
فصل اول
پایه دوازدهم
حرکت بر خط راست

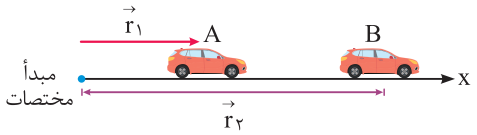
قسمت اول: نگاهی بر مفاهیم حرکت

ایستگاه ۱ مفاهیم بردار مکان، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده

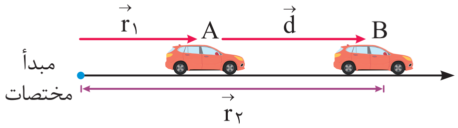
تو اولین ایستگاه ورودتون به فیزیک دوازدهم، بریم ببینیم پارامترهای بردار مکان و جابه‌جایی چی هستن؟ ایشالا که تا آخر کتاب خیلی خوش بگذره.

۱. بردار مکان و جابه‌جایی

بردار مکان: در شکل مقابل اتومبیلی بر روی محور x در حال حرکت است. **بردار مکان** در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل می‌شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده‌شده است.



بردار تغییرمکان (جابه‌جایی): متحرک نشان داده‌شده در شکل مقابل، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 از نقطهٔ A تا نقطهٔ B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازهٔ زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازهٔ زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازهٔ زمانی متصل می‌کند.



تذکر همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ معادل با تفاضل بردارهای مکان در نقاط A و B است.

$$\vec{d} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

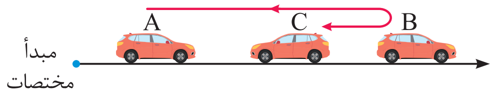
انتهای $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$

خوب یادتون باشه که بردار $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$، از انتهای $\vec{r}_1$ به انتهای $\vec{r}_2$ وصل میشه.

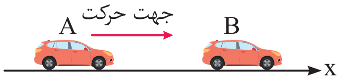
۲. مسافت طی‌شده

فرض کنید مطابق شکل، اتومبیلی از نقطهٔ A به B رفته و سپس از نقطهٔ B به نقطهٔ C بازگردد. به طول مسیر طی‌شده توسط اتومبیل، مسافت پیموده‌شده یا به اختصار مسافت می‌گویند.



تذکر همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی‌شدهٔ ABC از طول پاره‌خط AC (اندازهٔ جابه‌جایی) بزرگ‌تر است. در مجموع می‌توان گفت «**مسافت طی‌شده توسط یک متحرک، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است.**»

تذکر در شکل زیر یک اتومبیل در جهت محور x مستقیماً از A به B منتقل شده است. در این حالت خاص طول بردار جابه‌جایی و مسافت طی‌شده با یک‌دیگر برابر بوده و هم‌اندازه با طول پاره‌خط AB است.



مسافت طی‌شده

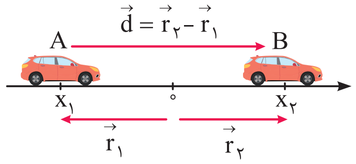
$$l = |\vec{d}| = AB$$

اندازهٔ بردار جابه‌جایی

نتیجه هنگامی که متحرک در مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر مسافت طی شده است.

نکات مهم و کاربردی

۱) فرض کنید متحرکی مطابق شکل مقابل از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کند. بدین‌ترتیب بردار مکان متحرک در نقاط A و B و بردار جابه‌جایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} \ , \ \vec{r}_2 = x_2\vec{i} \Rightarrow \vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2\vec{i} - x_1\vec{i} = (x_2 - x_1)\vec{i} = \Delta x\,\vec{i}$$

۲) اگر متحرک در سمت راست مبدأ باشد (B)، بردار مکان در جهت محور x قرار دارد و اگر متحرک در سمت چپ مبدأ باشد (A)، بردار مکان در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.

۳) در هنگام عبور متحرک از مبدأ، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، این موضوع از نکات تست‌خیز این ایستگاه نکات محسوب می‌شود.

۴) اگر $\Delta x > 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در جهت محور x و اگر $\Delta x < 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در خلاف جهت محور x است.

۵) مسافت طی‌شده کمیتی نرده‌ای بوده و جابه‌جایی کمیتی برداری است.

۶) در جدول زیر، دو کمیت جابه‌جایی و مسافت مقایسه شده‌اند.

کمیت	جابه‌جایی	مسافت
تعریف	برداری است که نقطهٔ شروع حرکت را مستقیماً به نقطهٔ پایان حرکت وصل می‌کند.	طول مسیر طی‌شده توسط متحرک است.
نوع	برداری	نرده‌ای
یکای SI	m	m
مقایسهٔ اندازه	اندازهٔ جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی‌شده است.	

۷) جابه‌جایی کل متحرک در چند بازهٔ زمانی متوالی، برابر مجموع برداری جابه‌جایی‌های متحرک در هر یک از این بازه‌هاست. مثلاً اگر متحرکی در t_1 ثانیهٔ اول حرکت جابه‌جایی $\vec{d}_1 = 5\vec{i}$، در t_1 ثانیهٔ دوم حرکت جابه‌جایی $\vec{d}_2 = -7\vec{i}$ و در t_1 ثانیهٔ سوم حرکتش جابه‌جایی $\vec{d}_3 = 8\vec{i}$ را انجام داده باشد، جابه‌جایی آن در کل حرکت برابر است با:

$$\vec{d}_{کل} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = 5\vec{i} + (-7\vec{i}) + (8\vec{i}) = 6\vec{i} \xrightarrow{\text{به‌طور ساده‌تر}} \Delta x_{کل} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 5 - 7 + 8 = 6\,m$$

حالا بریم با یه تمرین دُرُستُ حسابی، مطالب این ایستگاه رو جمع‌بندی کنیم ...

تمرین ۱) در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده‌شده برروی محور x از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و به نقطهٔ B می‌رود و سپس از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ C باز می‌گردد. کدام عبارت در مورد حرکت این اتومبیل از A تا C نادرست است؟

۱) بردار مکان متحرک در نقطهٔ C، برابر $-\vec{i}$ در SI می‌باشد.
۲) ۸ متر از مسافت طی‌شده، در خلاف جهت محور x است.
۳) این متحرک از A تا C، مسافت ۱۰m را طی کرده است.
۴) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C، برابر $6\vec{i}$ در SI می‌باشد.

پاسخ برای تحلیل این سؤال آموزشی، به موارد زیر توجه کنید:

۱) بردار مکان متحرک در نقاط A، B و C به‌صورت زیر است:

$$\vec{r}_A = 5\vec{i} \qquad \vec{r}_B = -3\vec{i} \qquad \vec{r}_C = -1\vec{i}$$

۲) این متحرک از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، ۸m در خلاف جهت محور x و از نقطهٔ B تا نقطهٔ C، ۲m در جهت محور x حرکت کرده است و در مجموع مسافتی به اندازهٔ ۱۰m را طی کرده است.

۳) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C نیز به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$\vec{d} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -1\vec{i} - 5\vec{i} = -6\vec{i}$$

بنابراین تنها عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۴) نادرست است.

بررسی ویژگی‌های معادلهٔ مکان – زمان

تو ادامهٔ کار درک مفهوم سادهٔ معادلهٔ یه پارامتر (مثل مکان) برحسب زمان، تو این فصل خیلی برامون مهمه. بریم ببینیم چه جوری میشه با این مفهوم یه ارتباط خوبی برقرار کرد.

معادلهٔ مکان - زمان یک متحرک، معادله‌ای است که مکان متحرک را در هر لحظه مشخص می‌کند. فرض کنید متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است و معادلهٔ مکان - زمان آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:
$$x = t^۳ + ۲t + ۵$$
این معادله، معادله‌ای است که اگر زمان را در آن قرار دهیم، بلافاصله موقعیت متحرک را به ما می‌دهد. مثلاً داریم:

$$x = t^۳ + ۲t + ۵ \Rightarrow \begin{cases} t_۰ = ۰ \to x_۰ = ۰^۳ + ۲\times ۰ + ۵ = ۵\,m & \text{(در } t_۰ = ۰ \text{ (شروع حرکت)، } x_۰ = ۵\,m \text{ است.)} \\ t_۱ = ۱s \to x_۱ = ۱^۳ + ۲\times ۱ + ۵ = ۸\,m & \text{(در } t_۱ = ۱s\text{، } x_۱ = ۸\,m \text{ است.)} \\ t_۲ = ۲s \to x_۲ = ۲^۳ + ۲\times ۲ + ۵ = ۱۷\,m & \text{(در } t_۲ = ۲s\text{، } x_۲ = ۱۷\,m \text{ است.)} \end{cases}$$

تذکر اگر از ما بخواهند جابه‌جایی متحرک را در یک بازهٔ زمانی مانند $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$ از روی معادلهٔ مکان - زمان به‌دست آوریم، کافی است مقادیر $t_۱$ و $t_۲$ را در معادلهٔ مکان قرار داده و حاصل $x_۱$ و $x_۲$ را به‌دست آوریم. $x_۲ - x_۱$، معادل با جابه‌جایی متحرک است.

$$\begin{cases} t_۲ = ۲s \to x_۲ = ۱۷\,m \\ t_۱ = ۱s \to x_۱ = ۸\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۱۷ - ۸ = ۹\,m$$

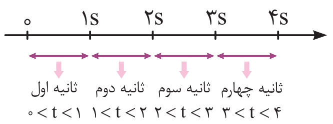
نکات مهم و کاربردی

۱) مکان اولیهٔ متحرک، یعنی مکان آن در لحظهٔ $t = ۰$. بنابراین برای پیدا کردن مکان اولیهٔ یک متحرک، کافی است در معادلهٔ مکان - زمان آن، پارامتر t را برابر صفر قرار دهیم.

۲) متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است، این متحرک هنگامی از مبدأ عبور می‌کند که $x = ۰$ شود. به‌عبارتی برای پیدا کردن لحظات عبور یک متحرک از مبدأ، کافی است برای آن $x = ۰$ قرار داده شود.

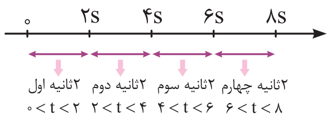
مثال: $x = ۴t - ۸ \xrightarrow[\text{عبور از مبدأ}]{\text{پیدا کردن لحظهٔ}} x = ۴t - ۸ = ۰ \to t = ۲s$

۳) ثانیهٔ اول حرکت، یک بازهٔ زمانی است که طول آن برابر یک ثانیه بوده و از $t = ۰$ شروع می‌شود یعنی $۰ < t < ۱s$، ثانیهٔ دوم حرکت یعنی $۱s < t < ۲s$ و به همین صورت می‌توان گفت:



ثانیهٔ nام: $\Rightarrow n - ۱ < t < n$

۴) دو ثانیهٔ اول حرکت یک بازهٔ زمانی است که طول آن برابر دو ثانیه و از $t = ۰$ شروع می‌شود، یعنی $۰ < t < ۲s$. دو ثانیهٔ دوم یعنی $۲s < t < ۴s$ * و به همین صورت دو ثانیه‌های بعدی نیز نوشته می‌شود.



در ادامه با حل چند تمرین نسبتاً ساده، مفاهیم ارائه‌شده را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین ۲) دو ثانیهٔ هشتم از یک حرکت، معادل با چه بازهٔ زمانی است؟

پاسخ دو ثانیهٔ هشتم یک حرکت، یعنی ۸ بازهٔ زمانی ۲ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای این بازهٔ زمانی $۱۶s = ۲ \times ۸$ است، از طرفی طول هر بازهٔ زمانی $۲s$ است یعنی: $\boxed{۱۴s} < t < ۱۶s$ ← ۲ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

تمرین ۳) نه ثانیهٔ پنجم از یک حرکت، معادل با چه بازهٔ زمانی است؟

پاسخ نه ثانیهٔ پنجم یک حرکت، یعنی ۵ بازهٔ زمانی ۹ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای بازهٔ زمانی $۴۵s = ۹ \times ۵$ است، از طرفی طول هر بازهٔ زمانی $۹s$ است یعنی $\boxed{۳۶s} < t < ۴۵s$ ← ۹ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

* اگر بخواهیم بازه‌های زمانی را دقیق‌تر بنویسیم، ۲ ثانیهٔ اول معادل با $۰ \le t < ۲s$، ۲ ثانیهٔ دوم معادل با $۲s \le t < ۴s$ و ... می‌باشد که البته این موضوع از اهمیت چندانی برخوردار نیست و معمولاً در کتاب‌های کنکور رعایت نمی‌شود.

تمرین ۴ **معادلهٔ حرکت متحرکی بر روی محور x، در SI از رابطهٔ $x = t^2 - 4t$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت و در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر است؟**

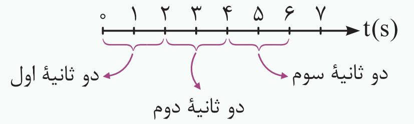
۱) ۱۲ , −۴ ۲) ۱۰ , −۶ ۳) ۸ , −۴ ۴) ۱۰ , −۴

پاسخ برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت $(0 < t < 2s)$:

$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^2 - 4 \times 2 = -4m \end{cases} \Rightarrow \text{جابه‌جایی در دو ثانیهٔ اول}: \Delta x = x_2 - x_1 = -4m$$

گام دوم: محاسبهٔ جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت $(4s < t < 6s)$:



$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4s \rightarrow x_1 = 4^2 - 4 \times 4 = 0 \\ t_2 = 6s \rightarrow x_2 = 6^2 - 4 \times 6 = 12m \end{cases} \Rightarrow \text{جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم}: \Delta x = x_2 - x_1 = 12 - 0 = 12m$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲. شرط به هم رسیدن دو متحرک

فرض کنید معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک A و B که همزمان شروع به حرکت کرده‌اند، به صورت $x_A = 4t + 2$ و $x_B = -5t + 20$ است. شرط به هم رسیدن دو متحرک آن است که مکان دو متحرک یکسان شود و این یعنی داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 4t + 2 = -5t + 20 \Rightarrow t = 2s$$

از سوی دیگر ممکن است پرسیده شود که این دو متحرک در چه مکانی به هم می‌رسند؟ برای محاسبهٔ این موضوع داریم:

$$t = 2s \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در یکی از xها}} x_A = 4t + 2 = 4 \times 2 + 2 = \boxed{10m}$$

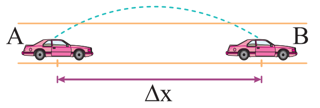
در مکان $x = +10m$ دو متحرک به هم می‌رسند.

حالا وقتشه یه سری به تستای ۱ تا ۱۴ بزنیم ...

ایستگاه ۲ آشنایی با مفهوم سرعت متوسط و تندی متوسط

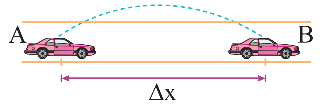
درک مفهوم تندی متوسط و سرعت متوسط، یکی از خواسته‌های اصلی ما تو این فصل هست. خوب روی این موضوع تمرکز کنید ...

سرعت متوسط: در شکل زیر متحرکی با سرعت متغیر، از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان Δt ثانیه، به نقطهٔ B می‌رسد. حال می‌خواهیم ببینیم این متحرک با چه سرعت ثابتی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کند تا مجدداً در همان زمان Δt از A به B برسد.



با سرعت متغیر در مدت Δt از A تا B می‌رود.

⇒



می‌خواهیم با سرعت ثابت v_{av} در همان زمان Δt از A تا B برود.

این پارامتر، **سرعت متوسط** نام دارد که به نوعی مقدار متوسطی برای سرعت متحرک در طی لحظات حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B محسوب می‌شود. اگر متحرک روی محور x در حال حرکت باشد، برای محاسبهٔ $\vec{v}_{av}$، کافی است جابه‌جایی $\vec{d}$ را بر زمان انجام آن جابه‌جایی، یعنی Δt تقسیم کنیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

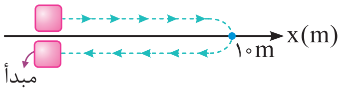
تندی متوسط: به نسبت مسافت طی‌شده (l) به زمان طی مسافت (Δt) تندی متوسط گویند. تندی متوسط را با نماد s_{av} نشان می‌دهند و برای محاسبهٔ s_{av} داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

نکات مهم و کاربردی

۱) سرعت متوسط مانند جابه‌جایی کمیتی برداری و تندی متوسط مانند مسافت، کمیتی عددی (نرده‌ای) می‌باشد.

۲) اگر جابه‌جایی متحرک در طی انجام یک حرکت صفر شود، سرعت متوسط آن نیز صفر می‌شود. به طور مثال در حرکت زیر که متحرک ابتدا ۱۰m در جهت محور x حرکت کرده و سپس ۱۰ متر در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به محل اولیهٔ خود بازمی‌گردد، سرعت متوسط در کل زمان حرکت صفر است.



$$\begin{cases} x_{\text{شروع}} = ۰ \\ x_{\text{پایان}} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_{\text{پایان}} - x_{\text{شروع}} = ۰$$

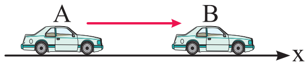
۳) اگر یک متحرک در جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن مثبت بوده و اگر در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن منفی است.

۴) تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. به عبارت دیگر تندی متوسط فقط زمانی برابر صفر می‌شود که متحرک ساکن باشد.

۵) مسافت طی‌شده همواره بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی یا برابر با آن است، بنابراین تندی متوسط هم همواره بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط یا برابر با آن است .

$$s_{av} \geq |\vec{v}_{av}|$$

۶) فرض کنید مطابق شکل مقابل متحرکی روی محور x از نقطهٔ A تا نقطهٔ B بدون تغییر جهت جابه‌جا شود. در این حالت چون مسافت طی‌شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی است، تندی متوسط برابر اندازهٔ سرعت متوسط می‌شود. $s_{av} = |\vec{v}_{av}|$



حالا بریم تو چند تا تمرین بعدی، ببینیم چه جوری از نکاتی که یاد گرفتیم میشه توی حل مسائل استفاده کرد ...

تمرین ۵) معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = ۰/۲۵ + \sin \pi t$ می‌باشد. اندازهٔ سرعت متوسط آن در ۵ ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) صفر ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۱۵

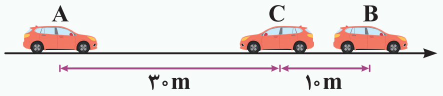
پاسخ: برای محاسبهٔ سرعت متوسط در ۵ ثانیهٔ اول حرکت، کافیست مکان متحرک در لحظات $t_1 = ۰$ و $t_2 = ۵s$ را به‌دست آوریم:

$$x = ۰/۲۵ + \sin \pi t \quad , \quad (۰ < t < ۵s) \rightarrow |\vec{v}_{av}| = ?$$

$$\begin{cases} t_1 = ۰ \rightarrow x_1 = ۰/۲۵ + \sin(۰) = ۰/۲۵m \\ t_2 = ۵s \rightarrow x_2 = ۰/۲۵ + \sin ۵\pi = ۰/۲۵m \end{cases} \rightarrow \text{سرعت متوسط}: \vec{v}_{av} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}\vec{i} = \frac{۰/۲۵ - ۰/۲۵}{۵ - ۰}\vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = ۰ \text{ (گزینهٔ ۱)}$$

دقت: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هرگاه جابه‌جایی متحرک برابر صفر شود، سرعت متوسط متحرک نیز برابر صفر می‌شود.

تمرین ۶) مطابق شکل، اتومبیلی روی محور x از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و در مدت ۶s به نقطهٔ B رفته و سپس در مدت ۴s از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود. کدام عبارت در مورد این حرکت نادرست است؟



۱) این اتومبیل به‌طور متوسط در هر ثانیه، ۵m از مسیر را پیموده است.

۲) این اتومبیل به‌طور متوسط در هر ثانیه، ۳m از نقطهٔ A به مقصد نزدیک شده است.

۳) تندی متوسط این اتومبیل ۵m/s است.

۴) اندازهٔ سرعت متوسط این اتومبیل ۱۵m/s است.

پاسخ: این اتومبیل از نقطهٔ A تا B، مسافت ۴۰m را طی کرده و سپس از نقطهٔ B تا C، به اندازهٔ مسافت ۱۰m برگشته است. بنابراین در مجموع مسافت طی‌شده توسط اتومبیل ۵۰m می‌شود و تندی متوسط به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵m/s$$

بنابراین تندی متوسط ۵m/s می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه، به‌طور متوسط ۵m از مسیر را طی کرده است.

در ادامه سرعت متوسط اتومبیل را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{۳۰}{۱۰}\vec{i} = ۳\vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = ۳m/s$$

بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط ۳m/s می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه به‌طور متوسط ۳m از نقطهٔ A به سمت مقصد، یعنی نقطهٔ C نزدیک شده است، پس گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است.

تذکر: برای تبدیل km/h به m/s، کافی است عدد موردنظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

$$۱km/h = ۱\frac{(۱۰۰۰m)}{(۳۶۰۰s)} \Rightarrow ۱km/h = \frac{۱}{۳/۶}m/s$$

و برای تبدیل m/s به km/h، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می‌کنیم:

$$۱m/s = ۳/۶km/h$$

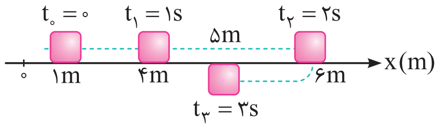
حالا وقتشه یه سری به تستای ۱۵ تا ۳۸ بزنیم ...

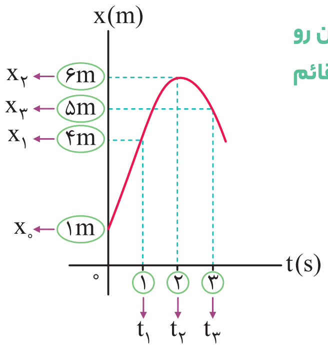
ایستگاه ۳ تحلیل نمودار مکان - زمان و محاسبهٔ $|\vec{V}_{av}|$ و s_{av} از روی آن

۱. تحلیل مفهومی نمودار مکان – زمان

فرض کنید مکان متحرکی مطابق شکل، در لحظات t_0 ، t_1 ، t_2 ، t_3 و ... داده‌شده است. اگر این مکان‌ها و زمان‌ها را در یک نمودار ترسیم کنیم، از لحاظ مفهومی نمودار مکان - زمان حرکت متحرک به‌دست می‌آید.

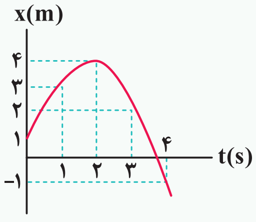
به زبون خودمونی، نمودار مکان – زمان نمودارییه که اگه زمان رو از روی محور افقی داشته باشی، خیلی راحت مکان رو روی محور قائم بهت میده.



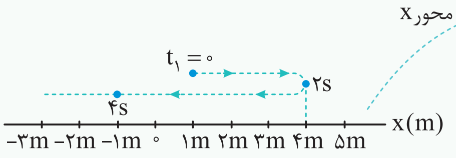


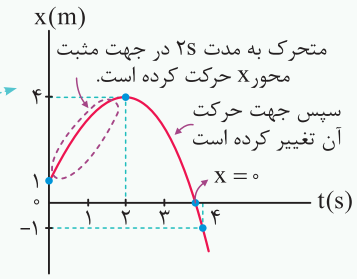
تذکر یک دانش‌آموز خلاق، از روی نمودار مکان - زمان مسیر حرکت متحرک را در ذهن خود تجسم می‌کند. این موضوع یعنی با خود تصور می‌کند که از $t = 0$ تا $t_2 = 2s$ ، متحرک در جهت محور x حرکت کرده و از مکان 1m به مکان 6m منتقل می‌شود. در ادامه از $t_2 = 2s$ تا $t_3 = 3s$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده و از مکان 6m به مکان 5m رفته است.

تمرین ۷ **نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت مقابل است. جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط این متحرک تا پایان ثانیهٔ چهارم، برابر چند متر است؟**



پاسخ با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، مسیر حرکت این متحرک به صورت زیر است و می‌توان نوشت:

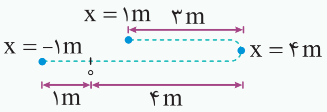




جابه‌جایی این متحرک به صورت زیر است:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1m \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = -1m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -1 - (1) = -2m$$

حال به محاسبهٔ مسافت طی شده می‌پردازیم. متحرک ابتدا از $x = 1m$ شروع به حرکت کرده و تا $x = 4m$ رفته است (3m مسافت طی‌کرده است). در ادامه از $x = 4m$ شروع به حرکت کرده و به $x = 0$ رفته است (4m مسافت طی‌کرده است)، در پایان نیز از $x = 0$ به $x = -1m$ رفته است (1m مسافت طی‌کرده است) و مجموع مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر $3 + 4 + 1 = 8m$ است.



تذکر جابه‌جایی متحرک هیچ ربطی به چگونگی مسیر حرکت آن ندارد و برای محاسبهٔ آن، کافی است مکان متحرک را در ابتدا و انتهای حرکت بدانیم، ولی برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده، باید حتماً چگونگی مسیر حرکت را بدانیم.

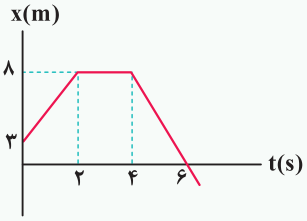
تمرین ۸ **نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.**

الف) در کدام بازهٔ زمانی، متحرک متوقف بوده است؟

ب) بردار مکان متحرک چند ثانیه در جهت محور x بوده است؟

ج) در بازه‌ای که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، اندازهٔ جابه‌جایی آن چند متر است؟

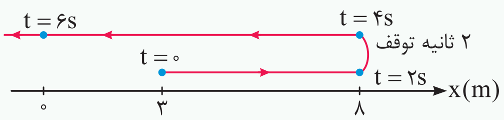
د) مسافت طی‌شده در ۶ ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟



پاسخ الف) در بازهٔ زمانی $۲s < t < ۴s$ ، نمودار افقی است، یعنی مکان متحرک تغییر نمی‌کند و متحرک متوقف بوده است.

ب) در ۶ ثانیهٔ اول حرکت، $x > ۰$ است، یعنی بردار مکان متحرک در جهت محور x است. پس از لحظهٔ $t = ۶s$ ، بردار مکان در خلاف جهت محور x می‌شود.

ج) با توجه به نمودار، مسیر حرکت متحرک به‌صورت شکل مقابل است:

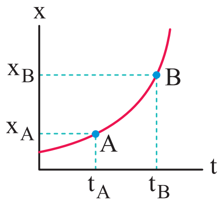


همان‌طور که می‌بینید، در ۲ ثانیهٔ اول، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و به اندازهٔ $۵m$ جابه‌جا می‌شود.

