بسم الله الرحمن الرحیم

برگی از نهال مینی المپیاد

آموزش المپیاد ریاضی

(جلد اول)

مؤلفین

حسن باطنی

حمیدرضا خلیلی

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

خاطره

دوران تحصیلات ابتدایی و راهنمایی را در روستای زادگاهم[1] گذراندم. بدیهی است که وجود کتاب کمک آموزشی در آن منطقه و در آن زمان (از سال ۵۵ تا ٦۳) فقط در حد حل‌المسائل میسر بود. کتاب‌های درسی به هیچ عنوان اغناکننده‌ی نیاز و توانایی من در امر ریاضیات نبودند و مثل یک آدم تشنه در جستجوی منابعی برای سیراب کردن این تشنگی، دورانم را سپری کردم تا این که پس از مهاجرت به اسلام‌شهر (از شهرستان‌های استان تهران) و با شروع دوران مقطع دبیرستان از وجود استادی به نام «سجودی» بهره جستم. در آن منطقه از حاشیه‌ی شهر تهران و در بین حدوداً ۲۰۰ نفر دانش‌آموز پایه‌ی اول دبیرستان این استاد توانمند پی به توانایی و علاقه‌ی من به ریاضیات برده و در حد خودش در صدد سیراب کردن این فرد تشنه به ریاضی برآمد. در آن زمان نمایشگاه کتاب مثل الان پررونق نبود. در پارک دانشجو نمایشگاه کوچکی از کتاب دایر شده بود که ایشان من را به همراه دو دانش‌آموز دیگر از اسلام‌شهر به این نمایشگاه آورده و کتاب‌هایی را برای ما معرفی کرد. در آن زمان کتابی را خریدم که ترجمه شده‌ی یک کتاب روسی بود و توانایی‌های خودم را در امر ریاضی را مدیون این کتاب می‌دانم. بودن کتابی مناسب می‌تواند در ذهن یک دانش‌آموز چنان تاثیری داشته باشد که بعد از گذشت حدوداً ۳۰ سال از آن تاریخ، لحظات خوش بودن با آن کتاب فراموش نشود.

حادثه

هر از چندگاهی اتفاقات ناگواری ناشی از نخبه‌پروری و تلاش برای نخبه جلوه دادن دانش‌آموزی از گوشه و کنار به گوش می‌رسد. آخرینِ این حوادث متعلق به دانش‌آموزی ۱۲ ساله می‌شود که در اردیبهشت ۹٤ در سر جلسه‌ی امتحان آزمون ورودی تیزهوشان بر اثر سکته‌ی مغزی و فشار استرس وارد بر او جان خود را از دست داد.

دلهره

اگر دیده باشید بر روی پاکت‌های سیگار دو نوع ریه کشیده شده است، ریه‌ی فردی سالم که از دخانیات به دور است و ریه‌ی فردی مبتلا به دخانیات. شاید تولیدکنندگان دخانیات اجبار به کشیدن این دو تصویر شده‌اند تا مضرات استفاده از این دخانیات را به آگاهی عموم برسانند.

دغدغه

وجود دانش‌آموزان نخبه‌ی بالقوه‌ی زیادی در مملکت و کشور عزیزمان از یک طرف و وجود افراد توانمندی که می‌توانند به این نخبگان ارائه‌ی خدمت بدهند از طرف دیگر، ایجاب وظیفه می‌کند که زمینه را چنان فراهم کنیم که این افراد توانمند بتوانند برای نخبگان این مرز و بوم ارائه‌ی خدمت نموده و جهت بارور نمودن استعداد و توانایی‌های آنان تلاش لازم را انجام دهند.

۱) روستای خاکی از توابع شهرستان سراب

نتیجه

انتشارات خوشخوان با بهره‌گیری از دبیران، مولفین، فارغ‌التحصیلان ممتاز که خود در سنوات گذشته از افتخارآفرینان و مدال‌آوران المپیاد بوده‌اند و یا جزء نفرات ممتاز کنکور سراسری، توانسته است کتب مناسب و مفیدی را تدوین و روانه‌ی بازار نشر کند. بازخورد و بازتاب وجود این کتب در مدارس، منازل، کتابخانه‌ها و . . . در چند سال گذشته برای ما دلگرم‌کننده و شادی‌بخش بود و از خداوند منان خواسته‌ایم تا نگارش قلم ما و دست‌اندرکاران این انتشارات را در جهت خدمت بیشتر به نخبگان این مملکت قرار دهد ولی با شنیدن حوادثی که به نمونه‌ای از آن اشاره شد دلهره سر تا پای وجودمان را می‌گیرد که نکند ما هم در جهت تقویت و تشویق اولیا برای نخبه جلوه دادن فرزندشان به هر قیمتی، گامی برداشته‌ایم! متزلزل شدن قلم‌ها به خاطر این دلهره و موارد اشاره شده در خاطره و دغدغه، این تزلزل را از بین می‌برد و دوباره جان و امید دوباره‌ای پیدا کرده و با همتی دو چندان در نگارش مباحثی برای دانش‌آموزان ممتاز، تیزهوش و المپیادی، برمی‌آییم ولی آن چیزی که نباید فراموش شود جایگاه این کتب در پر کردن اوقات فرزندان عزیز می‌باشد و کسانی که می‌توانند این موضوع را مدیریت کنند اولیاء گرامی می‌باشند.
اگر از مطالعه کتبی مشابه این کتاب فرزندمان به وجد آمده و احساس کند گم شده‌اش را پیدا کرده، آن‌گاه مبارک او باد و حق به حق‌دار رسیده است، ولی اگر با پافشاری ما اولیاء در جهت حل سوالات این کتاب و کتب مشابه به جهت این که او را در جامعه به عنوان یک فرد نخبه معرفی کنیم و غیر از استرس و خمودی در او چیزی یافت نکنیم باید آگاه باشیم که در حق چنین فرزندی ظلمی روا می‌داریم که جبرانش غیرممکن است.

پس:

اگر خریدار این کتاب جزء دانش‌آموزان تیزهوش و نخبه می‌باشد و از حل سوالات آن لذت برده و بر شادابی‌اش افزوده می‌شود، مبارکش باد، در غیر این‌صورت بهتر است آن را بوسیده و کنار بگذارد و هم‌نوعان خود از نظر هوش و استعداد را از خرید آن بر حذر دارد.

