به نام خداوند خورشید و ماه
که دل را به نامش خرد داد راه

مهروماه

لقمه

تیزهوشان

۱۰۰ نکته

ریاضی هشتم

هندسه

نیما نام‌آوری

جلد ۲

مقدمهٔ مدیر گروه

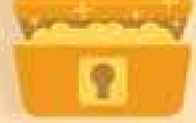
سرعت ... شتاب ... مینیمال شدن ...

اینها شاخصه‌های دنیای امروزند. در این دنیای پرسرعت، گاهی لازم است ما هم با قطار زمان همراه شویم.

این کتاب، یک گردآوری و جمع‌بندی هوشمندانه، سریع، مختصر و مناسب برای دانش‌آموزان کوشای پایهٔ هشتم است. از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به کوچک بودن، طبقه‌بندی آگاهانه و بیان همهٔ نکات مهم و کلیدی هشتم در کمترین فضای ممکن اشاره کرد.

کتاب‌های لقمهٔ گروه ریاضی پایهٔ هشتم در دو جلد **حساب** و **هندسه** تألیف شده‌اند که در این حرکت پرشتاب، مکمل و همراه شما هستند.

و اما در این کتاب چه می‌بینید؟

 نمایشگر سرفصل‌های اصلی کتاب که شامل تعدادی  هستند.

 بیانگر بخش‌های اصلی هر سرفصل که بنابر مفاهیم مشترک، چند  در آنها قرار گرفته است.

هر یک از اینها یک نکته از ۱۰۰ نکتهٔ اصلی کتاب است که در آن به آموزش همراه با مثال پرداخته‌ایم.

در هر چه خبر است؟

زیرنکته

نکته‌تر به عنوان زیرنکتهٔ مهم‌تر

مثال

تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای با چیدمان آسان به دشوار که در پاسخ‌نامهٔ انتهای کتاب، پاسخ تشریحی آنها را آورده‌ایم.

کتاب‌های **لقمه** را می‌توانید هنگام لقمه گرفتن، در سرویس مدرسه، در مترو و اتوبوس، در زنگ‌های تفریح و هر جای دیگری همراه داشته باشید و به اندازهٔ وقتتان از آنها استفاده کنید.

و اما مؤلف این کتاب، دوست و یار همیشه همراهم، نیما نام‌آوری عزیز که در کار خود استثنایی و بسیار تواناست. امید است که شما هم از این کتاب لذت ببرید.

خلاصه: **ما فیل هوا کردیم! هر چی نکتهٔ هندسه تو هشتمه، یه کتاب کردیم!** (بقیه‌اش رو می‌تونید پشت جلد کتاب بخونید!)

قربون صفاتون

بهنام بناپور

مقدمهٔ مؤلف

سپاس و آفرین خدای را که این جهان و آن جهان را آفرید؛ جهانی که مردم به دانش، بزرگوارتر و مایه‌دارتر و ما بندگان را اندر جهان پدیدار کرد که ای کاش نمی‌کرد! (ناامیدی محض مؤلف از اوضاع کنونی)

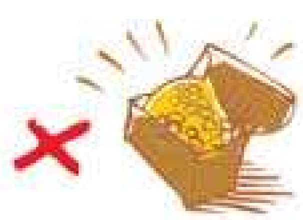
ابوالمعالی ابوبهنام بناپور مردی بود خویش‌کام و باهنر و بزرگ‌منش؛ اندیشهٔ بلند داشت و نژادی بلندتر. از روزگار آرزو کرد او را نیز یادگاری بُوَدْ اندر این جهان؛ پس به دستور خویش نام‌آوری از نام‌آوران دیار پارس را بفرمود که خداوندان کتب هندسه را تألیف کند (اَلبَتْ تحت نظرش).

نام‌آور این سخن بشنید، خوش آمدش و به دستور خویش فیثاغورسیان را بر آن داشت تا همت ورزیده و در کنار هم برگزیده‌ای از نکات چندضلعی، دایره و در پس آن عجایب فیثاغورس را گرد هم آورند. خداوندان هندسه به دست مردمان اندر افتاد و آنان در شهر به دنبال آن همی گشتند و این‌گونه لقمهٔ هندسه در زبانِ خُرْد و بزرگ افتاد و نام ابوبهنام در کنار نام‌آور پارسی بدین زنده گشت. نام‌آور را ملالتی بود در پیش که سر به بیابان نهاد؛ «ایزد، چه کنیم این یادگار عاری از خطا بُوَدْ؟»

پس اجابت شد و یکی از فریدونیان توأم با ملکیان که سابقهٔ معرفتی بین ما و آن دو بود گذر کردند و ما را بشناختند؛ بر حالت نزار من رحمت آوردند و بر خطاهای کتاب مرهمی نهادند تا هر کسی را خوش آید دیدن و شنیدن آن.

نظرگاه‌های ارزشمندتان را در خصوص این یادگار به نشانی الکترونیکی گروه ریاضی riazi@mehromah.ir و سامانهٔ پیامکی ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ ارسال کنید.

نیما نام‌آوری



تقدیم به پدرم که به من ایستادگی آموخت؛

به او که نمی‌دانم از بزرگی‌اش بگویم یا مردانگی و سخاوتش!

نیما نام‌آوری

فهرست

فصل اوّل: چندضلعی‌ها

فصل دوم: مثلث

فصل اوّل

چندضلعی‌ها

از کوچه‌های پر رمز و راز یزد تا پایتخت عشق و هنر، اصفهان، از سنگ‌فرش‌های خیس و نمناک شیراز تا کوچه پس‌کوچه‌های پرتجمل اردبیل و کرمان، وقتی به مساجد و بناهای تاریخی می‌نگری، هنر توأم با فرهنگ غنی معماری رخ می‌نماید و در سرتاسر این زیبایی بی‌نظیر، چندضلعی‌های درهم‌آمیخته‌ای می‌بینی که راه زیادی در تاریخ پیموده‌اند و سال‌ها چشم‌نواز نگاه کنجکاو و ماجراجوی گردشگران بوده‌اند.

چندضلعی‌ها

۱ مفهوم خم در هندسه

خم مسطح: خمی است که بتوان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد.

مثال ۱:

خم ساده: خم مسطحی است که هیچ‌یک از نقاط خود را قطع نمی‌کند.

مثال ۲:

خم ساده — خم ساده — خم ساده نیست.

خم سادهٔ بسته: اگر نقاط ابتدایی و انتهایی خم بر هم منطبق باشند، آن خم را خم سادهٔ بسته می‌گویند.

۶ زاویه در n ضلعی منتظم

همهٔ روابط مربوط به زاویه‌های چندضلعی محدب برای چندضلعی‌های منتظم نیز برقرار است.

از آنجایی که در هر n ضلعی منتظم همهٔ ضلع‌ها و زاویه‌ها با هم برابرند، اندازهٔ هر یک از زاویه‌های داخلی یا خارجی آن $\frac{1}{n}$ مجموع زاویه‌های n ضلعی منتظم خواهد شد:

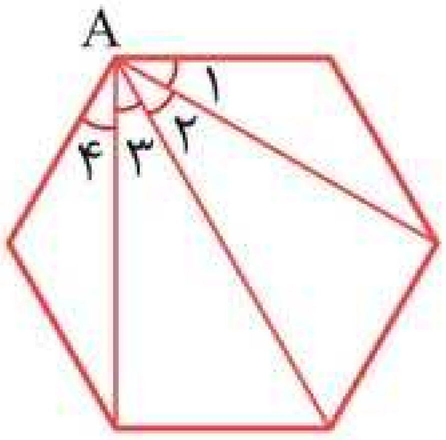
$$\frac{1}{n}\times 360^\circ =$$ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم

$$\frac{1}{n}(n-2)\times 180^\circ =$$ اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم

نکته‌تر: اگر نسبت اندازهٔ زاویه‌های خارجی در دو شکل منتظم $\frac{x}{y}$ باشد، نسبت تعداد ضلع‌های آن دو شکل $\frac{y}{x}$ است؛ برای مثال نسبت ضلع‌های پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی منتظم برابر $\frac{5}{6}$ است درحالی که نسبت زاویه‌های خارجی این دو شکل $\frac{6}{5}=\frac{72}{60}$ است.

