به نام پروردگار مهربان

ویرایش جدید

گسسته و آمار و احتمال

دهم | یازدهم | دوازدهم

سید مسعود طایفه

لقمه طلایی | مهروماه

مقدمه

دوستان عزیز سلام!

یادمه چند سال پیش وقتی یکی از کتاب‌های برایان تریسی (از خوبای تکنولوژی فکر و موفقیت) رو می‌خوندم، مطلبی راجع‌به هدف‌گذاری به چشمم خورد که الان براتون می‌گم.

فرانسوی‌ها برای عبور از قلب صحرای آفریقا از ایده‌ای جالب استفاده می‌کردند. صحرایی بی‌آب و علف، با وسعت بیش از ۸۰۰ کیلومتر که حتی یک پشه هم در آن پر نمی‌زد. مثل یک دریای ماسه‌ای، زرد رنگ و وسیع بود که از هر طرف که چشم کار می‌کرد، ادامه داشت. در آن سال‌ها بیشتر از ۱۳۰۰ نفر، هنگام عبور از این صحرا ناپدید شده‌بودند. اغلب شن‌های روان، مسیر را می‌پوشاند و مسافران، شب‌ها در صحرا گم می‌شدند. برای حل این مشکل، فرانسوی‌ها از بشکه‌های سیاه‌رنگ برای نشانه‌گذاری در مسیر استفاده می‌کردند. این بشکه‌ها را به فاصله‌های ۵ کیلومتری یعنی فاصله‌ای که خمیدگی زمین، افق دید را در صحرا محدود می‌کند، قرار داده‌بودند. به این ترتیب در طول روز در هر کجای مسیر که بودند، می‌توانستند دو بشکه را ببینند. تنها کاری که باید برای عبور انجام می‌دادند این بود که اتومبیل را به طرف بشکهٔ بعدی هدایت کنند در نتیجه می‌توانستند از بزرگ‌ترین صحرای جهان عبور کنند، یعنی فقط به این صورت که هربار یک بشکه جلو بروند.

شـــاید الان می‌گید که این به ما چه ربطـــی داره؟!! خوب دندون به جیگر بگیرید می‌گم. ما با نوشـــتن کتاب لقمه می‌خواهیم دستتون رو بگیریم و از هر بشـــکه به بشکهٔ بعدی راهنماییتون کنیم تا مسیر عبـــور از درس‌ها رو گم نکنید. جناب کنفســـیوس هم گفته که طی کردن راهی که هزار فرسنگ است با برداشتن یک قدم آغاز می‌شود. خـــوب لقمه رو بخونید تا اولین قدم را با هم تاتی تاتی کنیم، بعدش به‌سوی هدف اصلی دوان دوان می‌روید! انشالا.

تشکر و سپاس

در اینجا لازم می‌دانم از تمام عزیزانی که در آماده‌سازی این کتاب تلاش کرده‌اند، قدردانی کنم:

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر محترم و توانمند انتشارات
- جناب آقای محمدحسین انوشه مدیر فرهیختهٔ شورای تألیف انتشارات
- جناب آقای عباس اشرفی مدیر با تدبیر گروه ریاضی
- ســرکار خانم‌ها آزاده فلاح‌زاده و زهرا رســولی و جنـــاب آقای مهدی مرادی ویراستاران کتاب
- گـروه تولیـد خسـتگی ناپذیـر انتشـارات بـه مدیریـت سـرکار خانـم مریم تاجداری
- گروه هنری خلاق انتشارات به مدیریت جناب آقای محسن فرهادی

و همهٔ عزیزانی که در تهیه این کتاب ما را همراهی کردند.

ارادتمند شما
مسعود طایفه

فهرست

وعدهٔ ۱

گزاره و گزاره‌نما

۱ به جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، **گزاره** می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p ، q ، r و... نمایش می‌دهند.

۲ درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

چاشنی: ◂ یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد. یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. ممکن است ارزش گزاره، هنوز برای ما مشخص نشده باشد، مانند حدس‌های حل‌نشدهٔ ریاضی.
حدس‌های ریاضی در هر نوعی بالاخره یا درست هستند یا نادرست، پس گزاره به حساب می‌آیند.
◂ جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند. به نمونه‌های زیر توجه کنید:
عجب هوایی! (ابراز احساسات)
چه خبر؟ (پرسشی)
لطفاً سر جای خود بنشینید. (امری)

تست: کدام‌یک از جمله‌های زیر یک گزاره است؟

۱) از صدای سخن عشق ندیدم خوش‌تر.
۲) قدرمطلق کرهٔ زمین برابر خودش است.
۳) هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ و کوچک‌تر از 10^6 را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.
۴) $\frac{2}{3}$ بزرگ‌تر است یا $\frac{3}{4}$؟

پاسخ گزینهٔ «۳»
درستی یا نادرستی گزینهٔ «۱» نسبی است، از فردی به فرد دیگر ممکن است تغییر کند و ارزش آن مشخص نیست. گزینهٔ «۲» فاقد معنی و مفهوم است و راستی آزمایی آن ممکن نیست. گزینهٔ «۴» یک جملهٔ پرسشی است، پس گزاره نیست. گزینهٔ «۳» یک حدس در ریاضی است و حدس‌ها گزاره به حساب می‌آیند.

