پس هر x ای که هر کدام از عبارت‌ها را صفر کند، یک جواب برای معادله است، چون تساوی را برقرار می‌کند پس هر کدام از عبارت‌ها را برابر با صفر قرار داده و حل می‌کنیم:

$$x = 0$$

$$x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$$

$$x - \pi = 0 \Rightarrow x = \pi$$

۲۵. گزینه ۱

متوسط

گزینه ۱ اگر از $2a$ فاکتور بگیریم داریم:

$$2a(4+c)$$

چون $2a$ زوج است پس وقتی ضربدر $(4+c)$ شود حاصل نیز زوج می‌شود پس گزینه «۱» درست است.

گزینه ۲ اگر یکی از اعداد a و c فرد باشد حاصل $2a + 3c$ عددی فرد است، به عنوان مثال:

$$\left. \begin{matrix} a=1 \\ c=2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3 \times 1 + 3 \times 2 = 3 + 6 = 9$$

پس برای هر a و c حاصل زوج نمی‌شود.

گزینه ۳ $2a$ زوج است اما اگر c عددی فرد باشد حاصل جمع عددی زوج با عددی فرد عددی فرد است، پس این گزینه همیشه زوج نیست.

گزینه ۴ اگر a فرد و c زوج باشد، a^2 فرد و ac زوج است و جمع دو عدد زوج و فرد، فرد می‌شود پس این گزینه نیز نمی‌تواند همیشه (برای هر مقدار a و c) زوج باشد. بنابراین گزینه «۱» درست است.

۲۶. گزینه ۴

متوسط

$$\text{از } b \text{ فاکتور می‌گیریم} \\ \overbrace{yac + bd - 2a}^{b} d - bc = 90$$

از $2a$ فاکتور می‌گیریم

$$-2a(\underbrace{c-d}_{15}) + b(d-c) = 90 \rightarrow 30a + b(-15) = 90$$

توجه می‌کنیم که $c-d$ و $d-c$ قرینه یکدیگرند.

$$c-d = 15 \Rightarrow d-c = -15$$

$$\rightarrow 30a - 15b = 90 \xrightarrow{\text{طرفین را تقسیم بر ۱۵ می‌کنیم}} 2a - b = 6$$

حالا می‌خواهیم حاصل $2a + d - b - c$ را به دست آوریم:

$$\overbrace{2a+d-b-c}^6 \xrightarrow{-15} \underline{2a-b=6} \quad 6 + \overbrace{d-c}^{-15}$$

$$= 6 - 15 = -9$$

بنابراین گزینه «۴» درست است.

۲۷. گزینه ۴

متوسط

برای حل این سؤال چون $(2a+3b)^2$ در بین همه جملات مشترک است، از آن فاکتور می‌گیریم:

$$(2a+3b)^2 (\underbrace{2-7+4}_{-1}) = -(2a+3b)^2$$

$$= -(4a^2 + 9b^2 + 12ab) = -4a^2 - 9b^2 - 12ab$$

بنابراین گزینه‌های «۲» و «۳» هر دو درست هستند و گزینه «۴» پاسخ سؤال است.

۲۸. گزینه ۳

متوسط

ابتدا توجه می‌کنیم که اگر بخواهیم مستقیماً اعداد را جای‌گذاری کنیم، درگیر محاسبات عددی زیر رادیکال می‌شویم، در صورتی که با فاکتورگیری عبارت زیر رادیکال می‌توانیم محاسبات ساده‌تری را انجام دهیم.

$$\sqrt{a^5 - 4a^3b^2} = \sqrt{a^3(a^2 - 4b^2)}$$

حالا می‌بینیم که $(a^2 - 4b^2)$ را نیز می‌توانیم با اتحاد مزدوج تجزیه کنیم:

$$\sqrt{a^3(a-2b)(a+2b)}$$

حالا $a=5$ و $b=2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{5^3(5-\underbrace{2 \times 2}_4)(5+\underbrace{2 \times 2}_4)} = \sqrt{5^3 \times 1 \times 9} = \sqrt{5^3} \times \sqrt{9}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} = 3\sqrt{125} \\ = \sqrt{5^2} \times 5 \times 3 = 5\sqrt{5} \times 3 = 15\sqrt{5} \end{matrix} \right.$$

بنابراین هر دو گزینه‌های «۱» و «۲» درست هستند و در نتیجه گزینه «۴» پاسخ سؤال است.

