

مقدمه مؤلفان

به کتاب پاسخ‌نامه ریاضیات تجربی جامع خیلی سبز خوش آمدید.

ویژگی‌های این کتاب و شیوه استفاده از آن:

۱) پاسخ سؤال‌ها در هر فصل با توجه به یک روند آموزشی نوشته شده است. معمولاً در سؤال‌های اول، راه‌حل‌ها تشریحی‌تر و با توضیح بیشتر است و هر چه که جلوتر می‌روید راه‌حل‌ها حرفه‌ای‌تر، سریع‌تر و با توضیح کم‌تر می‌شوند.

۲) در بعضی از سؤال‌ها (راه I)، (راه II) و ... آورده شده است. معمولاً (راه I) سریع‌ترین یا متداول‌ترین راه‌حل است و راه‌حل‌های بعدی برای توضیح شیوه‌های دیگر و یا نوع نگاه دیگری به سؤال با توجه به مباحث دیگر یا با توجه به نکاتی که در درس‌نامه گفته شده آورده شده‌اند.

۳) در پاسخ‌ها هر جا که لازم بوده **نکته** یا **اشاره** یا **خاطره** داریم.

نکته به مفهوم مطلب، رابطه، فرمول یا ... است که باید بدانید تا بتوانید سؤال را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

اشاره مثل یک تلنگر است که به شکل درست و مفهومی به سؤال نگاه کنید. گاهی وقت‌ها هم در **اشاره** سؤالی پرسیده‌ایم که باعث شود بیشتر با مفاهیم سؤال درگیر شوید.

خاطره همان‌طور که از اسمش پیداست یک یادآوری سریع در مورد مفهوم، فرمول، رابطه یا ... آن مبحث درسی است.

۴) توصیه می‌کنیم برای حل تست‌ها:

الف) تعداد معینی سؤال (مثلاً ۳۰ تا ۴۰ تا) برای یک نشست انتخاب کنید.

ب) با توجه به زمانی که برای این تست در نظر گرفته‌اید تست‌ها را حل کنید.

پ) به پاسخ‌نامه کلیدی که در جلد درس‌نامه و سؤال آمده است مراجعه کنید و تست‌هایی را که نزده‌اید یا جواب نادرست داده‌اید مشخص کنید.

ت) برگردید و سعی کنید اولاً تست‌هایی را که حل نکرده‌اید حل کنید و ثانیاً تست‌هایی را پاسخ نادرست داده‌اید دوباره بررسی کنید و ببینید آیا می‌توانید به پاسخ درست برسید.

ث) حالا بیا بید سرآغ پاسخ‌نامه، پاسخ همه تست‌ها را حتی آن‌هایی را که درست پاسخ داده‌اید بررسی کنید. به **نکته** ها، **اشاره** ها،

راه I و **راه II** توجه کنید تا هر چه را که لازم است درست یاد بگیرید.

۵) گاهی وقت‌ها ممکن است با دیدن راه‌حل یک تست که به نظر طولانی می‌رسد تعجب کنید یا ناامید شوید. حواستان باشد که در این کتاب بعضی از راه‌حل‌ها به علت این که لازم بوده همه چیز را خوب توضیح دهیم طولانی شده است و در عمل، هنگام حل سؤال لازم نیست این همه بنویسید.

۶) در بعضی از سؤال‌ها، از روش **عددگذاری** استفاده کرده‌ایم. سعی‌مان این بوده که در تست‌هایی از این روش استفاده کنیم که مناسب بوده و در عین حال تست و مفاهیمش این ویژگی را داشته باشند که در موارد مشابه از همین شیوه استفاده کنیم. به همین علت سعی کرده‌ایم در استفاده از **عددگذاری** زیاده‌روی و افراط نکنیم.

۷) امسال یک ID هم داریم که می‌توانید هر سؤال یا اشکالی که داشته باشید بروید سراغ این ID. نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را هم از همین طریق برایمان بفرستید.

@riazi_hamrah_konkoor

• کل پاسخ‌ها چند بار بررسی و ویرایش شده‌اند. سعی‌مان این بوده که کتاب بدون اشتباه باشد. اما حتماً طبق قوانین طبیعت ممکن است باز هم اشتباهاتی رخ داده باشد. اگر اشتباه، نقص یا نکته‌ای در کتاب دیدید لطفاً برایمان بنویسید و بفرستید. به ما در بهتر شدن این کتاب بسیار کمک می‌کنید. در هر مورد دیگر هم هر پیشنهادی داشتید خوشحال می‌شویم که بشنویم.

• آقایان افشین ملاک‌پور و علی مقدم‌نیا که از اساتید برجسته و خوشنام‌اند با نظرات و پیشنهادات‌شان سهم مهمی در بهتر شدن کتاب داشته‌اند. بر خود واجب می‌دانیم از ایشان نهایت سپاس و تشکر را داشته باشیم.

• هم‌چنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائه نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده‌اند، از این دوستان، آقایان معین کرمی، حسین نادری، مصطفی کرمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.

• از تمام معلمان گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنند نیز درخواست می‌کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

خوب و شاد و پیروز باشید.