در چندضلعی منتظم اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر پشت سرهم در یک رأس برابر است با: $\frac{180^\circ}{\text{تعداد ضلع‌ها}}$

همچنین اندازهٔ زاویهٔ بین هر ضلع و قطر مجاورش نیز برابر است با: $\frac{180^\circ}{\text{تعداد ضلع‌ها}}$



مثال ۱:

$$\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ = \widehat{A}_۳ = \widehat{A}_۴ = \frac{۱۸۰^\circ}{۶} = ۳۰^\circ$$

مثال ۲: اگر اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم فقط ۲ درجه کمتر از اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک (n+۲) ضلعی منتظم باشد، n کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\frac{۱۸۰^\circ(n-۲)}{n} + ۲^\circ = \frac{۱۸۰^\circ n}{n+۲}$$

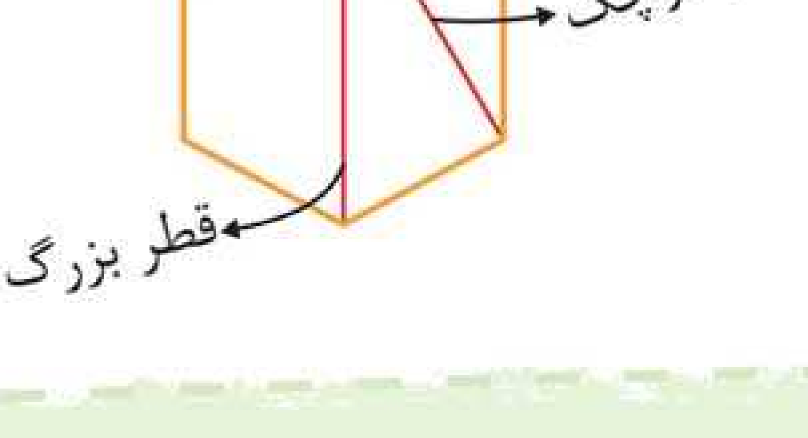
$$\Rightarrow \frac{۱۸۰^\circ(n-۲) + ۲^\circ n}{n} = \frac{۱۸۰^\circ n}{n+۲}$$

$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ n^۲ = ۱۸۰^\circ(n^۲ - ۴) + ۲^\circ n^۲ + ۴^\circ n$$

$$\Rightarrow ۲^\circ n^۲ + ۴^\circ n = ۷۲۰^\circ \Rightarrow n(n+۲) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow n = ۱۸$$

۷ شش‌ضلعی منتظم

● هر شش‌ضلعی منتظم به ضلع a خصوصیات زیر را دارد:



① محیط برابر است با: $۶a$

② مساحت برابر است با: $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۶\times\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$

③ طول قطر بزرگ برابر $۲a$ و طول قطر کوچک برابر $a\sqrt{۳}$ است.

مثال: مجموع طول قطرهای یک شش‌ضلعی منتظم $۲۴\sqrt{۳}+۲۴$ است. طول هر ضلع و مساحت این شش‌ضلعی چقدر است؟

پاسخ

$$\text{تعداد قطرها} = \frac{n(n-۳)}{۲} = \frac{۶(۶-۳)}{۲} = ۹$$

شش‌ضلعی منتظم ۹ قطر دارد که ۶ تای آن کوچک و ۳تای آن بزرگ است (با رسم شکل متوجه می‌شوید)؛ بنابراین:

$$۶(a\sqrt{۳}) + ۳(۲a) = ۶a\sqrt{۳} + ۶a = ۶a(\sqrt{۳}+۱)$$

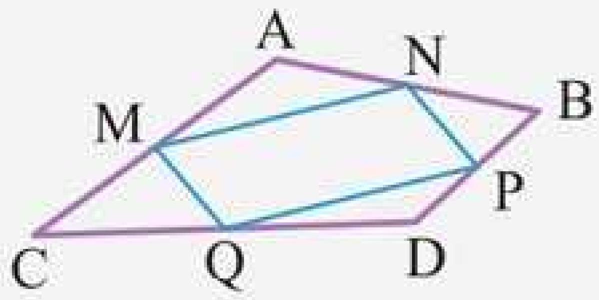
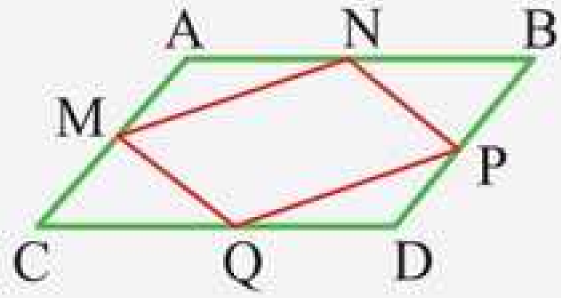
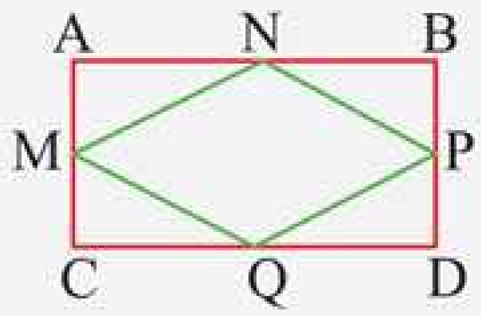
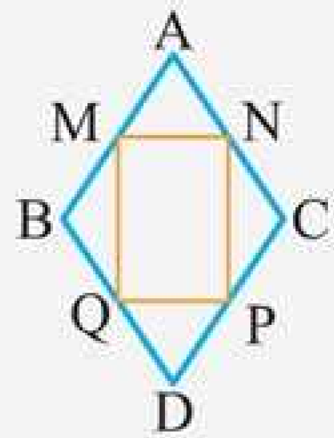
$$۶a(\sqrt{۳}+۱) = ۲۴\sqrt{۳}+۲۴ \Rightarrow ۶a\cancel{(\sqrt{۳}+۱)} = ۲۴\cancel{(\sqrt{۳}+۱)}$$

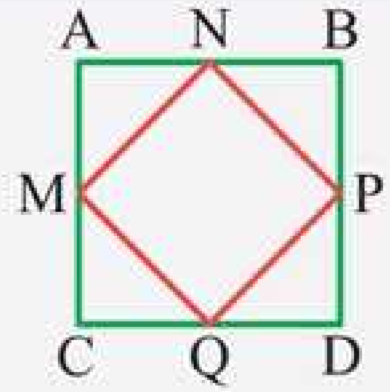
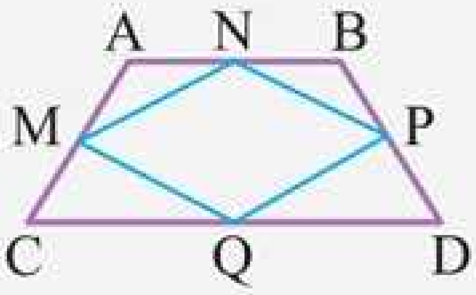
$$۶a = ۲۴ \Rightarrow a = ۴$$

پس مساحت این شش‌ضلعی برابر است با:

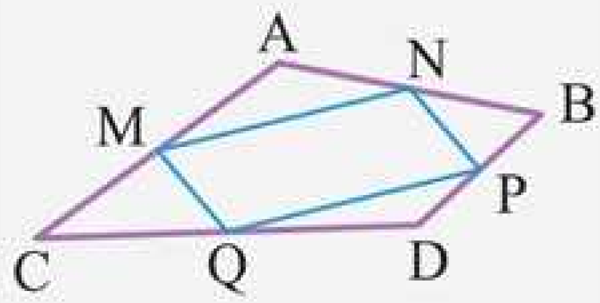
$$S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۶ = ۲۴\sqrt{۳}$$