۲۹. گزینه ۲

متوسط

از اتحاد جمله مشترک استفاده می‌کنیم و به همین دلیل باید دو عدد پیدا کنیم که حاصل ضربشان ۱۲ و حاصل جمعشان عدد -7 باشد.

$$(-3) \times (-4) = +12$$

$$(-3) + (-4) = -7$$

بنابراین داریم:

$$x^2 - 7x + 12 = (x + (-3))(x + (-4)) = (x-3)(x-4)$$



۳۰. گزینه ۴

متوسط

برای حل این سؤال از تجزیه اتحاد یک جمله مشترک کمک می‌گیریم:

گزینه ۱) برای تجزیه $x^2 - x - 12$ باید دو عدد پیدا کنیم که ضرب آن‌ها -12 و جمع آن‌ها -1 باشد که آن اعداد -4 و 3 هستند پس گزینه «۱» درست است.

گزینه ۲) برای تجزیه $x^2 - 5x + 6$ باید دو عدد پیدا کنیم که ضرب آن‌ها 6 و جمع آن‌ها -5 باشد که دو عدد -2 و -3 این ویژگی را دارند پس گزینه «۲» درست است.

گزینه ۳) برای تجزیه گزینه «۳» باید دقت کنیم که جمله مشترک در دو پرانتزی که درهم ضرب می‌شود $2x$ است، چون $(2x)^2 = 4x^2$ پس داریم:

$$4x^2 + 12x + 5 = (2x + \dots)(2x + \dots)$$

حالا باید دو عدد پیدا کنیم ضرب آن‌ها 5 باشد اما با توجه به این که $12x = 6 \times 2x$ ، جمع دو عددی که پیدا می‌کنیم باید 6 باشد پس داریم:

$$5 \times 1 = 5$$

$$5 + 1 = 6$$

$$(2x + 5)(2x + 1) = 4x^2 + 12x + 5$$

بنابراین:

گزینه ۴) عبارت گزینه «۴» همان عبارت گزینه «۳» است که درست تجزیه شده است زیرا اگر $(2x + 2)(2x + 3)$ درست بود، ضرب دوجمله غیرمشترک باید 6 و جمع آن‌ها هم 6 می‌شد که این‌طور نیست. در واقع ضرب دو پرانتز به صورت زیر می‌شود:

$$(2x + 2)(2x + 3) = 4x^2 + 10x + 6$$

بنابراین عبارت گزینه «۴» درست نیست.

بنابراین گزینه «۳» درست است.

۳۱. گزینه ۳

سخت

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(z - \frac{1}{z})(z + \frac{1}{z}) = z^2 - (\frac{1}{z})^2 \Rightarrow \underbrace{(z - \frac{1}{z})(z + \frac{1}{z})}_{\sqrt{V}} = z^2 - \frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{V}(z + \frac{1}{z}) = z^2 - \frac{1}{z^2} *$$

بنابراین باید $z + \frac{1}{z}$ را محاسبه کنیم.