۳ هر استدلال از چند گزاره تشکیل می‌شود. یکی از آن‌ها نتیجهٔ استدلال و بقیه مقدمه‌های استدلال هستند. به عنوان نمونه نتیجهٔ استدلال‌های «علی از محمد بلندتر است.» و «علی از رضا کوتاه‌تر است.» می‌شود «محمد از رضا کوتاه‌تر است.». دو گزارهٔ اول مقدمه‌های استدلال هستند.

۴ هر گزاره مانند p دارای ارزش درست یا نادرست است. اگر گزارهٔ q را نیز در نظر بگیریم، ارزش‌های دو گزاره در کنار هم در جدول زیر آمده است. به این جدول، **جدول ارزش گزاره‌ها** می‌گوییم.

q	p
د	د
ن	د
د	ن
ن	ن

با توجه به جدول، برای n گزاره، ۲^n حالت ارزش در جدول وجود دارد.

تست: ارزش چهار گزارهٔ p, q, r, s دارای چند حالت است و در چند حالت از آن‌ها، فقط دو گزاره درست هستند؟

(آمار و احتمال صفحهٔ ۴)

۱) ۱۶ − ۴
۲) ۱۶ − ۶
۳) ۸ − ۴
۴) ۸ − ۶

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

چهار گزاره در کل $16 = 2^4$ حالتِ ارزش در جدول دارند. با توجه به رابطهٔ انتخاب، تعداد حالت‌هایی که فقط ۲ گزاره درست هستند، برابر است با:

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{فقط دو گزاره از چهار گزاره درست هستند}} = 6$$

۵ هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کاررفته در آن‌ها یک متغیره، دو متغیره و... می‌نامیم.

به عنوان مثال عبارت « $x^2 > 1$ » یک گزاره‌نما است. به جای x، هر عددی که قرار دهیم، یک گزاره به دست می‌آید که درست یا نادرست است.

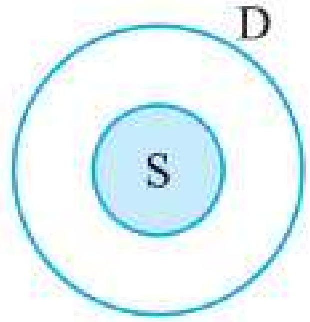
چاشنی: گزاره و گزاره‌نما هر دو جملهٔ خبری هستند، با این تفاوت که ارزش گزاره را می‌توانیم مشخص کنیم اما در مورد گزاره‌نما، درستی یا نادرستی آن را نمی‌توانیم تعیین کنیم.

به عنوان مثال، در پرتاب یک تاس، عبارت $P(A) = \frac{1}{2}$ یک گزاره‌نما است. اگر به جای A هر پیشامدی از فضای نمونه‌ای قرار دهیم، گزارهٔ حاصل فقط درست یا فقط نادرست است. اما عبارت «برای هر پیشامد A که $A \subseteq S$ داریم: $P(A) = \frac{1}{2}$» را در نظر بگیرید. این عبارت یک جملهٔ خبری با ارزش نادرست است، چون پیشامد $A = \{2\}$ مثال نقضی برای درستی این عبارت است. پس این عبارت گزاره است.

چاشنی: اگر درستی یا نادرستی عبارتی، به مقادیری که به جای متغیرهای آن قرار می‌دهیم، وابستگی نداشته باشد، آن عبارت یک گزاره است. مانند عبارت «$x^۲ \geq ۰$» که به ازای هر مقدار x از اعداد حقیقی همواره صحیح است.

۶ در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا این که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، **دامنهٔ متغیر گزاره‌نما** می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند. برای نمونه، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای « x عددی فرد است» مجموعهٔ اعداد صحیح و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$x+۱>۰$» مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

۷ در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعه جواب گزاره‌نما** می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$



برای مثال، مجموعه جواب گزاره‌نمای «$x^۲=۴$» که $D=\mathbb{R}$ است $S=\{-۲,۲\}$ می‌شود. اگر در همین مثال $D=\mathbb{N}$ باشد، $S=\{۲\}$ خواهد بود.