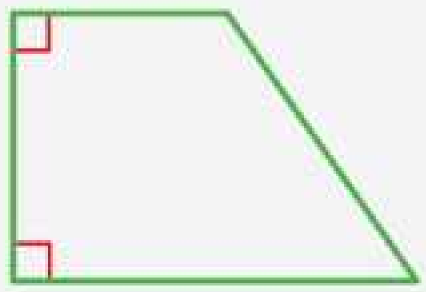
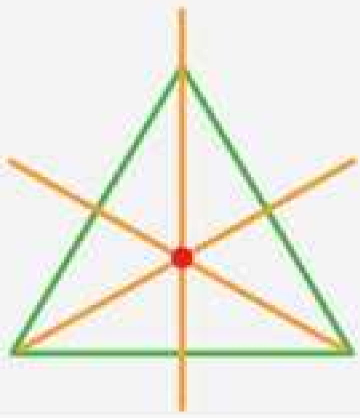
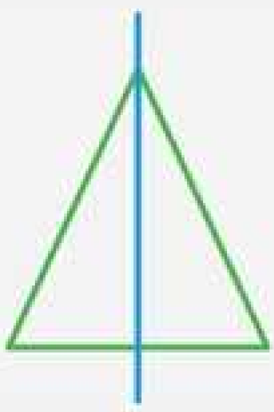
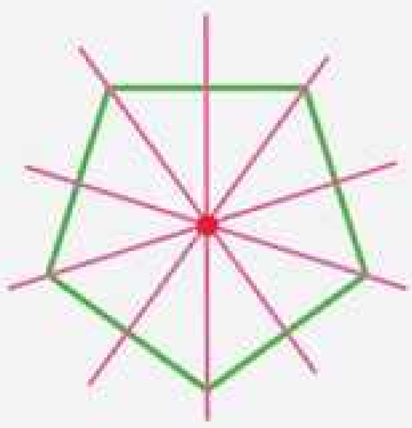
نکته‌تر: جدول زیـر را که دربارهٔ چهارضلعی محدب ABCD و چهارضلعی حاصل از به هم وصل کردن وسط ضلع‌های آن یعنی چهارضلعی MNPQ است، به خاطر بسپارید:

شکل	چهارضلعی MNPQ	چهارضلعی ABCD
	متوازی‌الاضلاع	دلخواه
	متوازی‌الاضلاع	متوازی‌الاضلاع
	لوزی	مستطیل
	مستطیل	لوزی

چهارضلعی ABCD	چهارضلعی MNPQ	شکل
مربع	مربع	
ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین	لوزی	

نکته‌تر: جدول زیر نشان می‌دهد با اطلاع از چهارضلعی MNPQ که از به هم وصل کردن وسط ضلع‌های چهارضلعی ABCD به‌وجود می‌آید، می‌توان دربارهٔ نوع چهارضلعی ABCD نتیجه‌گیری کرد.

چهارضلعی MNPQ	چهارضلعی ABCD	شکل
غیرمتوازی‌الاضلاع	غیرممکن	ــ
متوازی‌الاضلاع	دلخواه	

نام شکل	مرکز تقارن	تعداد محور تقارن	شکل
ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه	ندارد	۰	
مثلث متساوی‌الاضلاع	ندارد	۳	
مثلث متساوی‌الساقین	ندارد	۱	
n ضلعی منتظم (n فرد)	ندارد	n	$n = ۵$ 

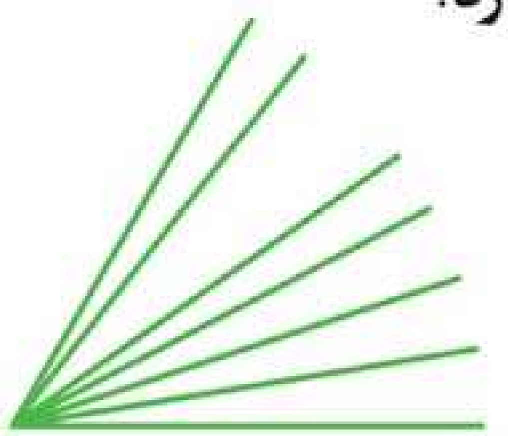
زاویه

۲۵ شمارش زاویه

- زاویه شکلی است که از دوران دو نیم‌خط به دور یک نقطه به‌وجود می‌آید که به این نقطه رأس زاویه یا گوشه گفته می‌شود.
- اگر تعدادی نیم‌خط یا پاره‌خط هم‌رأس (همهٔ خط‌ها از یک نقطه شروع شده باشند) داشته باشیم، تعداد کل زاویه‌های به‌وجود آمده (با اندازهٔ کمتر از ۱۸۰ درجه) برابر است با:

$$\frac{(\text{تعداد نیم‌خط‌ها}) \times (\text{تعداد نیم‌خط‌ها} - ۱)}{۲}$$

مثال: **در شکل روبه‌رو چند زاویه وجود دارد؟**



۱) ۲۸
۲) ۱۵
۳) ۲۱
۴) ۳۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** همان‌طور که می‌بینید در این شکل ۷ نیم‌خط وجود دارد؛ بنابراین:

$$\text{تعداد کل زاویه‌ها} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

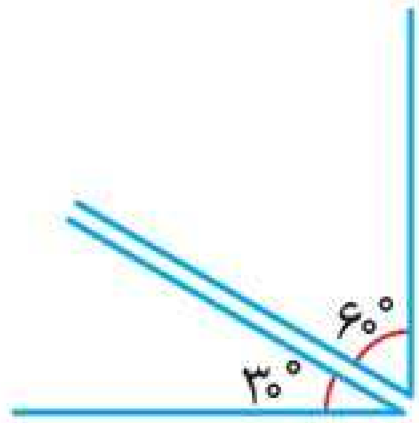
نکته‌تر: فاصلهٔ بین دو ضلع زاویه را صفحهٔ زاویه می‌نامند.

۲۶ روابط بین دو زاویه

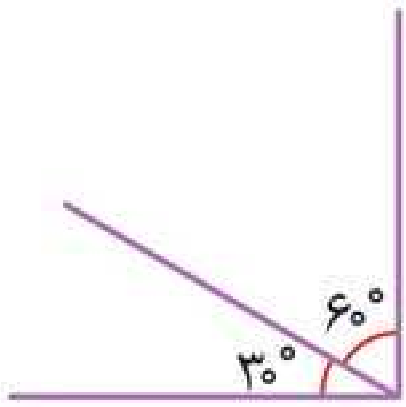
● دو زاویه که مجموع آنها ۹۰ درجه باشد، متمم یکدیگرند.

نکته‌تر: انواع زاویه‌های متمم عبارت‌اند از: زاویه‌های متمم مجاور هم، درون شکل و جدا از هم

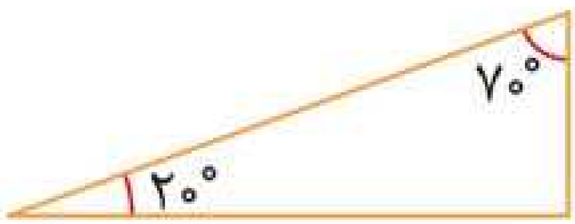
مثال ۱:



دو زاویهٔ متمم جدا از هم



دو زاویهٔ متمم مجاور هم



دو زاویهٔ متمم درون شکل

● دو زاویه که مجموع آنها ۱۸۰ درجه باشد، مکمل یکدیگرند.