د) در ۶ ثانیهٔ اول، متحرک ابتدا $۵m$ در جهت محور x جابه‌جا می‌شود و پس از ۲ ثانیه توقف، $۸m$ در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی‌شده برابر $l = ۵ + ۸ = ۱۳m$ است.

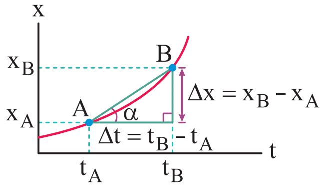
۲. محاسبهٔ سرعت متوسط از روی نمودار مکان – زمان

فرض کنید نمودار مکان-زمان را برای یک متحرک در اختیار داریم و سرعت متوسط آن بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبهٔ سرعت متوسط، از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:



روش اول (**نمودارخوانی**): در این روش ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص کرده و مکان متحرک در نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم. در نهایت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{سرعت متوسط بین A و B}: |\vec{v}_{av}|_{A,B} = \frac{\Delta x_{A,B}}{\Delta t_{A,B}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$



روش دوم (**شیب بین دو نقطه از نمودار**): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و سپس خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت است.

$$\text{شیب خط AB} = |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \tan\alpha$$

این روش در مسائلی که می‌خواهند سرعت متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنند، بسیار کاربرد دارد.

۳. محاسبهٔ تندی متوسط از روی نمودار مکان – زمان

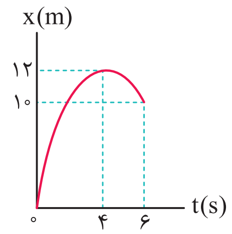
فرض کنید نمودار مکان- زمان برای یک متحرک را در اختیار داریم و تندی متوسط بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. برای محاسبهٔ تندی متوسط، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا مسافت طی‌شده بین دو لحظهٔ t_A و t_B را با توجه به نکات ارائه‌شده محاسبه می‌کنیم:

گام دوم: به کمک رابطهٔ مقابل، تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\underbrace{\boxed{\Delta t}}_{t_B - t_A}}$$

۴. بررسی یک مفهوم بسیار پرکاربرد



برای به‌دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان، فقط باید به مکان ابتدا و انتهای حرکت توجه کنیم. اما برای به‌دست آوردن تندی متوسط باید کل مسیر طی‌شده توسط متحرک را به‌دست آوریم. به‌طور مثال فرض کنید نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت شکل مقابل باشد. این متحرک از مبدأ مختصات در جهت محور x حرکت کرده در نقطهٔ $x = ۱۲m$ تغییر جهت داده و سپس در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به نقطهٔ $x = ۱۰m$ می‌رسد.

برای به‌دست آوردن اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۰ - ۰}{۶} = \frac{۵}{۳} m/s$$

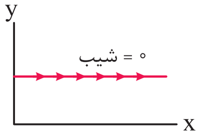
اما برای به‌دست آوردن تندی متوسط حرکت باید مسافت طی‌شده را به‌دست آوریم. این متحرک $۱۲m$ در جهت محور x و $۲m$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده است، بنابراین در مجموع مسافت $۱۴m$ را طی کرده است و داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۴}{۶} = \frac{۷}{۳} m/s$$

۵. سه یادآوری مهم و بسیار کاربردی از ریاضی

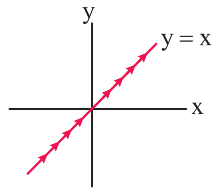
الان می‌خوایم یه چند تا نکتهٔ ریاضی براتون بیاریم که تو کل فیزیک دوازدهم، خیلی به کارتون میاد ...

۱) خطوط افقی دارای شیب صفر هستند.

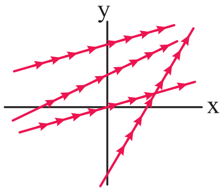


(با افزایش x، y ثابت است.)

۲) خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) هستند، شیب مثبت دارند.



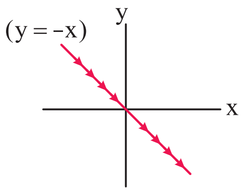
(با افزایش x، پیشروی نمودار به سمت بالا است.)



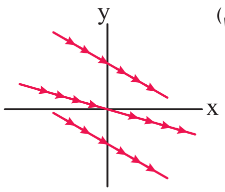
(خطوط دارای شیب مثبت)

ساده بگیم خطوطی که سمت راستشون بالاتر از سمت چپشونه، شیبشون مثبته و بالعکس ...

۳) خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) هستند، شیب منفی دارند.



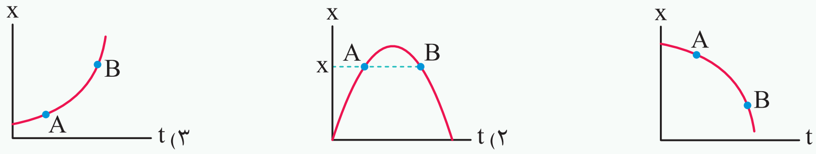
(با افزایش x، پیشروی نمودار به سمت پایین است.)



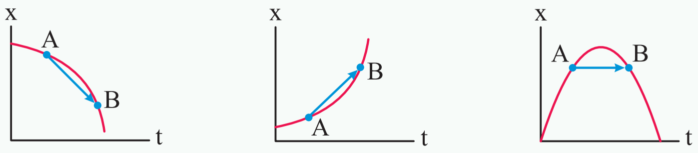
(خطوط دارای شیب منفی)

حالا بریم با حل چند تا تمرین، این ایستگاه رو بترکونیم ...

تمرین ۹ **در هریک از نمودارهای مکان - زمان زیر، علامت سرعت متوسط متحرک از A تا B را مشخص کنید.**



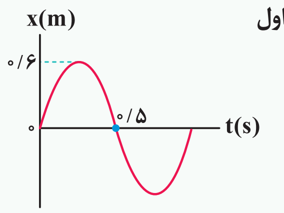
پاسخ با توجه به این‌که نمودار مکان - زمان برای هر سه متحرک داده شده است، سرعت متوسط برابر شیب خط واصل بین نقاط A و B از نمودار است:



شیب AB صفر است ($v_{av} = 0$) — شیب AB مثبت است ($v_{av} > 0$) — شیب AB منفی است ($v_{av} < 0$)

دقت شود که قرار دادن فلش بر روی خط‌های واصل بین دو نقطه، فقط به منظور درک بیشتر شما عزیزان از علامت شیب نمودار است.

تمرین ۱۰ **نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن در ۰/۵ ثانیهٔ اول حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر بر ثانیه است؟**

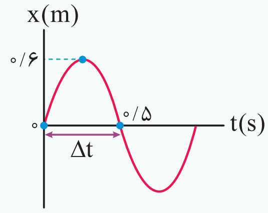


۱) ۱/۲ - صفر
۲) صفر - ۱/۲
۳) ۲/۴ - صفر
۴) صفر - ۲/۴

پاسخ نمودار داده‌شده نمودار مکان - زمان متحرک است و می‌خواهیم با خواندن مکان متحرک در $t_1 = 0$ و $t_2 = 0/5\,s$ از روی نمودار، سرعت متوسط در ۰/۵ ثانیهٔ اول حرکت را به‌دست آوریم:

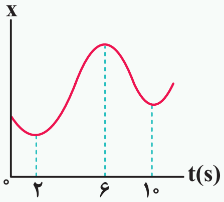
$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 0/5\,s \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{اندازهٔ سرعت متوسط}: |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 0}{0/5 - 0} = 0$$

از طرفی با توجه به نمودار، این متحرک $۰/۶\,m$ در جهت محور x حرکت کرده و سپس $۰/۶\,m$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین در مدت $۰/۵\,s$ مسافت $۱/۲\,m$ را طی کرده است و تندی متوسط آن برابر است با:



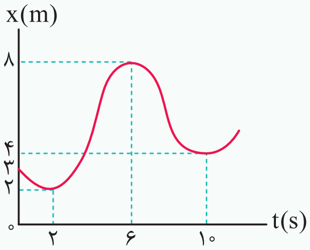
$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱/۲}{۰/۵} = ۲/۴\,m/s$ (گزینهٔ ۴)

تمرین ۱۱ **نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل است. تندی متوسط در کدام‌یک از بازه‌های زمانی مشخص شده در گزینه‌ها بیشتر است؟** (تجربی داخل ۱۴۰۰)



۱) صفر تا ۲s
۲) صفر تا ۶s
۳) ۲s تا ۱۰s
۴) ۶s تا ۱۰s

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال بسیار جالب، می‌توان اعدادی مناسب و منطقی متناسب با نمودار را بر روی آن فرض کرده و تندی متوسط را در تمامی بازه‌های اشاره شده با توجه به این اعداد به‌دست آوریم. به طور مثال، می‌توان نوشت:



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} ۰ < t < ۲s \Rightarrow s_{av} = \frac{۱}{۲}\frac{m}{s} \\ ۰ < t < ۶s \Rightarrow s_{av} = \frac{۱+۶}{۶} = \frac{۷}{۶}\frac{m}{s} \\ ۲s < t < ۱۰s \Rightarrow s_{av} = \frac{۶+۴}{۱۰-۲} = \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴}\frac{m}{s} \\ ۶s < t < ۱۰s \Rightarrow s_{av} = \frac{۴}{۱۰-۶} = ۱\frac{m}{s} \end{cases}$$

همان طور که می‌بینید، تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۱۰s، بیشتر از سایر گزینه‌هاست، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

حالا وقتشه یه سری به تستای ۳۹ تا ۶۵ بزنیم ...

ایستگاه ۴ تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای (محاسبهٔ آن از روی نمودار مکان - زمان و تعیین جهت حرکت با کمک آن)

حالا بریم ببینیم تندی لحظه‌ای چیه و چه اطلاعات مفیدی ازش استخراج میشه ...

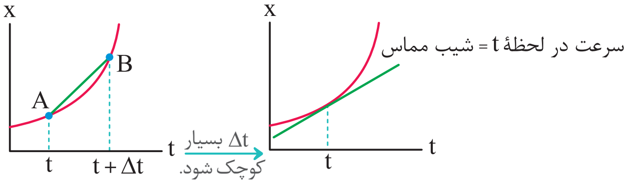
۱. مفهوم تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

تندی متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر را، **تندی لحظه‌ای** می‌نامند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، در واقع سرعت لحظه‌ای آن را بیان کرده‌ایم. برای مثال وقتی درون خودرویی به طرف شمال در حال حرکت باشید و در نقطه‌ای از مسیر، عقربهٔ تندی‌سنج خودروی شما روی $۱۰۰\,km/h$ باشد، در این صورت تندی لحظه‌ای خودرو برابر $۱۰۰\,km/h$ و سرعت لحظه‌ای آن $۱۰۰\,km/h$ به طرف شمال است.

تذکر برای سادگی و بنا به قراردادی که در کتاب‌های فیزیک به‌کار می‌رود، سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای را به‌ترتیب به‌صورت سرعت و تندی بیان می‌کنند. هم‌چنین سرعت را که کمیتی برداری است با نماد $\vec{v}$ و تندی را که برابر اندازهٔ سرعت و کمیتی نرده‌ای است با نماد v نشان می‌دهند.

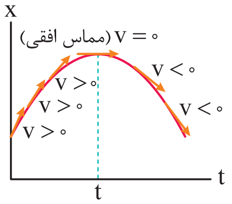
۲. محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان – زمان

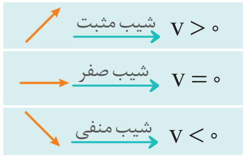
همان‌طور که می‌دانیم شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، برابر سرعت متوسط متحرک است. حال اگر بازهٔ زمانی Δt بسیار کوچک شود، عملاً A و B بر روی هم منطبق شده و شیب خط واصل بین دو نقطهٔ A و B، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطهٔ A برابر است. این موضوع یعنی شیب مماس ترسیمی بر نمودار مکان - زمان در لحظهٔ t، برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در این لحظه است.



نکات مهم و کاربردی

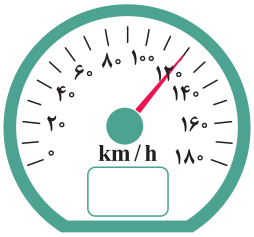
۱) با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی در شکل مقابل، سرعت متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قلهٔ نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد. بنابراین متحرک ابتدا در جهت محور x حرکت می‌کند $(v > 0)$، سپس توقف کرده $(v = 0)$ و سپس در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند $(v < 0)$.





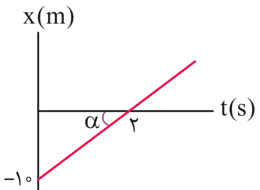
(قرار دادن فلش برای مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است و از نظر علمی برای مماس‌ها نباید جهت بگذاریم.)

۲) عقربهٔ تندی‌سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد و هیچ‌گونه اطلاعی در خصوص جهت حرکت خودرو به ما گزارش نمی‌کند. استفاده از واژهٔ سرعت‌سنج برای این وسیله نادرست است، هرچند در زندگی روزمره معمولاً به اشتباه از این واژه استفاده می‌کنیم.



$\Leftarrow$ اتومبیل با تندی $۱۲۰\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند ولی جهت حرکت آن مشخص نیست.

۳) اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به‌صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازهٔ سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازهٔ زمانی، برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است. به عنوان مثال، در نمودار مکان - زمان مقابل، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه ثابت بوده و برابر سرعت لحظه‌ای (یعنی شیب نمودار) می‌باشد.



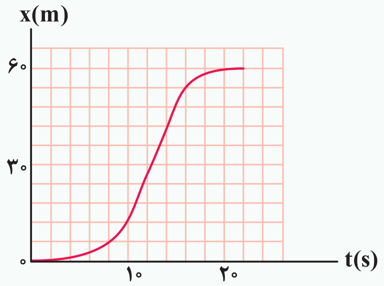
$|\tan\alpha| = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$

$v = v_{av} = \tan\alpha = \boxed{+}۵\ m/s$

شیب نمودار مثبت است.

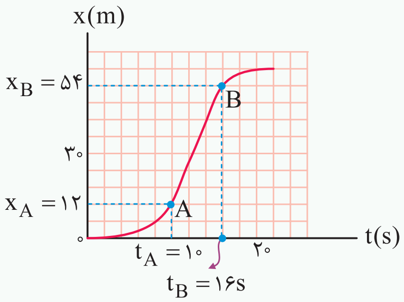
این یعنی اگه یه طراح، سرکارتون بزاره و بپرسه سرعت در هنگام عبور از مبدأ چنده، جواب همون $+5\ m/s$ هستش.
یا حتی اگه بپرسه سرعت متوسط در ۰/۵ ثانیهٔ سوم چنده، باور کنید بازم جواب همون $+5\ m/s$ هست، احتمالاً باورش سخت بود براتون ...

تمرین ۱۲ شکل مقابل، نمودار مکان - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت کرده است. بیشینهٔ سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟ (تجربی خارج ۹۵)

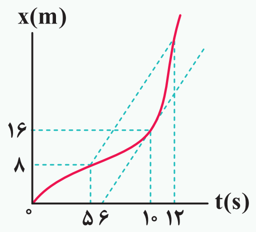


۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

پاسخ در حرکت این متحرک، از لحظهٔ $t = ۰$ تا A، سرعت متحرک در حال افزایش است (شیب مماس ترسیمی بر نمودار در حال افزایش است)، در ادامه از A تا B، نمودار مکان - زمان خط صاف بوده و سرعت متحرک ثابت است و در نهایت از B سرعت کاهش یافته و در نهایت به صفر می‌رسد. با توجه به این موضوع، بیشترین سرعت بین A تا B است و کافیست شیب خط AB را بیابیم (هر یک از خانه‌های محور قائم معادل ۶m و هر یک از خانه‌های محور افقی معادل ۲s است):



$v_{AB} = v_{av_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{۵۴ - ۱۲}{۱۶ - ۱۰} \Rightarrow v_{AB} = ۷\ m/s$ (گزینهٔ ۳)



تمرین ۱۳ **نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t=۱۰s$ برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن بین دو لحظهٔ $t_1=۵s$ و $t_2=۱۲s$ باشد، متحرک در لحظهٔ $t=۱۲s$ در چند متری مبدأ می‌باشد؟**

۱) ۲۸ ۲) ۲۴

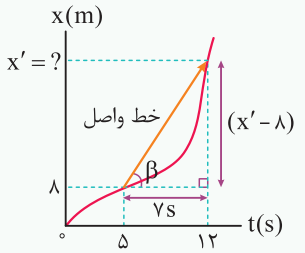
۳) ۳۶ ۴) ۲۰

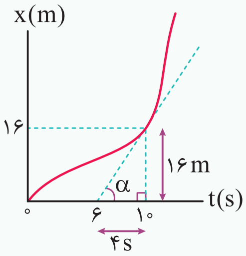
پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱ طبق صورت سؤال، تندی متحرک در لحظهٔ $t=۱۰s$، برابر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $t_1=۵s$ تا $t_2=۱۲s$ است و داریم:

$$v = \text{شیب مماس} = \tan\alpha = \frac{۱۶}{۴} = ۴\,m/s$$: تندی در لحظهٔ t=۱۰s

۲ در صورتی‌که متحرک در لحظهٔ $t=۱۲s$ در مکان x' باشد، با محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط از لحظهٔ ۵s تا ۱۲s داریم:



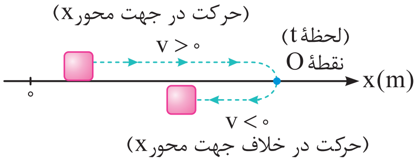


سرعت متوسط : $v_{av} = \tan\beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x'-۸}{۷} = ۴ \Rightarrow x' = ۳۶\,m$ (گزینهٔ ۳)

بررسی لحظهٔ تغییر جهت یک متحرک

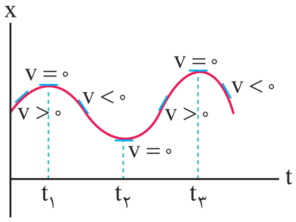
تو اینجا، می‌خوایم معنی تغییر جهت متحرک رو بفهمیم ... این موضوع تو خیلی از سؤالا به کارمون میاد.

در شکل زیر متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است. این متحرک در ابتدا در جهت محور x در حال حرکت است (این موضوع یعنی سرعت آن مثبت است) در لحظهٔ t، متحرک به نقطهٔ O رسیده و در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (این موضوع یعنی در ادامهٔ حرکت سرعت آن منفی می‌شود.)، لحظهٔ t را در اصطلاح **لحظهٔ تغییر جهت متحرک** می‌نامیم.



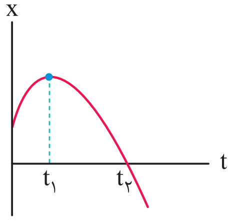
شرط تغییر جهت دادن متحرک در نقطهٔ O: برای این منظور باید سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لزوماً علامت سرعت متحرک تغییر کند.

نکته در دره‌ها و قله‌های نمودار مکان - زمان، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت (تغییر علامت) می‌دهد. این موضوع یعنی در این مکان‌ها متحرک تغییر جهت می‌دهد.



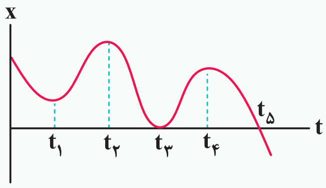
$\Rightarrow$ در لحظات t_1، t_2 و t_3 جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

نکته تغییر جهت حرکت متحرک در واقع به معنی تغییر جهت بردار **سرعت** آن است. این موضوع با تغییر جهت بردار **مکان** متحرک تفاوت دارد.



$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 : \text{لحظهٔ تغییر جهت حرکت متحرک} \\ t_2 : \text{لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک} \end{cases}$$

تمرین ۱۴ **نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. بردارهای مکان و سرعت آن چند بار تغییر جهت داده‌اند؟**



پاسخ در لحظات t_1، t_2، t_3 و t_4 ، یعنی در دره‌ها و قله‌های نمودار، علامت شیب نمودار تغییر کرده و جهت بردار سرعت عوض شده است. در لحظهٔ t_5 ، علامت مکان (x) تغییر کرده است و جهت بردار مکان عوض شده است. دقت کنید در لحظهٔ t_3 ، مکان برای یک لحظه صفر می‌شود ولی علامت آن تغییر نمی‌کند.

حالا وقتشه یه سری به تستای ۶۶ تا ۷۹ بزنیم ...

ایستگاه ۵ تحلیل نمودار سرعت - زمان

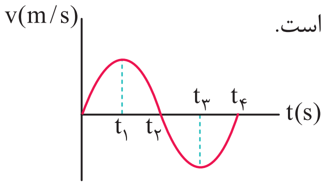
حالا بریم جلوتر و یاد بگیریم که از روی نمودار سرعت - زمان چی میشه فهمید ...

فرض کنید نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند به‌صورت مقابل باشد:

در مورد این نمودار می‌توان به نکات مهم و کاربردی زیر اشاره کرد:

۱) در بازهٔ زمانی که نمودار بالای محور (t) است، (۰ تا t_2) سرعت مثبت بوده و متحرک در جهت محور x در حال حرکت می‌باشد.

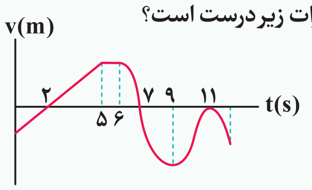
۲) در بازهٔ زمانی که نمودار زیر محور (t) است، (t_2 تا t_4) سرعت منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است.



۳) در لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لحظه علامت سرعت عوض می‌شود (مانند t_2)، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

تمرین بعد، خیلی خوب و مفهومیه. با دقت همهٔ عبارت‌هاش رو بخونید ...

تمرین ۱۵ **با توجه به نمودار سرعت - زمان زیر که مربوط به متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند، چند مورد از عبارات زیر درست است؟**



الف) متحرک ۵ ثانیه در جهت محور x حرکت کرده است.

ب) تندی حرکت، سه بار صفر می‌شود.

ج) متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

د) در شش ثانیهٔ اول حرکت، متحرک ۲s در خلاف جهت محور x حرکت کرده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ به بررسی تک‌تک عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 7s$ مثبت بوده و متحرک در این ۵ ثانیه در جهت محور x حرکت می‌کند و عبارت (الف) درست است.

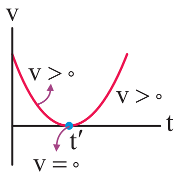
ب) تندی حرکت در سه لحظهٔ $t_1 = 2s$ ، $t_2 = 7s$ و $t_3 = 11s$ صفر می‌شود و عبارت (ب) درست است.

ج) در لحظات $t_1 = 2s$ و $t_2 = 7s$ سرعت متحرک صفر شده و علامت آن عوض می‌شود، بنابراین متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد. دقت کنید که در لحظهٔ $t = 11s$ با این‌که سرعت متحرک صفر می‌شود، اما تغییر علامت نمی‌دهد (در قبل و بعد از آن سرعت منفی است) و در نتیجه متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد و عبارت (ج) هم درست است.

در واقع در لحظهٔ $t = 11s$ ، متحرک یک لحظه ایستاده و دوباره به حرکتش در خلاف جهت محور x ادامه داده، یعنی اصطلاحاً متحرک توقف کرده، ولی تغییر جهت نداده است.

د) در شش ثانیهٔ اول در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 2s$ سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه عبارت (د) هم درست است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تذکر هر توقفی، لزوماً لحظهٔ تغییر جهت نیست. به‌طور مثال در شکل زیر در لحظهٔ t' ، سرعت صفر شده (لحظهٔ توقف) ولی تغییر علامت نمی‌دهد و این یعنی در این لحظه متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.



تمرین ۱۶ کدام یک از دو مورد زیر در رابطه با حرکت یک جسم بر روی مسیر مستقیم نادرست است؟

۱) اگر متحرک تغییر جهت دهد، حتماً توقف کرده است.

۲) اگر متحرک توقف کرده باشد، لزوماً تغییر جهت می‌دهد.

پاسخ با توجه به توضیحات مطرح‌شده در تذکر ارائه شده، عبارت (۱) صحیح است.

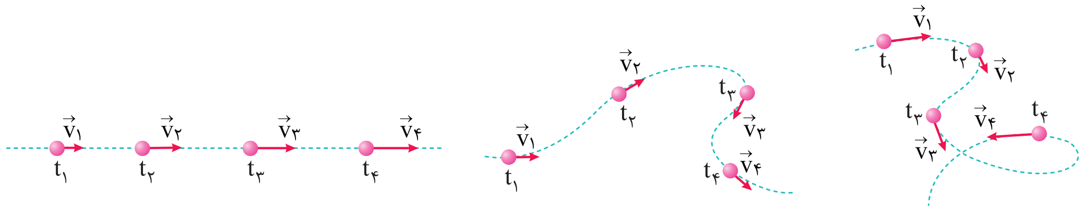
حالا وقتشه یه سری به تستای ۸۰ تا ۸۶ بزنیم ...

ایستگاه ۶ شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای و یافتن آن‌ها به کمک نمودار سرعت - زمان

تو این قسمت، می‌خوایم کلی مطلب در مورد شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای یاد بگیریم...

۱. آشنایی با مفهوم شتاب متوسط

همان‌طور که در علوم سال نهم دیدید، هرگاه سرعت حرکت جسمی تغییر کند، حرکت آن شتابدار است. با توجه به این که بردار سرعت در هر نقطه از مسیر، بر مسیر حرکت مماس است، تغییر سرعت جسم می‌تواند مانند شکل (۱)، به دلیل تغییر در اندازهٔ بردار سرعت (تندی) جسم باشد، یا مانند شکل (۲) می‌تواند به دلیل تغییر در جهت بردار سرعت آن باشد، یا هم‌چنین می‌تواند مانند شکل (۳) به دلیل تغییر هم‌زمان در اندازه و جهت بردار سرعت متحرک باشد.



(۱) (۲) (۳)

شتاب متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه (t_1, t_2)، به صورت رابطهٔ زیر تعریف می‌شود که در آن $\vec{v}_1$، سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 و $\vec{v}_2$، سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 است.

$$\text{شتاب متوسط} : \vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

تذکر همان‌طور که دیده می‌شود شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\overrightarrow{\Delta v})$ است. یکای SI شتاب متوسط، متربرمربع ثانیه (m/s^2) است.

تذکر در حالت یک‌بعدی (مثلاً هنگامی که متحرک بر روی محور x حرکت می‌کند)، برای محاسبهٔ Δv، کافیست v_1 و v_2 را با در نظرگرفتن علامت محاسبه کرده و $v_2 - v_1$ را به صورت جبری به دست آوریم.