برای این کار طرفین تساوی $z - \frac{1}{z} = \sqrt{V}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(z - \frac{1}{z})^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2 \times \frac{1}{z}$$

$$(\sqrt{V})^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2$$

$$\frac{V+2}{9} = z^2 + \frac{1}{z^2} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = 9$$

از طرفی می‌دانیم:

$$(z + \frac{1}{z})^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \times \frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \Rightarrow (z + \frac{1}{z})^2 = 11$$

$$\xrightarrow{z \geq 0} \sqrt{(z + \frac{1}{z})^2} = |z + \frac{1}{z}| = z + \frac{1}{z} \Rightarrow z + \frac{1}{z} = \sqrt{11}$$

با جای گذاری مقدار $z + \frac{1}{z} = \sqrt{11}$ در * داریم:

$$\sqrt{V} \times \sqrt{11} = z^2 - \frac{1}{z^2} \Rightarrow \sqrt{V} = z^2 - \frac{1}{z^2}$$

۳۲. گزینه ۱

سخت

توجه می‌کنیم که در حالت‌های زیر حاصل یک عدد توان‌دار ممکن است برابر یک باشد. حالت ۱: یک به توان هر عددی برسد حاصل برابر با یک است.

$$1^n = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x + 21 = 1 \Rightarrow x^2 + 9x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x + 5) = 0$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

حالت ۲: هر عددی مخالف صفر به توان صفر برسد حاصل برابر با یک است.

$$n^0 = 1 \quad (n \neq 0)$$

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

پس:

$$3x^2 + 5x + 2 = A$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$9x^2 + 15x + 6 = 3A$$

$$(3x)^2 + 5(3x) + 6 = 3A$$

با کمک اتحاد جمله مشترک داریم:

$$(3x + 2)(3x + 3) = 3A$$

طرفین را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(3x + 2) \times 3 \times (x + 1)}{3} = \frac{3A}{3} \Rightarrow (3x + 2)(x + 1) = A$$

اگر $A = 0$ باشد داریم:

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

حالت ۳: اگر عدد منفی یک به توان زوج برسد، حاصل برابر با یک است.

$$(-1)^{\text{زوج}} = 1$$

$$x^2 + 9x + 21 = -1 \text{ و } 3x^2 + 5x + 2 \rightarrow \text{زوج}$$

پس:

که در این حالت معادله $x^2 + 9x + 22 = 0$ جواب حقیقی ندارد.

پس برای مجموع جواب‌ها داریم:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = (-4) + (-5) + (-1) + (-\frac{2}{3})$$

$$= (-10) + (-\frac{2}{3}) = -\frac{32}{3}$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

۳۳. گزینه ۳

متوسط

با توجه به این که حاصل تقسیم a بر c منفی است پس علامت این دو عدد خلاف یکدیگر است، بنابراین حاصل ضرب آن‌ها نیز منفی است یعنی $ac < 0$ و از طرفی

$b^2 \geq 0$ است با توجه به ویژگی‌های نابرابری‌ها داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طرفین نابرابری را} \\ \text{در } (-1) \text{ ضرب می‌کنیم} \rightarrow -ac > 0 \\ \text{طرفین نابرابری را} \\ \text{در } 4 \text{ ضرب می‌کنیم} \rightarrow -4ac > 0 \\ b^2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow b^2 + (-4ac) > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$$

جمع یک مقدار مثبت و یک مقدار نامنفی، مثبت است.

بنابراین گزینه «۳» درست است.

گزینه ۲ ۳۴

سخت

$$(1) \quad -5x > -25 \xrightarrow{\text{طرفین را با } x^2 \geq 0 \text{ جمع کرده است}} x^2 - 5x > x^2 - 25$$

از x فکتور می‌گیریم

$$(2) \quad x(x-5) > (x-5)(x+5)$$

در مرحله ۳ به ۴، چون نمی‌دانیم $x-5$ مثبت است یا منفی، نمی‌توانیم دو طرف نابرابری را بر آن تقسیم کنیم زیرا اگر $x-5 < 0$ ، جهت نابرابری عوض می‌شود. البته در ادامه وقتی به عبارت اشتباه $0 > 5$ رسیدیم، می‌فهمیم که پس حتماً $x-5 < 0$ بوده و در مرحله ۳ به ۴ داریم:

$$x(x-5) > (x-5)(x+5) \Rightarrow x < x+5 \Rightarrow 0 < 5$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