نکته‌تر: انواع زاویه‌های مکمل عبارت‌اند از: زاویه‌های مکمل مجاور هم، درون شکل و جدا از هم

فصل دوم

مثلث

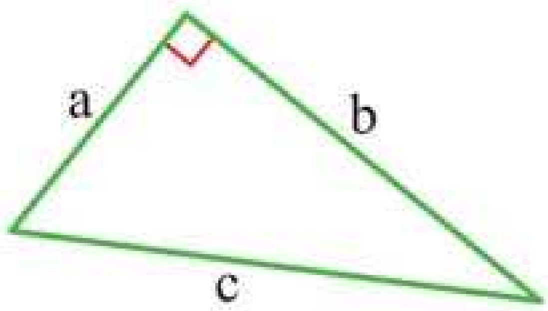
قضیهٔ فیثاغورس را یکی از دو گنج کشف‌شده در ریاضیات می‌دانند. بی‌شک، دنیای مهندسی بیش از هر رابطه‌ای به رابطهٔ فیثاغورس مدیون است؛ فیثاغورسی که در ساموس زاده شد.

با تبیین قضیهٔ فیثاغورس علاوه بر رشتهٔ هندسه، درِ دنیای پر ماجرای اعداد گنگ نیز گشوده شد.

قضیهٔ فیثاغورس

۳۶ قضیهٔ فیثاغورس

در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربع‌های دو ضلع قائمه برابر است.



$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

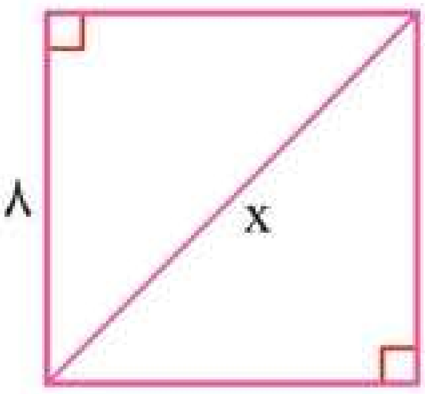
نکته‌تر: منظور از اعداد فیثاغورسی اعدادی هستند که می‌توانند اندازهٔ ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه باشند به‌طوری که رابطهٔ فیثاغورس بین آنها برقرار باشد. معروف‌ترین اعداد فیثاغورسی عبارت‌اند از:

(۳ , ۴ , ۵) , (۵ , ۱۲ , ۱۳) , (۸ , ۱۵ , ۱۷) , (۷ , ۲۴ , ۲۵)

اگر a ، b و c اعداد فیثاغورسی باشند، kc, kb, ka نیز فیثاغورسی‌اند.

عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز برقرار است؛ یعنی هرگاه در مثلثی مجذور یکی از ضلع‌ها با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

مثال: مقدار x در مربع مقابل چقدر است؟



۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

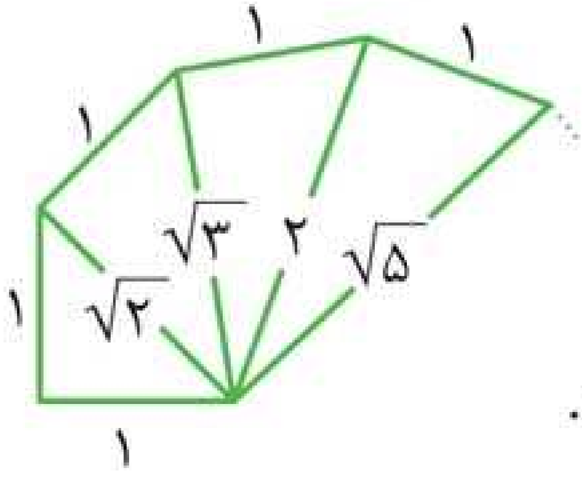
پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^{۲} = ۸^{۲} + ۸^{۲} = ۶۴ + ۶۴ = ۱۲۸$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{۱۲۸} = \sqrt{۶۴ \times ۲} = ۸\sqrt{۲}$$

۳۷ حلزون فیثاغورس

اگر بر روی وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با اضلاع ۱ واحد مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای به‌طور متوالی مانند شکل زیر ایجاد کنیم، آنگاه داریم:

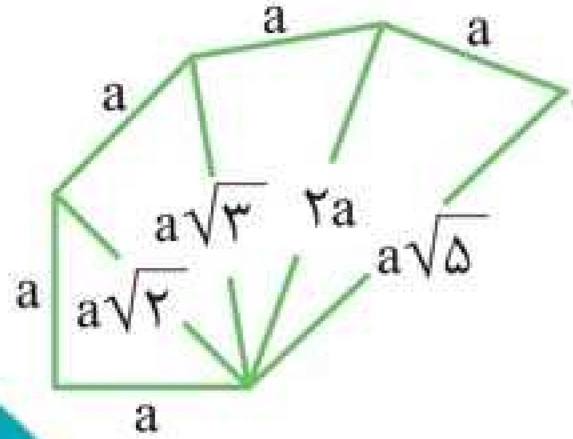


وترمثلث nام $= \sqrt{n+۱}$

مساحت مثلث nام $= \frac{\sqrt{n}}{۲}$

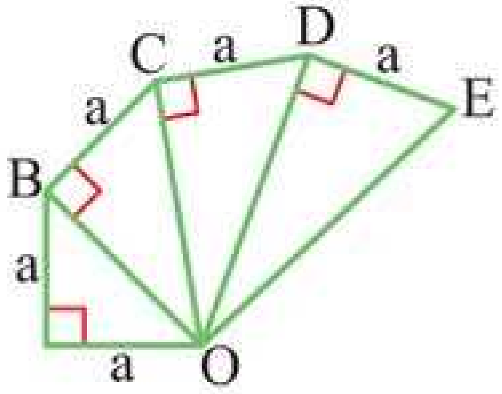
به این شکل حلزون فیثاغورس می‌گویند.

نکته‌تر: **اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ اوّلیه (در حلزون فیثاغورس) a واحد باشد، آنگاه داریم:**



وترمثلث n ام $= \sqrt{n+۱}\;a$

مساحت مثلث n ام $= \frac{\sqrt{n}}{۲}\,a^{۲}$



مثال ۱: در شکل مقابل طول پاره‌خط OE چقدر است؟

پاسخ OE طول وتر مثلث چهارم در شکل است؛ بنابراین:

$\overline{OE} = \sqrt{۴+۱}a = \sqrt{۵}a$

مثال ۲: مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در یک رأس مشترک‌اند و اندازهٔ یک ضلع قائم آنها ۱ واحد است، چنان رسم می‌شوند که ضلع قائم دیگر آنها، وتر مثلث قبلی است. مساحت و محیط نهمین مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ، $\sqrt{۱۰}$

۲) $\frac{۵}{۴}$ ، $۴+\sqrt{۱۰}$

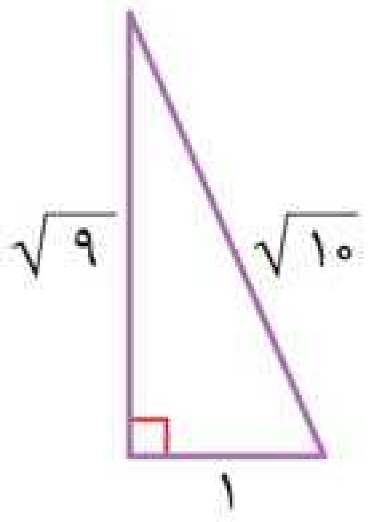
۳) $\frac{۳}{۲}$ ، $\sqrt{۱۰}$

۴) $\frac{۳}{۲}$ ، $۴+\sqrt{۱۰}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** طبق نکتهٔ گفته‌شده، مساحت مثلث نهم برابر است با:

$$\frac{\sqrt{۹}}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

برای به‌دست آوردن محیط مثلث نهم باید اندازهٔ همهٔ ضلع‌های این مثلث را داشته باشیم. همان‌طور که گفته شد، اندازهٔ وترهای مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ رسم‌شده به‌ترتیب برابر با $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۴}$ ، $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt{۶}$ و... و $\sqrt{۱۰}$ است؛ بنابراین وتر مثلث نهم برابر با $\sqrt{۱۰}$ بوده و شکل آن به‌صورت روبه‌روست:

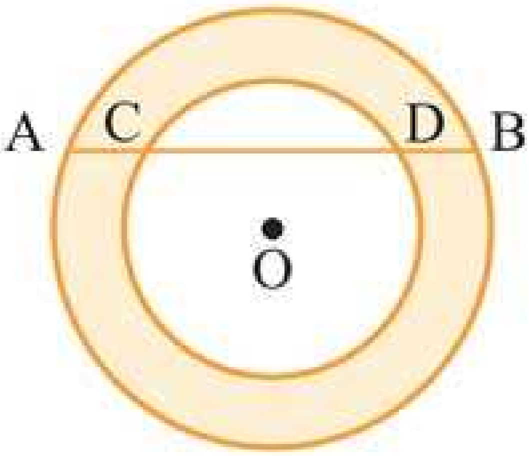


پس محیط مثلث نهم برابر است با:

$$۱+\sqrt{۹}+\sqrt{۱۰} = ۱+۳+\sqrt{۱۰} = ۴+\sqrt{۱۰}$$

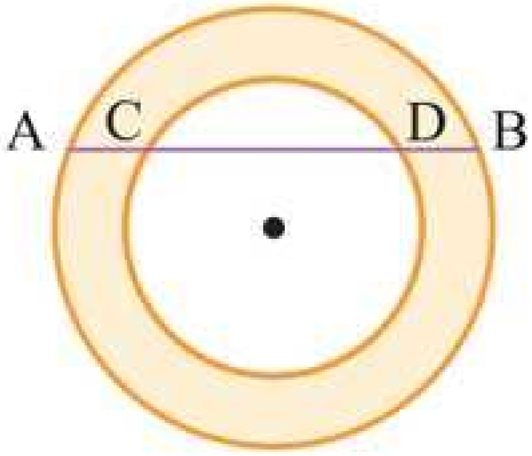
۵۰ روابط طولی حاصل از فیثاغورس در دایره

در شکل زیر وتر AB به طول m دایرهٔ کوچک را قطع کرده است. اگر $\overline{CD}=n$، آنگاه مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:



$$\frac{\pi}{۴}(m^۲-n^۲)$$

مثال ۱: در شکل زیر اگر $\overline{AB}=۲۰$ و $\overline{CD}=۱۲$، مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:

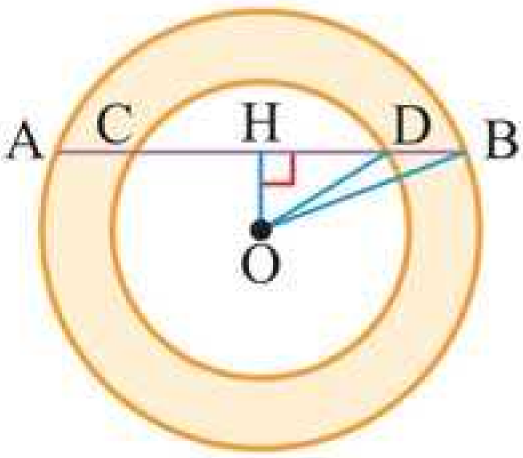


۱) ۶۴π
۲) ۳۶π
۳) ۱۰۰π
۴) ۱۲۸π

پاسخ **گزینهٔ «۱»** روش اول:

$$S_{\text{رنگی}}=\frac{\pi}{۴}(۲۰^۲-۱۲^۲)=\frac{\pi}{۴}(۴۰۰-۱۴۴)=\frac{\pi}{۴}\times ۲۵۶=۶۴\pi$$

روش دوم: از مرکز دایره به D و B وصل می‌کنیم. با توجه به قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$\begin{cases}\overset{\triangle}{OHD}:\overline{OH}^۲=\overline{OD}^۲-\overline{HD}^۲\\ \overset{\triangle}{OHB}:\overline{OH}^۲=\overline{OB}^۲-\overline{HB}^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{OD}^۲ - \overline{HD}^۲ = \overline{OB}^۲ - \overline{HB}^۲$$

$$\Rightarrow \overline{OB}^۲ - \overline{OD}^۲ = \overline{HB}^۲ - \overline{HD}^۲$$

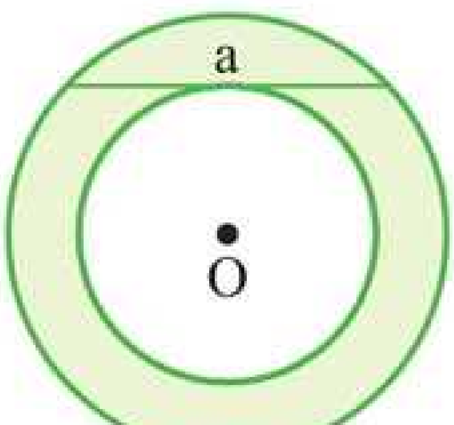
از طرفی داریم:

مساحت دایرهٔ کوچک − مساحت دایرهٔ بزرگ = مساحت ناحیهٔ رنگی

$$= \pi(\overline{OB})^۲ - \pi(\overline{OD})^۲ = \pi(\overline{OB}^۲ - \overline{OD}^۲)$$

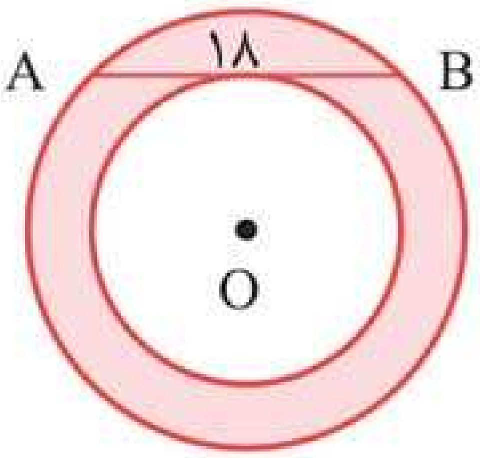
$$= \pi(\overline{HB}^۲ - \overline{HD}^۲) = \pi(۱۰۰ - ۳۶) = ۶۴\pi$$

نکته‌تر: هرگاه وتری به اندازهٔ a از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایره‌ای هم‌مرکز و کوچک‌تر مماس شده باشد، مساحت بین این دو دایره برابر است با:



$$S = \pi(\frac{a}{۲})^۲ = \frac{\pi}{۴}a^۲$$

مثال ۲: در شکل زیر مساحت ناحیهٔ رنگی چقدر است؟



۱) ۱۸π

۲) ۹π

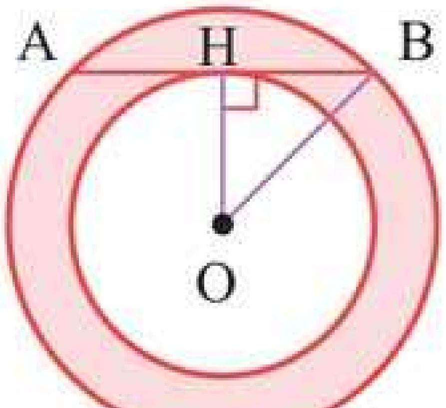
۳) ۸۱π

۴) ۱۶۲π

پاسخ **گزینهٔ «۳»** روش اوّل: با توجه به نکتهٔ گفته‌شده داریم:

$$S = \frac{\pi \times ۱۸^۲}{۴} = \frac{\pi \times ۳۲۴}{۴} = ۸۱\pi$$

روش دوم: از نقطهٔ O بر وتر AB عمودی رسم می‌کنیم؛ با توجه به قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$\overset{\triangle}{OHB} : \overline{OH}^{۲} + \overline{HB}^{۲} = \overline{OB}^{۲}$$

$$\Rightarrow \overline{HB}^{۲} = \overline{OB}^{۲} - \overline{OH}^{۲}$$

مساحت دایرهٔ کوچک − مساحت دایرهٔ بزرگ = مساحت ناحیهٔ رنگی

$$= \pi(\overline{OB})^{۲} - \pi(\overline{OH}^{۲}) = \pi(\underbrace{\overline{OB}^{۲} - \overline{OH}^{۲}}_{\overline{HB}^{۲}})$$

$$= \pi(\overline{HB}^{۲}) = \pi(۹^{۲}) = ۸۱\pi$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۲. طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ واحد است. مجموع مربعات میانه‌های نظیر اضلاع زاویهٔ قائمه کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۰ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۶۳. طول سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای x ، $x+۷$ و $x+۸$ است. اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر این مثلث چقدر است؟