خاتمه

در انتها لازم می‌دانم از تمام کسانی که در تولید این اثر نقش داشتند اعم از مولفین، حروف‌چین‌ها، پرسنل زحمت‌کش انتشارات و . . . کمال تشکر را داشته باشم و از شما خوانندگان گرامی نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب عفو دارم.

رسول حاجی‌زاده

والسلام علی من اتبع الهدی

مقدمه مؤلف

آن‌چه در المپیادهای ریاضی اهمیت بسیاری دارد، پرورش و تقویت «تفکر» در دانش‌آموزان است و آن‌چه موجب افزایش قدرت تفکر می‌شود «فکر کردن به مدت طولانی» برای حل یک مساله است؛ حتی اگر آن مساله، حل نشود، همین «فکر کردن» موجب تقویت کارایی مغز خواهد بود. اگر دانش‌آموزی چند ماه به این شیوه عمل کند، به تدریج توانایی او در «حل مساله» افزایش می‌یابد. زمانی که وقت زیادی را برای حل یک مساله‌ی به ظاهر دشوار صرف می‌کنید و در نهایت موفق به حل آن می‌شوید، از حل آن مساله بسیار شادمان و شگفتزده می‌شوید و شور و هیجان و لذت وصف‌ناپذیری شما را در بر می‌گیرد. این لذت همان «انگیزه‌ی درونی» است که شما را تشویق می‌کند مساله‌های بیش‌تری حل کنید.

پس راه موفقیت شما «فکر کردن به مدت طولانی روی یک مساله» می‌باشد.

بیش‌تر مساله‌های المپیادهای ریاضی در چهار شاخه‌ی نظریه‌ی اعداد، ترکیبیات، جبر و هندسه طرح می‌شوند. اما گاهی با مساله‌هایی مواجه می‌شویم که حل آن‌ها «منطق و استدلال ریاضی» لازم دارد. در این کتاب به آموزش مقدماتی همان چهار شاخه بسنده کرده‌ایم. ان‌شاءا... اگر توفیق حاصل آید ادامه‌ی این مباحث را در جلدهای بعدی دنبال خواهیم کرد. هم‌چنین در زمینه‌ی منطق و استدلال ریاضی هم مجموعه‌ای در دست تهیه می‌باشد.

موفقیت شما آرزوی ماست

حسن باطنی

فهرست مطالب

۱

نظریه‌ی اعداد

۱.۱ بخش اول

الگوریتم تقسیم

می‌دانیم برای تقسیم مقابل می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت:

$$\begin{array}{r|l} ۳۰ & ۷ \\ \cline{2-2} -۲۸ & ۴ \\ \cline{1-1} ۲ & \end{array}$$

$$(۱)\ ۳۰ = (۷ \times ۴) + ۲$$
$$(۲)\ ۲ < ۷$$

- به‌طورکلی، اگر عدد صحیح a را بر عدد صحیح غیرصفر b تقسیم کنیم و خارج‌قسمت عدد صحیح q و باقی‌مانده r باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r & \end{array}$$

$$(۱)\ a = (b \times q) + r$$
$$(۲)\ ۰ \leq r < |b|$$

توجه کنید که باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد و حتماً باید از $|b|$ کوچک‌تر باشد. منظور از $|b|$ (بخوانید قدرِمُطلق b) این است که اگر b عددی منفی بود، آن را قرینه کنید و در صورتی که b عددی مثبت بود: $|b| = b$

به‌طور مثال: $|-۸| = +۸$ و $|+۵| = +۵$

پس $|b|$ منفی نمی‌باشد. (همواره عددی مثبت یا صفر است.)

در تقسیم a بر b، عدد a مقسوم و عدد b مقسوم‌علیه نامیده می‌شوند.

بخش‌پذیری

به تقسیم مقابل توجه کنید.

وقتی عدد ۴۰ را بر ۸ تقسیم می‌کنیم، خارج‌قسمت عدد صحیح ۵ و باقی‌مانده صفر می‌شود.

$$\begin{array}{r|l} ۴۰ & ۸ \\ \cline{2-2} -۴۰ & ۵ \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

می‌گوییم: «۴۰ بر ۸ بخش‌پذیر است.»

یا «۸ عدد ۴۰ را می‌شمارد.»

- به‌طور کلی، اگر عدد صحیح a را بر عدد صحیح غیرصفر b تقسیم کنیم؛ خارج‌قسمت عدد صحیح q و باقی‌مانده صفر باشد، می‌گوییم:
«عدد a بر عدد b بخش‌پذیر است.» و یا «عدد b عدد a را می‌شمارد.»
در این‌صورت می‌نویسیم: $b|a$
(و می‌خوانیم b عدد a را می‌شمارد) هم‌چنین می‌توانیم بنویسیم:

$$a = b \times q$$

در مثال بالا می‌توانیم بنویسیم: $۸|۴۰$ هم‌چنین: $۴۰ = ۸ \times ۵$

اعداد زوج ـ اعداد فرد

با توجه به الگوریتم تقسیم، وقتی عدد صحیح a را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، دو حالت پیش می‌آید.

(۱) باقی‌مانده = صفر

$$\begin{array}{r|l} a & ۲ \\ \cline{2-2} & k \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

در این حالت عدد a را «زوج» می‌نامیم.

و می‌نویسیم: $a = ۲k$

(۲) باقی‌مانده = ۱

$$\begin{array}{r|l} a & ۲ \\ \cline{2-2} & k \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$

در این حالت عدد a را «فرد» می‌نامیم.

و می‌نویسیم: $a = ۲k + ۱$

- اگر k عددی صحیح باشد، $۲k$ نماینده‌ی یک عدد زوج و $۲k + ۱$ نماینده‌ی یک عدد فرد می‌باشد.

مثال ۱ **نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد فرد، همواره عددی فرد می‌باشد.**

حل. این دو عدد فرد را به‌صورت $۲a + ۱$ و $۲b + ۱$ در نظر می‌گیریم:

$$(۲a+۱)\times(۲b+۱) = \underbrace{۴ab+۲a+۲b}_{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}}+۱ = ۲\underbrace{(۲ab+a+b)}_{\text{فرض کنیم حاصل این عبارت } k \text{ باشد}}+۱ = ۲k+۱$$

و می‌دانیم $۲k + ۱$ فرد است.