تمرین ۱۷ متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند و معادلهٔ سرعت - زمان آن در SI به‌صورت $v = 2t^2 - 4t - 2$ است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیهٔ دوم، چند متربرمجذورثانیه است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ با توجه به رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، در ۲ ثانیهٔ دوم $(2s \le t \le 4s)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow v_1 = 2 \times 2^2 - 4 \times 2 - 2 = -2\frac{m}{s} \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 2 \times 4^2 - 4 \times 4 - 2 = 14\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{14 - (-2)}{4 - 2} = 8\frac{m}{s^2}$$ (گزینهٔ ۴)

تمرین ۱۸ متحرکی روی محور x در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ در SI برابر $-4\vec{i}$ و در بازهٔ زمانی $t_2 = 10s$ تا $t_3 = 12s$ برابر $2\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_3 = 12s$ در SI، کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{2}{7}\vec{i}$ ۲) $-\frac{16}{7}\vec{i}$ ۳) $4\vec{i}$ ۴) $8\vec{i}$

پاسخ **گام اول:** محاسبهٔ تغییرات سرعت در بازه‌های زمانی داده شده:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}-۴=\dfrac{\Delta v_۱}{۱۰-۵}\Rightarrow \Delta v_۱=-۲۰\dfrac{m}{s}\\ ۲=\dfrac{\Delta v_۲}{۱۲-۱۰}\Rightarrow \Delta v_۲=۴\dfrac{m}{s}\end{cases}$$

گام دوم: محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱=۵s$ تا $t_۲=۱۲s$:

تغییر سرعت در کل بازهٔ زمانی $t_۱=۵s$ تا $t_۳=۱۲s$ ، برابر مجموع تغییر سرعت در بازه‌های زمانی $t_۱=۵s$ تا $t_۲=۱۰s$ و $t_۲=۱۰s$ تا $t_۳=۱۲s$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

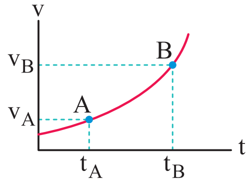
$$a_{av}=\frac{\Delta v_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{\Delta v_۱+\Delta v_۲}{۱۲-۵}=\frac{-۲۰+۴}{۱۲-۵}=-\frac{۱۶}{۷}\frac{m}{s^۲}\Rightarrow \vec{a}_{av}=-\frac{۱۶}{۷}\vec{i}\,(\frac{m}{s^۲})$$ (گزینهٔ ۲)

۲. محاسبهٔ شتاب متوسط از روی نمودار سرعت – زمان

نکات این قسمت، خیلی شبیه محاسبهٔ سرعت متوسط از روی نمودار مکان – زمانه ...

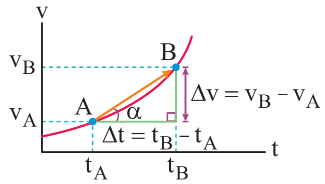
فرض کنید نمودار سرعت - زمان حرکت یک متحرک داده‌شده و شتاب متوسط بین دو لحظهٔ t_A و t_B از آن خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبهٔ شتاب متوسط، از دو روش زیر می‌توان استفاده کرد:

روش اول (نمودارخوانی): ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص می‌کنیم. سپس سرعت متحرک در نقاط A و B را به دست آورده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:



شتاب متوسط بین A و B : $a_{av_{A,B}}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_B-v_A}{t_B-t_A}$

روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر شتاب متوسط متحرک بین دو لحظهٔ A و B از حرکت است.

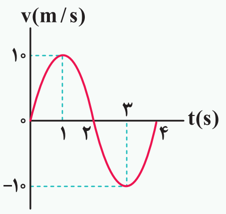


$$\tan\alpha=\frac{مقابل}{مجاور}=\frac{v_B-v_A}{t_B-t_A}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=a_{av}$$

این روش در مسائلی که می‌خواهد شتاب متوسط را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کند، روش بسیار مناسبی است.

تو ادامهٔ کار با یه تمرین توپ، این موضوع رو بهتر می‌فهمیم ...

تمرین ۱۹ **نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط در بازهٔ زمانی ۱ تا ۳ ثانیه در SI برابر است با:**



۱) صفر
۲) ۱۰-
۳) ۵
۴) ۱۰

پاسخ نمودار داده‌شده یک نمودار سرعت - زمان است و برای محاسبهٔ a_{av} در آن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

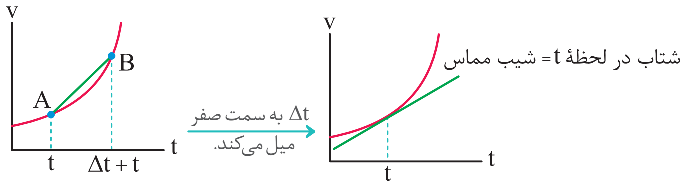
با توجه به نمودار، سرعت لحظه‌ای در $t=۱s$ و $t=۳s$ به ترتیب برابر $۱۰m/s$ و $-۱۰m/s$ است. بنابراین شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\begin{cases}t_A=۱s\Rightarrow v_A=۱۰m/s\\ t_B=۳s\Rightarrow v_B=-۱۰m/s\end{cases}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_B-v_A}{t_B-t_A}=\frac{-۱۰-۱۰}{۳-۱}=-۱۰m/s^۲$$ (گزینهٔ ۲)

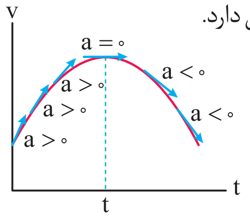
۳. تحلیل کیفی شتاب از روی نمودار سرعت – زمان

حالا بریم یه کم روی شتاب لحظه‌ای هم کار کنیم ...

می‌دانیم که شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک است. حال اگر بازهٔ زمانی Δt بسیار کوچک شود، نقاط A و B عملاً تبدیل به یک نقطه شده و شیب خط واصل بین دو نقطهٔ A و B، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطهٔ B برابر است. شیب مماس ترسیمی بر نمودار، برابر شتاب لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ t است.

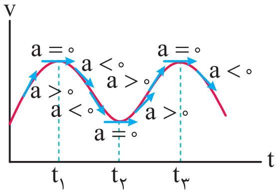


نکات مهم و کاربردی



۱) با توجه به مماس‌های رسم‌شده در شکل مقابل، شتاب متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قلهٔ نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد. (قرار دادن فلش‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است.)

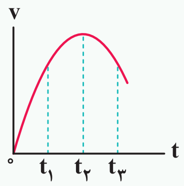
۲) در نمودار داده‌شده، قلهٔ نمودار سرعت - زمان، لحظهٔ تغییر جهت بردار شتاب است، زیرا شتاب در قله صفر بوده، قبل از آن مثبت و بعد از آن منفی است.



۳) به طور کلی در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک صفر شده و بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد. (دقت شود که قرار دادن جهت برای مماس‌ها، به منظور درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.)

(در t_1 ، t_2 و t_3 شتاب تغییر جهت می‌دهد.)

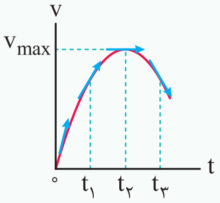
تو ادامه با دو تا تمرین توپ، این موضوع رو کامل یاد می‌گیریم ...



تمرین ۲۰) شکل مقابل نمودار سرعت - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در کدام لحظه، شتاب متحرک مثبت و بیشینه است؟

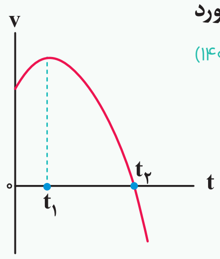
۱) t_3 ۲) t_2

۳) t_1 ۴) مبدأ زمان



پاسخ می‌دانیم شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک را نشان می‌دهد. با توجه به این موضوع ابتدا باید در تمام لحظات مطرح‌شده در گزینه‌ها، مماس رسم شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود از $t=0$ تا t_2 ، زاویهٔ مماس با محور افق دائماً در حال کاهش بوده و شتاب متحرک دائماً کاهش می‌یابد تا در t_2 صفر می‌شود. پس از t_2 ، شیب نمودار (شتاب) منفی شده و اندازهٔ آن تا t_3 در حال افزایش است. بنابراین در لحظهٔ $t=0$ ، شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت - زمان مقدار ماکزیمم و مثبت را داشته و در نتیجه در این لحظه شتاب متحرک مثبت و بیشینه است و گزینهٔ (۴) صحیح است.

دقت در تمرین قبل در لحظهٔ t_2 ، سرعت متحرک ماکزیمم و شتاب آن صفر است و در لحظهٔ t_3 ، شتاب متحرک مقداری منفی دارد.



تمرین ۲۱) نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل، قسمتی از یک سهمی است. کدام مورد درست است؟

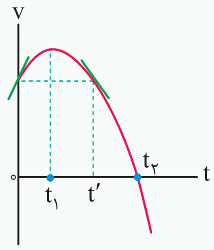
(تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) در بازهٔ صفر تا t_1 تندی در حال کاهش است.

۲) بزرگی شتاب در لحظهٔ صفر و t_2 برابر است.

۳) در بازهٔ صفر تا t_2 شتاب خلاف جهت محور x است.

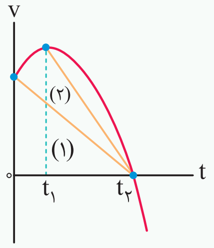
۴) بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 ، بیشتر از بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_2 است.



پاسخ بررسی گزینه‌ها

۱) اندازهٔ سرعت متحرک از لحظهٔ صفر تا t_1 در حال افزایش است. بنابراین تندی متحرک در این بازهٔ زمانی افزایش می‌یابد.

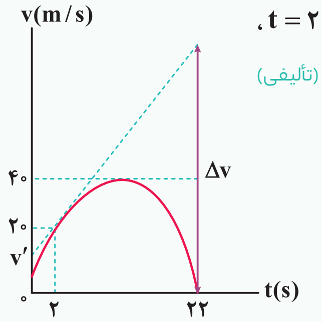
۲) توجه به تقارن سهمی نسبت به رأس آن، اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار در لحظات صفر و t' برابر است. بنابراین اندازهٔ شتاب متحرک در این دو لحظه با هم برابر است و گزینهٔ (۲) نادرست است.



۳) از لحظهٔ صفر تا t_1 شیب خط مماس بر نمودار مثبت بوده و در نتیجه شتاب متحرک، مثبت و در جهت محور x است.

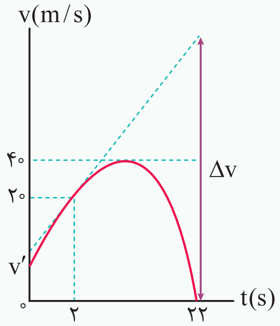
۴) شتاب متوسط برابر شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان است. در این سؤال، اندازهٔ شیب خط (۲) بیشتر از اندازهٔ شیب خط (۱) است، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

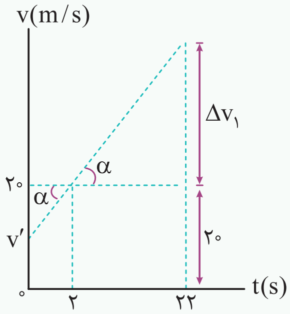
تمرین ۳۲ **نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور x در حال حرکت است، مطابق شکل می‌باشد. اگر در لحظهٔ $t = 2s$ ، بردار شتاب متحرک در SI برابر $+5\vec{i}$ باشد، مقادیر v' و Δv به‌ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟** (تألیفی)



۱) ۵ ، ۱۰۰
۲) ۵ ، ۱۲۰
۳) ۱۰ ، ۱۰۰
۴) ۱۰ ، ۱۲۰

پاسخ همان‌طور که می‌دانیم، شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت - زمان، معادل با شتاب حرکت متحرک است. در این سؤال، شیب مماس ترسیم شده بر نمودار سرعت - زمان در لحظهٔ $t = 2s$ برابر ۵ واحد است. بنابراین در ادامه با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:





$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{20 - v'}{2 - 0} = 5 \Rightarrow v' = 10\,m/s$$

$$\tan\alpha = \frac{\Delta v_1}{22 - 2} = 5 \Rightarrow \Delta v_1 = 100\,m/s \Rightarrow \Delta v = \Delta v_1 + 20\,m/s = 120\,m/s$$

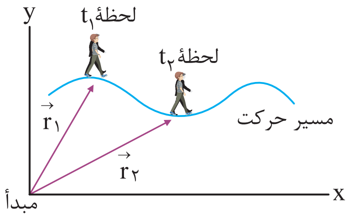
بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

حالا وقتشه یه سری به تستای ۸۷ تا ۱۲۱ بزنیم ...

ایستگاه ۷ جابه‌جایی، مسافت طی‌شده، $|\vec{V}_{av}|$ ، S_{av} در حرکت یک متحرک در صفحه

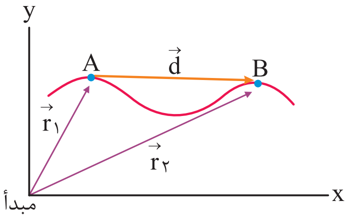
تو آخر این قسمت از فصل، می‌خوایم یه کمی هم روی فضای دو بعدی و سه بعدی کار کنیم. البته در حدی که کتاب دلش می‌خواد ...

۱. بردار مکان



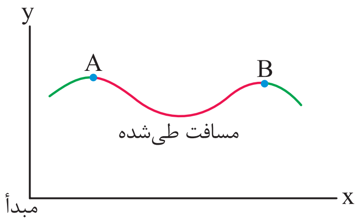
در شکل مقابل متحرکی (مثلاً یک کوه نورد) بر روی مسیر نشان داده‌شده (مثلاً یک کوه) در حال حرکت است. بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل شود. به‌طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده‌شده است.

۲. بردار تغییر مکان (جابه‌جایی)



متحرک نشان داده‌شده در شکل مقابل، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 از نقطهٔ A تا نقطهٔ B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازهٔ زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازهٔ زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازهٔ زمانی متصل می‌کند.

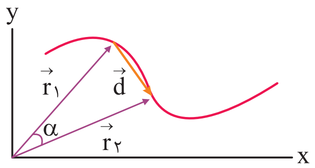
۳. مسافت طی‌شده



متحرک فوق، از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کرده است و طول واقعی مسیر حرکتش برابر طول منحنی واقع در بین نقاط A و B است (که با رنگ قرمز نشان داده‌شده است). این طول مسافت طی‌شده نام دارد.

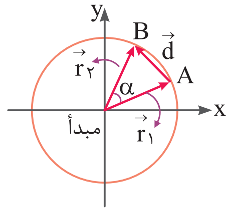
توی درس ریاضی، با فرمول‌های تفاضل دو تا بردار آشنا میشید. ما هم بدمون نیومد این‌جا یه سری به این موضوع بزنیم و با بردار مکان قاطیش کنیم. البته کتاب درسی قصد نداره وارد این بحثا بشه. به خاطر همین هم، ما این بحث رو به صورت مجزا، اونم فقط برای بچه درسخونا اُوردیمش ...

نکات مهم و کاربردی



۱) برای به‌دست آوردن اندازهٔ بردار جابه‌جایی $|\vec{d}|$، می‌توان از رابطهٔ زیر نیز کمک گرفت:

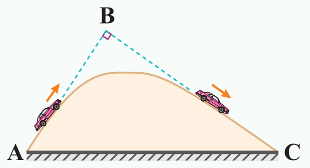
$$|\vec{d}|=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\alpha}$$



۲) حالت خاص: اگر متحرک بر روی یک دایره به مرکز مبدأ مختصات در حال حرکت باشد، اندازهٔ بردار مکان در A و B یکسان بوده (برابر شعاع دایره) و اندازهٔ بردار جابه‌جایی آن برابر است با:

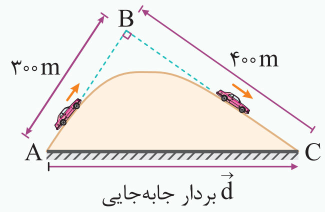
$$|\vec{r}_1|=|\vec{r}_2|=r \text{ (شعاع دایره)} \Rightarrow |\vec{d}|=2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

تمرین ۲۳ **در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده‌شده ابتدا از تپه بالا رفته و سپس از طرف دیگر آن پایین می‌آید. در مسیر نشان داده‌شده، جابه‌جایی متحرک از A تا C چه‌قدر است؟ $(AB=300\,m\ ,\ BC=400\,m)$**



۱) ۵۰۰ متر
۲) ۷۰۰ متر
۳) کم‌تر از ۵۰۰ متر
۴) بیشتر از ۵۰۰ متر

پاسخ همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید، متحرک در طول حرکت خود از نقطهٔ A (ابتدای مسیر) به نقطهٔ C (انتهای مسیر) رفته و جابه‌جایی آن برابر بردار $\overrightarrow{AC}$ است:



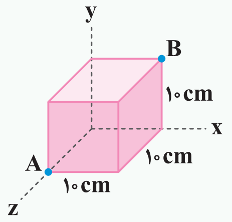
$$\text{اندازهٔ جابه‌جایی}=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(AB)^2+(BC)^2}=\sqrt{(300)^2+(400)^2}=100\sqrt{3^2+4^2}=500\,m$$ (گزینهٔ ۱)

دقت توجه کنید که در این سؤال، مسافت طی‌شده (طول خط آبی‌رنگ) از یک طرف بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و از سوی دیگر بیشتر از ۵۰۰ متر و کم‌تر از ۷۰۰ متر است (چرا؟).

تذکر در صورتی‌که طول، عرض و ارتفاع یک متحرک در فضای سه‌بعدی تغییر کرده و متحرک از نقطهٔ A به نقطهٔ B منتقل شود، اندازهٔ بردار جابه‌جایی آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A:\begin{vmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{vmatrix}\rightarrow B:\begin{vmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{vmatrix}\Rightarrow|\vec{d}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

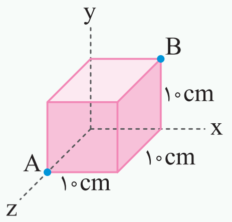
تمرین ۲۴ **در شکل زیر، متحرکی با حرکت بر روی سطوح جانبی یک مکعب توپر به ضلع ۱۰ سانتی‌متر، خود را از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رساند. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در این تغییرمکان چند سانتی‌متر است؟**



۱) $10\sqrt{3}$
۲) $10(1+\sqrt{2})$
۳) $10\sqrt{2}$
۴) $5\sqrt{3}$

پاسخ برای این سؤال، دو روش زیر را ارائه می‌کنیم:

روش اول: با توجه به مختصات نقاط A و B و تذکر ارائه‌شده در قبل از سؤال داریم:



$$A:\begin{vmatrix}x_A=0\\y_A=0\\z_A=10\,cm\end{vmatrix}\rightarrow B:\begin{vmatrix}x_B=10\,cm\\y_B=10\,cm\\z_B=0\end{vmatrix}\Rightarrow|\vec{d}|=\sqrt{(10-0)^2+(10-0)^2+(0-10)^2}=10\sqrt{3}\,cm$$

روش دوم: همان‌طور که در شکل فوق می‌بینید، نقاط A و B دو انتهای یک قطر مکعب هستند و جابه‌جایی برابر اندازهٔ AB است، پس کافی است اندازهٔ قطر مکعب را بیابیم. از طرفی اندازهٔ یک قطر از مکعبی به ضلع a برابر با $d=a\sqrt{3}$ است و داریم:

$$a=10\,cm\rightarrow \text{اندازهٔ جابه‌جایی}:|\vec{d}|=a\sqrt{3}=10\sqrt{3}\,cm$$ (گزینهٔ ۱)

حالا وقتشه یه سری به تستای ۱۳۲ تا ۱۳۵ بزنیم ...

۱ | ۱ **بررسی موارد**

الف) برداری که مبدأ مختصات را به محل جسم متصل می‌کند، بردار مکان جسم است، بنابراین برداری که نقطهٔ O را به A متصل می‌کند، بردار مکان هواپیما در نقطهٔ A است.

ب) برداری که نقطهٔ ابتدایی و انتهایی مسیر را به هم وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی جسم است، بنابراین در جابه‌جایی هواپیما از A تا B، بردار جابه‌جایی برابر برداری است که نقطهٔ A را به B متصل می‌کند.

ج) بردار جابه‌جایی بین دو نقطه برابر تفاضل بردارهای مکان آن نقطه است، بنابراین تفاضل بردار مکان هواپیما در نقطهٔ A از بردار مکان آن در نقطهٔ B برابر بردار جابه‌جایی هواپیما است. بردار مکان A − بردار مکان B = $\vec{d}$: بردار جابه‌جایی

د) اگر هواپیما روی خط مستقیم و بدون تغییر جهت از A به B برود، مسافتی که طی می‌کند هم‌اندازهٔ بردار جابه‌جایی آن است و در غیر این صورت، مسافت بزرگ‌تر از اندازهٔ بردار جابه‌جایی است. پس با توجه به این‌که مسیر حرکت هواپیما را نمی‌دانیم، ممکن است مسافت طی‌شده هم‌اندازه یا بزرگ‌تر از بردار جابه‌جایی باشد.

بنابراین فقط عبارت (د) نادرست است.

۲ | ۲ **بررسی موارد**

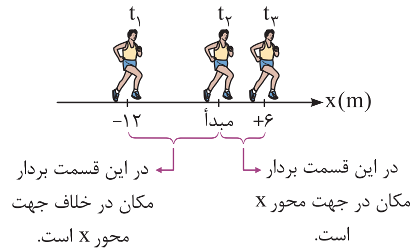
الف) در لحظهٔ t_3، مکان دونده مثبت است، یعنی بردار مکان در جهت محور x است.

ب) دونده از مکان $x_1 = -12\,m$ به مکان $x_3 = 6\,m$ رفته است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\Delta x = x_3 - x_1 = 6 - (-12) = +18\,m \Rightarrow \vec{d} = (18\,m)\,\vec{i}$$

ج) هنگامی که دونده از مبدأ محور عبور می‌کند، بردار مکان آن صفر است و حداقل اندازه را دارد.

د) در بازهٔ t_1 تا t_2 که مکان دونده منفی است (در خلاف جهت محور x است)، دونده از مکان $x_1 = -12\,m$ به مکان $x_2 = 0$ (مبدأ محور) می‌رسد و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر $6\,m$ نیست.



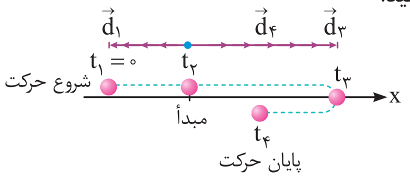
۳ | ۳ همواره با دور شدن متحرک از مبدأ محور، اندازهٔ بردار مکان آن افزایش و با نزدیک شدن متحرک به مبدأ محور، اندازهٔ بردار مکان آن کاهش می‌یابد. با توجه به این موضوع، در این سؤال در طی حرکت از $x_1 = -12\,m$ تا $x_2 = 0$، اندازهٔ بردار مکان در حال کاهش و از $x_2 = 0$ تا $x_3 = 6\,m$، اندازهٔ بردار مکان در حال افزایش است.

۴ | ۲ برای پاسخ به این سؤال مفهومی، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 متحرک در سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و بردار مکان آن در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.

۲) در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 متحرک در سمت راست مبدأ مختصات قرار می‌گیرد و بردار مکان آن در جهت محور x می‌باشد.

۳) در لحظهٔ t_2، متحرک از مبدأ عبور کرده و بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. به شکل مقابل دقت کنید:



دقت

در این سؤال، در لحظهٔ t_3، سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن تغییر جهت نمی‌دهد. این موضوع توسط بسیاری از دانش‌آموزان اشتباه درک می‌شود.

۵ | ۲ اتومبیل A از مکان $x_1 = -20\,m$ به مکان $x_2 = 0$ رسیده است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\Delta x_A = x_2 - x_1 = 0 - (-20) = +20\,m$$

اتومبیل B از مکان $x_1 = +40\,m$ به مکان $x_2 = 0$ رسیده است و جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\Delta x_B = x_2 - x_1 = 0 - 40 = -40\,m$$

بنابراین نسبت جابه‌جایی A به B به صورت زیر به‌دست می‌آید:

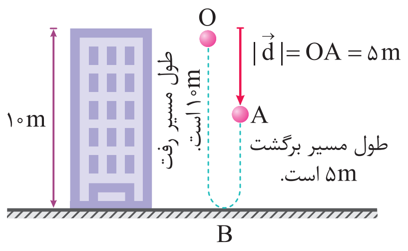
$$\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{20}{-40} = -\frac{1}{2}$$

دقت

علامت منفی نشان‌دهندهٔ آن است که جهت جابه‌جایی دو اتومبیل در خلاف جهت هم است.

۶ | ۳ با توجه به شکل نشان داده‌شده، گلوله بعد از پرتاب ابتدا ۱۰ متر به سمت پایین رفته و پس از برخورد به زمین در نقطهٔ B، تغییر جهت داده و ۵ متر به سمت بالا می‌آید تا به نقطهٔ A برسد. بنابراین مسافت طی‌شده توسط گلوله برابر $10 + 5 = 15$ متر است.

از طرفی مطابق تعریف، جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ ابتدای حرکت را مستقیماً به نقطهٔ انتهای حرکت (A) متصل کند، یعنی اندازهٔ پاره‌خط OA به طول $5\,m$، معادل با مقدار جابه‌جایی متحرک است.



$|\vec{d}| = |\overrightarrow{OA}| = 5\,m$: اندازهٔ جابه‌جایی

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازهٔ جابه‌جایی}} = \frac{\text{رفت} + \text{برگشت}}{OA} = \frac{10+5}{5} = 3$$

دقت

مسافت طی‌شده همواره بزرگ‌تر و یا مساوی جابه‌جایی است و گزینهٔ (۱) هیچ‌گاه نمی‌تواند صحیح باشد.

۷ | ۲ مکان متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (مبدأ زمان) معادل با مکان اولیهٔ متحرک است. در این سؤال با داشتن معادله‌های مکان دو متحرک، کافی است به جای t مقدار صفر را قرار دهیم:

A معادلهٔ مکان متحرک : $x_A = 3t^3 - 7t + 5 \xrightarrow{t=0} x_{0A} = 5\,m$

B معادلهٔ مکان متحرک : $x_B = 2\cos \pi t + 1$

$$\xrightarrow{t=0} x_{0B} = 2\cos(0) + 1 = 2 + 1 = 3\,m$$

تذکر

برخی از داوطلبان ممکن است در رابطهٔ $x_B = ۲\cos \pi t + ۱$، فریب خورده و به اشتباه عدد ۱ را به عنوان $x_{\circ B}$ اعلام کنند، در صورتی‌که با قرار دادن $t = \circ$ در عبارت $۲\cos \pi t + ۱$، به عدد ۳ می‌رسیم!