۱) $\frac{۳۰}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۲۰}{۱۳}$ ۳) $\frac{۶۰}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲}$

۶۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر ۴، اندازهٔ یک ضلع، سه برابر دیگری است. طول ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

فصل سوم

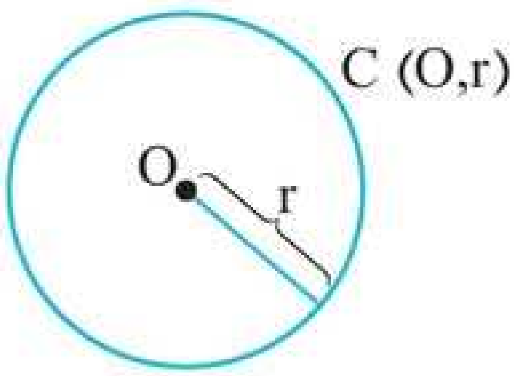
دایره

دایره هم نماد جهان است، هم نهاد تابش و روشنایی خورشید.
دایره هم مظهر تعادل است، هم یک ساز ایرانی.
دایره از دیرباز در زندگی آدمی دایر است.
دایره پر از رمز و راز خالق است.

مفاهیم اوّلیهٔ دایره

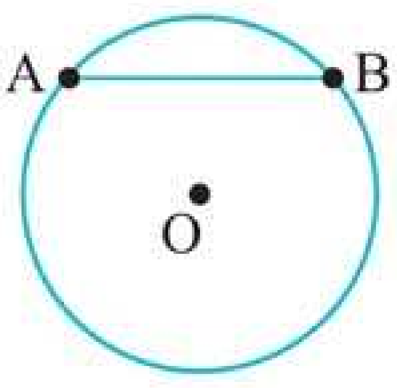
۵۵ دایره و اجزای آن

دایره: مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت در آن صفحه مانند O (مرکز دایره) به فاصلهٔ ثابت r (شعاع دایره) هستند. در هندسه دایره را با نماد C(O , r) نمایش می‌دهند.



وتر: پاره‌خطی است که دو نقطهٔ متمایز از دایره را به هم وصل می‌کند.

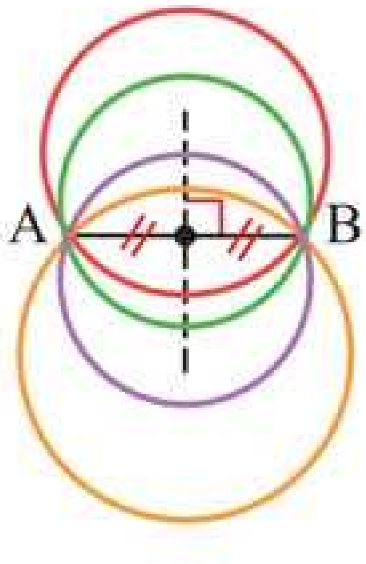
مثال ۱:

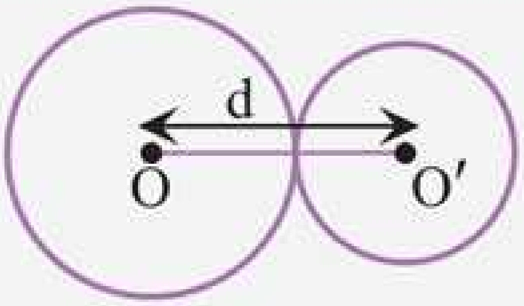
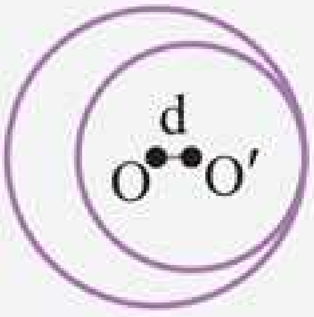
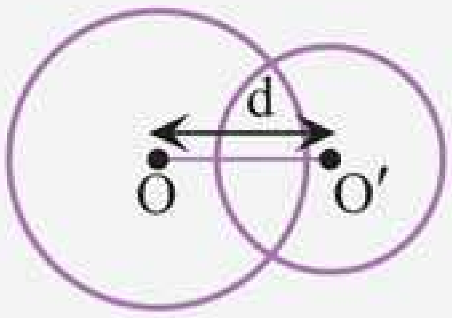
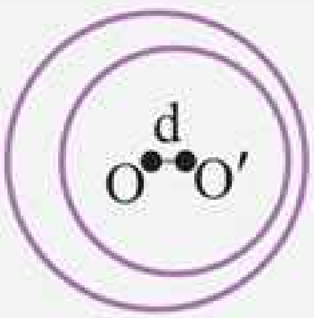
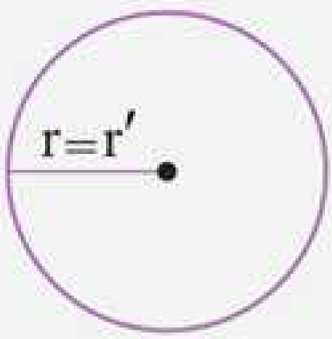


وتر AB

نکته‌تر: **از یک نقطهٔ دلخواه، بی‌شمار دایره عبور می‌کند.**

از دو نقطهٔ دلخواه مانند A و B نیز بی‌شمار دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف AB قرار دارد.



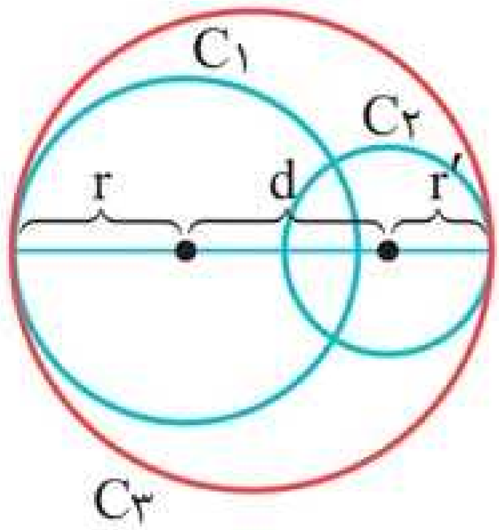
وضعیت دو دایره نسبت به هم	نقاط مشترک	شکل
دو دایرهٔ مماس خارج	$d = r + r'$ یک نقطهٔ مشترک دارند.	
دو دایرهٔ مماس داخل	$d = r - r'$ یک نقطهٔ مشترک دارند.	
دو دایرهٔ متقاطع	$r - r' < d < r + r'$ دو نقطهٔ مشترک دارند.	
دو دایرهٔ متداخل	$d < r - r'$ نقطهٔ مشترکی ندارند.	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = ۰$ نقطهٔ مشترکی ندارند.	
دو دایرهٔ منطبق	$d = r - r' = ۰$ بی‌نهایت نقطهٔ مشترک دارند.	

توجّه: در جدول کلید ۵۸ فاصلهٔ بین مرکزها را با $d\,(OO' = d)$ ، نمایش دادیم و آن را خط‌المرکزین می‌نامیم.