به روش مشابه می‌توان ثابت کرد:

۱. حاصل‌جمع دو عدد زوج، عددی زوج است.

۲. حاصل‌ضرب دو عدد زوج، عددی زوج است.

۳. حاصل‌جمع دو عدد فرد، عددی زوج است.

٤. حاصل‌جمع یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی فرد است.

۵. حاصل‌ضرب یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی زوج است.

مثال ۲ **ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، زوج است.**

حل. این دو عدد متوالی را a و $a+۱$ می‌نامیم. دو حالت پیش می‌آید.

۱. اگر a عددی زوج باشد، $a+۱$ فرد خواهد بود و می‌دانیم حاصل‌ضرب یک عدد زوج و یک عدد فرد، زوج است.

۲. اگر a فرد باشد، $a+۱$ زوج خواهد بود و باز هم حاصل‌ضرب، زوج می‌باشد.

مثال ۳ **ثابت کنید مربع هر عدد فرد، در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر با ۱ خواهد داشت.**

حل. منظور از مربع هر عدد، حاصل‌ضرب آن عدد در خودش می‌باشد. در این‌جا عدد موردنظر فرد است پس آن را به‌صورت $۲k+۱$ در نظر می‌گیریم و مربع آن برابر است با:

$$(۲k+۱)\times(۲k+۱) = ۴k^۲ + ۲k + ۲k + ۱ = \underbrace{۴k^۲ + ۴k}_{\text{از } ۴k \text{ فاکتور می‌گیریم}} + ۱$$

$$= ۴k(k+۱)+۱$$

با توجه به مثال قبل، k و $k+۱$ دو عدد متوالی‌اند پس حاصل‌ضرب آن‌ها زوج است این عدد زوج را به‌صورت $۲q$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$۴\underbrace{k(k+۱)}_{۲q}+۱ = ۴\times ۲q+۱ = ۸q+۱$$

با توجه به الگوریتم تقسیم:

$$\text{مربع عدد فرد} = ۸q+۱$$

پس اگر مربع عدد فرد را بر ۸ تقسیم کنیم خارج‌قسمت q و باقی‌مانده عدد ۱ می‌باشد.

تمرین‌های بخش اول

۱. در یک تقسیم، مقسوم‌علیه ۱۳ است. اگر ۳۹ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج‌قسمت و باقی‌مانده چه تغییری می‌کنند.

۲. عدد a را بر b تقسیم کردیم، خارج‌قسمت q و باقی‌مانده r می‌باشد. یعنی:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r & \end{array}$$

اگر ۱۷ واحد به مقسوم و ۵ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج‌قسمت تغییر نمی‌کند، اما از باقی‌مانده ۳ واحد کم می‌شود. خارج‌قسمت را بیابید.

راهنمایی: تقسیم جدید به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{r|l} a+۱۷ & b+۵ \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r-۳ & \end{array}$$

(رابطه‌ی تقسیم‌ها را بنویسید و ...)

۳. با توجه به تقسیم‌های زیر، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a \times b$ بر ۷ را تعیین کنید.

$$\begin{array}{r|l} b & ۷ \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} ۶ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} a & ۷ \\ \cline{2-2} & k \\ \cline{1-1} ۵ & \end{array}$$

(رابطه‌ی تقسیم‌ها را بنویسید و در هم ضرب کنید)

٤. از بین اعداد زیر، فقط یکی مربع کامل است، آن را بیابید.

۱) ۵۶۱۶۷   ۲) ۵۶۱۶۹   ۳) ۵۶۱۶۵

۵. با توجه به الگوریتم تقسیم هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر با ۰، ۱ یا ۲ دارد. یعنی هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت $۳k$، $۳k+۱$ یا $۳k+۲$ نوشت.

ثابت کنید مربع هر عدد طبیعی را نمی‌توان به‌صورت $۳q+۲$ نوشت.

۶. در بین اعداد ۱، ۲، ۳، ...و ۱۳۹۳ چند عدد یافت می‌شود که در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۵ داشته باشد؟

۷. در بین اعداد ۱، ۲، ۳، ...و ۱۳۹۳ چند عدد یافت می‌شود که در تقسیم مربع هر یک از آن‌ها بر ۸ باقی‌مانده ۵ باشد؟

۸. در هر دو عدد متوالی، یکی (دقیقاً یکی) بر ۲ بخش‌پذیر است.

در هر سه عدد متوالی، یکی (دقیقاً یکی) بر ۳ بخش‌پذیر است.

به‌طور مثال $\underline{۹}$ و ۸ و ۷   یا   ۱۳ و $\underline{\underline{۱۲}}$ و ۱۱ و ...

آیا می‌توان گفت:

در هر n عدد متوالی، یکی (دقیقاً یکی) بر n بخش‌پذیر است؟

اثبات کنید.

۹. همه‌ی شمارنده‌های مثبت عدد n را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ نوشته‌ایم:

$$\{۱, a, \cdots, ۱۵, n\}$$

n چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۱۰. در یک تقسیم ۷ واحد به مقسوم‌علیه و ۶۳ واحد به مقسوم اضافه کردیم. باقی‌مانده و خارج‌قسمت تغییری نکردند. خارج‌قسمت چند است؟

۱۱. با توجه به هر یک از تساوی‌های زیر باقی‌مانده‌ی تقسیم‌های خواسته شده را مشخص کنید.

الف. $a = ۵q + ۳$؛ باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵ =؟

ب. $a = ۷q + ۲۰$؛ باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷ =؟

ج. $a = ۳۰q + ۱۱$؛ باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۵ =؟

د. $a = ۳۰q + ۱۱$؛ باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۶ =؟

۱۲. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷ برابر باشد با ۳؛ و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۸ برابر باشد با ۲؛ آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵۶ را به‌دست آورید.

۱۳. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳ و ۵ به‌ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۵ چند است؟

۱۴. ثابت کنید هیچ‌یک از عددهای زیر مربع کامل نیستند:

$$۱۱, ۱۱۱, ۱۱۱۱, ۱۱۱۱۱, \cdots$$

۱۵. روی هر یک از ۱۸ کارت، دقیقاً یکی از اعداد ۴ یا ۵ را نوشته‌ایم. مجموع همه‌ی اعداد بر ۱۷ بخش‌پذیر است. روی چند تا از این کارت‌ها عدد ۴ نوشته شده است؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷　　۵) ۹

«مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ـ ۲۰۱۰»

۲.۱ بخش دوم

تجزیه‌ی اعداد طبیعی

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، یا اول است، یا می‌توان آن را به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت.