۸ | ۱ برای محاسبهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۱s$، کافیست ابتدا در معادلهٔ مکان - زمان، لحظهٔ $t = ۱s$ را جای‌گذاری کنیم:

$$\text{معادلهٔ مکان - زمان}: x = t^۳ - t + ۲ \xrightarrow[\text{در } t=۱s]{\text{مکان متحرک}}$$

$$x = (۱)^۳ - ۱ + ۲ = ۲m \xrightarrow{\vec r_۱ = x\vec i} \vec r_۱ = ۲\vec i \ (\text{در } SI)$$

دقت

معادلهٔ حرکت یا مکان - زمان معادله‌ای است که از ما مقدار t را گرفته و بلافاصله، موقعیت متحرک نسبت به مبدأ در آن لحظه را می‌دهد.

تذکر

این تست شاید ساده به نظر برسد، اما دارای دام آموزشی است. یعنی شما به جواب $۲\vec i$ می‌رسید و به اشتباه گزینهٔ ۲ را در پاسخنامه وارد کرده و به سادگی نمرهٔ منفی می‌گیرید! حدود ۲۰ درصد تست‌های سراسری دارای این‌گونه دام‌های آموزشی هستند.

۹ | ۲ ابتدا بردار مکان اولیهٔ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲}t) \xrightarrow{t=\circ} x_\circ = ۲m$$

بردار مکان، قرینهٔ بردار مکان اولیه باشد $\Rightarrow x = -۲m$

در ادامه مکان متحرک را در هر یک از گزینه‌ها به‌دست می‌آوریم تا ببینیم در کدام گزینه، مکان متحرک، قرینهٔ مکان اولیه نیست.

بررسی گزینه‌ها

۱) پایان ثانیهٔ دوم: $t = ۲s \Rightarrow x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۲) = -۲m$ ✗

۲) پایان ثانیهٔ چهارم: $t = ۴s \Rightarrow x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۴) = ۲m$ ✓

۳) پایان سه ثانیهٔ دوم: $t = ۶s \Rightarrow x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۶) = -۲m$ ✗

۴) پایان دو ثانیهٔ پنجم: $t = ۱۰s \Rightarrow x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۱۰) = -۲m$ ✗

۱۰ | ۱

تذکر

لحظه‌ای که مکان یک متحرک صفر باشد $(x = \circ)$، متحرک از مبدأ عبور می‌کند و اندازهٔ بردار مکان آن حداقل است. بنابراین برای یافتن لحظاتی که اندازهٔ بردار مکان حداقل است (متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند)، کافی است ریشه‌های معادله حرکت را به‌دست آوریم.

دقت شود با توجه به این‌که حرکت را در زمان‌های مثبت بررسی می‌کنیم، ریشه‌های منفی قابل قبول نیستند.

$$\text{معادلهٔ مکان - زمان}: x = t^۲ - ۷t + ۱۲ = \circ \Rightarrow (t-۳)(t-۴) = \circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۳s \\ t_۲ = ۴s \end{cases} \Rightarrow \Delta t = ۴ - ۳ = ۱s$$

۱۱ | ۴ وقتی متحرک در فاصلهٔ یک متری از مبدأ مکان قرار دارد، باید در مکان‌های $x = ۱m$ یا $x = -۱m$ قرار داشته باشد. برای حل این سؤال، باید بررسی کنیم که متحرک چند بار از مکان‌های $x = ۱m$ یا $x = -۱m$ عبور می‌کند.

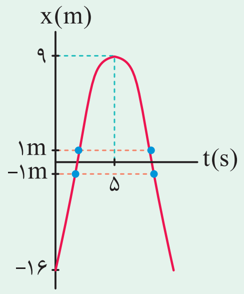
$$x = -t^۲ + ۱۰t - ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱m \Rightarrow -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ = ۱ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t + ۱۷ = \circ \\ \Rightarrow t_{۱,۲} = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - ۴\times ۱۷}}{۲} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \\ x = -۱m \Rightarrow -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ = -۱ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t + ۱۵ = \circ \\ \Rightarrow t_{۳,۴} = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - ۴\times ۱۵}}{۲} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \end{cases}$$

با توجه به چهار جواب مثبت به دست آمده، متحرک ۴ بار از فاصلهٔ یک متری مبدأ مکان عبور می‌کند.

خلاقیت حرفه‌ای‌ها

با رسم نمودار مکان - زمان این متحرک نیز به راحتی مشخص می‌شود که متحرک دو بار از مکان $x = ۱m$ و دو بار از مکان $x = -۱m$ عبور می‌کند.



$$x = -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ \Rightarrow t_{\text{رأس}} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱۰}{۲\times(-۱)} = ۵s$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x_{\text{رأس}} = -۵^۲ + ۱۰ \times ۵ - ۱۶ = ۹m$$

۱۲ | ۱ با توجه به تمرین (۴) در درسنامه، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۳ | ۴ ابتدا باید توجه شود که نیم‌ثانیهٔ سوم یعنی $۱s < t < ۱/۵s$ و جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$x = ۴t^۲ - ۴t \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱s \to x_۱ = ۴ - ۴ = \circ \\ t_۲ = ۱/۵s \to x_۲ = ۴(۱/۵)^۲ - ۴(۱/۵) = ۳m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۳m$$

تذکر

۰/۵ ثانیه‌های متوالی در حرکت یک متحرک عبارت است از:

$$\begin{cases} \circ < t < \circ/۵s \to \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ اول} \\ \circ/۵s < t < ۱s \to \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ دوم} \\ ۱s < t < ۱/۵s \to \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ سوم} \end{cases}$$

۱۴ | ۱ به عنوان یک نکتهٔ اساسی و بسیار مهم، هنگامی‌که دو متحرک به هم می‌رسند، بردار مکان آن‌ها با یک‌دیگر برابر می‌شود. بدین‌ترتیب داریم:

$$\vec r_A = \vec r_B \Rightarrow ۳t + ۱ = ۲t^۲ + t + ۱ \Rightarrow ۲t = ۲t^۲$$

$$\Rightarrow ۲t(t - ۱) = \circ \Rightarrow \begin{cases} t = \circ \\ \text{یا} \\ t = ۱s \end{cases}$$

در ادامه چون در صورت سؤال ذکر شده است که این دو متحرک در کدام لحظه پس از شروع حرکت به هم می‌رسند، $t = ۱s$ قابل قبول است.

۱۵ **۳** سرعت متوسط کمیتی برداری است که از رابطهٔ $\vec{v}_{av} = \frac{\overset{\text{بردار جابه‌جایی}}{\vec{d}}}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید و یکای آن در SI برابر $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

تندی متوسط کمیتی نرده‌ای است که از رابطهٔ $s_{av} = \frac{\overset{\text{مسافت}}{l}}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید و یکای آن هم در SI برابر $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

۱۶ **۲** برداری که نقطهٔ شروع را به نقطهٔ پایان حرکت وصل می‌کند همان بردار جابه‌جایی است. سرعت متوسط برابر نسبت بردار جابه‌جایی به زمان انجام جابه‌جایی است و هم جهت با بردار جابه‌جایی می‌باشد، از طرفی عبارت (الف) نیز تعریف تندی متوسط است و عبارت‌های (الف) و (ج) صحیح هستند.

بررسی موارد

ب) سرعت متوسط و تندی متوسط فقط در شرایطی هم‌اندازه هستند که متحرک بدون تغییر جهت روی یک خط راست حرکت کند. در غیر این صورت اندازهٔ سرعت متوسط کوچک‌تر از تندی متوسط است.

د) تندی متوسط و مسافت طی شده کمیت برداری نیستند و جهت ندارند و این عبارت از پایه نادرست است.

۱۷ **۱** اگر متحرک بر روی یک خط راست و بدون تغییر جهت جابه‌جا شود، اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن یکسان است، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۸ **۳** عبارت (الف) صحیح است. علت نادرستی عبارت‌های (ب)، (ج)، (د) و (هـ) به صورت زیر است:

ب) ممکن است متحرک پس از طی مسافتی به محل اولیه‌اش بازگردد. در این‌صورت سرعت متوسط آن صفر، اما تندی متوسط آن مخالف صفر است.

ج) در یک مسیر منحنی، مسافت طی‌شده توسط متحرک، می‌تواند بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی باشد و در نتیجه تندی متوسط نیز می‌تواند بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط شود.

د) چون مسافت طی‌شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است، تندی متوسط نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ سرعت متوسط است.

هـ) چون مسافت طی‌شده نمی‌تواند منفی باشد، تندی متوسط نیز نمی‌تواند منفی باشد.

۱۹ **۳** جابه‌جایی و سرعت متوسط خودروی A برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مکان اولیهٔ A}: x_{\circ A} = -۵۰\,m \\ \text{مکان نهایی A}: x_A = -۱۰\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_A = -۱۰ - (-۵۰) = +۴۰\,m$$

$$\Rightarrow v_{av_A} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{۴۰}{۵} = ۸\,m/s$$

به همین ترتیب جابه‌جایی و سرعت متوسط خودروی B برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مکان اولیهٔ B}: x_{\circ B} = +۲۰\,m \\ \text{مکان نهایی B}: x_B = -۱۰\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_B = -۱۰ - ۲۰ = -۳۰\,m$$

$$\Rightarrow v_{av_B} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{-۳۰}{۵} = -۶\,m/s \Rightarrow \frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = -\frac{۴}{۳}$$

دقت

هنگامی که در یک بازهٔ زمانی معین، نسبت سرعت متوسط دو متحرک را می‌خواهیم، کافی است نسبت جابه‌جایی آن‌ها را محاسبه کنیم.

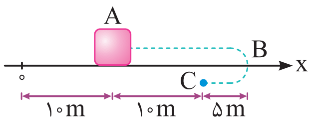
$$\begin{cases} v_{av_A} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} \\ v_{av_B} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}$$

مثلاً در این سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{۴۰}{-۳۰} = -\frac{۴}{۳}$$

در واقع نیازی به دانستن طول بازهٔ زمانی نداریم.

۲۰ **۱** متحرک ابتدا به اندازهٔ ۱۵m از A به B رفته و سپس ۵m از B به C می‌رود، بنابراین کل مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر $l = ۲۰\,m$ می‌شود. از طرف دیگر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک از نقطهٔ A تا C، برابر فاصلهٔ AC بوده و برابر $\Delta x = ۱۰\,m$ می‌باشد. بنابراین داریم:

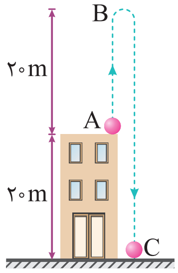


$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{l}{\Delta x} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲$$

۲۱ **۳** به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، گلوله حداکثر تا ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین بالا می‌رود. بنابراین از لحظهٔ شروع حرکت تا نقطهٔ B، گلوله به اندازهٔ ۲۰m به سمت بالا می‌رود و در ادامه از نقطهٔ B تا C گلوله ۴۰m پایین می‌آید. بنابراین گلوله در مجموع مسافتی به اندازهٔ ۶۰m را طی می‌کند.

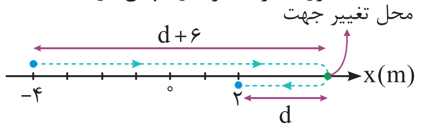
۲) اندازهٔ جابه‌جایی آن از نقطهٔ A تا C برابر ۲۰m می‌شود و داریم:



$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\left|\frac{\Delta y}{\Delta t}\right|} = \frac{l}{|\Delta y|} = \frac{۶۰}{۲۰} = ۳$$

۲۲ **۳** این تست، یک سؤال جالب می‌باشد، طبق صورت سؤال، جسم فقط یک بار تغییر جهت داده و در یک بازهٔ زمانی مشخص، تندی متوسط آن، ۴ برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن است. این موضوع یعنی مسافت طی شده توسط متحرک، ۴ برابر اندازهٔ جابه‌جایی‌اش است. این سؤال دو حالت دارد:

حالت اول: جسم ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:

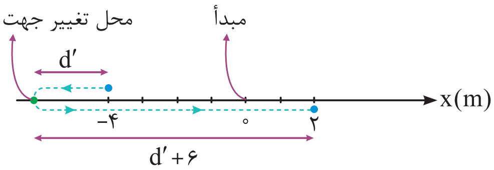


$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = (d+۶) + d = ۲d + ۶ \\ \text{اندازهٔ جابه‌جایی} = ۲ - (-۴) = ۶\,m \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲d + ۶) = ۴ \times (۶) \Rightarrow d = ۹\,m$$

$$\rightarrow \text{فاصلهٔ محل تغییر جهت دادن تا مبدأ مکان} = d + ۲ = ۱۱\,m$$

حالت دوم: جسم ابتدا در خلاف جهت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:

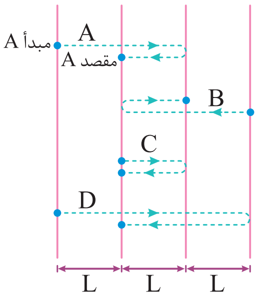


$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = d' + (d'+۶) = ۲d'+۶ \\ \text{اندازهٔ جابه‌جایی} = ۶m \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲d'+۶) = ۴ \times (۶) \Rightarrow d' = ۹m$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ محل تغییرجهت دادن متحرک تا مبدأ مکان} = d'+۴ = ۹+۴ = ۱۳m$$

۲۳ ۴ گام اول: ابتدا اندازهٔ جابه‌جایی هر متحرک را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که زمان حرکت برای هر چهار متحرک یکسان است، برای مقایسهٔ اندازهٔ سرعت متوسط آن‌ها، کافی است اندازهٔ جابه‌جایی آن‌ها (فاصلهٔ مبدأ از مقصد) را با یکدیگر مقایسه کنیم:



$$|\vec{d}_A| = L \;,\; |\vec{d}_B| = L \;,\; |\vec{d}_C| = ۰ \;,\; |\vec{d}_D| = L$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان است}} v_{av_A} = v_{av_B} = v_{av_D} > v_{av_C}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند.

گام دوم: در ادامه مسافت‌های طی‌شده (که معادل با طول خط‌چین برای هر متحرک است) توسط هر چهار متحرک را به‌دست می‌آوریم و به کمک آن‌ها تندی متوسط را مقایسه می‌کنیم:

$$l_A = ۳L \;,\; l_B = ۳L \;,\; l_C = ۲L \;,\; l_D = ۵L$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان است}} s_{av_D} > s_{av_A} = s_{av_B} > s_{av_C}$$

۲۴ ۱ مطابق تعریف، سرعت متوسط یک متحرک که بر روی یک خط راست (محور x) حرکت می‌کند، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{سرعت متوسط}: \vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱}\vec{i}$$

$$\begin{cases} t_۱ = ۲s \to x_۱ = ۸m \\ t_۲ = ۱۰s \to x_۲ = -۱۶m \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{-۱۶-۸}{۱۰-۲}\vec{i} = -۳\vec{i} \;(\text{در SI})$$

علامت منفی برای سرعت متوسط، یعنی بردار سرعت متوسط (و همچنین جابه‌جایی $(\vec{d})$) در این بازهٔ زمانی در خلاف جهت محور x است.

۲۵ ۳ طبق صورت سؤال، متحرک در لحظهٔ $t=۰$، در مکان $x_۰ = -۴۰m$ و در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰s$، در مکان $x_۲ = ۲۰m$ قرار دارد. بنابراین سرعت متوسط این متحرک در طی ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$\begin{cases} t_۰ = ۰ \to x_۰ = -۴۰m \\ t_۲ = ۱۰s \to x_۲ = +۲۰m \end{cases}$$

$$\to v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۰}{t_۲ - t_۰} = \frac{۲۰-(-۴۰)}{۱۰-۰} = ۶m/s$$

۲۶ ۲ با توجه به جدول داده‌شده، می‌توان نوشت:

	مکان آغازین	مکان پایانی	جابه‌جایی	سرعت متوسط
متحرک A	$\vec{r}_{۰A}$	$(-۲m)\vec{i}$	$(-۵m)\vec{i}$	$(\vec{v}_{av})_A$
متحرک B	$(۲m)\vec{i}$	$(۸m)\vec{i}$	$\vec{d}_B$	$(\vec{v}_{av})_B$

$$\begin{cases} \text{جابه‌جایی A}: \vec{d}_A = -۵\vec{i} = -۲\vec{i} - \vec{r}_{۰A} \Rightarrow \vec{r}_{۰A} = ۳\vec{i} \\ \text{جابه‌جایی B}: \vec{d}_B = ۸\vec{i} - ۲\vec{i} = ۶\vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{d}_B}{\vec{r}_{۰A}} = \frac{۶\vec{i}}{۳\vec{i}} = ۲$$

از طرفی با توجه به این‌که حرکت هر دو متحرک در مدت زمان یکسان انجام شده است، نسبت سرعت متوسط دو متحرک برابر نسبت جابه‌جایی آن‌ها است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان}} \frac{(\vec{v}_{av})_A}{(\vec{v}_{av})_B} = \frac{\vec{d}_A}{\vec{d}_B} = \frac{-۵\vec{i}}{۶\vec{i}} = -\frac{۵}{۶}$$

۲۷ ۲ با توجه به رابطهٔ مربوط به سرعت متوسط $(v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$، جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ اول و ۵ ثانیهٔ سوم و ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{در ۵ ثانیهٔ اول حرکت}: -۵ = \frac{\Delta x_۱}{۵} \Rightarrow \Delta x_۱ = -۲۵m \\ \text{در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت}: +۳ = \frac{\Delta x_۳}{۵} \Rightarrow \Delta x_۳ = ۱۵m \\ \text{در ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت}: +۲ = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{۱۵} \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = +۳۰m \end{cases}$$

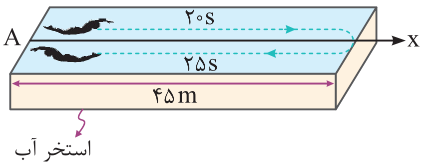
از طرفی جابه‌جایی در ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت برابر مجموع جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ اول، ۵ ثانیهٔ دوم و ۵ ثانیهٔ سوم است، بنابراین جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ دوم حرکت برابر است با: $\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \Delta x_۳$

$$\Rightarrow +۳۰ = -۲۵ + \Delta x_۲ + ۱۵ \Rightarrow \Delta x_۲ = ۴۰m$$

$$\text{سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت}: v_{av} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{-۲۵+۴۰}{۱۰} = +۱/۵\frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = +۱/۵\,\vec{i}\,(\frac{m}{s})$$

۲۸ ۴ شناگر پس از ۴۵ ثانیه شنا کردن، به مکان اولیهٔ خود برمی‌گردد، بنابراین جابه‌جایی کل آن برابر صفر بوده و در نتیجه سرعت متوسط کل آن نیز صفر است.

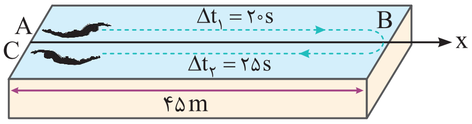


$$x_{\text{شروع}} = x_{\text{پایان}} \Rightarrow \Delta x = ۰ \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = ۰$$

از طرف دیگر شناگر مسافت $۲ \times ۴۵m = ۹۰m$ را شنا کرده است. بنابراین تندی متوسط آن برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۹۰}{۲۰+۲۵} = ۲m/s$$

۲۹ **۱** در صورتی که جهت مثبت محور x را به سمت راست فرض کنیم، داریم:



(AB) سرعت متوسط در مسیر رفت: $\Delta x_1 = x_B - x_A = ۴۵ - ۰ = +۴۵m$

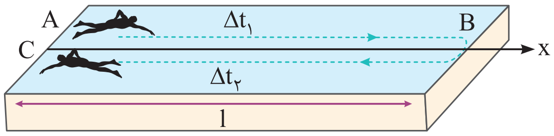
$$\Rightarrow v_{av_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{۴۵}{۲۰} = ۲/۲۵ m/s$$

(BC) سرعت متوسط در مسیر برگشت: $\Delta x_2 = x_C - x_B = ۰ - ۴۵ = -۴۵m$

$$\Rightarrow v_{av_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-۴۵}{۲۵} = -۱/۸ m/s$$

دقت داشته باشید که در حالت برگشت، شناگر در خلاف جهت محور x حرکت کرده است و در نتیجه سرعت متوسط آن مقداری منفی است.

۳۰ **۳** برای حل این سؤال، به شکل زیر که مسیر رفت و برگشت حرکت شناگر را نشان می‌دهد، توجه کنید:



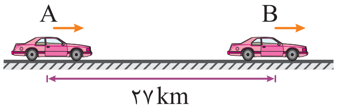
$$(s_{av})_1 = s = \frac{l}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{s} \quad (۱)$$: تندی متوسط در هنگام رفت

$$(s_{av})_2 = ۲s = \frac{l}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{۲s} \quad (۲)$$: تندی متوسط در هنگام برگشت

$$s_{av} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\text{مسافت کل}}{\text{زمان کل شنا کردن}}$$: تندی متوسط در رفت و برگشت

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{۲l}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow s_{av} = \frac{۲l}{(\frac{l}{s}) + (\frac{l}{۲s})} = \frac{۲l}{(\frac{۳}{۲}\frac{l}{s})} = \frac{۴}{۳}s$$

۳۱ **۳** روش اول: متحرک در طول نیم‌ساعت از حرکت خود، تغییر جهت نداده است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر مسافت طی‌شده، یعنی ۲۷ کیلومتر می‌باشد.



$$\begin{cases} \Delta x = ۲۷km = ۲۷۰۰۰m \\ \Delta t = ۰/۵h = ۰/۵ \times ۳۶۰۰ = ۱۸۰۰s \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۷۰۰۰}{۱۸۰۰} = ۱۵ m/s = ۱۵۰۰ cm/s$$

روش دوم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۷}{۰/۵} = ۵۴ km/h$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{۵۴}{۳/۶} = ۱۵ m/s = ۱۵۰۰ cm/s$$

دقت کنید در این سؤال چون اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت یکسان است، پس اندازهٔ سرعت متوسط برابر تندی متوسط است.

تذکر

برای تبدیل km / h به m / s، کافی است عدد موردنظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

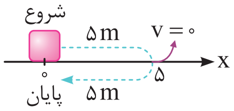
$$۱km/h = ۱\frac{(۱۰۰۰m)}{(۳۶۰۰s)} \Rightarrow ۱km/h = \frac{۱}{۳/۶} m/s$$

و برای تبدیل m / s به km / h، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می‌کنیم:

$$۱m/s = ۳/۶ km/h$$

۳۲ **۴** برای به‌دست آوردن سرعت متوسط یک متحرک، مقدار جابه‌جایی آن مهم است، نه مسافت طی‌شده. بنابراین در این سؤال می‌توانیم نشان دهیم که هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

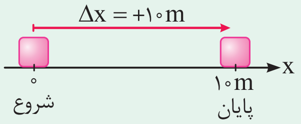
به عنوان مثال در این مسأله، متحرک می‌تواند ۵ متر به جلو رفته و سپس به جای اول خود برگردد، در این حالت مسافت طی‌شده برابر ۱۰ متر بوده ولی جابه‌جایی آن صفر است (بررسی سایر حالت‌ها را به خودتان می‌سپاریم!).



$$\Delta x = ۰ \rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = ۰$$

تذکر

به عنوان یک موضوع مفهومی، باید گفت که در این سؤال بیشترین مقدار سرعت متوسط متحرک، مربوط به حالتی است که متحرک بدون تغییر جهت، ۱۰m جابه‌جا شود.



$$\Delta x = ۱۰m \rightarrow |\vec{v}_{av}|_{max} = \frac{۱۰}{۲} = ۵ m/s \rightarrow -۵\vec{i} \le \vec{v}_{av} \le ۵\vec{i}$$

۳۳ **۱** ۲ ثانیهٔ دوم حرکت معادل $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$ است. در ادامه با توجه به رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، به راحتی می‌توان نوشت:

$$x = t^۳ - ۴t^۲ + ۲ \Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۲s \Rightarrow x_1 = ۸ - ۱۶ + ۲ = -۶m \\ t_2 = ۴s \Rightarrow x_2 = ۶۴ - ۶۴ + ۲ = ۲m \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{۲ - (-۶)}{۴ - ۲} = ۴\frac{m}{s}$$

۳۴ **۲** برای پاسخ به این سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x = \frac{۱}{۳}t^۳ - ۲t^۲ + ۳t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۰ \Rightarrow x_1 = ۰ \\ t_2 = ۴s \Rightarrow x_2 = \frac{۱}{۳} \times ۴^۳ - ۲ \times ۴^۲ + ۳ \times ۴ = \frac{۶۴}{۳} - ۲۰ = \frac{۴}{۳} > ۰ \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[x_2 > ۰]{x_1 = ۰} v_{av} > ۰$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.

تذکر

همیشه سرعت متوسط یک متحرک در یک بازهٔ زمانی، بین بیشترین و کم‌ترین اندازهٔ سرعت لحظه‌ای متحرک در آن بازه می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) قطعاً نادرست است.

۳۵ **۳** برای آن‌که سرعت متوسط در خلاف جهت محور x باشد، کافی است جابه‌جایی، منفی باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که در دو ثانیهٔ اول $(۰ < t < ۲s)$ حرکت، چگونه جابه‌جایی می‌تواند منفی باشد.

$$x = ۲t^۳ - bt - ۱۰$$

$$\begin{cases} t_1 = ۰ \Rightarrow x_1 = -۱۰m \\ t_2 = ۲s \Rightarrow x_2 = ۶ - ۲b \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = ۱۶ - ۲b$$

$$\Delta x < ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۲b < ۰ \Rightarrow b > ۸$$

دقت

با توجه به این‌که یکای x در SI برابر متر و یکای t در SI برابر ثانیه است، یکای کمیت b برابر $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ می‌باشد.

۳۶ | ۱ با توجه به تمرین (۵) در درسنامه، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳۷ | ۴ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم.