تست: اگر دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$x^۲-۶x-۷<۰$»، مجموعهٔ $D=[۱,+\infty)$ باشد، مجموعه جواب آن شامل چند عدد صحیح می‌شود؟ (آمار و احتمال صفحهٔ ۶)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

ابتدا باید نامعادله را حل کنیم:

$$x^۲-۶x-۷<۰ \Rightarrow (x-۷)(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۷$$
$$\Rightarrow x \in (-۱,۷)$$

با توجه به $D = [1, +\infty)$، مجموعه جواب برابر اشتراک جواب نامعادله و D است. پس: $S = (-1, 7) \bigcap [1, +\infty) = [1, 7)$

S شامل ۶ عدد صحیح است.

چاشنی: اگر عضوی در دامنهٔ متغیر نباشد و به جای متغیر آن عضو را قرار دهیم گزاره‌نما تبدیل به گزاره **نمی‌شود**. به عنوان مثال اگر در گزاره‌نمای «$\frac{2}{x} \in \mathbb{R}$» به جای x عدد صفر را قرار دهیم، عبارت $\frac{2}{0} \in \mathbb{R}$ گزاره محسوب **نمی‌شود**.

وعدهٔ ۲

ترکیب گزاره‌ها

۱ گزارهٔ مرکب گزاره‌ای است که از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای تشکیل شده است. رابط‌های گزاره‌ای عبارت‌اند از:

الف رابط ناقض با نماد «$\sim$» گزارهٔ p را نقیض می‌کند. گزارهٔ $\sim p$ را «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

ب p و q دو گزاره هستند. رابط فاصل با نماد «$\vee$» گزارهٔ $p \vee q$ را تشکیل می‌دهد که **ترکیب فصلی** دو گزاره نام دارد. گزارهٔ $p \vee q$ به صورت «p یا q» خوانده می‌شود.

پ گزارهٔ مرکب $p \wedge q$ را که با رابط عاطف با نماد «$\wedge$» ساخته شده است، **ترکیب عطفی** دو گزاره گوییم. این ترکیب برای p، q به صورت «p و q» خوانده می‌شود.

ت گزارهٔ مرکب $p \Rightarrow q$ را **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم. به نماد «$\Rightarrow$» رابط شرط گفته می‌شود. گزارهٔ $p \Rightarrow q$ به صورت‌های «اگر p آن‌گاه q»، «p شرط کافی برای q» (یعنی از p، q نتیجه می‌شود.) و «q شرط لازم برای p» خوانده می‌شود. در این ترکیب، p را **مقدم یا فرض** و q را **تالی یا حکم** می‌نامیم.

چاشنی: مقایسهٔ روش‌های نمونه‌گیری:

نوع نمونه‌گیری	مزایا	معایب
تصادفی ساده	همهٔ عضوها شانس برابر برای انتخاب دارند.	هزینه‌بر بودن و عدم دسترسی مناسب به واحدها برای جامعهٔ بزرگ
خوشه‌ای	کم‌هزینه سریع شانس مساوی عضوها	عدم دقت در نمونه‌گیری و وجود خطا در آن
طبقه‌ای	اطمینان از انتخاب عضو از همهٔ طبقه‌ها در نمونه	زمان‌بر و هزینه‌بر بودن ـ عدم وجود شانس برابر برای عضوها
سیستماتیک	شانس انتخاب عضوها برابر ـ بهینه در صرف زمان و هزینه	بدون وجود فهرستی از عضوهای جامعه قابل اجرا نیست.

۲ نمونه‌گیری غیراحتمالی: روش نمونه‌گیری که در آن برخی از عضوهای جامعه، شانسی برای انتخاب شدن در نمونه ندارند. برخی از نمونه‌گیری‌های غیراحتمالی عبارت‌انداز:

الف نمونه‌گیری در دسترس
ب نمونه‌گیری قضاوتی
پ نمونه‌گیری بدون برنامه‌ریزی
ت نمونه‌گیری تلفنی
ث نمونه‌گیری داوطلبانه

نمونهٔ اُریب: اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، می‌گویند آن روش نمونه‌گیریِ اُریب است. لذا آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی منابع تولید اُریبی، نمونه‌گیری را تا جایی که می‌توانند نااُریب کنند.

چاشنی: در نمونه‌های اُریب، ممکن است عضوها از شانس برابر برای انتخاب در نمونه برخوردار باشند اما روش نمونه‌گیری به شکلی بوده است که داده‌ها به سمتی انحراف پیدا کنند و با افزایش تعداد نمونه‌ها نیز این انحراف کاهش نیابد.

تست: کدام نمونه اُریب نیست؟ (آمار و احتمال صفحهٔ ۱۱۰)

۱) انتخاب تصادفی افراد و پرسش از آن‌ها در مورد تعداد اعضای خانواده برای محاسبهٔ این که خانواده‌ها چند نفره هستند.