فهرست

شماره صفحه

شماره پاسخ

۷	۱	درس ۱: قدرمطلق
۱۰	۲۸	درس ۲: جزء صحیح
۱۵	۷۳	درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه
۲۰	۱۱۸	درس ۲: مفهوم دامنه و برد - تعیین دامنه
۲۸	۱۸۴	درس ۳: انواع تابع
۳۵	۲۴۳	درس ۴: انتقال نمودارها
۴۵	۲۹۴	درس ۵: معرفی توابع چندجمله‌ای و بررسی x^3
۴۸	۳۱۸	درس ۶: اعمال جبری روی توابع
۵۳	۳۵۲	درس ۷: ترکیب توابع
۶۴	۴۳۳	درس ۸: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)
۶۹	۴۷۷	درس ۹: تابع یک‌به‌یک
۷۲	۴۹۷	درس ۱۰: وارون تابع و تابع وارون
۸۳	۵۸۳	درس ۱۱: تعیین برد تابع
۸۸	۶۱۸	درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه و رادیان)
۹۰	۶۳۲	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه
۹۴	۶۷۰	درس ۳: دایره مثلثاتی و علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های چهارگانه
۹۸	۷۰۴	درس ۴: اتحادهای اولیه
۱۰۳	۷۳۵	درس ۵: زاویه‌های ترکیبی
۱۰۵	۷۵۷	درس ۶: کمان‌های 2α
۱۱۲	۸۱۴	درس ۷: تابع متناوب
۱۱۴	۸۳۶	درس ۸: رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس
۱۲۰	۸۸۲	درس ۹: تانژانت
۱۲۴	۹۱۵	درس ۱۰: معادله مثلثاتی
۱۳۳	۹۷۲	درس ۱: تقسیم چندجمله‌ای‌ها
۱۳۴	۹۸۸	درس ۲: همسایگی
۱۳۵	۹۹۹	درس ۳: فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد
۱۴۳	۱۰۷۶	درس ۴: رفع ابهام صفر صفرم ($\frac{0}{0}$)
۱۵۷	۱۱۷۳	درس ۵: حد بی‌نهایت
۱۶۲	۱۲۲۱	درس ۶: حد در بی‌نهایت
۱۶۹	۱۲۸۷	درس ۷: پیوستگی
۱۷۸	۱۳۴۸	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۱۸۰	۱۳۸۳	درس ۲: قواعد مشتق‌گیری
۱۸۷	۱۴۴۸	درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده‌کردن)
۱۹۱	۱۴۹۸	درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی
۱۹۵	۱۵۲۲	درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق
۲۰۰	۱۵۶۴	درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه)

فصل صفر قدرمطلق و جزء صحیح

فصل اول تابع

فصل ۵ ریاضی دهم
فصل ۳ ریاضی یازدهم
فصل ۱ ریاضی دوازدهم

فصل دوم مثلثات

فصل ۲ ریاضی دهم
فصل ۴ ریاضی یازدهم
فصل ۲ ریاضی دوازدهم

فصل سوم حد و پیوستگی

فصل ۶ ریاضی یازدهم
فصل ۳ ریاضی دوازدهم

فصل چهارم مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

۲۰۳	۱۵۸۲	درس ۷: نقاط مشتق ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم
۲۰۹	۱۶۳۶	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق
۲۱۱	۱۶۵۵	درس ۹: مشتق تابع مرکب
۲۱۷	۱۷۰۷	درس ۱۰: آهنگ تغییر

فصل چهارم مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

۲۲۰	۱۷۳۰	درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق
۲۲۵	۱۷۷۱	درس ۲: نقطه بحرانی
۲۳۰	۱۸۰۸	درس ۳: اکسترم‌های نسبی
۲۳۹	۱۸۶۳	درس ۴: اکسترم‌های مطلق
۲۴۴	۱۸۹۹	درس ۵: بهینه‌سازی

فصل پنجم کاربرد مشتق

فصل ۵ ریاضی دوازدهم

۲۵۱	۱۹۴۳	درس ۱: تفکر تجسمی
۲۵۷	۱۹۹۴	درس ۲: بیضی
۲۶۲	۲۰۳۶	درس ۳: دایره

فصل ششم هندسه (تفکر تجسمی و ...)

فصل ۶ ریاضی دوازدهم

۲۷۲	۲۱۰۹	درس ۱: فضای نمونه‌ای و پیشامد
۲۷۴	۲۱۲۸	درس ۲: احتمال رخداد یا پیشامد
۲۸۰	۲۱۸۸	درس ۳: قوانین احتمال
۲۸۲	۲۲۱۲	درس ۴: احتمال شرطی
۲۸۵	۲۲۴۹	درس ۵: پیشامدهای مستقل
۲۸۹	۲۲۹۱	درس ۶: قانون احتمال کل

فصل هفتم احتمال

فصل ۷ ریاضی دهم

فصل ۷ ریاضی یازدهم

فصل ۷ ریاضی دوازدهم

۲۹۲	۲۳۱۶	درس ۱: معادله درجه دوم
۳۰۵	۲۴۱۹	درس ۲: سهمی

فصل هشتم معادله درجه دوم و سهمی

فصل ۴ ریاضی دهم

فصل ۱ ریاضی یازدهم

۳۱۳	۲۴۷۸	درس ۱: معادلات گویا
۳۱۶	۲۴۹۶	درس ۲: معادلات رادیکالی
۳۱۹	۲۵۲۰	درس ۳: تعیین علامت
۳۲۴	۲۵۵۷	درس ۴: معادلات قدرمطلق

فصل نهم معادله، نامعادله و تعیین علامت

فصل ۱ ریاضی یازدهم

۳۲۸	۲۵۸۱	درس ۱: یادآوری و تکمیل معادله خط
-----	------	----------------------------------

فصل دهم هندسه تحلیلی

فصل ۱ ریاضی یازدهم

۳۴۲	۲۶۸۶	درس ۱: تابع نمایی
۳۴۷	۲۷۲۶	درس ۲: تابع لگاریتمی
۳۵۰	۲۷۵۴	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم
۳۵۳	۲۷۹۳	درس ۴: معادلات لگاریتمی
۳۵۶	۲۸۲۰	درس ۵: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

فصل یازدهم توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۵ ریاضی یازدهم

۳۵۷	۲۸۲۸	درس ۱: توان و ریشه
۳۵۸	۲۸۴۷	درس ۲: رادیکال و توان‌های گویا
۳۶۰	۲۸۶۳	درس ۳: اتحادها
۳۶۵	۲۹۰۴	درس ۴: گویا کردن مخرج کسرها

فصل دوازدهم

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل ۳ ریاضی دهم

۳۶۷	۲۹۱۹	درس ۱: مجموعه‌های اعداد، بازه، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۳۶۹	۲۹۴۳	درس ۲: مجموعه مرجع و متمم
۳۷۱	۲۹۵۶	درس ۳: تعداد اعضای مجموعه