گام اول: دو ثانیهٔ اول، یعنی از لحظهٔ $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۲s$. بنابراین ابتدا مکان متحرک را در این لحظات به‌دست می‌آوریم:

$$x = kt^۲ - ۵t + ۵ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۵m \\ t_۲ = ۲s \Rightarrow x_۲ = (۴k - ۵)m \end{cases}$$

گام دوم: از آن‌جایی که اندازهٔ سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول حرکت برابر صفر شده است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی نیز برابر صفر بوده و $x_۱ = x_۲$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow ۵ = ۴k - ۵ \Rightarrow k = ۲/۵$$

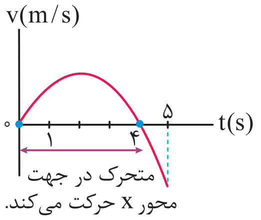
گام سوم: حال مقدار k را در معادله قرار داده و در ادامه مکان متحرک را در لحظات $t_۲ = ۲s$ و $t_۳ = ۴s$ به‌دست می‌آوریم: $x = ۲/۵t^۲ - ۵t + ۵$

$$\begin{cases} t_۲ = ۲s \Rightarrow x_۲ = ۵m \\ t_۳ = ۴s \Rightarrow x_۳ = ۲۵m \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{x_۳ - x_۲}{t_۳ - t_۲} = \frac{۲۵ - ۵}{۲} = ۱۰m/s$$

۳۸ | ۱ در حالتی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، علامت سرعت متحرک، منفی است. با توجه به نمودار سرعت - زمان رسم شده، در بازهٔ زمانی $۴s \le t \le ۵s$، علامت سرعت متحرک منفی است.

$$v = -t^۲ + ۴t = -t(t-۴) \Rightarrow \text{ریشه‌ها}: \begin{cases} t_۱ = ۰ \\ t_۲ = ۴s \end{cases}$$



در نتیجه در $\frac{۱}{۵}$ از ۵ ثانیهٔ اول حرکت، یعنی در بازهٔ $۴s < t < ۵s$، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۳۹ | ۱ **بررسی موارد**

الف) در بازهٔ $t_۱ < t < t_۳$، نمودار زیر محور افقی است، یعنی مکان متحرک منفی است یا به عبارت دیگر، بردار مکان در خلاف جهت محور x است. ✓

ب) در لحظهٔ $t_۲$، متحرک بیشترین فاصله از مبدأ را در جهت مخالف محور x دارد. ✓

ج) در بازهٔ $t_۲ < t < t_۴$، ابتدا نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود و سپس از آن دور می‌شود، پس می‌توان گفت اندازهٔ بردار مکان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. ✗

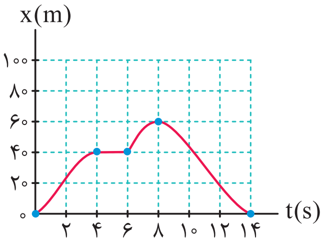
د) جابه‌جایی در بازه‌های $t_۱$ تا $t_۲$ و $t_۲$ تا $t_۳$ هم‌اندازه است ولی جهت حرکت در این دو بازه برعکس است و در نتیجه بردار جابه‌جایی در این دو بازه قرینهٔ یکدیگر است. ✗

۴۰ | ۲ برای آن‌که جابه‌جایی متحرک در یک بازه صفر شود، باید مکان آن در ابتدا و انتهای بازه یکسان باشد. مطابق نمودار داده شده، مکان متحرک در لحظات $t_۱$ و $t_۵$ مشابه است، پس جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۵$ صفر است.

۴۱ | ۳ در لحظات $t_۱$ و $t_۳$، نمودار محور افقی را قطع می‌کند و علامت مکان (x) تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک ۲ بار تغییر جهت داده است. دقت کنید که در لحظهٔ $t_۵$، مکان متحرک صفر می‌شود ولی علامت آن تغییر نمی‌کند.

۴۲ | ۴ با توجه به شکل زیر، حرکت این متحرک را در هر مرحله به‌صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

$۰ \le t < ۴s$: همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در این بازهٔ زمانی، با گذشت زمان مکان متحرک در حال افزایش بوده و از $x = ۰$ به $x = ۴۰m$ رسیده است. با توجه به این موضوع، متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.



$۴s \le t < ۶s$: در این بازه، متحرک در مکان $x = ۴۰m$ ایستاده و حرکت نمی‌کند (دقت شود که با گذشت زمان، مکان متحرک عوض نمی‌شود و x ثابت است).

$۶s \le t < ۸s$: در این بازه همانند بازهٔ اول، متحرک در جهت محور x در حال حرکت می‌باشد و از مکان $x = ۴۰m$ به مکان $x = ۶۰m$ رفته و از مبدأ دور می‌شود و در $t = ۸s$ به بیشترین فاصله از مبدأ می‌رسد.

$۸s \le t < ۱۴s$: در این بازه با گذشت زمان، متحرک از مکان $x = ۶۰m$ به سمت مبدأ $(x = ۰)$ در حال حرکت بوده و در لحظهٔ $t = ۱۴s$ به مبدأ $(x = ۰)$ می‌رسد، در نتیجه متحرک در این بازه به مبدأ نزدیک می‌شود.

دقت

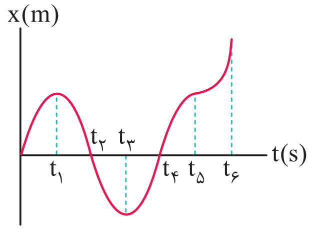
متحرک در چهار ثانیهٔ دوم حرکت $(۴s \le t < ۸s)$ از مکان $x = ۴۰m$ به مکان $x = ۶۰m$ رفته است و ۲۰m جابه‌جا شده و گزینهٔ «۴» عبارت نادرستی است.

۴۳ | ۳ چون دوچرخه‌سوار از مکان $x = ۰$ شروع به حرکت کرده و در نهایت به $x = ۰$ بازگشته است، اندازهٔ جابه‌جایی آن صفر می‌باشد. از طرف دیگر دوچرخه‌سوار در ۸ ثانیهٔ اول حرکت از $x = ۰$ به $x = ۶۰m$ رفته و در بازهٔ زمانی ۸s تا ۱۴s از $x = ۶۰m$ به $x = ۰$ بازگشته است و در مجموع مسافت ۱۲۰m را طی کرده است.

۴۴ | ۱ برای حل، درستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها

۱) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و در حال **دور شدن** از مبدأ می‌باشد. بنابراین عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۱) نادرست است.



۲) در بازهٔ زمانی $t_۴$ تا $t_۶$، متحرک در جهت محور x از مبدأ دور می‌شود.

۳) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۴$، متحرک در قسمت منفی محور x قرار دارد و در لحظهٔ $t_۳$ بیشترین فاصله را در قسمت منفی محور x از مبدأ دارد.

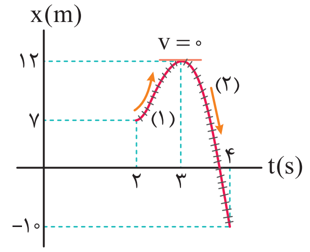
۴) هنگامی که متحرک در قسمت مثبت محور x است، بردار مکان در جهت محور x و هنگامی که متحرک در قسمت منفی محور x است، بردار مکان در خلاف جهت محور x قرار دارد.

به‌طور کلی هنگامی که متحرک از $x = ۰$ عبور کرده و علامت x تغییر کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. متحرک موردنظر در دو لحظهٔ $t_۲$ و $t_۴$ از مبدأ مکان عبور کرده است و دو بار بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. بنابراین تنها گزینهٔ (۱) عبارت نادرستی است.

۴۵ | ۱ با بررسی جهت حرکت و اندازهٔ جابه‌جایی در دو ثانیه دوم حرکت $(۲s \le t < ۴s)$، مسافت طی‌شده به دست می‌آید.

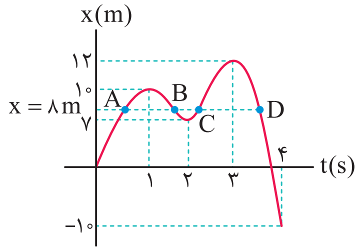
مرحلهٔ اول: از لحظهٔ $t = ۲s$ تا $t = ۳s$، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده و مسافت $l_۱ = ۱۲ - ۷ = ۵m$ را پیموده است.

مرحلهٔ دوم: از لحظهٔ $t = ۳s$ تا $t = ۴s$، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و مسافت $l_۲ = |-۱۰ - ۱۲| = ۲۲m$ را پیموده است.



بنابراین مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ دوم برابر $l = l_۱ + l_۲ = ۲۷m$ است.

از طرفی با توجه به نمودار داده‌شده، متحرک ۴ بار در مکان $x = +۸m$ قرار گرفته است (در واقع خط افقی که از $x = ۸m$ رسم می‌شود، نمودار را در چهار نقطهٔ A، B، C و D قطع می‌کند)، بنابراین ۴ بار بردار مکان متحرک برحسب متر برابر $\vec{d} = +۸\vec{i}$ می‌شود.



تمرین **اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در دو ثانیهٔ دوم حرکت چند متر است؟**

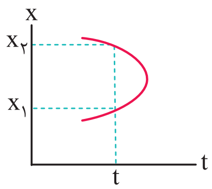
پاسخ

$$\begin{cases} t_۱ = ۲s \to x_۱ = ۷m \\ t_۲ = ۴s \to x_۲ = -۱۰m \end{cases} \to |\vec{d}| = |x_۲ - x_۱| = ۱۷m$$

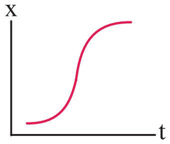
تمرین **در طی حرکت، بردار مکان در کدام بازهٔ زمانی تغییر جهت می‌دهد؟**

پاسخ در ثانیهٔ چهارم $(۳s \le t < ۴s)$، متحرک از مبدأ عبور کرده و علامت x تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک در این بازهٔ زمانی تغییر جهت می‌دهد.

۴۶ | ۲ شکل‌های رسم شده در گزینه‌های (۱) و (۴)، نمی‌توانند مربوط به نمودار مکان - زمان یک متحرک باشند، زیرا متحرک در یک لحظهٔ مشخص در بیش از یک مکان قرار دارد. این موضوع برای گزینهٔ (۱) در شکل زیر نشان داده شده است.



در گزینهٔ (۳)، در ابتدای حرکت، متحرک با گذشت زمان به مبدأ مکان $(x = ۰)$ نزدیک می‌شود، بنابراین فقط گزینهٔ (۲) صحیح است. همان‌طور که در شکل گزینهٔ (۲) می‌بینید، مقدار x با گذشت زمان افزایش می‌یابد، بنابراین متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود.



۴۷ | ۴ **بررسی موارد**

الف) در ۳ ثانیهٔ اول، متحرک از مکان $x_۱ = ۶m$ به $x_۲ = ۹m$ رسیده است و سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{\Delta t} = \frac{۹-۶}{۳} = ۱m/s \Rightarrow \vec{v}_{av} = (۱m/s)\vec{i}$$

ب) مکان متحرک در لحظات $t = ۶s$ و $t = ۱۰s$ یکسان است، بنابراین در بازهٔ $t = ۶s$ تا $t = ۱۰s$، جابه‌جایی و سرعت متوسط صفر است.

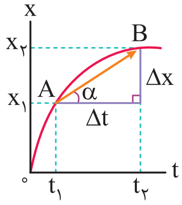
ج) در سه ثانیهٔ اول، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند (نمودار بالا می‌رود)، در حالی که در سه ثانیهٔ دوم، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (نمودار پایین می‌رود)، پس سرعت متوسط در سه ثانیهٔ اول مثبت و در سه ثانیهٔ دوم منفی است.

$$\text{سه ثانیهٔ اول}: v_{av_۱} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۹-۶}{۳} = ۱m/s$$

$$\text{سه ثانیهٔ دوم}: v_{av_۲} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰-۹}{۳} = -۳m/s \Rightarrow \frac{|v_{av_۲}|}{|v_{av_۱}|} = ۳$$

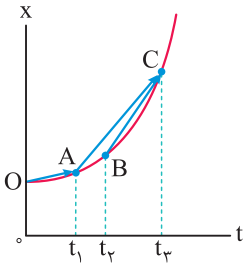
بنابراین عبارت‌های (الف)، (ب) و (ج) صحیح هستند.

۴۸ | ۳ نمودار داده‌شده یک نمودار **مکان - زمان** است. بنابراین شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متوسط در فاصلهٔ زمانی بین آن دو لحظه ($t_۱$ تا $t_۲$) می‌باشد.



$$\text{شیب } AB = \tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}|$$

۴۹ | ۳ سرعت متوسط بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار مکان - زمان مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.



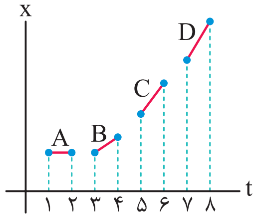
همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید، شیب پاره‌خط BC از سایر پاره‌خط‌ها بیشتر است (تمایل آن به قائم شدن بیشتر است)، بنابراین سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ بزرگ‌تر است.

$$\tan\alpha_{BC} > \tan\alpha_{AC} > \tan\alpha_{OA}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}|_{BC} > |\vec{v}_{av}|_{AC} > |\vec{v}_{av}|_{OA}$$

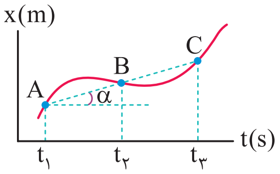
بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تمرین **در شکل زیر، اندازهٔ سرعت متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟**



پاسخ $|\vec{v}_{av}|_A = 0 < |\vec{v}_{av}|_B < |\vec{v}_{av}|_C < |\vec{v}_{av}|_D$

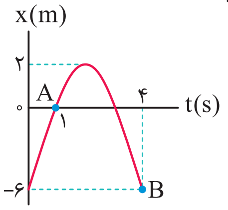
۵۰ | ۳ شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازه است. در شکل روبه‌رو، شیب خط واصل بین نقاط A و B با شیب خط واصل بین نقاط B و C یکسان بوده و در نتیجه سرعت متوسط متحرک برای هردو بازهٔ زمانی (t_1 تا t_2) و (t_2 تا t_3) یکسان و برابر $2m/s$ است.



$$(\vec{v}_{av})_1 = (\vec{v}_{av})_2 = \tan\alpha = 2m/s$$

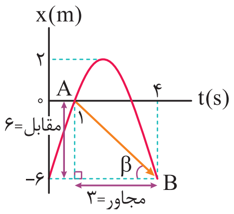
تذکر
دقت کنید پاره‌خط‌های AB و BC در یک امتداد قرار دارند و شیب هر دو یکسان است.

۵۱ | ۲ **روش اول (نمودارخوانی):** با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، متحرک در لحظهٔ $t_1 = 1s$ در مبدأ قرار داشته ($x_A = 0$) و در لحظهٔ $t_2 = 4s$ در مکان $x_2 = -6m$ ($x_B = -6m$) قرار دارد و داریم:



$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6-0}{4-1} = -2m/s$$

روش دوم (شیب نمودار): سرعت متوسط متحرک در یک بازه، برابر شیب خط واصل بین نقاط ابتدای بازهٔ زمانی و انتهای بازهٔ زمانی در نمودار مکان - زمان است.



$$|\vec{v}_{av}| = |\tan\beta| = \left|\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}\right| = \left|\frac{6}{3}\right| = 2m/s$$

(شیب خط AB منفی است.) $v_{av} = -2m/s$

دقت
با توجه به جهت فلش AB در این سؤال، علامت v در نمودار مکان - زمان فوق مشخص می‌شود:

↘ $\Rightarrow v_{av} < 0$	↗ $\Rightarrow v_{av} > 0$	→ $\Rightarrow v_{av} = 0$

۵۲ | ۴ در ۵ ثانیهٔ اول، سرعت متوسط برابر $-4m/s$ است، بنابراین جابه‌جایی برابر است با:

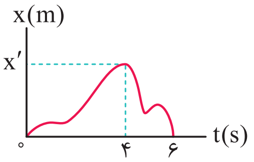
$$\Delta x_1 = v_{av_1}\Delta t_1 = -4\times 5 = -20m$$

در ۴ ثانیهٔ بعدی، سرعت متوسط $+3m/s$ است و جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x_2 = v_{av_2}\Delta t_2 = 3\times 4 = 12m$$

بنابراین تنها چیزی که راجع به این حرکت می‌توانیم بگوییم آن است که در ۵ ثانیهٔ اول، نمودار مکان - زمان باید در مجموع $20m$ پایین بیاید و در ۴ ثانیهٔ بعد، باید $12m$ بالا برود که این موضوع در هر سه گزینه رعایت شده است. دقت کنید که سرعت متوسط در مورد چگونگی حرکت به ما اطلاعی نمی‌دهد.

۵۳ | ۲ محاسبهٔ سرعت متوسط از $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4s$:



$$\begin{cases} t_1 = 0 \to x_1 = 0 \\ t_2 = 4s \to x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow v_{av_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x' - 0}{4-0} = \frac{x'}{4}$$

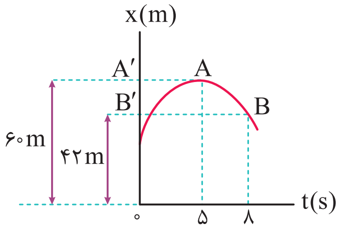
محاسبهٔ سرعت متوسط از $t_2 = 4s$ تا $t_3 = 6s$:

$$\begin{cases} t_2 = 4s \to x_2 = x' \\ t_3 = 6s \to x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{av_2} = \frac{0 - x'}{6-4} = -\frac{x'}{2}$$

و نسبت سرعت متوسط در این دو بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\frac{v_{av_1}}{v_{av_2}} = \frac{\frac{x'}{4}}{-\frac{x'}{2}} = -\frac{1}{2}$$

۵۴ | ۱ با سؤال بسیار جالب و مفهومی روبه‌رو شده‌ایم. ابتدا باید دقت کنیم که متحرک بر روی محور x در حال حرکت است و بردار سرعت متوسط آن یا در جهت محور x است و یا در خلاف جهت آن و این موضوع یعنی سرعت متوسط در جهت AB نمی‌باشد و گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.

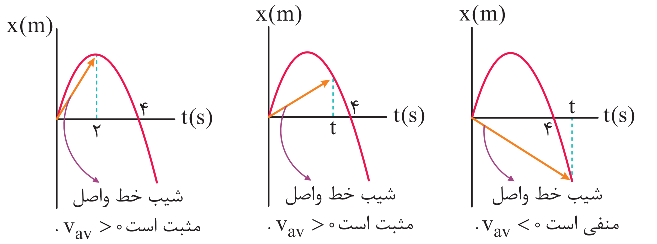


با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، متحرک در لحظهٔ $t_1 = 5s$ در مکان $A'(x_1 = 60m)$ و در لحظهٔ $t_2 = 8s$ در مکان $B'(x_2 = 42m)$ قرار دارد و داریم:

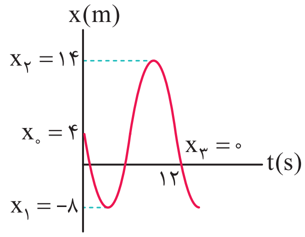
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{42 - 60}{8-5} = -6m/s$$

در ادامه از روی نمودار مشخص است که از لحظهٔ $t = 5s$ تا $t = 8s$ متحرک بر روی محور x از A' به طرف B' حرکت کرده و سرعت متوسط در راستای $A'B'$ (یعنی در خلاف جهت محور x) است.

۵۵ ۲ با توجه به شیب خط واصل از لحظهٔ صفر تا t، مشاهده می‌شود که نهایتاً تا لحظهٔ $t = 4s$، شیب خط واصل مثبت و سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.

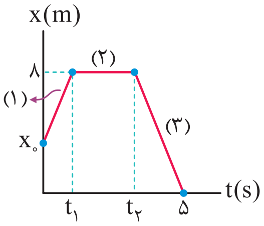


۵۶ ۴ متحرک ابتدا ۱۲m در خلاف جهت محور x حرکت کرده و از مکان $x_0 = 4m$ به مکان $x_1 = -8m$ می‌رسد. سپس تغییر جهت داده و با طی مسافت ۲۲m به مکان $x_2 = 14m$ می‌رسد و در ادامه دوباره تغییر جهت داده و پس از طی مسافت ۱۴m در لحظهٔ $t = 12s$ به مبدأ $(x_3 = 0)$ می‌رسد. بنابراین متحرک در مجموع مسافت $12 + 22 + 14 = 48m$ را طی می‌کند و داریم:



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{48}{12} = 4m/s$$

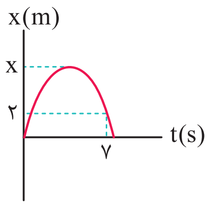
۵۷ ۴ این متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ t_1 مسافت $(8 - x_0)$ را طی کرده است. از طرفی از لحظهٔ t_1 تا t_2 ساکن بوده و از لحظهٔ t_2 تا لحظهٔ $t = 5s$ از مکان $x = 8m$ به مبدأ مکان رسیده است و در نتیجه در این بازهٔ زمانی مسافت 8m را طی کرده است.



$$\text{مجموع مسافت طی‌شده در طی } 5s = (8 - x_0) + 0 + 8 = 16 - x_0$$

$$s_{av} = \frac{\text{کل مسافت طی‌شده}}{\text{کل زمان}} \Rightarrow 2 = \frac{16 - x_0}{5} \Rightarrow x_0 = 6m$$

۵۸ ۲ مطابق شکل، فرض می‌کنیم بیشترین فاصلهٔ ذره تا مبدأ مکان برابر x باشد، به این ترتیب داریم:



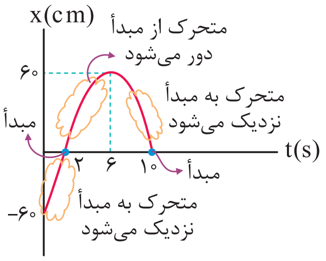
$$\text{مسافت طی شده در ۷ ثانیهٔ اول} = l = (x) + (x - 2) = 2x - 2$$

$$\text{اندازهٔ جابه‌جایی در ۷ ثانیهٔ اول} = |\Delta x| = 2m$$

$$s_{av} = 5|v_{av}| \Rightarrow \frac{l}{\cancel{\Delta t}} = 5\frac{|\Delta x|}{\cancel{\Delta t}} \Rightarrow (2x - 2) = 5 \times (2)$$

$$\Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6m$$

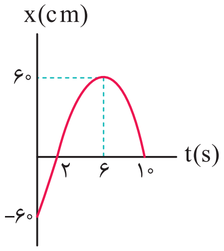
۵۹ ۲ **گام اول:** در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2s$ متحرک از قسمت منفی محور x به سمت مبدأ حرکت کرده و به مبدأ نزدیک می‌شود، در بازهٔ زمانی $t_2 = 2s$ تا $t_3 = 6s$ متحرک از مبدأ دور شده و در نهایت در بازهٔ زمانی $t_3 = 6s$ تا $t_4 = 10s$ به مبدأ نزدیک می‌شود.



گام دوم: بنابراین تندی متوسط در بازهٔ زمانی $t_2 = 2s$ تا $t_3 = 6s$ که متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{60}{6 - 2} = \frac{60}{4} = 15cm/s = 0/15m/s$$

۶۰ ۳ با توجه به نمودار داده‌شده، متحرک در دو لحظهٔ $t_1 = 0$ و $t_2 = 6s$ به ترتیب در نقاط $x_1 = -60cm$ و $x_2 = +60cm$ قرار دارد و تنها در این دو لحظه، فاصلهٔ متحرک تا مبدأ برابر 60cm می‌شود. بنابراین باید تندی متوسط متحرک را در ۶ ثانیهٔ اول حرکت به‌دست آوریم:



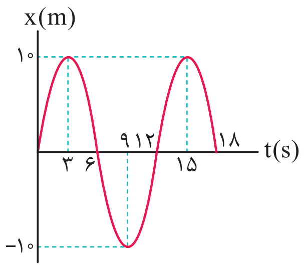
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{120}{6} = 20cm/s = 0/2m/s$$

۶۱ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که می‌دانید، طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$، تندی متوسط به مسافت طی‌شده توسط متحرک بستگی دارد.

۲) بعد از لحظهٔ $t = 0$، متحرک در جهت محور x شروع به حرکت می‌کند و در ادامهٔ مسیر، مسافت‌های متفاوتی را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی‌شده توسط آن در هیچ‌یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌باشد.

۳) دقت کنید حتی زمانی‌که متحرک به مکان اولیهٔ خود باز می‌گردد، باز هم مسافت طی‌شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت صفر نمی‌شود و در این‌حالت جابه‌جایی و سرعت متوسط حرکت صفر می‌شود.



۴) بنابراین در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 6s$ که متحرک به محل اولیه‌اش باز می‌گردد، سرعت متوسط صفر شده و تندی متوسط در هیچ یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌شود.

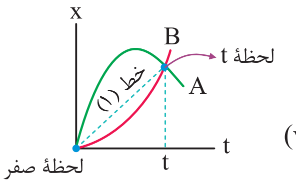
۶۲ ۲ در بازهٔ t_1 تا t_2، مکان متحرک ثابت بوده و این یعنی متحرک حرکت نکرده و مسافت طی‌شده توسط آن صفر است. بنابراین تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر صفر است.

دقت

در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است ولی تندی متوسط آن مخالف صفر است (زیرا جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی صفر شده ولی مسافت طی‌شده مخالف صفر است).

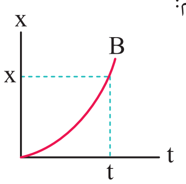
۶۳ ۳ این سؤال را در دو گام حل می‌کنیم:

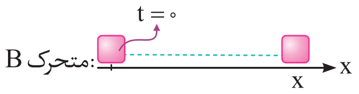
گام اول: خط واصل از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ t برای دو متحرک یکسان بوده و با توجه به این‌که شیب این خط برابر سرعت متوسط متحرک است، سرعت متوسط دو متحرک از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ t یکسان است.



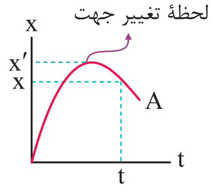
$(v_{av})_A = (v_{av})_B =$ شیب خط (۱)

گام دوم: برای مقایسهٔ تندی متوسط، باید مسافت طی شده توسط دو متحرک از لحظهٔ صفر تا t را مقایسه کنیم و با توجه به این موضوع داریم:





$l_A =$ جابه‌جایی $= x$



$l_B > x$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده توسط متحرک A به دلیل تغییر جهت دادن، از جابه‌جایی آن (یعنی x) بیشتر بوده و در مجموع تندی متوسط A از B بیشتر است.

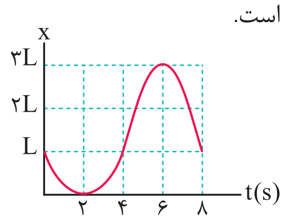
$$(s_{av}) = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{l_A > l_B} (s_{av})_A > (s_{av})_B$$

۶۴ ۳

دقت

در هر بازهٔ زمانی که تندی متوسط متحرک بزرگ‌تر باشد، متحرک تندتر و سریع‌تر حرکت کرده است و بالعکس.