۲) نمونه‌گیری از بازیکن‌های حرفه‌ای تنیس برای بررسی درآمد مالی ورزشکاران

۳) نمونه‌گیری از افراد مراجعه‌کننده به یک دندانپزشکی برای بررسی وضعیت بهداشت دهان و دندان در ایران

۴) انتخاب ۲۰ دانش‌آموز از هر استان کشور

پاسخ گزینهٔ «۴»

گزینهٔ ۱: افراد خانواده‌های پرجمعیت‌تر شانس بیشتری برای شرکت در این مطالعه دارند و بنابراین همهٔ افراد از شانس یکسانی برخوردار نبوده و پاسخ‌ها به سمت خانوادهٔ پرجمعیت‌تر منحرف می‌شود.

گزینهٔ ۲: بازیکن‌های حرفه‌ای تنیس، گروه کوچکی از کل جامعهٔ ورزشکاران بوده و همهٔ اقشار گوناگون در ورزش را شامل نمی‌شود.

گزینهٔ ۳: افراد مراجعه‌کننده به دندانپزشکی، به طور منطقی دارای مشکل دهان یا دندان هستند و نمونه‌های مناسبی برای بررسی وضعیت دهان و دندان نیستند.

گزینهٔ ۴: یک نمونه‌گیری احتمالی و غیراُریب است.

آمار استنباطی

هم‌نهشتی و بخش‌پذیری

۱. عاد کردن $a \mid b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = a \cdot q$

۲. روابط عاد کردن $(m , n \in \mathbb{N})$ ، $(a , b , c \in \mathbb{Z})$

الف) $m \le n \longrightarrow m! \mid n!$

ب) $\forall a \in \mathbb{Z}\ ;\ a \mid ۰ , \pm ۱ \mid a , \pm a \mid a$

پ) $a \mid b \rightarrow -a \mid b\ ,\ a \mid -b\ ,\ -a \mid -b$

ت) $(a \mid b \wedge b \mid a) \Leftrightarrow |a| = |b|$

ث) $(a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$

ج) $$a \mid b \begin{cases} \xrightarrow{\forall m \in \mathbb{Z}} a \mid mb\ ,\ ma \mid mb \\ \xrightarrow[\forall n \in \mathbb{Z}]{} a \mid b^n\ ,\ a^n \mid b^n \end{cases}$$

چ) $$\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{m \le n} a^m \mid b^n \\ a^m \mid b^n \xrightarrow{m \ge n} a \mid b \end{cases}$$

ح) $(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow (a \mid (b \pm c) \wedge a \mid bc)$

خ) $$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{W} : (a-b) \mid a^n - b^n \\ \forall n \in \mathbb{W} ,\ n \text{ فرد باشد}: (a+b) \mid a^n + b^n \\ \forall n \in \mathbb{W} ,\ n \text{ زوج باشد}: (a+b) \mid a^n - b^n \end{cases}$$

۳. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (d)

الف) $$\begin{cases} (a , b) = d \Leftrightarrow (d \mid a \wedge d \mid b) \\ \forall m \in \mathbb{N} : (m \mid a \wedge m \mid b) \Rightarrow m \le d \end{cases}$$

ب $(a , b)=d \xleftrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} (ka , kb)=|k|d$

پ $(a , b)=d \xleftrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} (a^n , b^n)=d^n$

۴. کوچک‌ترین مضرب مشترک (c)

الف $\begin{cases} a|c \wedge b|c \\ \forall m\in\mathbb{N}:(a|m \wedge b|m)\Rightarrow c\leq m \end{cases}$

ب $[a , b]=c \xleftrightarrow[k\neq ۰]{\forall k\in\mathbb{Z}} [ka , kb]=|k|c$

پ $[a , b]=c \xleftrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} [a^n , b^n]=c^n$

۵. قضیهٔ تقسیم $a=bq+r , ۰\leq r<b , q=[\frac{a}{b}]$

۶. هم‌نهشتی $a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow m|a-b$ یا $a-b=mk(k\in\mathbb{Z})$

۷. برخی روابط هم‌نهشتی $(a , b , c\in\mathbb{Z} ، m , n\in\mathbb{N})$

الف $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c \\ ac\overset{m}{\equiv}bc \\ a^n\overset{m}{\equiv}b^n \end{cases}$

ب $\begin{cases} \text{ویلسون} \xrightarrow{p\ \text{عدد اول}} (p-۱)!\overset{p}{\equiv}-۱ \\ \text{فرما} \xrightarrow[(P , a)=۱]{p\ \text{عدد اول}} a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱ \end{cases}$