گزینه ۱ ۳۵

سخت

دو نامعادله $2x-2 \leq 2x+4$ و $-2x+1 \leq 2x-2$ را حل می‌کنیم و بین جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم، چون این ۲ نامعادله باید هر دو برقرار باشند. داریم:

$$-2x+1 \leq 2x-2 \xrightarrow{\text{از طرفین کم می‌کنیم}} -5x+1 \leq -2$$

$$\xrightarrow{\text{عدد یک را از طرفین کم می‌کنیم}} -5x \leq -3$$

$$\xrightarrow{\text{هر دو طرف را تقسیم بر } -5 \text{ می‌کنیم}} x \geq \frac{3}{5} \quad (1)$$

$$2x-2 \leq 2x+4 \xrightarrow{\text{هر دو طرف را با } 2x \text{ جمع می‌کنیم}} -2 \leq 4$$

$$\xrightarrow{\text{هر دو طرف را با } 5x \text{ جمع می‌کنیم}} 5x \leq 6$$

$$\xrightarrow{\text{هر دو طرف را تقسیم بر } 5 \text{ می‌کنیم}} x \leq \frac{6}{5} \quad (2)$$

اگر بین مجموعه جواب‌های (۱) و (۲) اشتراک بگیریم، داریم:

$$\begin{matrix} a & b \\ \uparrow & \uparrow \\ \frac{3}{5} \leq x \leq \frac{6}{5} \end{matrix}$$

$$a = \frac{3}{5}, b = \frac{6}{5} \Rightarrow b-a = \frac{6}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

گزینه ۲ ۳۶

متوسط

هر دو طرف نامعادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی عدد ۶ ضرب می‌کنیم. چون ۶ مثبت است جهت نابرابری تغییر نمی‌کند:

$$6 \times \left(\frac{1-2x}{3} - \frac{2x-1}{2} \right) \geq 6 \times 2$$

$$\rightarrow 2 \times \frac{(1-2x)}{1} - 3 \times \frac{(2x-1)}{1} \geq 12 \rightarrow 2(1-2x) - 3(2x-1) \geq 12$$

$$\rightarrow 2 - 4x - 6x + 3 \geq 12 \rightarrow 2 - 10x + 3 \geq 12$$

$$\rightarrow -10x + 5 \geq 12$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین } -10 \text{ تقسیم بر } -10 \text{ می‌کنیم}} x \leq -\frac{7}{10}$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

گزینه ۴ ۳۷

متوسط

چون $x \geq 2$ می‌باشد پس اگر طرفین نامعادله را در علامت منفی ضرب کنیم جهت نابرابری تغییر می‌کند و داریم:

$$-x \leq -2$$

اگر هر دو طرف نامعادله را با یک جمع کنیم داریم:

$$-x+1 \leq -2+1 \rightarrow -x+1 \leq -1$$

پس برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی ۲، در عبارت گویای $\frac{x}{-x+1}$ ، صورت مثبت و مخرج منفی است، پس سمت چپ نامعادله مقداری منفی دارد، و واضح است که این مقدار برای هر x ، از $\frac{2}{3}$ که عددی مثبت است کوچک‌تر است. پس برای هر $x \in \mathbb{N}$ و $x \geq 2$ نامعادله برقرار است بنابراین بی‌شمار جواب دارد و گزینه «۴» درست می‌باشد.