فصل سیزدهم

مجموعه و بازه

فصل ۱ ریاضی دهم

۳۷۲	۲۹۶۸	درس ۱: الگوهای هندسی
۳۷۷	۳۰۱۲	درس ۲: دنباله حسابی
۳۸۰	۳۰۵۱	درس ۳: دنباله هندسی

فصل چهاردهم

الگو و دنباله

فصل ۱ ریاضی دهم

۳۸۴	۳۰۸۹	درس ۱: شمارش
۳۸۷	۳۱۲۹	درس ۲: جایگشت
۳۸۹	۳۱۶۶	درس ۳: ترکیب
۳۹۴	۳۲۲۳	درس ۴: جایگشت با حضور اشیای تکراری

فصل پانزدهم

شمارش، بدون شمردن

فصل ۶ ریاضی دهم

۳۹۶	۳۲۳۸	درس ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار
۳۹۶	۳۲۴۷	درس ۲: شاخص‌های مرکزی
۳۹۹	۳۲۷۵	درس ۳: شاخص‌های پراکندگی

فصل شانزدهم

آمار

فصل ۷ ریاضی دهم
فصل ۷ ریاضی یازدهم

۴۰۴	۳۳۳۰	درس ۱: ترسیم‌های هندسی
۴۰۸	۳۳۵۹	درس ۲: استدلال
۴۰۸	۳۳۶۹	درس ۳: نسبت و تناسب - قضیه تالس
۴۱۳	۳۴۱۰	درس ۴: تشابه مثلث‌ها
۴۱۵	۳۴۲۹	درس ۵: نسبت مساحت‌ها
۴۲۰	۳۴۵۹	درس ۶: روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه

فصل هفدهم

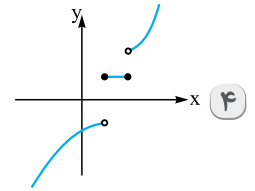
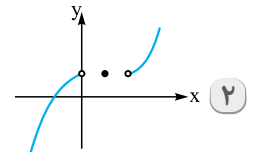
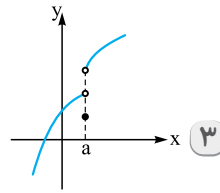
هندسه

فصل ۲ ریاضی یازدهم

۴۳۳. گزینه ۴ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $f = \{(-1, 0), (1, 2), (3, 3)\}$

با افزایش x مقدار y ها هم زیاد شده پس اکیداً صعودی است.



در ۲ تابع اکیداً صعودی است. در ۳ چون در $x = a$ مقدار تابع نسبت به نقاط همسایگی چپ کم‌تر شده (نقطه توپر) تابع نه صعودی است و نه نزولی ولی ۴ صعودی است، اکیداً صعودی نیست چون تابع در بازه $[a, b]$ ثابت است.

۴۳۴. گزینه ۲ می‌دانیم در یک تابع اکیداً صعودی اگر x زیاد شود، y زیاد می‌شود؛ یعنی $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ ، پس بهتر است زوج مرتب‌های تابع f را به ترتیب صعودی بر حسب x مرتب کنیم:

$$f = \{(1, 1), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (3, 6), (10, 20)\}$$

پس $x = \sqrt{2}$ بین $x = 1 < \sqrt{2} < 3$ است. پس باید $f(1) < f(\sqrt{2}) < f(3)$ باشد:

$$1 < m^2 - 2 < 6 \Rightarrow 3 < m^2 < 8 \Rightarrow \sqrt{3} < |m| < 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < m < 2\sqrt{2} \Rightarrow m \text{ مقدار صحیح} = 2 \\ -2\sqrt{2} < m < -\sqrt{3} \Rightarrow m \text{ مقدار صحیح} = -2 \end{cases}$$

پس حدود m شامل دو عدد صحیح است.

۴۳۵. گزینه ۴

تابع $f = \{(1, 3a+1), (-1, a+1), (2, 4a+3)\}$ اگر بخواهد صعودی باشد باید با افزایش مقدار x مقدار y زیاد شود (یا ثابت بماند)، پس:

$$-1 < 1 \Rightarrow a+1 \leq 3a+1 \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$-1 < 2 \Rightarrow a+1 \leq 4a+3 \Rightarrow 3a \geq -2 \Rightarrow a \geq -\frac{2}{3}$$

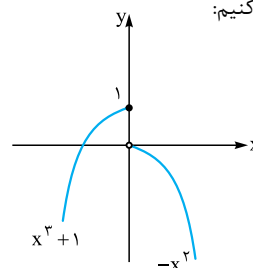
$$1 < 2 \Rightarrow 3a+1 \leq 4a+3 \Rightarrow a \geq -2$$



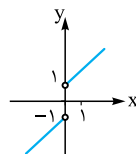
پس جواب می‌شود $a \geq 0$.

۴۳۶. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

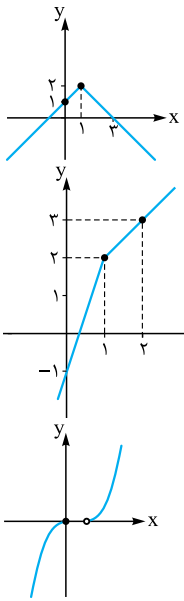
با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است.



۴۳۷. گزینه ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

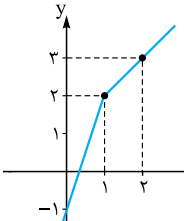


۱) $f(x) = \frac{|x|}{x} + x = \begin{cases} 1+x & x > 0 \\ -1+x & x < 0 \end{cases}$



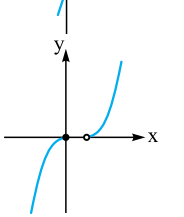
۲) $f(x) = 2 - |x - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x \geq 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases}$$



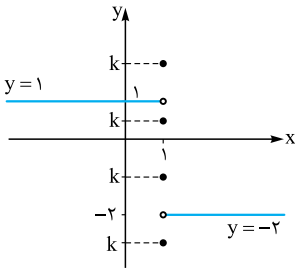
۳) $f(x) = 2x - |x - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$$



۴) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$

با توجه به نمودارها، تابع $f(x) = 2 - |x - 1|$ غیریکنوا است و بقیه تابع‌ها صعودی اکید هستند.