به‌طور مثال:

۱۷	=	اول		
۱۸	=	$۲ \times ۳ \times ۳$	$\rightarrow$	(اعداد ۲ و ۳ اول می‌باشند)
۲۰۰	=	$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵$	$\rightarrow$	(اعداد ۲ و ۵ اول می‌باشند)
۲۱۰	=	$۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷$	$\rightarrow$	(اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ اول می‌باشند)

در تجزیه‌ی اعداد، حاصل‌ضرب اعداد یکسان را به‌صورت توانی می‌نویسیم.

به‌طور مثال:

$$۱۸ = ۲ \times ۳^{۲} \qquad ۲۰۰ = ۲^{۳} \times ۵^{۲}$$

با تقسیم کردن هر عدد، بر اعداد اول می‌توان آن را تجزیه کرد.

به‌طور مثال برای تجزیه‌ی عدد ۱۶۸، ابتدا آن را بر عدد اول ۲ تقسیم می‌کنیم. خارج‌قسمت ۸۴ است. آن را دوباره بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۱۶۸ & ۲ \\ \hline -۱۶۸ & ۸۴ \\ \hline ۰ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۸۴ & ۲ \\ \hline -۸۴ & ۴۲ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

باز هم ۴۲ بر ۲ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} ۴۲ & ۲ \\ \hline -۴۲ & ۲۱ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

۲۱ دیگر بر ۲ بخش‌پذیر نیست. اما بر ۳ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} ۲۱ & ۳ \\ \hline -۲۱ & ۷ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

و ۷ فقط بر ۷ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} ۷ & ۷ \\ \hline -۷ & ۱ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

همه‌ی این تقسیم‌ها را در یک نمودار می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{r|l} ۱۶۸ & ۲ \\ ۸۴ & ۲ \\ ۴۲ & ۲ \\ ۲۱ & ۳ \\ ۷ & ۷ \\ ۱ & \end{array}$$

و تجزیه‌ی عدد ۱۶۸ به‌صورت $۲^{۳} \times ۳ \times ۷$ می‌باشد. (حاصل‌ضرب اعداد سمت راست در نمودار بالا)

کاربردهای تجزیه

۱. تعیین تعداد شمارنده‌های مثبت یک عدد

ـ می‌خواهیم تعداد شمارنده‌های مثبت عدد ۶۷۵ را مشخص کنیم. برای این کار ابتدا عدد ۶۷۵ را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۶۷۵ & ۳ \\ ۲۲۵ & ۳ \\ ۷۵ & ۳ \\ ۲۵ & ۵ \\ ۵ & ۵ \\ ۱ & \end{array} \qquad ۶۷۵ = ۳^{۳} \times ۵^{۲}$$

ـ سپس به هر یک از توان‌ها یک واحد اضافه می‌کنیم و اعداد حاصل را در هم ضرب می‌کنیم.

$$۶۷۵ = ۳^{۳} \times ۵^{۲} \rightarrow (۳ + ۱) \times (۲ + ۱) = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

عدد ۶۷۵ دارای ۱۲ شمارنده‌ی مثبت می‌باشد.

۲. تشخیص مربع کامل بودن یک عدد

اگر عددی را تجزیه کنیم و در تجزیه‌ی آن همه‌ی توان‌ها زوج باشند، آن عدد مربع کامل می‌باشد.

به‌طور مثال، عدد ۵۷۶ مربع کامل است. زیرا وقتی آن را تجزیه می‌کنیم، همه‌ی توان‌ها زوجند.

$۵۷۶ = ۲^{۶} \times ۳^{۲} \rightarrow$ اعداد ۶ و ۲ (توان‌ها) زوجند

پس ۵۷۶ مربع کامل است.
اگر بخواهیم جذر ۵۷۶ را بیابیم (منظور از جذر ۵۷۶، عددی است که اگر در خودش ضرب شود حاصل ۵۷۶ می‌شود)
کافی است در تجزیه، توان‌ها را نصف کنیم.

$$۲^{۶} \times ۳^{۲} \xrightarrow{\text{جذر}} ۲^{۳} \times ۳^{۱} = ۸ \times ۳ = ۲۴$$

یعنی: $۵۷۶ = ۲۴ \times ۲۴$ (جذر ۵۷۶ عدد ۲۴ می‌باشد.)

۳. تشخیص مکعب کامل بودن یک عدد

عددی مانند ۸ مکعب کامل است زیرا برابر است با عدد طبیعی ۲ به توان ۳ (یعنی $۲^۳ = ۸$)

آیا عدد ۱۰۰ مکعب کامل است؟ عدد ۱۲۴ چه‌طور؟

هیچ عدد طبیعی یافت نمی‌شود که اگر به توان ۳ برسد حاصل ۱۰۰ شود اما ۱۲۵ مکعب کامل است زیرا: $۵^۳ = ۱۲۵$

اگر عددی را تجزیه کنیم و در تجزیه آن، همه‌ی توان‌ها مضرب ۳ باشند، آن عدد مکعب کامل است.

به‌طور مثال عدد ۱۷۲۸ مکعب کامل است زیرا تجزیه‌ی آن به‌صورت $۲^۶ \times ۳^۳$ می‌باشد. در تجزیه‌ی آن توان‌ها ۶ و ۳ هستند که هر دو مضرب ۳ می‌باشند.

اما عدد ۶۷۵ مکعب کامل نیست زیرا تجزیه‌ی آن به‌صورت $۵^۲ \times ۳^۳$ است. در تجزیه‌ی آن توان‌ها ۲ و ۳ هستند ۲ مضرب ۳ نیست پس ۶۷۵ مکعب کامل نیست.

مثال ۴ **کوچک‌ترین مقدار طبیعی a را چنان تعیین کنید که $۳۵۲۸ \times a$ مربع کامل باشد.**

حل. عدد ۳۵۲۸ را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$۳۵۲۸ \times a = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۷^۲ \times a$$

چون برای مربع کامل بودن باید همه‌ی توان‌ها زوج باشند و در این‌جا فقط توان عدد $۲^۳$ فرد است، کوچک‌ترین مقدار طبیعی که به جای a باید قرار دهیم عدد ۲ است؛ تا وقتی در $۲^۳$ ضرب شد $۲^۴$ حاصل گردد و توان ۲ هم زوج شود.