متوسط

گزینه ۳ ۳۸

ابتدا مجموعه جواب هر کدام از نامعادله‌ها را به دست می‌آوریم:

$$A: 1+|x| \leq 2 \xrightarrow{\text{از طرفین نامعادله } 1 \text{ را کم می‌کنیم}} |x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$B: 2+|x| \geq 3 \xrightarrow{\text{از طرفین نامعادله } 2 \text{ را کم می‌کنیم}} |x| \geq 1 \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$C: 3+x \leq 6 \xrightarrow{\text{از طرفین نامعادله } 3 \text{ را کم می‌کنیم}} x \leq 3$$

$$D: 4+x \geq 7 \xrightarrow{\text{از طرفین نامعادله } 4 \text{ را کم می‌کنیم}} x \geq 3$$

واضح است که مجموعه اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۳ زیر مجموعه اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۱ می‌باشند.

بنابراین گزینه «۳» درست است.

پاسخ آزمون جامع (۱) فصل ۵



متوسط

گزینه ۴ ۱

با توجه به اینکه یک جمله‌ای باید از حاصل ضرب یک یا چند متغیر تشکیل شده باشد، گزینه «۱» یک جمله‌ای نیست.

در گزینه «۲»، با توجه به این که $x \geq 0$ یا $x < 0$ جواب $|x|$ متفاوت خواهد بود. در واقع اگر $x \geq 0$ باشد، آنگاه $|x| = x$ و اگر $x < 0$ باشد، $|x| = -x$ است؛ بنابراین عدد حقیقی که در متغیر x ضرب می‌شود مشخص نیست؛ بنابراین گزینه «۲» نیز یک جمله‌ای نیست.

در گزینه «۳» داریم: $x^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$ ، بنابراین توان x یک عدد صحیح منفی است، در صورتی که توان متغیر x باید صحیح و نامنفی باشد پس گزینه «۳» نیز یک جمله‌ای نیست.

بنابراین هیچ کدام از گزینه‌ها یک جمله‌ای نیستند و گزینه «۴» درست است.

متوسط

گزینه ۴ ۲

در گزینه «۱» بیش‌ترین درجه یک جمله‌ای‌ها نسبت به x و y ، ۶، در گزینه «۲» هم ۶ و در گزینه «۳» نیز ۶ است.

در گزینه «۴» درجه یک جمله‌ای‌های xy^4 ، x^4y^2 و $-x^4y$ نسبت به x و y به ترتیب، ۵ و ۴ و ۵ است پس بیش‌ترین درجه بین آنها ۵ می‌باشد؛ بنابراین گزینه «۴» درست است.



$$\Rightarrow \frac{a^f}{b^f} + \frac{b^f}{a^f} = 36 + 2 = 38$$

بنابراین داریم:

متوسط

گزینه ۳

چون $a^f > b^f$ و $a < b$ است، داریم:

$$a^f - b^f > 0 \Rightarrow \overbrace{(a-b)}^{\text{منفی}} (a+b) > 0$$

$$a < b \rightarrow a-b < 0$$

پس $(a+b)$ باید منفی باشد تا حاصل ضرب آن در $(a-b)$ بزرگتر از صفر شود. بنابراین داریم:

$$\underbrace{|a-b|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|a+b|}_{\text{منفی}} = b-a + (-b) + (-a)$$

$$= b - a - b - a = -2a$$

متوسط

گزینه ۱

با استفاده از اتحاد جمله مشترک و اتحاد مزدوج هریک از برانتزها را تجزیه می‌کنیم:

$$(x^2 - x - 20) + (x^2 - 25) = (x+4)(x-5) + (x-5)(x+5)$$

حالا از $(x-5)$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x-5)((x+4) + (x+5)) = (x-5)(2x+9)$$

بنابراین در تجزیه عبارت داده شده، فقط عبارت $x+5$ دیده نمی‌شود و گزینه «۱» درست است.