با توجه به نمودار داده شده، چون تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۴s تا ۶s بیش‌تر از سایر گزینه‌ها است، بنابراین متحرک در این بازهٔ زمانی تندتر حرکت کرده است و گزینهٔ (۳) صحیح است.



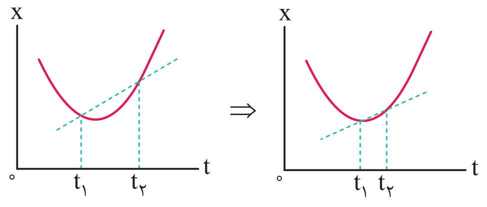
۲ ثانیهٔ دوم حرکت، $\rightarrow s_{av} = \frac{L}{2}$ ، ۲ ثانیهٔ اول حرکت $\rightarrow s_{av} = \frac{L}{2}$

۴ ثانیهٔ اول حرکت، $\rightarrow s_{av} = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}$ ، ۲ ثانیهٔ سوم حرکت $\rightarrow s_{av} = \frac{2L}{2}$

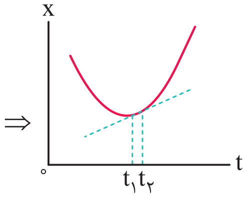
۶۵ ۳ با توجه به تمرین (۱۱) در درسنامه، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۶۶ ۳ تندی‌سنج خودرو به صورت تقریبی، تندی لحظه‌ای حرکت خودرو را نشان می‌دهد.

۶۷ ۲ همان‌گونه که در شکل‌های ترسیم‌شده مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، شیب خط واصل، به‌سمت مماس رسم‌شده بر نمودار مکان - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب خط مماس رسم‌شده بر هر نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای در آن نقطه است.



(A) (B)

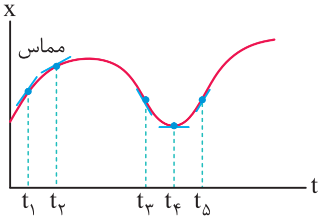


(C)

$\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$

۶۸ ۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

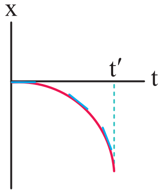
(۱) اندازهٔ شیب مماس رسم شده بر نمودار در لحظهٔ t_1 بیشتر از t_2 است، پس تندی متحرک در t_1 بیشتر از t_2 است.



(۲) در لحظهٔ t_4، مماس رسم شده بر نمودار افقی است و در نتیجه تندی حرکت در این لحظه صفر است.

(۳) در لحظهٔ t_3، مماس بر نمودار به سمت پایین است و شیب آن منفی است، پس علامت سرعت هم منفی است و بردار سرعت در لحظهٔ t_3 در خلاف جهت محور x است.

۶۹ ۳ همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، بیانگر اندازهٔ سرعت متحرک (تندی متحرک) در آن لحظه است. باتوجه به این‌که در نمودار رسم‌شده در گزینهٔ (۳)، همواره شیب خط مماس در حال افزایش است، بنابراین در این نمودار از لحظهٔ صفر تا t'، همواره تندی متحرک افزایش می‌یابد.



۷۰ | **۱**

نکته

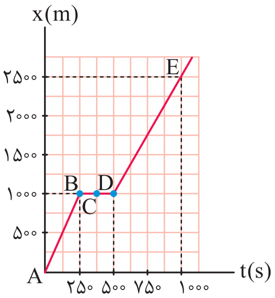
اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به‌صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازهٔ سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازهٔ زمانی برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است.

با توجه به نکتهٔ ارائه‌شده، واضح است که شیب DE مقدار ثابتی است و سرعت متحرک در این بازه نیز مقدار ثابتی است. بنابراین سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانیِ قرار گرفته در این بازه (D تا E) برابر سرعت لحظه‌ای در این بازه است. یعنی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $600s < t < 900s$ برابر سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t = 550s$ (یا هرلحظهٔ دیگرکه در بازهٔ زمانی ۵۰۰s تا ۱۰۰۰s قرارگرفته باشد) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

بررسی سایر گزینه‌ها

۲) متحرک در بازهٔ A تا B در مدت $250 - 0 = 250s$ به اندازهٔ $1000 - 0 = 1000m$ جابه‌جاشده است، بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{1000 - 0}{250 - 0} = 4 m/s$$



از طرفی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ D تا E برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_E - x_D}{t_E - t_D} = \frac{2500 - 1000}{1000 - 500} = \frac{1500}{500} = 3 m/s$$

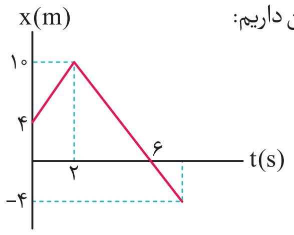
بنابراین متحرک در AB ، تندتر از DE حرکت می‌کند.

۳) برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط در کل زمان حرکت، نسبت جابه‌جایی کل متحرک را بر کل بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av\,کل} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{x_E - x_A}{t_E - t_A} = \frac{2500 - 0}{1000 - 0} = 2.5 m/s$$

۴) با توجه به نمودار، مشاهده می‌کنیم که متحرک در تمام لحظات بین $t = 250s$ تا $t = 500s$ در مکان $x = 1000m$ قرار داشته و جابه‌جا نمی‌شود. بنابراین متحرک در این بازهٔ زمانی ساکن بوده و سرعت آن در این بازه صفر است (بنابراین سرعت در نقطهٔ C نیز صفر می‌باشد).

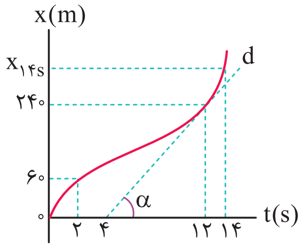
۷۱ | **۲** با توجه به نکتهٔ مطرح‌شده در سؤال قبل، می‌توانیم بگوییم که سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 6s$ (که متحرک از مبدأ عبور می‌کند)، برابر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۲s تا ۶s است. بنابراین داریم:



$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{0 - 10}{6 - 2}\vec{i} = -\frac{10}{4}\vec{i} = -2.5\vec{i}$$

۷۲ | **۳** با توجه به تمرین (۱۲) در درسنامه، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۷۳ | **۱** **گام اول:** تندی متحرک در لحظهٔ $t = 12s$ ، برابر شیب خط d می‌باشد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$v_{12s} = \tan\alpha = \frac{240}{8} = 30\frac{m}{s}$$

گام دوم: با توجه به صورت سؤال، تندی متوسط در بازهٔ $t = 2s$ تا $t = 14s$ برابر تندی در لحظهٔ $t = 12s$ می‌باشد. بنابراین مکان متحرک در $t = 14s$ برابر است با:

$$s_{av} = v_{12s} \Rightarrow \frac{x_{14s} - 60}{14 - 2} = 30 \Rightarrow x_{14s} = 420m$$

دقت شود که متحرک از ۲s تا ۱۴s بدون تغییر جهت روی خط راست در حال حرکت است و تندی متوسط متحرک برابر سرعت متوسط آن است.

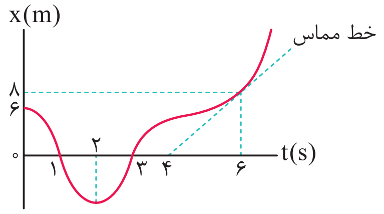
گام سوم: نسبت خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{(v_{av})_{0\ تا\ 2}}{(v_{av})_{12\ تا\ 14}} = \frac{\frac{60 - 0}{2}}{\frac{420 - 240}{2}} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

۷۴ | **۳** این سؤال را در گام‌های زیر حل می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 6s$:

$$t = 6s : v = \text{شیب خط مماس} = \frac{8}{6 - 4} = 4\frac{m}{s}$$

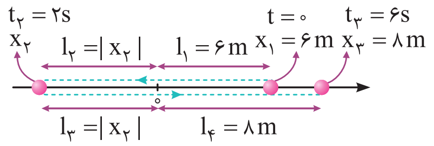


بنابراین چون تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $0 < t < 6s$ ، $\frac{5}{4}$ برابر تندی در لحظهٔ $t = 6s$ است، تندی متوسط در $0 < t < 6s$ برابر $5\frac{m}{s}$ است.

گام دوم: محاسبهٔ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی $0 < t < 6s$:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{l}{6} \Rightarrow l = 30m$$

گام سوم: شکل نشان داده شده نحوهٔ حرکت متحرک را در ۶ ثانیهٔ اول حرکت، با توجه به نمودار مکان - زمان نشان می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان نوشت:

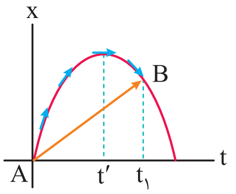


$$30 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \Rightarrow 30 = 6 + |x_2| + |x_2| + 8 \Rightarrow |x_2| = 8m$$

در نهایت باید دقت شود که در $t = 2s$ ، متحرک در خلاف جهت محور x، بیشترین فاصله از مبدأ را دارد و این فاصله همان ۸m است.

۷۵ **۲** به موارد زیر توجه کنید:

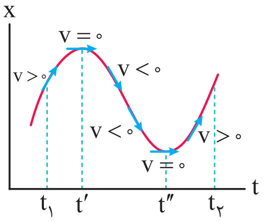
۱) همان‌طور که می‌دانیم، شیب خطِ رسم‌شده بین دو لحظهٔ $t=0$ و t_1 (خط AB) بیانگر سرعت متوسط حرکت جسم می‌باشد. چون شیب خط موردنظر مثبت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی مثبت بوده و در جهت مثبت محور x است.



۲) از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه، بیانگر سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه است. همان‌طور که می‌بینید، از شروع حرکت تا لحظهٔ t' شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای مثبت و از لحظهٔ t' تا t_1 شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای منفی می‌باشد.

بنابراین سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط ابتدا هم‌جهت و سپس در خلاف جهت هم هستند.

۷۶ **۳** با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، **سرعت متحرک** در دو لحظهٔ t' و t'' صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (یعنی اگر سرعت مثبت بوده، منفی شده و بالعکس)، زیرا در این لحظات، علامت شیب نمودار مکان - زمان تغییر کرده است.



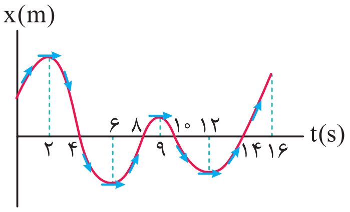
بنابراین در بازهٔ t_1 تا t_2، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

تذکر

نشان دادن فلش بر روی مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.

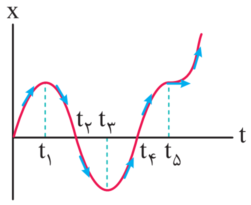
(شیب مثبت) ↗	(شیب منفی) ↘	(شیب صفر) →

۷۷ **۲** تندی متحرک در لحظه‌های $t_1=2s$، $t_2=6s$، $t_3=9s$ و $t_4=12s$ صفر شده و علامت سرعت بعد و قبل از این لحظات تغییر می‌کند، بنابراین متحرک در ۱۶ ثانیهٔ اول حرکت، ۴ بار تغییر جهت می‌دهد. از طرفی متحرک ۴ بار از مبدأ عبور کرده و بردار مکان حداقل اندازه را دارد.



در بازه‌های زمانی (۰ تا ۲s)، (۶s تا ۹s) و (۱۲s تا ۱۶s)، در مجموع به مدت ۹s، شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه علامت سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

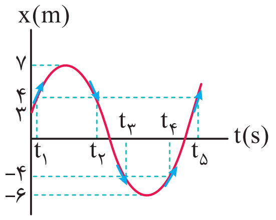
۷۸ **۲** همان‌طور که می‌دانید، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متحرک است و در بازه‌های زمانی که شیب خط مماس منفی می‌شود، سرعت در خلاف محور x بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، تنها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 شیب خط مماس بر نمودار منفی می‌شود.



۷۹ **۱** به موارد زیر توجه کنید:

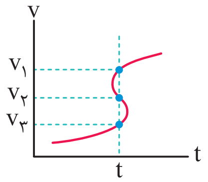
۱) هنگامی‌که متحرک در نقاط $x=4m$ یا $x=-4m$ قرار می‌گیرد، فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مکان برابر $4m$ می‌شود.

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، در لحظات t_1، t_2، t_3، t_4 و t_5 فاصلهٔ متحرک تا مبدأ برابر $4m$ می‌شود.



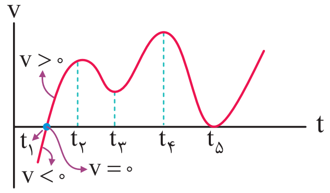
۲) در صورت سؤال لحظاتی مدنظر است که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین باید سرعت متحرک و شیب خط مماس بر نمودار منفی باشد، بنابراین فقط لحظات t_2 و t_3 قابل قبول هستند و گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

۸۰ **۴** نمودار رسم شده در گزینهٔ (۴)، نمودار یک **تابع** v برحسب t نمی‌تواند باشد. به عبارت دیگر، اگر یک خط موازی محور v رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. این موضوع نشان‌دهندهٔ این است که متحرک در یک لحظه، چند سرعت مختلف دارد که این موضوع امکان‌پذیر نیست.

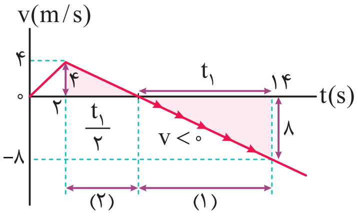


۸۱ **۴** با توجه به نمودار سرعت - زمان داده‌شده، در لحظهٔ $t=6s$ نه سرعت متحرک صفر می‌شود و نه علامت سرعت عوض می‌شود، بنابراین متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد. درستی سایر گزینه‌ها را با توجه به مطالب مطرح‌شده در درسنامه بررسی کنید.

۸۲ **۱** با در دست داشتن نمودار سرعت - زمان برای مشخص کردن لحظهٔ تغییر جهت متحرک، کافی است لحظه‌ای را بیابیم که نمودار محور زمان را **قطع کرده** و **تغییر علامت** دهد. بنابراین در شکل زیر، متحرک تنها در لحظهٔ t_1 تغییر جهت می‌دهد. (در t_5 علامت سرعت عوض نشده و لحظهٔ تغییر جهت محسوب نمی‌شود.)



۸۳ **۳** همان‌طور که می‌دانیم در نمودار سرعت - زمان، در زمان‌هایی که نمودار زیر محور زمان است، سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. با توجه به تشابه دو مثلث رنگی، اگر طول قسمت (۱) که سرعت در آن منفی است را t_1 درنظر بگیریم، طول قسمت (۲) برابر $\frac{t_1}{۲}$ است و می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow t_1 + \frac{t_1}{۲} = (۱۴ - ۲) = ۱۲ \Rightarrow t_1 = ۸s$$

بنابراین متحرک به مدت $t_1 = ۸s$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود.

۸۴ **۳**

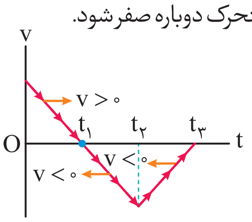
تذکر

در نمودار سرعت - زمان، هرگاه نمودار از محور زمان دور شود، تندی متحرک $|v|$ در حال افزایش است و بالعکس.

ابتدا باید دقت شود که نمودار **سرعت - زمان** متحرک داده‌شده است و با توجه به آن می‌توان گفت:

۱) از لحظهٔ t_1 تا t_3 نمودار سرعت - زمان زیر محور زمان (t) است و در نتیجه سرعت متحرک در این بازهٔ زمانی منفی است و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۲) از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = t_1$ سرعت متحرک مثبت و اندازهٔ آن در حال کاهش بوده تا در لحظهٔ t_1 به صفر برسد. سپس از لحظهٔ t_1 تا t_2 سرعت متحرک منفی ولی اندازهٔ آن ($|v|$) در حال افزایش است (نمودار از محور افقی دور می‌شود). از لحظهٔ t_2 تا t_3 نیز سرعت متحرک منفی است ولی اندازهٔ آن ($|v|$) در حال کاهش است (نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود) تا در لحظهٔ t_3 سرعت متحرک دوباره صفر شود.



۸۵ **۲** به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که می‌دانید، اگر متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط آن با یک‌دیگر برابر می‌شود و در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان خواهد شد.

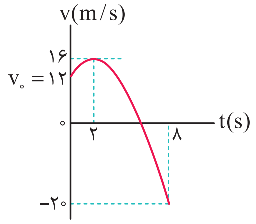
۲) از طرف دیگر می‌دانیم که دو ثانیهٔ دوم، معادل بازهٔ زمانی $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$ است. بنابراین برای پاسخ دادن به این سؤال، باید نموداری را پیدا کنیم که متحرک در این بازهٔ زمانی تغییر جهت نداده باشد. سرعت متحرک‌های C و D (نمودار گزینه‌های (۳) و (۴)) به ترتیب در لحظات ۲/۵s و ۳s صفر شده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین این دو متحرک تغییر جهت می‌دهند. متحرک A نیز در لحظهٔ $t = ۳$ تغییر جهت می‌دهد، اما متحرک B در بازهٔ زمانی $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$ تغییر جهت نمی‌دهد، بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ این سؤال است.

۸۶ **۴** با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان داده شده، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$v = -t^۲ + ۴t + ۱۲ = -t^۲ + ۴t - ۴ + ۴ + ۱۲$$

$$\Rightarrow v = -(t^۲ - ۴t + ۴) + ۱۶ \Rightarrow v = -(t-۲)^۲ + ۱۶$$

نقاط کمکی:
$$\begin{cases} t = ۰ \Rightarrow v_۰ = ۱۲\frac{m}{s} \\ t = ۲s \Rightarrow v = ۱۶\frac{m}{s} \\ t = ۸s \Rightarrow v = -(۸)^۲ + ۴ \times ۸ + ۱۲ = -۲۰\frac{m}{s} \end{cases}$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t = ۸s$ بیشتر از سایر لحظه‌هاست و در نتیجه بیشترین تندی متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، در انتهای حرکت می‌باشد که برابر $۲۰\frac{m}{s}$ است.

۸۷ **۴** شتاب متوسط با بردار $\Delta \vec{v}$ هم‌جهت است نه بردار $\vec{v}$ و گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است. سایر گزینه‌ها، با توجه به درسنامهٔ ابتدای این قسمت، صحیح می‌باشند.

۸۸ **۳** برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

۱) هنگام سقوط آزاد توپ به سمت زمین، به دلیل نیروی جاذبه، سرعت توپ به تدریج افزایش می‌یابد و این افزایش سرعت به معنی شتاب‌دار بودن حرکت است.

۲) در حرکت خودرو در یک جادهٔ مارپیچ، جهت حرکت خودرو در طول مسیر تغییر می‌کند و در نتیجه بردار سرعت عوض می‌شود، بنابراین حرکت شتاب‌دار است.

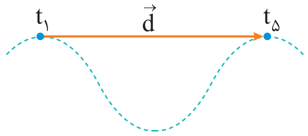
۳) هنگامی که خودرو با تندی ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، اندازه و جهت بردار سرعت ثابت است و در نتیجه حرکت شتاب ندارد.

۴) در چرخش ماهواره به دور زمین، جهت حرکت ماهواره تغییر می‌کند و این به معنی تغییر بردار سرعت است، بنابراین حرکت شتاب‌دار است.

۸۹ **۴** در گزینهٔ (۴) اندازهٔ سرعت ثابت بوده و بردار سرعت تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین در این حالت، $\vec{v}_1 = \vec{v}_4$ بوده و شتاب متوسط از لحظهٔ t_1 تا t_4 برابر صفر است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_1}{\Delta t} \xrightarrow{\vec{v}_4 = \vec{v}_1} \vec{a}_{av} = ۰$$

۹۰ **۳** سرعت، یک کمیت برداری است، بنابراین زمانی سرعت‌ها در دو زمان مختلف با هم برابر هستند که هم اندازه و هم جهت سرعت‌ها یکسان باشد. در این سؤال، در لحظات t_1، t_3 و t_5 سرعت متحرک یکسان است، بنابراین شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 و t_1 تا t_5 برابر صفر است $(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t})$. از سوی دیگر سرعت متوسط در راستای بردار جابه‌جایی است و تنها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_5 جابه‌جایی متحرک، افقی و در نتیجه سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.



۹۱ **۱** در بازهٔ t_1 تا t_2، شتاب متوسط برابر است با:

$$\begin{cases}\Delta v = v_2 - v_1 = -2-10 = -12\dfrac{m}{s}\\ \Delta t = t_2 - t_1 = 5-1=4s\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-12}{4} = -3\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (-3\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

در بازهٔ t_2 تا t_3 هم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\Delta v = v_3 - v_2 = 4-(-2) = 6\dfrac{m}{s}\\ \Delta t = t_3 - t_2 = 7-5=2s\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6}{2} = +3\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (+3\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

۹۲ **۴** **بررسی موارد**

الف) هنگامی که متحرک در مکان‌های منفی قرار دارد، بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است و هنگامی که در مکان‌های مثبت قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور x است، بنابراین بردار مکان متحرک ابتدا در خلاف جهت محور x و سپس در جهت محور x می‌باشد و در نتیجه این عبارت نادرست است.

ب) بردار سرعت متحرک در مکان A در جهت مثبت محور x $(v_A > 0)$ و بردار سرعت متحرک در مکان C در خلاف جهت محور x است $(v_C < 0)$، بنابراین تغییرات سرعت متحرک منفی بوده و در نتیجه بردار شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی، در خلاف جهت محور x است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\overset{\text{منفی}}{\boxed{v_C}} - \overset{\text{مثبت}}{\boxed{v_A}}}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} < 0$$

ج) متحرک در دو مرحله ابتدا ۲۸ متر در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، در ادامه تغییر جهت داده و ۱۲ متر در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی شده برابر ۴۰ متر است و تندی متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{40}{6+4} = 4\frac{m}{s}$$

د) متحرک در هنگام عبور از مبدأ مکان $(x=0)$، در حال حرکت در جهت مثبت محور x است و در نتیجه بردار سرعت آن در جهت مثبت محور x می‌باشد.

با توجه به این توضیحات، فقط عبارت «الف» نادرست است.

۹۳ **۲** ابتدا سرعت‌های متحرک که برحسب cm / s داده‌شده‌اند را برحسب m / s نوشته و با توجه به تعریف شتاب متوسط $\left(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$، داریم:

$$\begin{cases} v_1 = 1cm/s = 0.01m/s \ ,\ v_2 = -99cm/s = -0.99m/s \\ \Delta t = 0.5s\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{-0.99-0.01}{0.5} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2m/s^2$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = 2\frac{m}{s^2}$$

یادآوری

$1cm/s = 0.01m/s$ یا $1m/s = 100cm/s$

۹۴ **۲** با توجه به تمرین (۱۸) در درسنامه، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۹۵ **۳** گام اول: ابتدا تغییر سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow -2\vec{i} = \frac{\Delta \vec{v}}{10} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_2\ \text{صفر تا}} = -20\vec{i}$$

گام دوم: سپس تغییر سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا t_3 را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{a}'_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{2}{3}\vec{i} = \frac{\Delta \vec{v}}{15} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_3\ \text{صفر تا}} = 10\vec{i}$$

گام سوم: شتاب متوسط در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 برابر است با:

$$(\Delta \vec{v})_{t_3\ \text{صفر تا}} = (\Delta \vec{v})_{t_2\ \text{صفر تا}} + (\Delta \vec{v})_{t_2\ \text{تا}\ t_3}$$

$$10\vec{i} = -20\vec{i} + (\Delta \vec{v})_{t_2\ \text{تا}\ t_3} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_2\ \text{تا}\ t_3} = 30\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{(\Delta \vec{v})_{t_2\ \text{تا}\ t_3}}{\Delta t} = \frac{30\vec{i}}{15-10} = 6\vec{i}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

۹۶ **۴** با توجه به تمرین (۱۷) در درسنامه، گزینهٔ (۴) صحیح است.

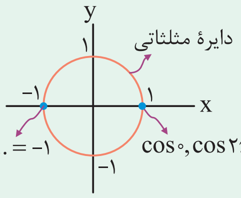
۹۷ **۳** سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی داده‌شده را به‌دست آورده و شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow v_1 = 0.3\pi \overbrace{\cos(10\pi)}^{1} = 0.3\pi \\ t_2 = 5s \rightarrow v_2 = 0.3\pi\cos(25\pi) = 0.3\pi \overbrace{\cos(\pi)}^{-1} = -0.3\pi \end{cases}$$

اندازهٔ شتاب متوسط: $|\vec{a}_{av}| = \dfrac{|v_2 - v_1|}{t_2 - t_1} = \dfrac{|-0.3\pi - (0.3\pi)|}{5-2}$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{av}| = 0.2\pi m/s^2$$

یادآوری



$\cos\pi, \cos3\pi, \cos5\pi, ... = -1$

$\cos0, \cos2\pi, \cos4\pi, ... = 1$

۹۸ **۳** در هر یک از بازه‌های زمانی، شتاب متوسط را با استفاده از رابطهٔ $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم.

بررسی گزینه‌ها

۱) $\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4\dfrac{m}{s} \\ t_2 = 1s \Rightarrow v_2 = 0\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \dfrac{0-4}{1-0} = -4\dfrac{m}{s^2}$

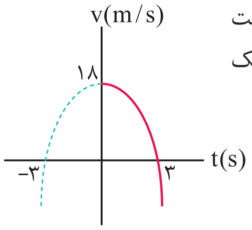
۲) $\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4\dfrac{m}{s} \\ t_2 = 2s \Rightarrow v_2 = -4\dfrac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \dfrac{-4-(4)}{2-0} = -4\dfrac{m}{s^2}$

۳) $\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4\dfrac{m}{s} \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 4\dfrac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \dfrac{4-4}{4-0} = 0$

۴) $\begin{cases} t_1 = 4s \Rightarrow v_1 = 4\dfrac{m}{s} \\ t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = -4\dfrac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \dfrac{-4-(4)}{6-4} = -4\dfrac{m}{s^2}$

در ۴ ثانیهٔ اول حرکت، شتاب متوسط حرکت برابر صفر است، یعنی در خلاف جهت محور x نیست.