۴۳۸. گزینه ۳ اول نمودار تابع را

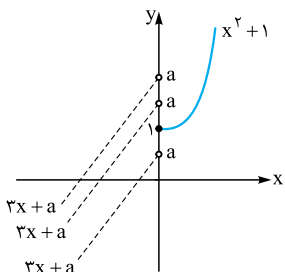
رسم می‌کنیم:

حالا با توجه به نمودار تابع برای این که تابع نزولی باشد باید $1 = f(1) = k \leq -2$ باشد، پس $-2 \leq k \leq 1$ و مقادیر صحیح k عبارت‌اند از $-2, -1, 0, 1$ یعنی چهار مقدار صحیح.

۴۳۹. گزینه ۲ اول نمودار تابع را

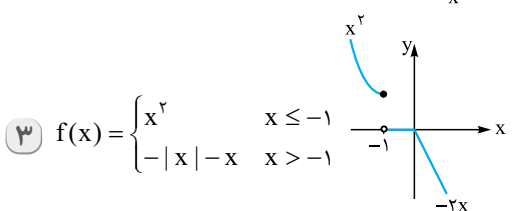
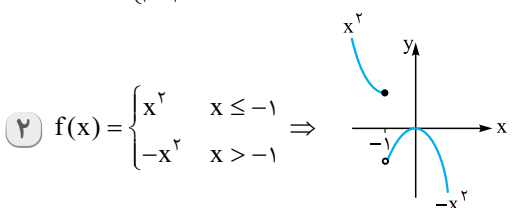
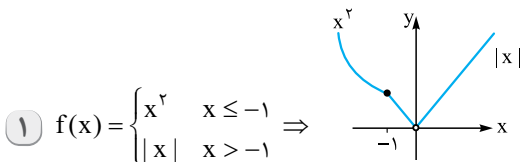
رسم می‌کنیم:

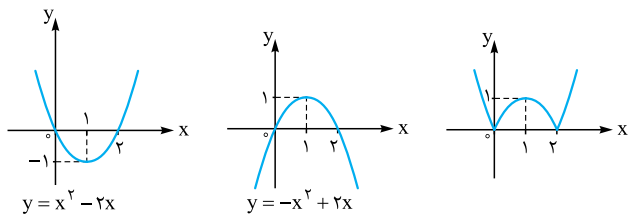
حالا با توجه به نمودار برای این که تابع در دامنه‌اش صعودی اکید باشد، حداکثر a می‌تواند برابر ۱ باشد.



۴۴۰. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$ را به ازای هر کدام

از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:



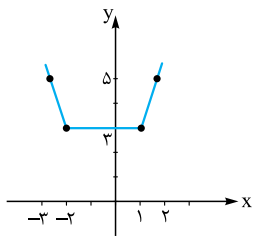


پس تابع در (۱, ۲) نزولی است و $b - a = 2 - 1 = 1$

۴۴۵. گزینه ۱ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = |x + 2| + |x - 1|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} -3 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 3 & 3 & 5 \end{array}$$

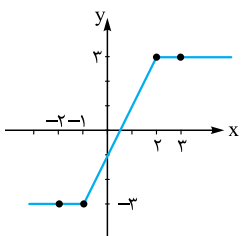


حالا طبق نمودار تابع در بازه $(-\infty, -2]$ اکیداً نزولی است.

۴۴۶. گزینه ۳ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = |x + 1| - |x - 2|$$

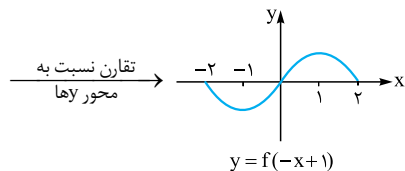
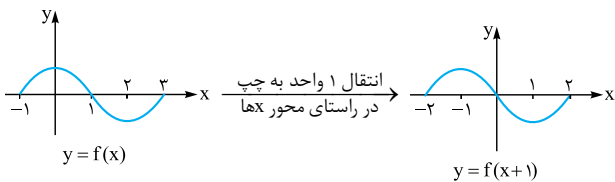
$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} -2 & -1 & 2 & 3 \\ \hline -3 & -3 & 3 & 3 \end{array}$$



حالا طبق نمودار تابع در بازه $[-1, 2]$ اکیداً صعودی است.

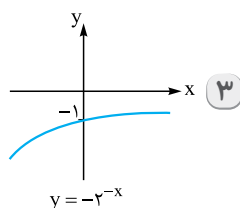
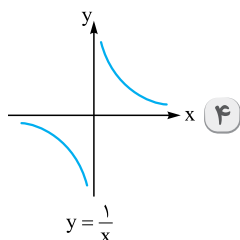
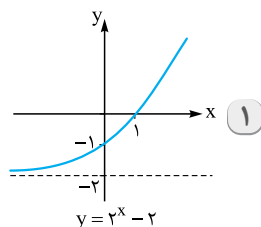
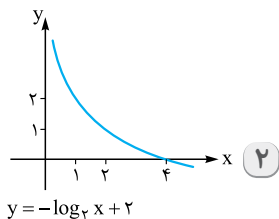
۴۴۷. گزینه ۴ اول نمودار تابع $y = f(1-x)$ را از روی نمودار تابع

$y = f(x)$ رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[1, 2]$ و $[-2, -1]$ نزولی اکید است پس با توجه به گزینه‌ها جواب می‌شود ۴.

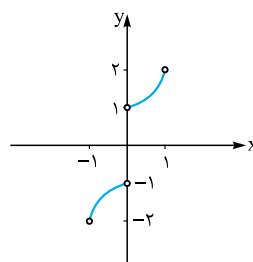
۴۴۸. گزینه ۴ نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم می‌کنیم:



می‌بینیم که تابع f به ازای (۳) نزولی است پس جواب می‌شود (۳)، نمودار را هم خودتان رسم کنید!