مثال ۵ **ثابت کنید اگر عددی مربع کامل باشد، تعداد شمارنده‌های مثبت آن، عددی فرد می‌باشد.**

حل. اگر عددی مربع کامل باشد، در تجزیه‌ی آن همه‌ی توان‌ها زوج‌اند. برای تعیین تعداد شمارنده‌های آن، به هر توان یکی اضافه می‌کنیم و اعداد حاصل را در هم ضرب می‌کنیم. وقتی به هر توان یکی اضافه می‌کنیم اعداد حاصل، همگی فرد خواهند شد و حاصل‌ضرب آن‌ها هم فرد می‌شود.

مثال ۶ **می‌دانیم عدد صحیح مثبت n، بر ۲۱ و بر ۹ بخش‌پذیر است. کدام‌یک از جواب‌های زیر می‌تواند تعداد شمارنده‌های مثبت n باشد؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

«مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ـ ۲۰۰۲»

حل. کوچک‌ترین عددی که هم بر ۹ بخش‌پذیر است و هم بر ۲۱ عدد ۶۳ می‌باشد. تعداد شمارنده‌های آن برابر است با:

$$۶۳ = ۳^۲ \times ۷^۱ \rightarrow (۲+۱)(۱+۱) = ۳ \times ۲ = ۶$$

گزینه‌ی «۴» صحیح است.

تمرین‌های بخش دوم

۱. کوچک‌ترین عدد طبیعی a را چنان تعیین کنید که $a \times ۲۸۸۰$ مکعب کامل باشد.

۲. عدد $۵^۷ \times ۳^x$ دارای ۴۰ شمارنده‌ی مثبت است. x چند است؟

۳. عدد $۳^y \times ۲^{۲x}$ دارای ۱۴ شمارنده‌ی مثبت است. مقدار x و y را بیابید. (x و y عدد صحیح می‌باشند.)

۴. عدد $۱۰۰ \times ۳^۲ \times ۴^۳$ چند شمارنده‌ی مثبت دارد؟

۵. نشان دهید اگر عددی مربع کامل باشد، رقم یکان آن ۲، ۳، ۷ یا ۸ نمی‌تواند باشد.

۶. می‌دانیم $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = !۵$ ($!۵$ را پنج فاکتوریل می‌خوانیم)

به‌طور کلی

$$n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n$$

اگر حاصل $n! + \cdots + ۳! + ۲! + ۱!$ مربع کامل باشد، n چند است؟

۷. عدد $۵^۲ \times ۳ \times ۲^۳$ برابر است با:

$$۲^۳ \times ۳ \times ۵^۲ = ۸ \times ۳ \times ۲۵ = ۶۰۰$$

عدد حاصل ۲ رقم صفر در سمت راست خود دارد.

عدد حاصل از $۷^۴ \times ۵^۶ \times ۳^۷ \times ۲^۸$ در سمت راست خود چند رقم صفر خواهد داشت؟

۸. بیش‌ترین مقدار n را چنان بیابید که ۳^n عدد $!۱۰۰$ را بشمارد.

۹. بیش‌ترین مقدار n را چنان بیابید که ۷^n عدد $!۲۰۰$ را بشمارد.

۱۰. عدد $!۱۳۹۳$ در سمت راست خود چند رقم صفر دارد؟

۱۱. عدد اول a را چنان بیابید که $a \times ۷۲$ دارای ۱۵ شمارنده‌ی مثبت باشد.

۱۲. مقدار x را چنان تعیین کنید که عدد $۵^{x+۱} \times ۳^x \times ۸$ دارای ۴۸ شمارنده‌ی طبیعی باشد.

۱۳. چند عدد طبیعی مانند n دارای این ویژگی است که باقی‌مانده تقسیم عدد ۲۰۰۳ بر n برابر است با ۲۳؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۹ ۳) ۱۳ ۴) ۱۲ ۵) ۳۶

«**مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ـ ۲۰۰۳**»

۱۴. چند عدد طبیعی وجود دارد که عامل اول بزرگ‌تر از ۱۵ ندارد و بر هیچ عدد مکعب کامل بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۶۴ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۲۹ ۴) ۲۱۸۷ ۵) ۴۰۹۶

«**المپیاد ریاضی ـ ۱۳۸۶**»

۱۵. حداکثر چند عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۱۳۹۱ می‌توان انتخاب کرد که ضرب هر دو تایی از آن‌ها مربع کامل باشد؟

«**المپیاد ریاضی ـ ۱۳۹۱**»

۱۶. کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت x که به ازای آن داشته باشیم $۱۲۶۰x = N^۳$ و N عدد صحیح باشد، برابر است با:

۱) ۱۰۵۰ ۲) ۱۲۶۰ ۳) $۱۲۶۰^۲$ ۴) ۷۳۵۰ ۵) ۴۴۱۰۰

«**مسابقه‌ی ریاضی دبیرستان آمریکا ـ ۱۹۶۳**»

۱۷. حاصل‌ضرب دو عدد $۲^{۵۰}$ و $۵^{۲۰}$ دقیقاً چند رقم صفر در سمت راست خود دارد؟

۱) ۷۰ ۲) ۷۱ ۳) ۹۰ ۴) ۱۴۰

«**سومین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۳**»

۱۸. حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی برابر است با ۱۰۰۰۰ و رقم یکان هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست. مجموع این دو عدد برابر است با:

۱) ۶۴۱ ۲) ۶۳۳ ۳) ۱۴۱ ۴) ۱۳۳

«**چهارمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۴**»

۱۹. در سمت راست عدد $۱۵^۳ \times ۷^{۱۸} \times ۲۵^۸ \times ۳^{۱۹} \times ۴^{۱۲}$ پس از ساده شدن چند صفر وجود دارد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

«**ششمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۶**»

۲۰. بین دو عدد ۲۸۰۹ و ۲۹۱۶ چند عدد صحیح وجود دارد که مربع کامل باشند؟

۱) هیچ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

«**هفتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۷**»