۹۹ **۳** ابتدا ریشه‌های معادلهٔ موردنظر را به‌دست می‌آوریم و به دنبال آن نمودار سرعت - زمان را که یک سهمی است رسم می‌کنیم:



$$v=-2t^2+18\Rightarrow\begin{cases}-2t^2+18=0\Rightarrow t=3s \quad \text{یا} \quad t=-3\\ t=0\Rightarrow v=18\,m/s\end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی $t_1=0$ تا $t_2=3s$ ، سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$|\vec{a}_{av}|=\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\frac{|0-18|}{3}=6\,m/s^2$$

۱۰۰ **۱** بزرگی سرعت در لحظهٔ $t=0$ برابر $4\frac{m}{s}$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$v=t^2+bt+c\xrightarrow[v=4\frac{m}{s}]{t=0}4=0+0+c\Rightarrow c=4$$

شتاب متوسط متحرک در ثانیهٔ اول حرکت برابر $-3\frac{m}{s^2}$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}t_1=0: v_1=0+0+4=4\\ t_2=1s: v_2=1+b+4=5+b\end{cases}\Rightarrow\Delta v=5+b-4=1+b$$

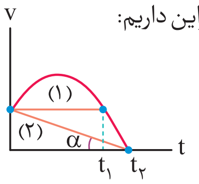
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow -3=\frac{1+b}{1}\Rightarrow b=-4$$

بنابراین معادلهٔ سرعت - زمان متحرک به‌صورت $v=t^2-4t+4$ است.

$$v=t^2-4t+4=(t-2)^2\ge 0$$

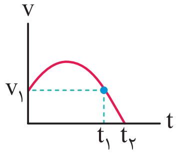
عبارت فوق همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین متحرک هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

۱۰۱ **۲** همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط رسم‌شده بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازه می‌باشد. در شکل زیر، شیب خط (۱) برابر a_{av_1} و شیب خط (۲) برابر a_{av_2} است. خط (۱) افقی است و شیبی برابر صفر دارد، اما شیب خط (۲)، عددی منفی است، بنابراین داریم:



$$a_{av_1}=0\ ,\ a_{av_2}<0$$

روش دیگر: با توجه به شکل زیر، متحرک در لحظهٔ صفر دارای سرعت v_1 و در لحظهٔ t_1 نیز دارای همان سرعت می‌باشد، بنابراین تغییرات سرعت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 صفر بوده و در نتیجه شتاب متوسط آن در این بازه نیز صفر است.

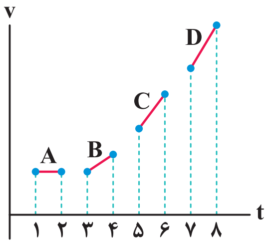


$$a_{av_1}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta v=0}a_{av_1}=0$$

از سوی دیگر سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 برابر صفر است. بنابراین شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_2 برابر است با:

$$a_{av_2}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-v_1}{t_2-0}<0$$

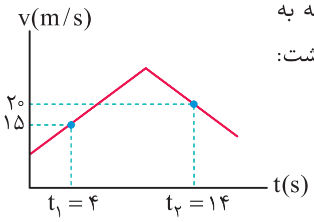
تمرین در شکل زیر شتاب متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟



پاسخ

$$a_{av_A}=0<a_{av_B}<a_{av_C}<a_{av_D}$$

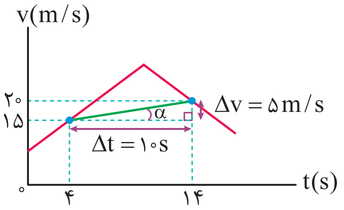
۱۰۲ **۱** روش اول **(نمودارخوانی):** با توجه به نمودار سرعت - زمان داده‌شده می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}t_1=4s\to v_1=15\,m/s\\ t_2=14s\to v_2=20\,m/s\end{cases}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{20-15}{14-4}$$

$$\Rightarrow a_{av}=\frac{1}{2}\,m/s^2=0.5\,m/s^2\Rightarrow\vec{a}_{av}=0.5\,\vec{i}$$

روش دوم **(استفاده از شیب نمودار):** شتاب متوسط بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.



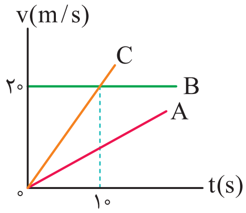
$$|\vec{a}_{av}|=\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$|\vec{a}_{av}|=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\,m/s^2=0.5\,m/s^2\Rightarrow\vec{a}_{av}=+0.5\,\vec{i}$$

دقت
با توجه به شیب پاره‌خط AB ، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازه مقداری مثبت دارد.

۱۰۳ **۲** برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) هر سه نمودار سرعت - زمان، به صورت خطی می‌باشند و شیب آن‌ها ثابت است، بنابراین شتاب هر سه متحرک در طول حرکتشان ثابت است.

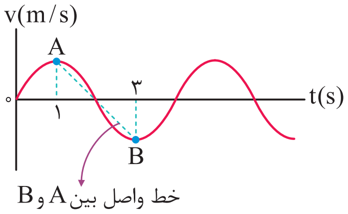


$$\text{شیب } C>\text{شیب } A>\text{شیب } B=0\Rightarrow a_C>a_A>a_B$$

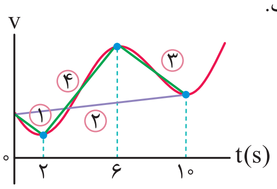
۲) با توجه به ثابت بودن شتاب، رابطهٔ فوق در هر بازهٔ زمانی دلخواه نیز در مورد شتاب متوسط سه متحرک برقرار است و در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$(a_{av})_C>(a_{av})_A>(a_{av})_B=0$$

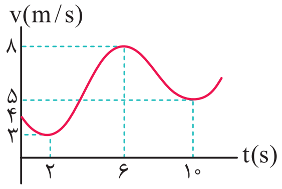
۱۰۴ **۴** شیب خط واصل بین دو نقطه از منحنی سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک می‌باشد. بین گزینه‌های داده شده، تنها در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3s$ شیب خط واصل بین دو نقطه منفی بوده و شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.



۱۰۵ **۴** روش اول: شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی است. با توجه به نمودار زیر، اندازهٔ شیب خط (۴) بیش‌تر از سه خط دیگر است، بنابراین اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $2s \le t \le 6s$ بیش‌تر از سایر گزینه‌ها است.



روش دوم: می‌توانستیم با قرار دادن عددهای مناسب روی نمودار و استفاده از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ هم شتاب متوسط را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنیم.



صفر تا ۲s: $a_{av} = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}\frac{m}{s^2}$

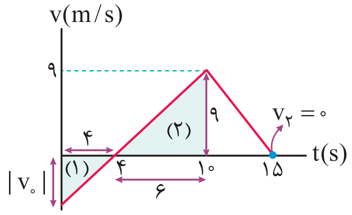
صفر تا ۱۰s: $a_{av} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10}\frac{m}{s^2}$

۶s تا ۱۰s: $a_{av} = \frac{5-8}{4} = \frac{-3}{4}\frac{m}{s^2}$

۲s تا ۶s: $a_{av} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}\frac{m}{s^2}$

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی $2s < t < 6s$، اندازهٔ شتاب متوسط از سایر گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

۱۰۶ **۱** برای محاسبهٔ اندازهٔ شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان، از رابطهٔ $|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ استفاده می‌کنیم. به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث‌ها، سرعت در لحظهٔ $t = 0$ را به‌دست آوریم:

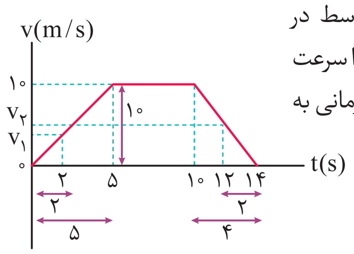


تشابه مثلث‌های (۱) و (۲): $\frac{4}{6} = \frac{|v_0|}{9} \Rightarrow |v_0| = 6\,m/s$

همان‌طور که از روی نمودار مشخص است، v_0 عددی منفی است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 = -6\,m/s \\ t_2 = 15s \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{0-(-6)}{15-0} = 0/4\,m/s^2$$

۱۰۷ **۲** برای محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 12s$، ابتدا سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی به کمک تشابه به‌دست می‌آوریم:



$t_1 = 2s \Rightarrow \frac{10}{v_1} = \frac{5}{2} \Rightarrow v_1 = 4\,m/s$ (تشابه در سمت چپ شکل)

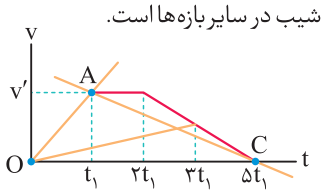
$t_2 = 12s \Rightarrow \frac{10}{v_2} = \frac{14-10}{14-12}$

$\Rightarrow v_2 = 5\,m/s$ (تشابه در سمت راست شکل)

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5-4}{12-2} = \frac{1}{10}\,m/s^2$$

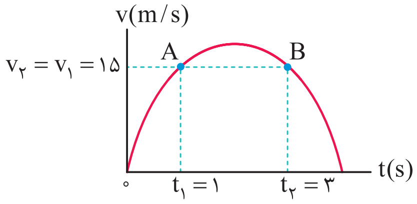
۱۰۸ **۱** می‌دانیم که در نمودار سرعت - زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار، شتاب متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی را می‌دهد. بنابراین شتاب متوسط در بازه‌ای بیشتر است که شیب خط واصل بین نقطهٔ ابتدا و انتهای آن بازه بیشتر باشد.

با توجه به شکل زیر در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، اندازهٔ شتاب متوسط بزرگ‌تر از سایر بازه‌هاست، زیرا شیب خط OA بزرگ‌تر از شیب در سایر بازه‌ها است.



$$\begin{cases} \text{شیب خط OA} = a_{av_{OA}} = \frac{v'}{t_1} \\ \text{شیب خط AC} = a_{av_{AC}} = -\frac{v'}{4t_1} \end{cases} \Rightarrow |a_{av_{OA}}| > |a_{av_{AC}}|$$

۱۰۹ **۱** با توجه به نمودار سرعت - زمان داده‌شده، سرعت متحرک در دو لحظهٔ t_1 و t_2 یکسان بوده و با توجه به تعریف شتاب متوسط $(|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t})$، شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی صفر است.



$$|\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

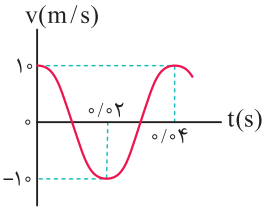
$$\xrightarrow{v_2 = v_1 = 15\,m/s} |\vec{a}_{av}| = \frac{15-15}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1} = 0$$

دقت

می‌دانیم شیب خط AB نیز برابر شتاب متوسط متحرک از t_1 تا t_2 است، با توجه به صفربودن شیب این خط، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازهٔ زمانی صفر است.

۱۱۰ **۴** **خواستهٔ اول:** محاسبهٔ شتاب متوسط:

با توجه به نمودار مقابل، شتاب متوسط در بازهٔ (۰ تا ۰/۰۲s) برابر است با:



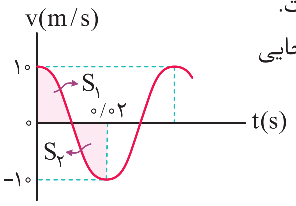
$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow v_0 = 10\,m/s \\ t_1 = 0/02\,s \rightarrow v_1 = -10\,m/s \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{-10 - 10}{0/02 - 0} = -10^3\ m/s^2$$

خواستهٔ دوم: محاسبهٔ سرعت متوسط:

برای محاسبهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی داده‌شده، ابتدا جابه‌جایی متحرک را به کمک مساحت زیرنمودار سرعت - زمان به دست می‌آوریم. در نمودار کسینوسی داده‌شده، مساحت S_1 با مساحت S_2 با هم برابر است. بنابراین جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا ۰/۰۲s برابر صفر است.

(مساحت زیرنمودار سرعت-زمان، برابر جابه‌جایی متحرک است.)



جابه‌جایی: $\Delta x = |S_1| - |S_2| \xrightarrow{|S_1| = |S_2|} \Delta x = 0$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

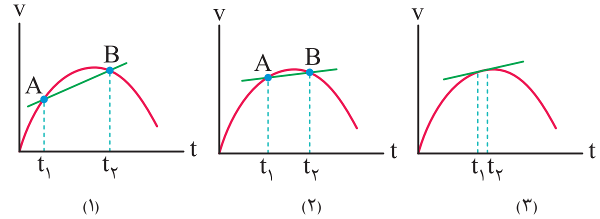
۱۱۱ **۲** شیب خط واصل بین صفر تا t_1، بیشتر از بازه‌های زمانی دیگر است و این یعنی شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی بیشتر است. از سوی دیگر در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3، تندی متحرک در تمامی لحظات بیشتر از بازه‌های زمانی دیگر است، بنابراین الزاماً تندی متوسط هم در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 بیشتر از بازه‌های زمانی دیگر است.

نکته

تندی متوسط در یک بازهٔ زمانی، همواره عددی بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین تندی لحظه‌ای متحرک در طول آن بازهٔ زمانی است.

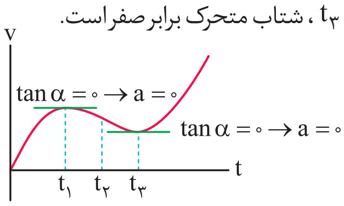
۱۱۲ **۴** با توجه به مطالب ذکر شده در درسنامه، شیب خط موردنظر شتاب لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

به شکل‌های زیر توجه کنید:



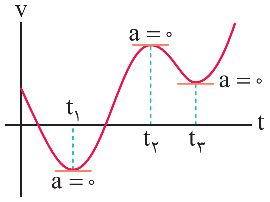
همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با کوچک‌تر شدن بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، شیب پاره‌خط AB به سمت مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت - زمان در هرلحظه، بیانگر شتاب لحظه‌ای در آن لحظه است.

۱۱۳ **۲** در زمان‌هایی که شیب مماس رسم‌شده بر نمودار سرعت - زمان صفر باشد (از جمله نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار)، شتاب لحظه‌ای متحرک برابر صفر است. بنابراین در لحظات t_1 و t_3، شتاب متحرک برابر صفر است.

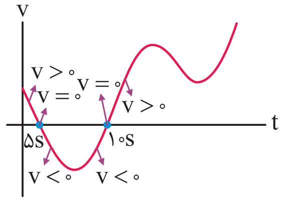


۱۱۴ **۴** با توجه به تمرین (۲۰) در درسنامه، گزینهٔ (۴) درست است.

۱۱۵ **۲** همان‌طور که می‌دانیم، در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک صفرشده و تغییرجهت می‌دهد. با توجه به این موضوع در نمودار داده‌شده، شتاب متحرک در لحظات t_1، t_2 و t_3 تغییرجهت می‌دهد.



در لحظات t_1، t_2 و t_3 شتاب متحرک تغییر جهت می‌دهد.

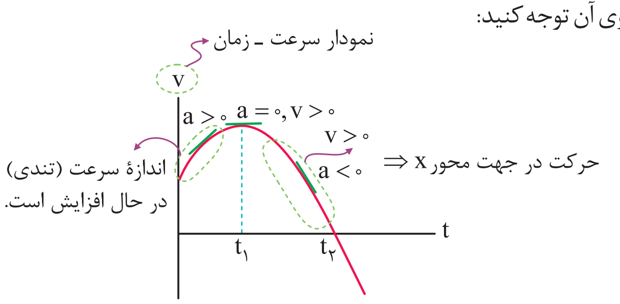


در لحظات $t = 5s$ و $t = 10s$ سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد.

هم‌چنین می‌دانیم در نقاطی که سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (نمودار سرعت - زمان محور زمان را قطع کرده و تغییرعلامت می‌دهد) متحرک تغییر جهت می‌دهد. بنابراین متحرک در لحظات ۵s و ۱۰s تغییر جهت داده است.

۱۱۶ **۴** با توجه به تمرین (۲۱) در درسنامه، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۱۷ **۱** ابتدا به نمودار سرعت - زمان داده شده و شیب مماس‌های ترسیمی بر روی آن توجه کنید:



با توجه به نمودار، به بررسی موارد مطرح شده می‌پردازیم:

بررسی موارد

الف) نادرست است. در لحظهٔ t_1 جهت شتاب متحرک تغییر می‌کند اما جهت سرعت آن تغییر نمی‌کند و در جهت محور x است.

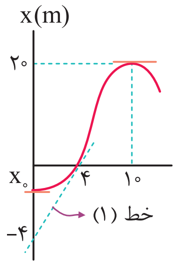
ب) درست است. در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 سرعت مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

پ) نادرست است. با توجه به این‌که نمودار از نوع سرعت - زمان است، در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، تندی متحرک در حال افزایش است، زیرا نمودار از محور افقی دور می‌شود.

ت) نادرست است. در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$، شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان مثبت بوده و در نتیجه بردار شتاب متحرک در جهت محور x است و در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان منفی بوده و در نتیجه بردار شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است.

۱۱۸ **۴** با توجه به تمرین (۲۲) در درسنامه، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۱۹ **۴** با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی بر نمودار، سرعت در لحظات $t_۱=۰$، $t_۲=۴s$ و $t_۳=۱۰s$ عبارت است از:



$$\Rightarrow \begin{cases} v_۱=۰ \\ v_۲=\text{(۱) شیب خط}=\frac{۴}{۴}=۱m/s \\ v_۳=۰ \end{cases}$$

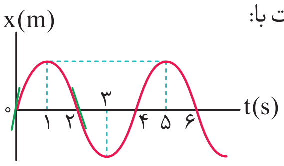
شتاب متوسط در چهار ثانیهٔ اول: $a_{av_۱}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۱-۰}{۴-۰}$

$=۰/۲۵m/s^۲=۲۵cm/s^۲$

شتاب متوسط در ده ثانیهٔ اول: $a_{av_۲}=\frac{v_۳-v_۱}{t_۳-t_۱}=\frac{۰-۰}{۱۰-۰}=۰$

با توجه به این موضوع، شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ اول حرکت، $۲۵cm/s^۲$ بیشتر از ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت است.

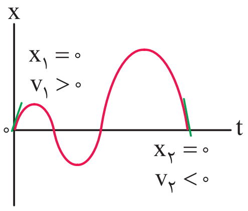
۱۲۰ **۲** مطابق نمودار مکان - زمان زیر، در لحظهٔ $t=۰$، شیب خط مماس بر نمودار، مثبت و در لحظهٔ $t=۲s$، شیب خط مماس بر نمودار، منفی است، بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۰$، مثبت و در لحظهٔ $t=۲s$، منفی است، بنابراین شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ اول برابر است با:



شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ اول: $a_{av}=\frac{\overset{\text{منفی}}{\boxed{v_۲}}-\overset{\text{مثبت}}{\boxed{v_۱}}}{\underset{\text{مثبت}}{\boxed{\Delta t}}}\Rightarrow a_{av}<۰$

بنابراین شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ اول منفی بوده و در نتیجه بردار آن در خلاف جهت محور x است. با روشی مشابه می‌توانید نشان دهید که شتاب متوسط در سایر گزینه‌ها منفی نیست.

۱۲۱ **۲** با توجه به مکان و سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظات $t_۱=۰$ و $t_۲=۲۰s$، در مورد سرعت متوسط و شتاب متوسط متحرک می‌توان نوشت:

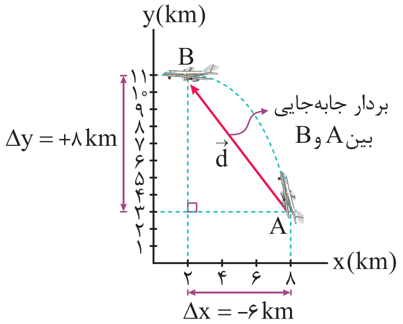


$$v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=۰$$

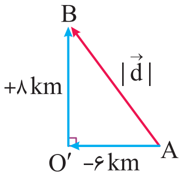
$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}<۰$$

بنابراین در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت، سرعت متوسط برابر صفر و شتاب متوسط منفی (در خلاف جهت محور x) است.

۱۲۲ **۱** می‌دانیم که جهت بردار جابه‌جایی، هم‌جهت با برداری است که از نقطهٔ ابتدای حرکت (A) به نقطهٔ انتهای حرکت (B) متصل می‌شود. در این سؤال برای محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی با کمک قضیهٔ فیثاغورث داریم:

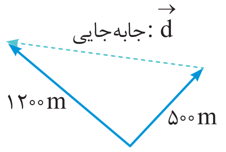


$\Rightarrow$



$$\Rightarrow |\vec d|=\sqrt{(-۶)^۲+۸^۲}=۱۰km$$

۱۲۳ **۲** **گام اول:** برداری که نقطهٔ A را به B وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی است. با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث، جابه‌جایی برابر است با:



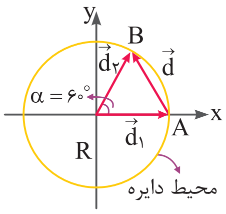
$$d=\sqrt{۵۰۰^۲+۱۲۰۰^۲}=۱۳۰۰m$$

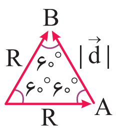
گام دوم: با تقسیم بزرگی جابه‌جایی به زمان، بزرگی سرعت متوسط به‌دست می‌آید:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۱۳۰۰}{۳/۲۵}=۴۰۰m/s$$

۱۲۴ **۱** فرض کنید که متحرک بر روی محیط دایره ۶۰ درجه چرخیده و از A به B منتقل می‌شود. بردار جابه‌جایی متحرک در این حالت برابر تفاضل بردارهای مکان است.

بردار جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ ابتدای حرکت را به نقطهٔ انتهای آن وصل می‌کند. مثلث روبه‌رو یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی در این حالت برابر R است (چرا؟).





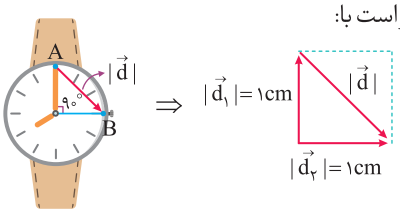
$|\vec d|=R$

از سوی دیگر، متحرک ۶۰ درجه بر روی محیط دایره چرخیده و $\frac{۱}{۶}$ آن را پیموده است (۶۰ درجه، $\frac{۱}{۶}$ برابر ۳۶۰ درجه است). با توجه به این موضوع، مسافت طی‌شده توسط آن برابر است با:

$$\text{مسافت طی‌شده}=\frac{۱}{۶}\times\overset{\text{محیط دایره}}{\boxed{۲\pi R}}=\frac{\pi}{۳}R$$

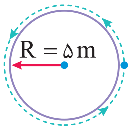
$$\Rightarrow \frac{\text{اندازهٔ جابه‌جایی}}{\text{مسافت طی‌شده}}=\frac{R}{\frac{\pi}{۳}R}=\frac{۳}{\pi}$$

۱۲۵ ۱ در مدت سه ساعت از ساعت ۱۲ تا ۳، عقربهٔ دقیقه‌شمار سه دور کامل می‌زند و به سر جای اولیهٔ خود برمی‌گردد، پس جابه‌جایی آن صفر است. عقربهٔ ساعت‌شمار، در هر ۱۲ ساعت یک دور می‌چرخد. بنابراین در طول ۳ ساعت به اندازهٔ ۹۰ درجه ($\frac{1}{4}$ دور) چرخیده و از نقطهٔ A به B می‌رود. بنابراین با توجه به رابطهٔ فیثاغورث، مقدار جابه‌جایی برابر است با:



$|\vec{d}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ cm$

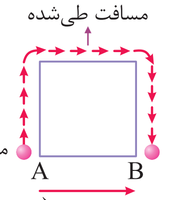
۱۲۶ ۲ متحرک پس از ۱۰ دقیقه، ۱۰ بار به‌طور کامل بر روی دایره چرخیده و مجدداً به نقطهٔ شروع حرکت می‌رسد، بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در این مدت برابر صفر است. در این حالت مسافت طی‌شده، ۱۰ برابر محیط دایره است.



مسافت طی‌شده: $l = 10\times(2\pi R) \simeq 10\times 2\times 3\times 5 = 300m$

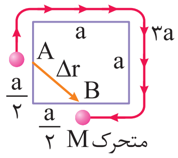
۱۲۷ ۳ متحرک در طول حرکت خود توقف ندارد و در صورتی‌که مسافت طی‌شده توسط متحرک $3a$ باشد، ثابت می‌شود:

۱ **بیشترین جابه‌جایی** متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از رأس مربع شروع به حرکت کند و سپس مسافتی برابر $3a$ را بپیماید، در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر a است، یعنی برابر طول برداری که مستقیماً نقطهٔ شروع را به نقطهٔ پایان متصل می‌کند.



$|\vec{d}| = AB = a \quad |\vec{d}|_{max} = a$

۲ **کم‌ترین جابه‌جایی** متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از وسط یکی از اضلاع مربع شروع به حرکت کند. در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ است.



$|\vec{d}|_{min} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

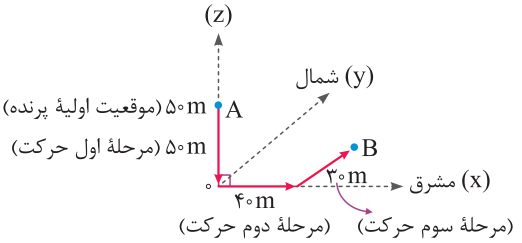
نگاه دوم: $|\vec{d}|_{min} = $ قطر مربعی فرضی با ضلع $\frac{a}{2} = (\frac{a}{2})\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

دقت

در حل این مسئله شما می‌توانید حالات دیگری به غیر از موارد ۱ و ۲ را نیز بررسی کنید، در این مسئله تحلیل جابه‌جایی‌های مختلف متحرک مدنظر طراح بوده است. به سادگی می‌توان نشان داد که در تمام حالت‌ها، جابه‌جایی از a کوچک‌تر (یا مساوی) و از $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ بزرگ‌تر (یا مساوی) می‌باشد.

۱۲۸ ۱ با توجه به تمرین (۲۴) در درسنامه، گزینهٔ (۱) درست است.