نکته‌تر: در مسائلی که $r + r' > d$ می‌شود، باید $r - r'$ را نیز به‌دست آورید، سپس وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

مثال ۱: اندازهٔ شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۶ و خط‌المرکزین ۸ مماس است، چقدر است؟

پاسخ با توجه به اینکه $r - r' < d < r + r'$ است، دو دایره متقاطع‌اند؛ بنابراین همان‌طور که در شکل می‌بینید، بزرگ‌ترین دایرهٔ مماس بر دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ ، دایرهٔ $C_۳$ و اندازهٔ قطر آن برابر با $d + r + r'$ است:



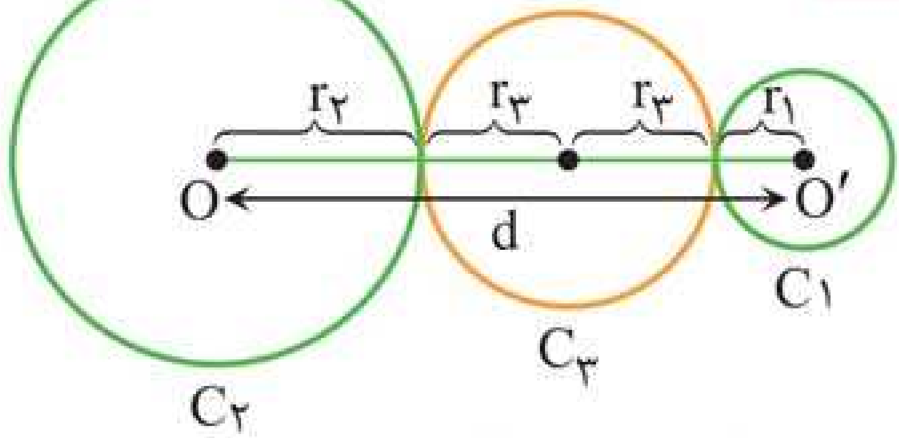
$$\text{قطر} = ۸ + ۴ + ۶ = ۱۸$$

$$\Rightarrow \text{شعاع} = \frac{۱۸}{۲} = ۹$$

مثال ۲: شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر دو دایره $C_۱$ و $C_۲$ با شعاع‌های $r_۱ = ۲$ و $r_۲ = ۴$ و خط‌المرکزین $d = ۱۲$ مماس است، چقدر است؟

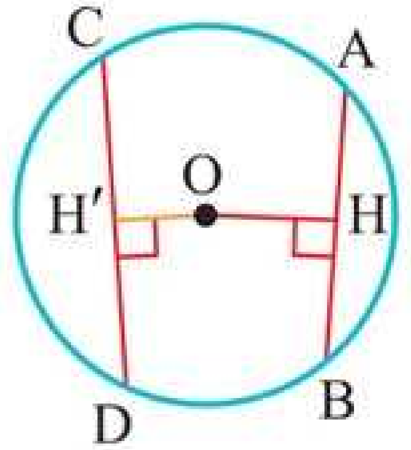
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۲»



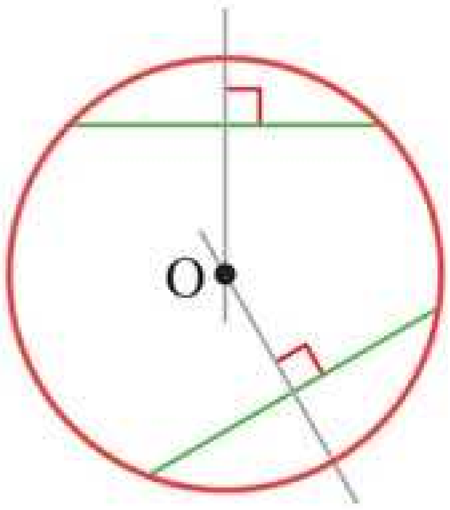
در هر دایره از دو وتر نابرابر، وتری که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

مثال ۶:



$$\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OH'} < \overline{OH}$$

نکته‌تر: نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های دو وتر دلخواه از هر دایره، مرکز آن دایره است.



مثال ۷: کدام‌یک از مفاهیم زیر دربارهٔ وتر دایره نادرست است؟

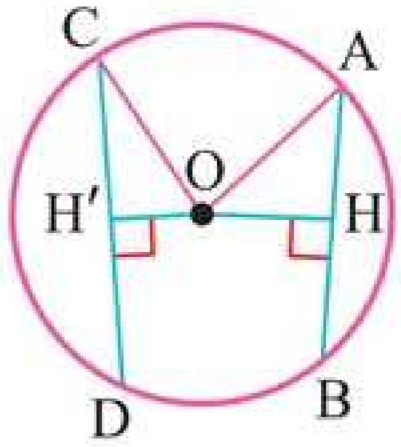
۱) از دو وتر نامساوی در یک دایره، وتری که طولش کوتاه‌تر باشد، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۲) دو وتر مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند.

۳) اگر وسط یک کمان را به وسط وتر همان کمان وصل کنیم، خط واصل از مرکز دایره می‌گذرد.

۴) قطر عمود بر یک وتر آن را نصف می‌کند.

پاسخ **گزینهٔ «۱»** علت نادرستی گزینهٔ ۱ را بررسی می‌کنیم:



$$\begin{cases} \overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2 \\ \overline{OH'}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CH'}^2 \\ \overline{OA} = \overline{OC} = r \end{cases}$$

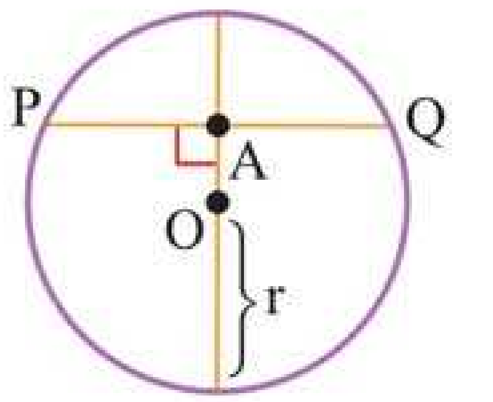
$$\xrightarrow[\overline{AB}<\overline{CD}]{\overline{AH}=\frac{\overline{AB}}{2}\ ,\ \overline{CH'}=\frac{\overline{CD}}{2}} \overline{OH'}^2 < \overline{OH}^2$$

$$\Rightarrow \overline{OH'} < \overline{OH}$$

۷۰ کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه

از هر نقطه داخل دایره (غیر از مرکز) بی‌شمار وتر عبور می‌کند که بزرگ‌ترین آنها، قطر دایره و کوچک‌ترین آنها وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود باشد.

مثال ۱: PQ کوتاه‌ترین وترگذرنده از نقطهٔ A است.



نکته‌تر: طول وتر دلخواه گذرنده از نقطهٔ A (L) همواره بین ۲r و PQ است. (با توجه به شکل مثال بالا)

$$\overline{PQ} \le L \le 2r$$


پاسخ نامه

۱. گزینهٔ «۲» شکل‌های (ب) و (ت) چون ضلع‌های خود را قطع کرده‌اند، نمی‌توانند چندضلعی باشند. شکل (الف) نیز چون یکی از ضلع‌های آن منحنی است، چندضلعی نیست.

۲. گزینهٔ «۱»

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}<\widehat{D}\xrightarrow{+\widehat{D}}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}<\widehat{D}+\widehat{D}$$

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}<۲\widehat{D}$$

$\Rightarrow ۳۶۰^\circ < ۲\widehat{D} \Rightarrow ۱۸۰^\circ < \widehat{D} \rightarrow$ این یعنی مقعر بودن

۳. گزینهٔ «۲» برای شکل (الف) اصلاً محدب و مقعر بودن تعریف نمی‌شود؛ زیرا چندضلعی نیست. فقط شکل‌های (ب) و (ت) محدب‌اند.