۴۴۱. گزینه ۱ اول ضابطه تابع $f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|}$ را به ازای $x > 0$ و $x < 0$ ساده می‌کنیم: (حواسمان هست که $x = 0$ در دامنه نیست)

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \quad x < 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 1$$

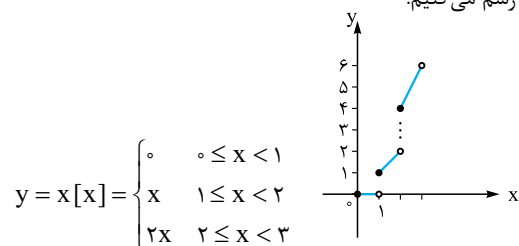


حالا نمودار تابع را در بازه $(-1, 1)$ رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل می‌بینیم تابع در بازه $(-1, 1)$ صعودی (اکید) است.

۴۴۲. گزینه ۴ نمودار هر دو تابع را در بازه $[0, 3]$ (بازه‌ای که شامل تمام

گزینه‌ها باشد) رسم می‌کنیم:

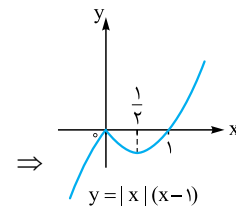
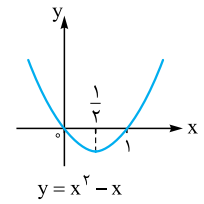
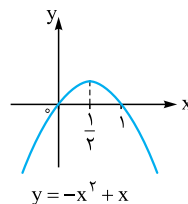


$$y = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

تابع $y = x + |x|$ به ازای $x \geq 0$ صعودی اکید است. پس فقط کافی است تابع $y = x[x]$ را بررسی کنیم. تابع $y = x[x]$ در بازه $[0, 1)$ ثابت است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل قسمتی از بازه $[0, 1)$ نباشد. یعنی بازه $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$.

۴۴۳. گزینه ۲ نمودار تابع $y = |x|(x-1)$ را رسم می‌کنیم:

$$x < 0 \Rightarrow y = -x^2 + x \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & x < 0 \\ x^2 - x & x \geq 0 \end{cases}$$



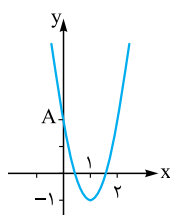
با توجه به نمودار، تابع در بازه $[0, \frac{1}{2}]$ نزولی اکید است پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ است.

۴۴۴. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

تابع $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ نزولی است (چون $0 < \frac{1}{5} < 1$ است) و تابع درونی $h(x) = x^2$ نه صعودی است و نه نزولی، پس goh هم نه صعودی است و نه نزولی.

گزینه ۲ | ۴۵۳



نمودار تابع $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ (که یک سهمی است) را رسم می‌کنیم: (یادمان هست که طول رأس سهمی از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید).

$$y = 3x^2 - 6x + 2$$

$$x_S = -\frac{-6}{2 \times 3} = \frac{6}{6} \Rightarrow x_S = 1 \Rightarrow y_S = 3 - 6 + 2 = -1 \Rightarrow S(1, -1)$$

نقطه برخورد با محور y ها: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

حالا با توجه به نمودار، تابع در بازه $[-1, 1]$ نزولی و در بازه $[1, 2]$ صعودی است؛ پس تابع روی بازه $[-1, 2]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

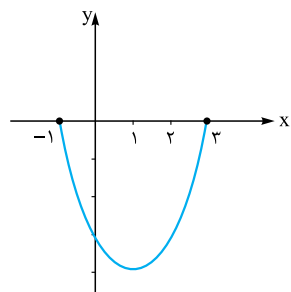
گزینه ۴ | ۴۵۴ اول دامنه $\{x : |x - 1| < 2\}$ را ساده می‌کنیم:

$$|x - 1| < 2 \Rightarrow -2 < x - 1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

حالا نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 3$ را رسم می‌کنیم:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{سهمی} \Rightarrow \text{رأس } x = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 - 3 = -4$$



$$\Rightarrow S(1, -4)$$

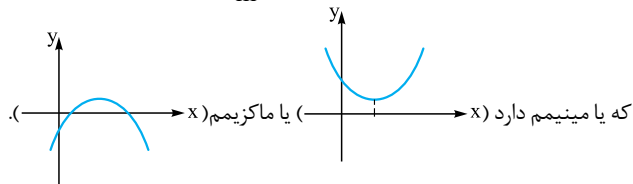
$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (3, 0)$$

حالا با توجه به شکل، تابع در بازه $[-1, 3]$ همواره منفی است.

گزینه ۲ | ۴۵۵ نمودار تابع $f(x) = (\frac{1}{m})x^2 - x + 3$ یک سهمی است



که یا مینیمم دارد (x) یا ماکزیمم (x). پس در صورتی می‌تواند در بازه $[1, +\infty)$ صعودی باشد که اولاً مینیمم داشته باشد و ثانیاً (طول رأس) باشد، برقراری این دو شرط را بررسی می‌کنیم:

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$1 \leq \text{طول رأس} \Rightarrow -\frac{-1}{2(\frac{1}{m})} \leq 1 \Rightarrow \frac{m}{2} \leq 1 \xrightarrow{m > 0} m \leq 2$$

پس باید $0 < m \leq 2$ باشد.

گزینه ۴ | ۴۵۶ نمودار تابع $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 1$ یک سهمی

است پس به شرطی در بازه $[-1, 2]$ غیریکنواست که طول رأس سهمی بین -1 و 2 باشد: (طول رأس سهمی برابر بود با $-\frac{b}{2a}$)

$$-1 < -\frac{-(2m+1)}{2(1)} < 2 \Rightarrow -1 < \frac{2m+1}{2} < 2$$

$$\Rightarrow -2 < 2m+1 < 4 \Rightarrow -3 < 2m < 3 \Rightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$$

حالا با توجه به نمودارها، تابع $y = \frac{1}{x}$ غیریکنوا و یک‌به‌یک است. در درس‌نامه هم داشتیم که تابع هموگرافیک (و از جمله $\frac{1}{x}$ و $-\frac{1}{x}$) غیریکنوا هستند.