۲۱. عدد طبیعی $۶۵^۴ \times ۲۱^۳ \times ۲۰^۵$ بر چند عدد اول بخش‌پذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

«**هفتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۷**»

۲۲. تعداد مقسوم‌علیه‌های (شمارنده‌های) عدد $۴۹^۷$ برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

«**دهمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۹۰**»

۳.۱ بخش سوم

(ب‌م‌م) و (ک‌م‌م) دو عدد

۱. (ب‌م‌م) دو عدد

شمارنده‌های مثبت عدد ۴۰ را در نظر بگیرید:

۴۰ و ۲۰ و ۱۰ و ۸ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱

شمارنده‌های مثبت عدد ۲۴ را هم در نظر بگیرید:

۲۴ و ۱۲ و ۸ و ۶ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱

در بین شمارنده‌های مثبت این دو عدد، اعداد زیر مشترکند:

۸ و ۴ و ۲ و ۱

و عدد ۸ بزرگ‌ترین شمارنده‌های مشترک ۴۰ و ۲۴ است. (عدد ۸ را (ب‌م‌م) دو عدد ۴۰ و ۲۴ می‌نامیم.) و می‌نویسیم: $(۲۴,۴۰) = ۸$

روش‌های محاسبه (ب‌م‌م) دو عدد

روش اول. تقسیم‌های متوالی:

می‌خواهیم (ب‌م‌م) دو عدد ۳۲۲ و ۱۲۶ را پیدا کنیم.

۱. ابتدا عدد بزرگ‌تر را بر عدد کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۲۲ & ۱۲۶ \\ \hline -۲۵۲ & ۲ \\ \hline ۷۰ & \end{array}$$

۲. باقی‌مانده صفر نشد. اکنون مقسوم‌علیه یعنی ۱۲۶ را بر باقی‌مانده یعنی ۷۰ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۱۲۶ & ۷۰ \\ \hline -۷۰ & ۱ \\ \hline ۵۶ & \end{array}$$

۳. باز هم باقی‌مانده صفر نشد. دوباره مقسوم‌علیه را بر باقی‌مانده تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۷۰ & ۵۶ \\ \hline -۵۶ & ۱ \\ \hline ۱۴ & \end{array}$$

۴. باز هم باقی‌مانده صفر نشد. مقسوم‌علیه را بر باقی‌مانده تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۵۶ & ۱۴ \\ \hline -۵۶ & ۴ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

۵. باقی‌مانده صفر شد. مقسوم‌علیه این تقسیم برابر است با (ب‌م‌م) ۳۲۲ و ۱۲۶

$$\begin{array}{r|l} ۵۶ & ۱۴ \\ \hline -۵۶ & ۴ \\ \hline ۰ & \end{array} \Rightarrow (۳۲۲, ۱۲۶) = ۱۴$$

مثال ۷ ب‌م‌م دو عدد ۲۳۸ و ۴۰۸ را بیابید.

حل.

$$\begin{array}{r|l} ۴۰۸ & ۲۳۸ \\ \hline -۲۳۸ & ۱ \\ \hline ۱۷۰ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۲۳۸ & ۱۷۰ \\ \hline -۱۷۰ & ۱ \\ \hline ۶۸ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۱۷۰ & ۶۸ \\ \hline -۱۳۶ & ۲ \\ \hline ۳۴ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۶۸ & ۳۴ \\ \hline -۶۸ & ۲ \\ \hline ۰ & \end{array} \quad (۲۳۸, ۴۰۸) = ۳۴$$

روش دوم. به کمک تجزیه

می‌خواهیم (ب‌م‌م) دو عدد ۱۸۰۰ و ۵۶۰ را به‌دست آوریم.

این دو عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$۱۸۰۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۲$$

$$۵۶۰ = ۲^۴ \times ۵ \times ۷$$

(ب‌م‌م) این دو عدد برابر است با حاصل‌ضرب پایه‌های مشترک با توان کوچک‌تر

$$\left.\begin{array}{l} ۱۸۰۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \\ ۵۶۰ = ۲^۴ \times ۵^۱ \times ۷ \end{array}\right. \Rightarrow (۱۸۰۰, ۵۶۰) = ۲^۳ \times ۵^۱ = ۸ \times ۵ = ۴۰$$

۲. (ک‌م‌م) دو عدد

مضرب‌های عدد ۱۸ را در نظر بگیرید:

$$\text{مضرب‌های ۱۸} \rightarrow ۱۸, ۳۶, ۵۴, ۷۲, ۹۰, ۱۰۸, \ldots$$

مضرب‌های عدد ۱۲ را هم در نظر بگیرید:

$$\text{مضرب‌های ۱۲} \rightarrow ۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ۶۰, ۷۲, ۸۴, ۹۶, ۱۰۸, \ldots$$

مضرب‌های مشترک این دو عدد عبارتند از:

$$۳۶, ۷۲, ۱۰۸, \ldots$$

و عدد ۳۶ کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد است.

می‌نویسیم: $[۱۲, ۱۸] = ۳۶$

روش‌های محاسبه‌ی (ک‌م‌م) دو عدد

روش اول. استفاده از رابطه‌ی $[a,b] = \dfrac{a \times b}{(a,b)}$

برای محاسبه‌ی (ک‌م‌م) دو عدد، می‌توان حاصل‌ضرب آن دو عدد را بر (ب‌م‌م) آن دو عدد تقسیم کرد.

مثال ۸ **(ک‌م‌م) دو عدد ۴۲ و ۷۰ را به‌دست آورید.**

حل. ابتدا (ب‌م‌م) این دو عدد را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} ۷۰ & ۴۲ \\ \hline -۴۲ & ۱ \\ \hline ۲۸ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۴۲ & ۲۸ \\ \hline -۲۸ & ۱ \\ \hline ۱۴ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۲۸ & ۱۴ \\ \hline -۲۸ & ۲ \\ \hline ۰ & \end{array} \Rightarrow (۴۲,۷۰) = ۱۴$$

سپس با استفاده از رابطه‌ی بالا (ک‌م‌م) این دو عدد را محاسبه می‌کنیم:

$$[۴۲,۷۰] = \frac{۴۲ \times ۷۰}{(۴۲,۷۰)} = \frac{۴۲ \times ۷۰}{۱۴} = ۲۱۰$$

روش دوم. به کمک تجزیه

می‌خواهیم (ک‌م‌م) دو عدد ۱۸۰۰ و ۵۶۰ را به‌دست آوریم.