متوسط

گزینه ۱۱

با کمک تجزیه با اتحاد یک جمله مشترک داریم:

$$17A = 17x^2 - 15x - 24$$

$$17A = (17x - 17)(17x + 2)$$

$$\Rightarrow A = \frac{(17x-17)(17x+2)}{17} = \frac{\cancel{17}(x-1)(17x+2)}{\cancel{17}}$$

$$= (x-1)(17x+2)$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

متوسط

گزینه ۱۲

$$x^8 - 16 = \underbrace{(x^4 - 4)(x^4 + 4)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \underbrace{(x^2 - 2)(x^2 + 2)}_{\text{مزدوج}} (x^4 + 4)$$

همان‌طور که مشخص است در تجزیه عبارت داده شده، عبارت $x^2 + 8$ وجود ندارد و گزینه «۴» درست است.

متوسط

گزینه ۱

با توجه به این که a و b و c اعداد طبیعی هستند؛ بنابراین همه مثبت و بزرگتر یا مساوی یک هستند و داریم:

$$a < c \text{ و } c < b \rightarrow a < b$$

بنابراین گزینه «۱» همیشه درست است.

از طرفی چون $n < a < b$ و $a > n \rightarrow n < a < b$ ؛ بنابراین $n < b$ و گزینه «۲» درست نیست. چون $n < a$ و $a < c \rightarrow n < c$

پس گزینه «۳» نادرست است. گزینه «۴» نیز همیشه برقرار نیست؛ چون مثلاً اگر فرض کنیم $a=3$ و $n=1$ باشد، درست است که $a > n$ اما $2n < a$ است.

سخت

گزینه ۳

$$(x-1)^2 + (2x-1)(2x+K) = 5x^2 + 2x - 2$$

$$= x^2 + 1 - 2x + 4x^2 + 2xK - 2x - K = 5x^2 + 2x - 2$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 4x + 2Kx + 1 - K = 5x^2 + 2x - 2$$

$$\Rightarrow 5x^2 + x(-4 + 2K) + 1 - K = 5x^2 + 2x - 2$$

ضریب x را در دو طرف تساوی باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$-4 + 2K = 2 \rightarrow 2K = 6 \rightarrow K = 3$$

و یا اعداد ثابت دو طرف تساوی را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$1 - K = -2 \rightarrow 3 = K$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

متوسط

گزینه ۴

$$(\sqrt{2}-1)^2 (\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 (\sqrt{2}+1)^2 (\sqrt{2}+1)^2$$

$$= \underbrace{((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1))^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} \times \underbrace{(\sqrt{2}+1)^2}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}$$

$$= (2-1)^2 \times (2+1+2\sqrt{2}) = 1^2 \times (3+2\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه «۴» درست است.

متوسط

گزینه ۳

$$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$$

$$= 2 + 4 \times 3 + 4\sqrt{6} = 2 + 12 + 4\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

آسان

گزینه ۲

مساحت مربع کوچک - مساحت مربع بزرگ

$$= (x+c)^2 - x^2 = x^2 + c^2 + 2cx - x^2 = c^2 + 2xc$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

متوسط

گزینه ۴

با کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای عبارت‌های زیر را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(a-b)^2} = |a+b| + |a-b|$$

چون $a < b < 0$ پس $a-b < 0$ است و a و b منفی هستند:

$$|a-b| = -(a-b) = b-a$$

و چون a و b هر دو منفی هستند، $a+b$ نیز منفی است؛ یعنی $a+b < 0$ پس:

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b$$

$$|a+b| + |a-b| = -a-b + b-a = -2a$$

بنابراین داریم:

بنابراین گزینه «۴» درست است.

متوسط

گزینه ۳

با کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌توانیم $\frac{a^f}{b^f} + \frac{b^f}{a^f}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{a^f}{b^f} + \frac{b^f}{a^f} = \frac{(\frac{a^f}{b^f} - \frac{b^f}{a^f})^2}{\frac{a^f}{b^f} + \frac{b^f}{a^f}} + 2$$

$$\frac{a^f}{b^f} + \frac{b^f}{a^f} = \frac{a^f}{b^f} + \frac{b^f}{a^f} - 2 \times \frac{a^f}{b^f} \times \frac{b^f}{a^f}$$