گزینه ۲ | ۴۴۹ می‌دانیم تابع $f(x) = a^x$ به ازای $0 < a < 1$ ، نزولی اکید است و از طرفی تابع به ازای $f(x) = 0$ و $f(x) = 1$ هم نزولی (ثابت) است. پس در تابع $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$ باید داشته باشیم:

$$0 \leq \frac{3m+1}{4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 3m+1 \leq 4$$

$$\Rightarrow -1 \leq 3m \leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$$

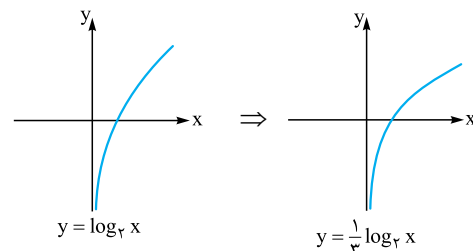
مقادیر صحیح بازه $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ عبارتند از $m = 0$ و $m = 1$ یعنی دو مقدار صحیح.

گزینه ۳ | ۴۵۰ تابع ثابت یعنی $f(x) = k$ و تابع $f(x) = (a^2 - 3)^x$ وقتی ثابت است که $a^2 - 3 = 1$ باشد پس $a^2 = 4$ و در نتیجه $a = 2$ یا $a = -2$. حالا برای تابع $g(x) = a^x$ مقدار $a = -2$ غیر قابل قبول است پس $g(x) = 2^x$ و در نتیجه تابع g ، صعودی اکید است.

گزینه ۱ | ۴۵۱

راه I | ۱ ضابطه تابع را با استفاده از رابطه $\log_b a^n = n \log_b a$ ($a > 0$)

ساده و نمودار تابع را رسم می‌کنیم: $f(x) = \log_{\sqrt[3]{x}} \sqrt{x} = \frac{1}{3} \log_{\sqrt{x}} x$



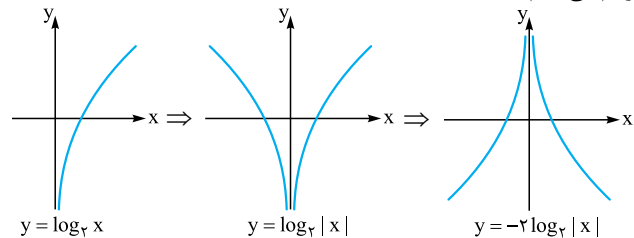
با توجه به شکل تابع اکیداً صعودی است.

راه II | ۲ تابع $f(x) = \log_{\sqrt[3]{x}} \sqrt{x}$ را می‌توانیم به شکل ترکیب دو تابع $f(x) = (goh)(x)$ در نظر بگیریم یعنی $g(x) = \log_{\sqrt{x}} x$ و $h(x) = \sqrt[3]{x}$. حالا در g, goh, h هر دو صعودی اکیدند پس goh هم اکیداً صعودی است.

گزینه ۳ | ۴۵۲ **راه I | ۳** اولاً با استفاده از رابطه $\log_b a^n = n \log_b a$ ($a > 0$) می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x^2 = 2 \log_{\frac{1}{5}} |x| = 2 \log_{\frac{1}{2}} |x| = -2 \log_2 |x|$$

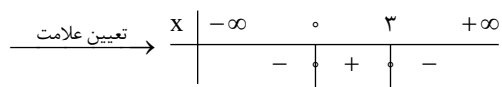
حالا نمودار تابع $y = -2 \log_2 |x|$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \log_2 x$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع نه صعودی است و نه نزولی.

راه II | ۲ اگر دو تابع $h(x) = x^2$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ را در نظر بگیریم $f(x) = (goh)(x) = \log_{\frac{1}{5}} x^2$ است.

راه II می‌توانیم برای f یک تابع مثال بزینم. ساده‌ترین تابع، تابع خطی است پس $f(x) = -x + 3$ را در نظر می‌گیریم (+۳ را برای این نوشتیم که تابع محور x ها را در نقطه $x = 3$ قطع کند). حالا دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را پیدا می‌کنیم:



$\Rightarrow 0 \leq x \leq 3$

گزینه ۱ **راه I** تابعی صعودی است پس از $f(2) = 0$ نتیجه می‌گیریم:

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f(x)	-	+	

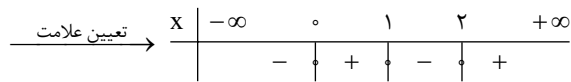
حالا عبارت $(x^2 - x)f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$
f(x)	-	-	-	+	
$(x^2 - x)$	+	-	+	+	
$(x^2 - x)f(x)$	-	+	-	+	

دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ برابر بازه‌ای است که $(x^2 - x)f(x) \geq 0$ باشد، پس طبق جدول می‌شود $(0, 1] \cup [2, +\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

راه II می‌توانیم برای f یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزینم که اکیداً صعودی باشد و محور طول‌ها را در نقطه $x = 2$ قطع کند یعنی $f(x) = x - 2$. حالا دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$y = \sqrt{(x^2 - x)(x - 2)} = \sqrt{x(x - 1)(x - 2)}$
 $x(x - 1)(x - 2) \geq 0$



پس دامنه تابع برابر است با $(0, 1] \cup [2, +\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

گزینه ۲ می‌دانیم در یک تابع صعودی اگر $f(x_1) > f(x_2)$ باشد حتماً داریم $x_1 > x_2$ پس: $f(3 - 2a) > f(1 + a) \Rightarrow 3 - 2a > 1 + a$
 $\Rightarrow 3a < 2 \Rightarrow a < \frac{2}{3}$

و حالا که $a < \frac{2}{3}$ است، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a برابر صفر است.