این دو عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$۱۸۰۰ = ۲^{۳} \times ۳^{۲} \times ۵^{۲}$$

$$۵۶۰ = ۲^{۴} \times ۵ \times ۷$$

(ک‌م‌م) این دو عدد برابر است با حاصل‌ضرب پایه‌های مشترک با توان بزرگ‌تر ضرب در پایه‌های غیرمشترک (با هر توانی که دارند.)

$$\begin{array}{l} ۱۸۰۰ = ۲^{۳} \times ۳^{۲} \times ۵^{۲} \\ ۵۶۰ = ۲^{۴} \times ۵^{۱} \times ۷ \end{array} \Rightarrow [۱۸۰۰,۵۶۰] = ۲^{۴} \times ۵^{۲} \times ۳^{۲} \times ۷ = ۲۵۲۰۰$$

مثال ۹ **اگر (ب‌م‌م) دو عدد ۱ باشد (ک‌م‌م) آن دو عدد چگونه به‌دست می‌آید؟**

حل. می‌دانیم:

$$[a,b] = \frac{a \times b}{(a,b)}$$

اگر $(a,b) = ۱$ باشد:

$$[a,b] = a \times b$$

نتیجه: اگر (ب‌م‌م) دو عدد ۱ باشد، (ک‌م‌م) آن دو عدد برابر است با حاصل‌ضرب آن دو عدد.

مثال ۱۰ **اگر $a = ۲^{x} \times ۳^{۴}$، $b = ۲^{۵} \times ۳^{y}$ و $(a,b) = ۲^{۳} \times ۳$ باشد مقدار x و y را بیابید.**

حل. با توجه به پایه‌های مشترک $۲^{۵}$ و ۲^{x} و این‌که در (ب‌م‌م) $۲^{۳}$ دیده می‌شود: $x = ۳$ ((ب‌م‌م) شامل پایه‌های مشترک با توان کوچک‌تر است) و هم‌چنین ۳^{y} و $۳^{۴}$ و این‌که در (ب‌م‌م) $۳^{۱}$ دیده می‌شود: $y = ۱$

تمرین‌های بخش سوم

۱. ثابت کنید (ب‌م‌م) دو عدد متوالی ۱ است.

۲. اگر a و b دو عدد اول متمایز (مختلف، متفاوت) باشند، ثابت کنید: $(a, b) = ۱$

۳. به کمک (ب‌م‌م) صورت و مخرج، هر یک از کسرهای زیر را ساده کنید.

الف. $\frac{۵۹۸}{۸۷۴}$ ب. $\frac{۱۱۴۷}{۱۳۶۹}$

(راهنمایی: صورت و مخرج را بر (ب‌م‌م) آن‌ها تقسیم کنید)

۴. اگر حاصل‌ضرب دو عدد صحیح $۲^۵ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۷^۳$ باشد، مجموع این دو عدد:

۱) ممکن است بر ۸ بخش‌پذیر باشد. ۲) ممکن است بر ۳ بخش‌پذیر باشد. ۳) ممکن است بر ۵ بخش‌پذیر باشد.
۴) ممکن است بر ۴۹ بخش‌پذیر باشد. ۵) ممکن نیست بر هیچ‌یک از اعداد ۸، ۳، ۵ یا ۴۹ بخش‌پذیر باشد.

«**مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ـ ۲۰۰۶**»

۵. عدد صحیح مثبت n دارای ۲ شمارنده‌ی مثبت است، در حالی که $n + ۱$ دارای ۳ شمارنده‌ی مثبت است. عدد $n + ۲$ چند شمارنده‌ی مثبت دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) به n بستگی دارد.

«**مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ـ ۲۰۰۷**»

۶. اگر (ب‌م‌م) دو عدد ۱ باشد، می‌گوییم آن دو عدد «نسبت به هم اول» می‌باشند.
ثابت کنید به ازای همه‌ی مقادیر طبیعی n، دو عدد $۷n + ۹$ و $۳n + ۴$ نسبت به هم اولند.

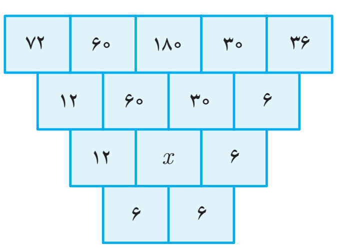
۷. (ک‌م‌م) سه عدد ۳۶، ۶۳ و ۱۴۰ را بیابید.

۸. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) دو عدد ۸۱ و ۱۰۸ بر چند عدد اول بخش‌پذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

«**هفتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۷**»

۹. با توجه به الگوی مقابل مقدار x کدام عدد می‌تواند باشد؟



۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۶۰

«**هفتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۷**»

۱۰. اگر m و n دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند و $\frac{m}{n} = \frac{۲۰۲۰}{۹۰۹} \times \frac{۷۰۷}{۱۴۱۴}$ آن‌گاه $m + n$ برابر است با:

۱) ۱۹۱۹ ۲) ۱۹ ۳) ۱۱۰۹ ۴) ۳۸

«**هشتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۸**»

۱۱. ب‌م‌م دو عدد x و y برابر است با ۶ و ب‌م‌م دو عدد x و z برابر است با ۸. اگر $۹۵ > x > ۵۰$ باشد، عدد x چند است؟

۴.۱ بخش چهارم

عدد اول

تعریف عدد اول را می‌دانید. به هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ که فقط دو شمارنده‌ی طبیعی دارد، عدد اول می‌گویند. یکی از این شمارنده‌ها عدد ۱ و شمارنده‌های دیگر خود عدد است.

مانند: ۳ که فقط دو شمارنده‌ی مثبت دارد: ۱ و ۳

و یا ۱۷ که شمارنده‌های مثبت آن ۱ و ۱۷ می‌باشند.

مثال ۱۱ آیا عدد ۳۰۷ اول است؟

حل. بخش‌پذیر بودن ۳۰۷ بر اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۳۰۷ & ۲ \\ \hline ۱ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۳۰۷ & ۳ \\ \hline ۱ & \end{array} \qquad ۳۰۷$$

بر ۲ بخش‌پذیر نیست   بر ۳ بخش‌پذیر نیست   بر ۵ بخش‌پذیر نیست   ...