۴. گزینهٔ «۴» می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی محدب از رابطهٔ $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین:

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ = \underbrace{۲۵۷۰^\circ}_{\underbrace{۲۵۲۰^\circ}_{۱۴\times ۱۸۰^\circ}+۵۰^\circ} + x$$

$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ(n-۲) = ۱۴\times ۱۸۰^\circ + ۵۰^\circ + x$$

با توجه به رابطهٔ بالا متوجه می‌شویم که مجموع زاویه‌های داخلی این چندضلعی از مجموع زاویه‌های داخلی ۱۶ضلعی

($14\times180^\circ$) بیشتر است؛ بنابراین این چندضلعی باید یک ۱۷ضلعی باشد. در نتیجه:

$$n=17\Rightarrow(n-2)\times180^\circ=2700^\circ$$

$$2700^\circ=2570^\circ+x\Rightarrow x=130^\circ$$

۵. گزینهٔ «۲» از هر رأس، ۳ − ۱۲ یعنی ۹ قطر می‌گذرد که یکی از آنها مشترک است؛ پس: $9+9-1=17$

۶. گزینهٔ «۳» از هر رأس $n-3$ قطر می‌گذرد و هر دو رأس غیرمجاور یک قطر مشترک دارند؛ پس برای تعداد قطرهای گذرنده از سه رأس متوالی داریم:

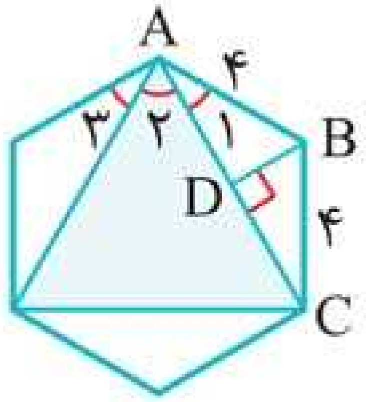
$$3\times(n-3)\underbrace{-\,1}_{\text{قطری که دوبار شمرده می‌شود.}}=26$$

$$3n-10=26\Rightarrow3n=36\Rightarrow n=12$$

$$\text{تعداد کل قطرها}=\frac{12\times(12-3)}{2}=54$$

۷. گزینهٔ «۲» این nضلعی سه زاویهٔ داخلی ۱۲۰ درجه و بنابراین سه زاویهٔ خارجی ۶۰ درجه دارد؛ پس مجموع زاویه‌های خارجی باقیمانده ۱۸۰ درجه است. طبق فرض، همهٔ زاویه‌های خارجی منفرجه یا قائمه‌اند؛ در نتیجه این nضلعی حداکثر می‌تواند دو زاویهٔ ۹۰ درجه داشته باشد؛ یعنی این nضلعی حداکثر پنج‌ضلعی است.

۵۲. گزینهٔ «۱» ضلع های مثلث رنگی، قطرهای کوچک شش ضلعی هستند؛ بنابراین این مثلث یک مثلث متساوی الاضلاع است.



$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 120^\circ$$

$$\xrightarrow[\hat{A}_1=\hat{A}_3]{\hat{A}_2=60^\circ} 2\hat{A}_1 + 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ$$

از آنجایی که در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است، داریم:

$$\overline{BD} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \overline{AD} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} \xrightarrow{\overline{AD}=\overline{DC}} \overline{AC} = 4\sqrt{3}$$

بنابراین طول هر ضلع مثلث رنگی، $4\sqrt{3}$ است؛ پس مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{مثلث رنگی}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times 3 = 12\sqrt{3}$$

۵۳. گزینهٔ «۱» روش اوّل: با توجه به نکتهٔ کلید ۴۴، ضلع مربع برابر است با:

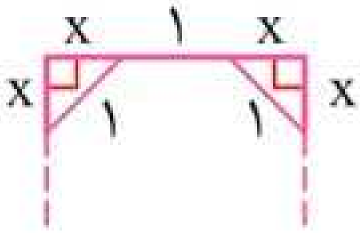
$$a = (\sqrt{2}+1) \times 1 = \sqrt{2}+1$$

$$\text{محیط مربع} = 4(\sqrt{2}+1) \qquad \text{مساحت مربع} = (\sqrt{2}+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط مربع}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{۴(\sqrt{۲}+۱)}{(\sqrt{۲}+۱)^{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}+۱}$$

$$= \frac{۴}{\sqrt{۲}+۱} \times \frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱} = ۴\sqrt{۲}-۴$$

روش دوم: با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



$$۱^{۲} = x^{۲} + x^{۲} = ۲x^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{ضلع مربع} = x+۱+x = ۲x+۱ = ۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+۱ = \sqrt{۲}+۱$$

$$\frac{\text{محیط مربع}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{۴(\sqrt{۲}+۱)}{(\sqrt{۲}+۱)^{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}+۱} = ۴\sqrt{۲}-۴$$

۵۴. گزینهٔ «۲» چون مثلث، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، مساحت قسمت رنگی، نصف مساحت هلالین بقراط است؛ پس:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱۰\times۱۰}{۲}) = ۲۵$$

$$\text{مساحت قسمت رنگی} = ۲۵ \div ۲ = ۱۲/۵$$

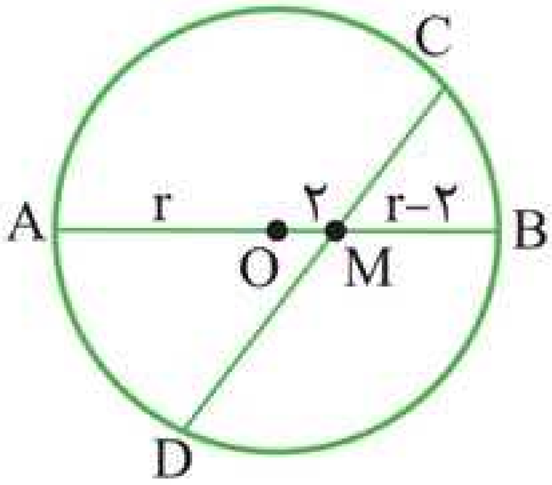
۱۳۹. گزینهٔ «۲»

$$\overline{PT}^{۲} = \overline{PA} \times \overline{PB} \Rightarrow ۶^{۲} = ۴ \times \overline{PB} \Rightarrow \overline{PB} = ۹$$

$$\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} = ۹ - ۴ = ۵$$

$$\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \frac{۵}{۲} \times \frac{۵}{۲} = \frac{۲۵}{۴}$$

۱۴۰. گزینهٔ «۳»



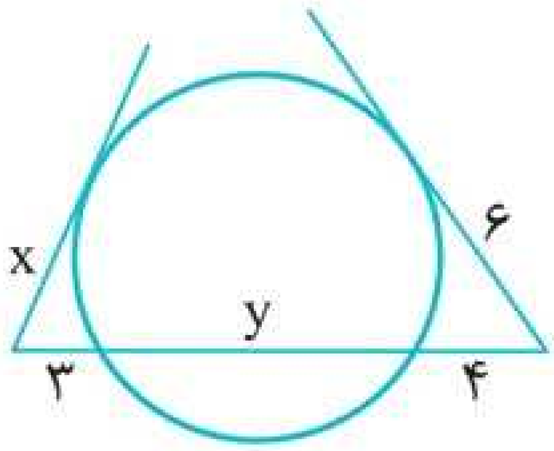
$$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD}$$

$$(r+۲)(r-۲) = ۶ \times ۱۰$$

$$\Rightarrow r^{۲} - ۴ = ۶۰ \Rightarrow r^{۲} = ۶۴$$

$$\Rightarrow r = ۸$$

۱۴۱. گزینهٔ «۳»



$$۶^{۲} = ۴(۴+y) \Rightarrow ۳۶ = ۱۶ + ۴y$$

$$\Rightarrow y = ۵$$

$$x^{۲} = ۳ \times (۳ + \overset{۵}{\cancel{y}}) \Rightarrow x^{۲} = ۲۴$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{۲۴} = x = ۲\sqrt{۶}$$