گزینه ۳ **راه I** فب شرط دامنه رادیکال چی بود؟ باید زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$\Rightarrow f(2x + 1) \geq f(x - 2) \Rightarrow 2x + 1 \leq x - 2$
 $\Rightarrow x \leq -3 \Rightarrow D = (-\infty, -3]$

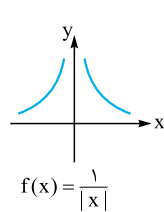
عددگذاری f نزولی است، پس $f(1) - f(-2)$ منفی است و $x = 0$ در $g(x)$ نمی‌خورد. یعنی گزینه‌های شامل صفر غلط هستند (۱) و (۲) نیست. به ازای $x = -3$ زیر رادیکال صفر است که مشکلی ندارد؛ پس خود -3 هست (۴) نیست.

گزینه ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$f(\frac{1}{x}) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(\frac{1}{x}) \geq f(x)$

گزینه ۴ **۴۵۷** تابع $f(x) = (a - 2)x^2 + 2ax + 3$ یک تابع درجه دوم است پس نمی‌تواند یکنوا باشد. پس برای یکنوا بودن تابع باید جمله x^2 حذف شود یعنی $a - 2 = 0$ پس $a = 2$ و در نتیجه:

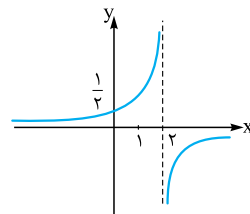
$f(x) = 4x + 3 \Rightarrow f(2) = 4(2) + 3 = 11$



گزینه ۴ **۴۵۸** عبارت «برای هر x_1 و x_2 این بازه رابطه $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ برقرار باشد» یعنی می‌خواهیم بازه‌ای را پیدا کنیم که تابع در آن بازه نزولی اکید باشد. برای پیدا کردن این بازه، تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، تابع در بازه $(0, +\infty)$ نزولی اکید است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعه این بازه باشد که می‌شود بازه $(0, 1)$.

گزینه ۱ **۴۵۹** می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{-1}{x - 2}$ در همسایگی ریشهٔ مخرجش (مجناب قائمش) به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند. پس برای این که تابع در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً صعودی باشد باید a را طوری انتخاب کنیم که بازه $(-\infty, a]$ شامل عدد ۲ (یعنی ریشهٔ مخرج) نشود و چون قرار است a عدد صحیح باشد پس حداکثر a برابر است با ۱.



البته می‌توانستیم از نمودار تابع هم استفاده کنیم:

با توجه به نمودار، حداکثر مقدار صحیح a که تابع در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً صعودی باشد، می‌شود ۱.

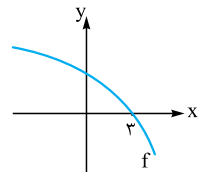
گزینه ۱ **۴۶۰** طبق آن چه در سؤال قبل دیدیم ریشهٔ مخرج تابع باید در بازه $(-2, +\infty)$ قرار نداشته باشد و با این حساب فقط (۱) یعنی $y = \frac{x - 1}{x + 3}$ قابل قبول است.

گزینه ۴ **۴۶۱** گفتیم ریشهٔ مخرج در دسر درست می‌کند. پس الان $x = \frac{a}{2}$ یعنی ریشهٔ مخرج نباید در فاصله $(1, +\infty)$ باشد. پس داریم: $\frac{a}{2} \leq 1$ و در نتیجه $a \leq 2$. اما دقت کنید که اگر $a = -2$ باشد، اصلاً تابع هموگرافیک نداریم:

$\xrightarrow{a=-2} f(x) = \frac{x + 1}{2x - (-2)}$
 $= \frac{x + 1}{2x + 2} = \frac{x + 1}{2(x + 1)} = \frac{1}{2}, (x \neq -1)$

پس در این حالت، f به تابعی ثابت تبدیل می‌شود که اکیداً یکنوا نیست. پس جواب کامل‌تر $a \leq 2$ به جز $a = -2$ است. یعنی $(-\infty, 2) - \{-2\}$.

گزینه ۱ **راه I** **۴۶۲** یک تابع نزولی اکید است و $f(3) = 0$ ؛ پس اگر یک نمودار فرضی برای f رسم کنیم:



نتیجه می‌گیریم برای $x < 3$ مقدار f مثبت و برای $x > 3$ مقدار f منفی است. حالا برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	۰	۳	$+\infty$
f(x)	+	+	-	
x	-	+	+	
xf(x)	-	+	-	

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 3$

۴۷۱. گزینه ۲ | راه I | با توجه به نمودار تابع f, f' یک تابع نزولی است که مقدارش همیشه مثبت است. از نکاتی که در درس نامه داشتیم استفاده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{\text{صعودی صعودی}}{2x - f(x)} \Rightarrow \text{صعودی} \Rightarrow \text{صعودی} + \text{صعودی}$$

$$h(x) = \frac{1}{\underbrace{f(-x)}_{\text{نزولی نزولی}}} = \frac{1}{\text{صعودی}} \Rightarrow \text{نزولی}$$

$$(-) \times (-)$$

راه II | یک تابع اکیداً نزولی است پس داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$g(x) = x - f(x) \quad \text{حالا می‌رویم سراغ تابع‌های } g \text{ و } h:$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 < 2x_2 & (1) \\ -f(x_1) < -f(x_2) & (2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم (1) و (2) را}} 2x_1 - f(x_1) < 2x_2 - f(x_2)$$

$$\Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \quad \text{پس } g \text{ یک تابع صعودی است.}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow f(-x_1) < f(-x_2)$$

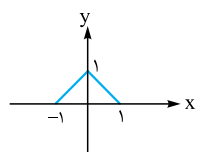
$$\xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} \frac{1}{f(-x_1)} > \frac{1}{f(-x_2)} \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$$

پس h یک تابع اکیداً نزولی است.

با این حساب g صعودی و h نزولی است، یعنی ۲ درست است.