اما تا کجا پیش برویم؟

توجه کنید که

$$۲ \times ۲ = ۴ \quad , \quad ۳ \times ۳ = ۹ \quad , \quad \dots \quad , \quad ۱۷ \times ۱۷ = ۲۸۹ \quad , \quad ۱۹ \times ۱۹ = ۳۶۱$$

عدد ۳۶۱ اولین عدد مرکبی است که بر هیچ‌یک از اعداد اول ۲، ۳، ۵، ...، ۱۷ بخش‌پذیر نیست. $۳۶۱ > ۳۰۷$ پس بخش‌پذیری را تا ۱۷ بررسی می‌کنیم ... .

«**ادامه به عهده‌ی شما**»

چند نکته

۱. توجه داشته باشید که ۲ تنها عدد اول زوج است.

۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳، بر عدد ۶ همواره ۱ یا ۵ است.

زیرا: با توجه به الگوریتم تقسیم هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۶ به یکی از صورت‌های زیر نوشته می‌شود:

$۶k$ ،$۶k+۱$ ،$۶k+۲$ ،$۶k+۳$ ،$۶k+۴$ ،$۶k+۵$

در بین اینها $۶k$، $۶k+۲$، $۶k+۳$ و $۶k+۴$ همیشه مرکب‌اند.

۳. اگر عدد اول p عدد a^n را بشمارد، آنگاه p عدد a را می‌شمارد به‌طور مثال $۲۰^{۱۷}$ بر عدد اول ۵ بخش‌پذیر است مشاهده می‌کنید که ۲۰ هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

تمرین‌های بخش چهارم

۱. آیا عدد ۳۲۳ اول است؟

۲. چند تا از اعداد زیر اول‌اند؟

$$۹۳! + ۲\ ,\ ۹۳! + ۳\ ,\ ۹۳! + ۴\ ,\ \cdots\ ,\ ۹۳! + ۹۶$$

۳. عدد $۲۰۱۵^{۱۳۹۳} + ۱۳۹۳^{۲۰۱۵}$ اول است یا مرکب؟ چرا؟

۴. چند عدد اول کوچک‌تر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن ۲ است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵   ۵) ۶

«**المپیاد ریاضی ـ ۱۳۷۶**»

۵. مقدار x را چنان بیابید که $x - ۵$ و $x + ۱۰$ هر دو، اول باشند.

۶. یک عدد اول را «بسیار اول» گوییم اگر هر قطعه از رقم‌های متوالی آن نیز عددی اول به‌وجود آورند. اعداد «بسیار اول» دورقمی عبارتند از ۲۳، ۳۷، ۵۳ و ۷۳. چند عدد «بسیار اول» سه‌رقمی وجود دارد؟

«**المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۶**»

۷. در عبارت $n^۲ + n + ۴۱$ به جای n عدد ۱ را قرار دهید. آیا عدد حاصل، اول است؟

به جای n عدد ۲ را قرار دهید. آیا عدد حاصل، اول است؟

به جای n هر بار اعداد ۳، ۴، ۵ و ... را جاگذاری کنید و هر بار اول بودن آن را بررسی کنید. آیا می‌توان گفت عبارت $n^۲ + n + ۴۱$ به ازای همه‌ی اعداد طبیعی n، عدد اول تولید می‌کند؟ چرا؟

۸. اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد.

الف. ثابت کنید $p^۲ + ۲۳$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

ب. ثابت کنید $p^۲ + ۲۳$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۹. کریستین گُلدباخ در سال ۱۶۹۰ در شهر کونیکسبرگ متولد شد. او در سال ۱۷۴۲ به لئونارد اویلر نامه‌ای نوشت و حدس خود را بیان کرد. این حدس تاکنون اثبات یا رد نشده است.

حدس گلدباخ این است که «هر عدد طبیعی زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت.» و «هر عدد طبیعی فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول نوشت»

به‌طور مثال:

$$۴ = ۲ + ۲$$

$$۶ = ۳ + ۳$$

$$۸ = ۳ + ۵$$

و ...

$$۱۹ = ۵ + ۳ + ۱۱$$

$$۲۳ = ۳ + ۳ + ۱۷$$

و ...

الف. هر یک از اعداد ۸۰، ۶۴ و ۱۰۲ را به‌صورت مجموع دو عدد اول بنویسید.
ب. هر یک از اعداد ۱۰۱، ۹۷ و ۶۳ را به‌صورت مجموع سه عدد اول بنویسید.

۱۰. عددی را «هشتی» می‌نامیم که حاصل‌جمع هر دو تا از شمارنده‌های مثبت آن بر ۸ بخش‌پذیر باشد. (مانند ۷ که شمارنده‌های مثبت آن ۱ و ۷ می‌باشند و ۸ = ۷ + ۱ و ۸ بر ۸ بخش‌پذیر است.) چند عدد «هشتی» در بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۸۰ وجود دارد؟

۱۱. چهار عدد طبیعی داریم. حاصل‌جمع هر دو تا از آن‌ها را می‌نویسیم و همه‌ی اعداد به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم ثابت کنید عدد نهایی مرکب است.

۱۲. اگر p و $p+2$ اعدادی اول باشند و $p > 3$ باشد، ثابت کنید مجموع این دو عدد اول بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۱۳. اعداد x، y، z و t چهار عدد طبیعی‌اند به‌طوری که $xy = 6$، $xz = 12$، $zt = 50$ و $yt = 25$ مقدار xt برابر است با:

۱) ۱۵۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۷۵ ۴) ۳۰

«سومین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۳»

۱۴. اگر p و q دو عدد اول متوالی باشند (بین p و q عدد اول دیگری نباشد) و x یک عدد طبیعی باشد به‌طوری که $2x - p = q$ در مورد x چه می‌توان گفت؟

۱) اول است ۲) مرکب است ۳) یا اول است یا مرکب ۴) وجود ندارد

«هشتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۸»

۱۵. کدام عدد زیر اول است؟

۱) ۱۴۰۹ ۲) ۱۱۲۱۱
۳) $26^{198} + 125^{59} + 1$ ۴) $5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + \cdots + 5^{99} + 4^{52} + 1$

«نهمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ ـ ۱۳۸۸»