گزینه ۴ | ۴۷۲

$f \circ f$ را در دو بازه $0 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq x \leq 0$ بررسی می‌کنیم:



$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \ominus \oplus \Rightarrow \ominus \text{ نزولی}$$

صعودی نزولی

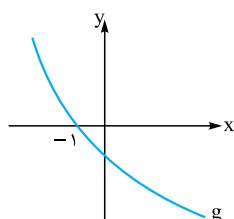
$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \ominus \ominus \Rightarrow \oplus \text{ صعودی}$$

نزولی نزولی

پس تابع در بازه $[-1, 1]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

گزینه ۲ | ۴۷۳ صورت سؤال می‌گوید g

چنین چیزی است:



پس علامت g مثل جدول زیر است:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g(x)$		+	-	-	-
$x^2 - 3x$		+	+	-	+
$\frac{x^2 - 3x}{g(x)}$		+	ت	-	+

سؤال گفته کسر کم‌تر از صفر باشد؛ یعنی جاهایی که منفی است، قبول‌اند:

$$(-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

پس در گزینه‌ها $(-1, 0)$ مناسب است.

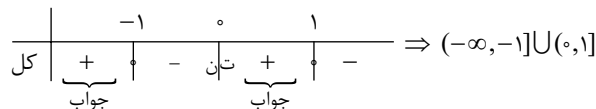
$f(x) = 2^x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف f ها، علامت برنمی‌گردد.

$$\frac{1}{x} \geq x$$

نامعادله به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x} \geq 0$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:



گزینه ۱ | ۴۶۷ تابع f در $(0, +\infty)$ نزولی اکید است، پس:

$$f(1+x^2) > f(2+x^2) \Rightarrow 1+x^2 < 2+x^2 \Rightarrow x^2 - x^2 - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-2) < 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

حالا چون نامعادله را در بازه $(0, +\infty)$ حل کردیم جواب می‌شود $0 < x < \sqrt{2}$.

گزینه ۲ | ۴۶۸ از بین گزاره‌ها، (ب) و (پ) همواره درست است؛ چون اگر

f صعودی اکید و g صعودی باشد، داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_1 > x_2 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ x_1 > x_2 &\Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 > x_2$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_1) > (f+g)(x_2)$$

اشاره | اگر g نزولی باشد، $-g$ صعودی است.

برای نشان دادن نادرستی گزاره‌های دیگر مثال نقض می‌آوریم:

(الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2x+3 \text{ صعودی} \\ g(x) &= -x \text{ نزولی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f+g)(x) = x+3 \text{ صعودی}$$

(ت) اگر تابع f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f \times g$ صعودی اکید است:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2x+3 \text{ اکید صعودی} \\ g(x) &= -3 \text{ ثابت} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \times g)(x) = -6x-9 \text{ نزولی اکید}$$

اگر توجه کنید، دو گزاره (ب) و (پ) در حقیقت یکسان‌اند:

(ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

(پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

بگویید چرا این دو گزاره یکسان‌اند!؟

گزینه ۲ | ۴۶۹ از نکات درس نامه استفاده می‌کنیم:

اکیداً نزولی اکیداً نزولی

$$y = f(-x^2) \Rightarrow \ominus \times \ominus \Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

گزینه ۴ | ۴۷۰ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ اکیداً صعودی اکیداً صعودی

$$y = f(x) + \sqrt{x} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

۲ اکیداً اکیداً نزولی نزولی

$$y = (g \circ g)(x) \Rightarrow \ominus \times \ominus \Rightarrow \text{صعودی}$$

۳ غیریکتوا نزولی

$$y = g(x^2) \Rightarrow y = g(x^2) \Rightarrow \text{نامشخص}$$

صعودی اکیداً صعودی

۴ صعودی صعودی

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow \oplus \times \oplus \Rightarrow \text{نزولی}$$

↑ اکیداً نزولی ↓

برای تعیین صعودی و نزولی بودن در تابع‌های مرکب از روش گذاشتن \oplus و \ominus

برای صعودی و نزولی که در درس نامه دیدیم، استفاده کردیم.

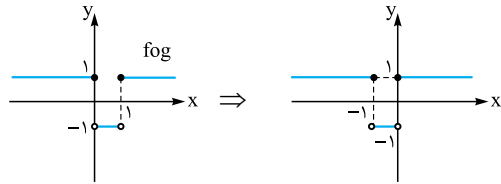
۴۷۴. گزینه ۲ | اول ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ را پیدا می‌کنیم: (برای ساده کردن ضابطه باید علامت g را تعیین کنیم).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \text{ و } g(x) = x^2 - x$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{|g(x)|} & g(x) \neq 0 \\ 1 & g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \\ 1 & x = 0, x = 1 \end{cases}$$

حالا نمودار تابع $(f \circ g)(x)$ و $(f \circ g)(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به شکل برای این که تابع $(f \circ g)(x+1)$ در بازه $(a, +\infty)$ صعودی باشد حداقل a برابر است با -1 .

۴۷۵. گزینه ۲ | نمودار f را رسم می‌کنیم باید بازه $(-\infty, a-2)$ زیرمجموعه‌ای از بازه $(-\infty, -\sqrt{a})$ باشد، یعنی:

$$a-2 \leq -\sqrt{a} \Rightarrow a + \sqrt{a} - 2 \leq 0$$

برای تجزیه عبارت سمت چپ، دقت کنید که $a=1$ یکی از ریشه‌های نامعادله است و داریم:

$$(a-1) + (\sqrt{a}-1) \leq 0 \Rightarrow (\sqrt{a}-1) \underbrace{(\sqrt{a^2} + \sqrt{a} + 2)}_{\text{مثبت}} \leq 0$$

پس تنها مقدار طبیعی a برابر ۱ است. $\Rightarrow \sqrt{a}-1 \leq 0 \Rightarrow a \leq 1$

۴۷۶. گزینه ۲ | $5-x$ نزولی است، پایه ۲ صعودی است که ضرب منفی، آن را نزولی می‌کند. $\sqrt{\quad}$ و توان ۵ صعودی‌اند و یک منفی در پشت رادیکال داریم که نزولی است. پس ۳ تا عامل نزولی داریم که ضربشان $(-)$ می‌شود و تابع در کل نزولی است.

این طور هم می‌توانیم بنویسیم:

$$y = (-\sqrt{1-2(5-x)})^5$$

$\ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \Rightarrow \ominus$ نزولی