۱۲۹ ۲ برای پاسخ به این تست مفهومی، شکل زیر را در نظر بگیرید. با توجه به حرکت‌های اشاره شده برای پرنده در صورت سؤال، موقعیت آن از A به B رسیده است:



موقعیت اولیه در A: $(x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = +50)$

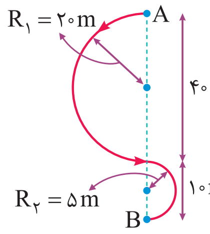
موقعیت ثانویه در B: $(x_2 = +40, y_2 = +30, z_2 = 0)$

بردار جابه‌جایی برابر طول پاره‌خط AB است و داریم:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{40^2+30^2+(-50)^2} = 50\sqrt{2}m$$

۱۳۰ ۱ طول پاره‌خطی که به‌صورت مستقیم A را به B وصل می‌کند، برابر با جابه‌جایی دوچرخه‌سوار است و مجموع طول دو نیم‌دایره برابر با مسافت طی شده می‌باشد، بنابراین:



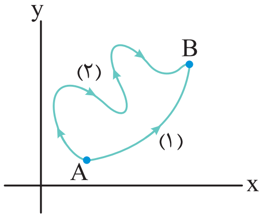
اندازهٔ جابه‌جایی: $d = 40+10 = 50m$

مسافت: $l = \pi R_1 + \pi R_2 \Rightarrow l = 25\pi(m)$

بنابراین نسبت اندازهٔ سرعت متوسط به تندی متوسط برابر است با:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{\frac{d}{\Delta t}}{\frac{l}{\Delta t}} = \frac{d}{l} = \frac{50}{25\pi} = \frac{2}{\pi}$$

۱۳۱ ۲ همان‌طور که می‌دانید، چون زمان هر دو حرکت یکسان است، اندازهٔ سرعت متوسط به اندازهٔ جابه‌جایی جسم بستگی دارد. چون هر دو مسیر نقطهٔ شروع و پایان یکسانی دارند، اندازهٔ جابه‌جایی و اندازهٔ سرعت متوسط آن‌ها یکسان است.



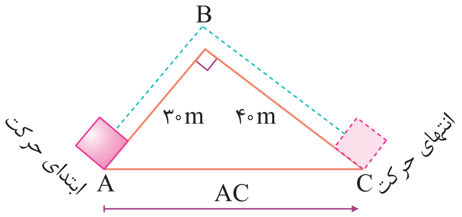
$(v_{av})_1 = (v_{av})_2$

از طرف دیگر در یک بازهٔ زمانی برابر، تندی متوسط به مسافت طی‌شده بستگی دارد. چون در یک مدت زمان یکسان، مسافت طی‌شده در مسیر (۲) بیشتر از مسافت طی‌شده در مسیر (۱) است، پس تندی متوسط در مسیر (۲) بیشتر است.

$(s_{av})_2 > (s_{av})_1$

۱۳۲ ۲ می‌دانیم برای محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی، نقطهٔ ابتدای حرکت را به نقطهٔ انتهای حرکت متصل کرده و طول آن پاره‌خط را اندازه می‌گیریم.

با توجه به شکل زیر، اندازهٔ جابه‌جایی برابر AC بوده و مقدار آن با کمک قضیهٔ فیثاغورث برابر است با:



$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} \Rightarrow AC^{۲} = ۳۰^{۲} + ۴۰^{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{اعداد فیثاغورثی هستند.}]{۳۰,۴۰\to ۵۰} AC = ۵۰m$$

بنابراین می‌توان نوشت:

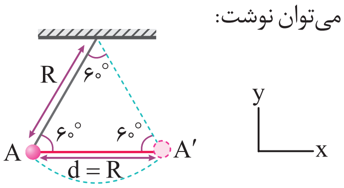
$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان جابه‌جایی}} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{۵۰}{۲۰} = ۲/۵\,m/s$$

در ادامه برای به‌دست آوردن تندی متوسط متحرک، باید مسافت طی‌شده توسط متحرک را به دست آورده و بر زمان حرکت تقسیم کنیم. بدین ترتیب داریم:

مسافت طی‌شده: $l = AB + BC = ۳۰ + ۴۰ = ۷۰m$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۷۰}{۲۰} = ۳/۵\,m/s$$

۱۳۳ | ۱ این گلوله وقتی از A تا A′ حرکت می‌کند، مسافتی به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره را طی می‌کند. از طرفی با توجه به هندسه، طول پاره‌خط واصل AA′ یعنی جابه‌جایی برابر R است، بنابراین می‌توان نوشت:

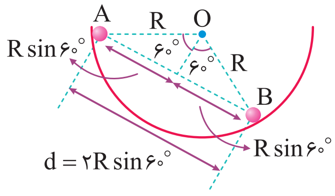


$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{d}{\cancel{\Delta t}}}{\frac{l}{\cancel{\Delta t}}} = \frac{d}{l} = \frac{R}{\frac{۲\pi R}{۶}} = \frac{۳}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{|v_{av}|}{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۳}{\pi} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{۱}{۲} = ۰/۵\,\frac{m}{s}$$

از طرفی باید دقت شود که جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت محور x است، بنابراین $\vec{v}_{av} = ۰/۵\,\vec{i}\,(\frac{m}{s})$ می‌باشد.

۱۳۴ | ۴ این گلوله وقتی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت می‌کند، مسافتی به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره را طی می‌کند. از طرفی با توجه به شکل زیر، طول پاره‌خط واصل AB یعنی اندازهٔ جابه‌جایی برابر $d = ۲R\sin ۶۰^\circ$ است.



$$l = \frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times \text{محیط دایره} = \frac{۱}{۳} \times ۲\pi R = \frac{۲}{۳}\pi R$$

$$d = ۲R\sin ۶۰^\circ = \sqrt{۳}R$$

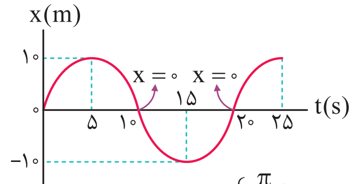
بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{d}{\Delta t}}{\frac{l}{\Delta t}} = \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{۳}R}{\frac{۲}{۳}\pi R} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}$$

۱۳۵ | ۳ همان‌طور که می‌دانید، اگر متحرکی بر روی یک خط راست، بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت آن یکسان بوده و در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان می‌شود.

در این سؤال اگر به مسیرهای رسم‌شده دقت کنید، متوجه می‌شوید که تنها در نمودار گزینهٔ (۳)، متحرک بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و ممکن است در آن تندی متوسط با سرعت متوسط برابر شود.

۱۳۶ | ۳ معادلهٔ مکان داده‌شده به صورت سینوسی است. برای مشخص کردن جهت بردار مکان در این سؤال، مناسب‌ترین روش رسم نمودار مکان - زمان است. برای این سؤال، ابتدا محل‌های برخورد نمودار با محور t را به دست می‌آوریم:



$$x = ۱۰\sin\frac{\pi}{۱۰}t \xrightarrow{x=۰} \begin{cases} \frac{\pi}{۱۰}t = \pi \Rightarrow t = ۱۰s \\ \frac{\pi}{۱۰}t = ۲\pi \Rightarrow t = ۲۰s \\ \vdots \end{cases}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید در بازهٔ زمانی $۱۰s < t < ۲۰s$ (یعنی ۵ ثانیهٔ سوم و ۵ ثانیهٔ چهارم حرکت)، متحرک در مکان‌های منفی قرار داشته و بردار مکان جسم در خلاف جهت محور x بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۳۷ | ۴ برای یافتن لحظاتی که بردار مکان تغییر جهت می‌دهد، کافی است معادلهٔ مکان - زمان مربوط به متحرک را تعیین علامت کنیم:

معادلهٔ مکان: $x = t^{۲} - ۲t + ۱ = (t-۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow t = ۱s$ ریشهٔ مضاعف

t	۰		۱		∞
x		+	۰	+	

ملاحظه می‌کنید مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۱s$ صفر می‌شود ولی تغییر علامت نمی‌دهد و متحرک همواره در سمت مثبت محور x قرار دارد. بنابراین بردار مکان این متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر جهت نمی‌دهد.

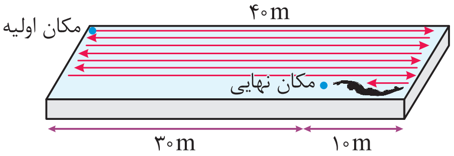
تذکر

بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از یک سمت مبدأ مختصات روی محور x، خود را به سمت دیگر آن برساند.

۱۳۸ | ۲ ابتدا عدد ۲۹۰ را به‌صورت زیر می‌نویسیم تا مشخص شود شناگر چند بار طول استخر را طی کرده است:

$$۲۹۰ = ۲۸۰ + ۱۰ = ۷(۴۰) + ۱۰$$

بنابراین شناگر هفت بار طول استخر را طی کرده و ۱۰m دیگر نیز شنا می‌کند. به شکل زیر دقت کنید:



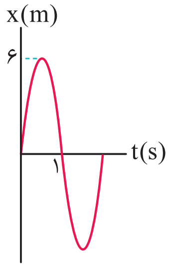
همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، در این حالت فاصلهٔ مکان نهایی شناگر تا مکان اولیهٔ آن برابر $۳۰m$ می‌شود. بنابراین جابه‌جایی متحرک برابر $۳۰m = ۰/۰۳km$ بوده و اندازهٔ سرعت متوسط شناگر در مدت زمان ۰/۵ ساعت برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{۰/۰۳\,km}{۰/۵\,h} = \frac{۳}{۵۰}km/h = ۰/۰۶\,km/h$$

۱۳۹ ۳ بهترین روش برای حل این‌گونه مسائل، رسم نمودار مکان - زمان حرکت است:

همان‌طور که در نمودار رسم شده مشاهده می‌کنید، در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰$ تا $t_2 = ۱s$ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک برابر صفر و اندازهٔ مسافت طی‌شده توسط آن برابر $۱۲m$ می‌باشد (چرا؟)، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} t_1 = ۰ \Rightarrow x_1 = ۶\sin(۰) = ۰ \\ t_2 = ۱s \Rightarrow x_2 = ۶\sin(\pi) = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$



$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = ۰ \quad \text{و} \quad s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۲}{۱} = ۱۲m/s$$

۱۴۰ ۱ ابتدا به جدول ارائه شده در صورت سؤال توجه کنید:

	مکان آغازین (m)	مکان پایانی (m)	تندی متوسط $(\frac{m}{s})$
متحرک A	$-۲\vec{i}$	$-۸\vec{i}$	۱/۵
متحرک B	$-۲\vec{i}$	$+۴\vec{i}$	۲

با توجه به این جدول داریم:

$$(\vec{v}_{av})_A = \frac{\vec{d}_A}{\Delta t_A} = \frac{-۸\vec{i} - (-۲\vec{i})}{۴} = -۱/۵\,\vec{i}$$

$$\xrightarrow[(s_{av})_A = ۱/۵m/s]{\text{طبق صورت سؤال}} |(\vec{v}_{av})_A| = (s_{av})_A = ۱/۵m/s$$

$$(\vec{v}_{av})_B = \frac{\vec{d}_B}{\Delta t_B} = \frac{+۴\vec{i} - (-۲\vec{i})}{۴} = ۱/۵\,\vec{i}$$

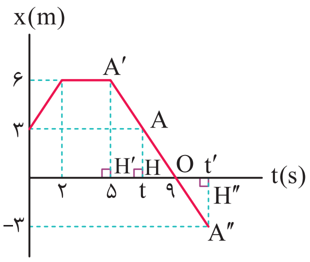
$$\xrightarrow[(s_{av})_B = ۲m/s]{\text{طبق صورت سؤال}} |(\vec{v}_{av})_B| < (s_{av})_A = ۲m/s$$

از طرفی می‌دانیم برابر بودن تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط، نشان‌دهندهٔ آن است که متحرک در طول حرکت، تغییر جهت نمی‌دهد. این موضوع یعنی متحرک A در طول حرکتش، تغییر جهت نمی‌دهد و متحرک B در طول حرکتش، تغییر جهت می‌دهد.

۱۴۱ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا باید زمانی را که متحرک برای دومین بار به مکان $x = ۳m$ می‌رسد، به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$\overset{\Delta}{OAH} \sim \overset{\Delta}{OA'H'} \Rightarrow \frac{AH}{۹-t} = \frac{A'H'}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۹-t} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow t = ۷s$$

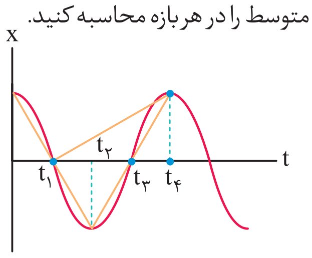
در ادامه با توجه به این‌که دو مثلث OAH و OA″H″ یکسان هستند، مقدار t' برابر $۱۱s$ به‌دست می‌آید (چرا؟). در پایان می‌توانیم بگوییم در بازه‌های زمانی (۰ تا $۲s$) و ($۷s$ تا $۱۱s$) متحرک در حال دورشدن از مکان اولیهٔ خود می‌باشد. بنابراین در مجموع متحرک به مدت ۶ ثانیه در حال دور شدن از مکان اولیه‌اش می‌باشد.



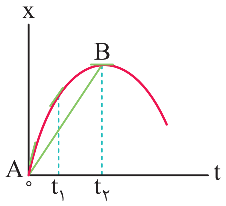
۱۴۲ ۴ همان‌طور که می‌دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، معرف سرعت متوسط در بازهٔ زمانی موردنظر است. ابتدا مطابق شکل زیر در بازه‌های زمانی موردنظر خط واصل را رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل می‌بینید، اندازهٔ شیب خط مماس در سه بازهٔ (۰ تا t_1)، (صفر تا t_2) و (t_2 تا t_4) یکسان است. اما در بازهٔ (t_1 تا t_4) شیب خط مماس و در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط متفاوت است.

برای اطمینان بیشتر می‌توانید اندازهٔ سرعت متوسط را در هر بازه محاسبه کنید.



۱۴۳ ۳ مطابق شکل، بین لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظهٔ تغییر جهت دادن متحرک (یعنی t_2)، پاره‌خطی رسم می‌کنیم. شیب این پاره‌خط بیانگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ تغییر جهت است. علاوه بر این در لحظات صفر، t_1 و t_2 نیز مماس‌هایی بر نمودار رسم می‌کنیم. شیب این مماس‌ها معرف تندی متحرک در لحظات مختلف است. همان‌طور که می‌بینید، در شروع حرکت شیب خط مماس بیشتر از شیب پاره‌خط AB است و با گذشت زمان شیب خط مماس برابر شیب خط AB شده و در نزدیکی t_2، شیب خط مماس کم‌تر از شیب خط AB می‌شود. بنابراین تندی حرکت در ابتدا بیشتر از v_{av} بوده، سپس برابر v_{av} شده و در نهایت کم‌تر از v_{av} می‌شود.

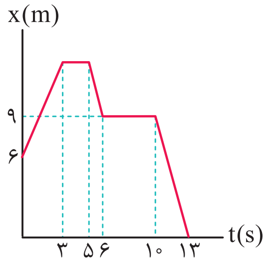


۱۴۴ ۲ به موارد زیر توجه کنید:

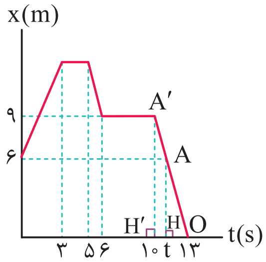
① طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$، تندی متوسط به مسافت طی‌شده توسط متحرک بستگی دارد. در هر بازهٔ زمانی که متحرک توقف کرده باشد، مسافت طی‌شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت نیز صفر است.

② در نمودار رسم‌شده در دو بازهٔ زمانی $t_1 = ۳s$ تا $t_2 = ۵s$ و $t_3 = ۶s$ تا $t_4 = ۱۰s$ متحرک ایستاده است.

۳ چون در صورت سؤال طول بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی موردنظر است، بنابراین بازهٔ موردنظر $t_3=6s$ تا $t_4=10s$ می‌باشد که به مدت $4s$ متحرک توقف داشته است.



۱۴۵ ۳ برای صفر شدن سرعت متوسط، باید جابه‌جایی متحرک صفر شود. با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی که سرعت متوسط صفر می‌شود، مربوط به لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای است که متحرک دوباره به نقطهٔ $x=6m$ می‌رسد. برای به‌دست آوردن لحظهٔ موردنظر، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

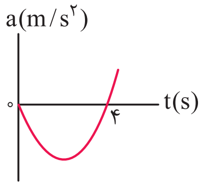


$$\overset{\Delta}{OAH} \sim \overset{\Delta}{OA'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\frac{OH}{OH'} \Rightarrow \frac{6}{9}=\frac{13-t}{3} \Rightarrow t=11s$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی که اندازهٔ سرعت متوسط صفر می‌شود، برابر ۱۱ ثانیه است و با توجه به پاسخ سؤال قبل، بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی که تندی متوسط حرکت صفر می‌شود برابر ۴ ثانیه است و نسبت آن‌ها $\frac{11}{4}$ می‌شود.

۱۴۶ ۱ عبارت (ج) هرگز نمی‌تواند رخ دهد. طبق رابطهٔ $\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$، اگر سرعت جسمی ثابت باشد، تغییرات آن صفر بوده و شتاب حرکت صفر می‌شود. از سوی دیگر سایر عبارت‌های مطرح‌شده می‌توانند رخ دهند. برای درک بهتر سعی کنید برای هریک مثالی را پیدا کنید.

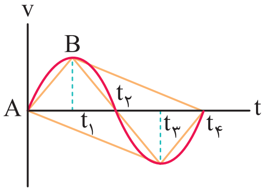
۱۴۷ ۲ ابتدا ریشه‌های سهمی موردنظر را به‌دست می‌آوریم و سپس نمودار شتاب - زمان را رسم می‌کنیم:



$$a=t^2-4t=0 \Rightarrow t(t-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=4s \end{cases}$$

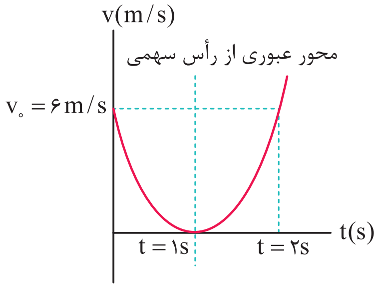
دقت کنید که سهمی موردنظر از مبدأ شروع می‌شود و با توجه به این‌که ضریب t^2 مثبت است، سهمی رو به بالا می‌باشد. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌کنید در لحظهٔ $t=4s$، اندازهٔ شتاب حرکت صفر شده و علامت شتاب تغییر می‌کند، بنابراین در این لحظه شتاب تغییر جهت می‌دهد. از طرفی با توجه به رابطهٔ $F=ma$، می‌دانیم که نیروی وارد بر متحرک همواره هم جهت با شتاب بوده و در نتیجه نیروی وارد بر متحرک نیز در پایان ثانیهٔ چهارم تغییر جهت می‌دهد.

۱۴۸ ۲ همان‌طور که می‌دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان بیانگر شتاب متوسط در بازهٔ زمانی موردنظر است. ابتدا در هریک از بازه‌های زمانی موردنظر، خط واصل را رسم می‌کنیم (همهٔ خطوط را در یک شکل ترسیم کرده‌ایم).



درصورت سؤال ذکر شده است که در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 شتاب متحرک برابر $\vec{a}$ است و ما به دنبال بازه‌ای می‌گردیم که شتاب متحرک $-\vec{a}$ باشد. بنابراین باید اندازهٔ شیب خط موردنظر برابر اندازهٔ شیب خط AB ولی با علامت منفی باشد. اگر به نمودار دقت کنید، متوجه می‌شوید که تنها در بازهٔ t_1 تا t_3 این اتفاق رخ می‌دهد.

۱۴۹ ۲ همان‌طور که می‌دانید، سهمی نسبت به محور عبوری از رأس آن، دارای تقارن است. در دو ثانیهٔ اول حرکت که یک بازهٔ متقارن نسبت به محور عبوری از رأس سهمی است، سرعت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی برابر بوده و در نتیجه شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی برابر صفر است.

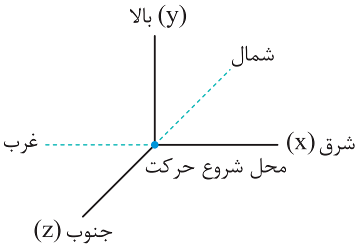


$$\begin{cases} t_1=0 \to v_1=6\frac{m}{s} \\ t_2=2s \to v_2=6\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=0$$

دقت

در این سؤال، به طور کلی در بازهٔ زمانی t_1 و t_2، به شرطی که $t=1s$ در وسط آن بازه قرار گیرد $\left(\frac{t_1+t_2}{2}=1s\right)$، شتاب متوسط برابر صفر می‌شود. به عنوان مثال از $t_1=0/75s$ تا $t_2=1/25s$ نیز شتاب متوسط برابر صفر است.

۱۵۰ ۱ اگر متحرک از نقطهٔ (x_A, y_A, z_A) به نقطهٔ (x_B, y_B, z_B) منتقل شود، جابه‌جایی آن برابر $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ است. فرض کنید این متحرک از مبدأ $(0,0,0)$ شروع به حرکت کرده است. اگر این متحرک ۱۰ متر از سطح زمین به سمت بالا حرکت کند مؤلفهٔ y از صفر به $10m$ تبدیل می‌شود، در ادامه اگر $6m$ به سمت شمال برود، مؤلفهٔ z از صفر به $-6m$ و در نهایت اگر ۸ متر به غرب برود مؤلفهٔ x از صفر به $-8m$ تبدیل می‌شود، بنابراین مختصات B برابر $(-8,10,-6)$ است.

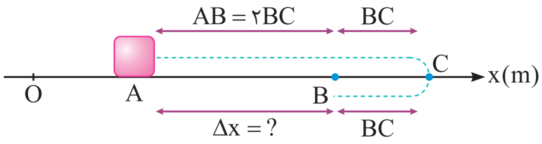


اندازهٔ بردار جابه‌جایی: $AB=\sqrt{(-8)^2+10^2+(-6)^2}=\sqrt{200}$

$\Rightarrow AB=10\sqrt{2}\simeq 10\times 1/4=14m$

اندازهٔ سرعت متوسط: $|\vec{v}_{av}|=\frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}}\Rightarrow|\vec{v}_{av}|=\frac{14}{10}=1/4\,m/s$

۱۵۱ (۱) با توجه به شکل، در مقایسهٔ تندی متوسط و سرعت متوسط متحرک داریم:



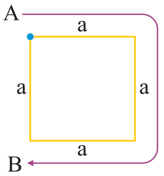
$\begin{cases}\text{مسافت طی‌شده}=\overset{\text{طول رفت}}{\widehat{AC}}+\overset{\text{طول برگشت}}{\widehat{CB}}=3BC+BC=4BC\\ \text{جابه‌جایی متحرک}=AB=2BC\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\text{جابه‌جایی}}=\frac{4BC}{2BC}=2\Rightarrow\frac{\text{تندی متوسط}}{\text{اندازهٔ سرعت متوسط}}=2$

تذکر

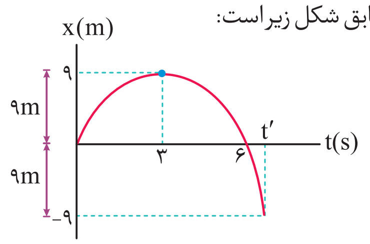
جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ شروع (A) را مستقیماً به نقطهٔ پایان (B) متصل کند، در صورتی که برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده باید طول مسیر رفت و برگشت را با یک‌دیگر جمع کرد.

۱۵۲ (۳) همان‌طور که در پاسخ سؤال (۱۲۷) مشاهده کردید، در این سؤال بیشترین جابه‌جایی زمانی روی می‌دهد که مطابق شکل زیر، متحرک از نقطهٔ A تا B جابه‌جا شده باشد. در این حالت داریم:



$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}}=\frac{|\vec{d}|}{l}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$

۱۵۳ (۲) برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا نمودار $(x-t)$ را برای حرکت رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار می‌توان گفت هنگامی که فاصلهٔ متحرک از مبدأ برابر ۹ متر است، متحرک می‌تواند در ۹ متری سمت چپ $(x=-9m)$ یا راست مبدأ $(x=+9m)$ باشد. بنابراین قدرمطلق مکان متحرک $|x|$ برابر ۹ است، نمودار مکان - زمان این متحرک مطابق شکل زیر است:



همان‌گونه که مشاهده می‌کنید تنها در دو زمان 3s و t' فاصلهٔ متحرک از مبدأ برابر ۹ متر می‌شود (نیازی به محاسبهٔ t' نمی‌باشد).

دقت

نحوهٔ به دست آوردن مختصات A:

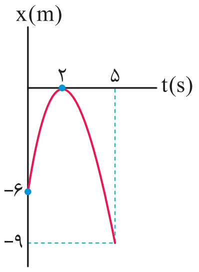
$x=-t^2+6t\xrightarrow{\text{رأس سهمی}=-\frac{b}{2a}}t_A=-\frac{6}{2\times(-1)}=3s$

$x_A=-(3)^2+6\times 3=9m$ (مکانی که متحرک در آن‌جا می‌ایستد)

۱۵۴ (۴) متحرک در لحظهٔ $t=2s$ تغییر جهت می‌دهد و از شروع حرکت تا لحظهٔ $t=2s$ مسافت 6m را طی می‌کند و تندی متوسط آن در این بازهٔ زمانی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$s_{av_1}=\frac{l_1}{\Delta t_1}=\frac{6}{2}=3\,m/s$

در ادامهٔ مسیر، متحرک از نقطهٔ $x=0$ به $x=-9m$ می‌رود و می‌توانیم بگوییم متحرک در کل حرکت، مسافت 15m را در مدت 5s طی کرده‌است $(6+9=15m)$، بنابراین تندی متوسط آن در کل زمان حرکتش برابر است با:



$s_{av_2}=\frac{l_2}{\Delta t_2}=\frac{15}{5}=3\,m/s$

و در نهایت داریم:

$\frac{s_{av_1}}{s_{av_2}}=\frac{3}{3}=1$

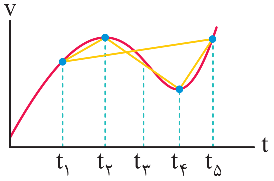
۱۵۵ (۴) مطابق تعریف شتاب متوسط $\left(|\vec{a}_{av}|=\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}\right)$، کافی است سرعت در ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی را داشته باشیم:

معادلهٔ سرعت: $v=0/3\cos(60\pi t+\frac{\pi}{3})$

$\rightarrow\begin{cases}t_1=0\rightarrow v_1=0/3\cos(\frac{\pi}{3})=0/15\,m/s\\ t_2=\frac{1}{60}s\rightarrow v_2=0/3\cos(\pi+\frac{\pi}{3})=-0/15\,m/s\end{cases}$

$|\vec{a}_{av}|=\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\frac{|-0/15-(0/15)|}{\frac{1}{60}}=\frac{0/3}{\frac{1}{60}}=18\,m/s^2$

۱۵۶ (۲) همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، شتاب متوسط در آن بازهٔ زمانی را نشان می‌دهد. در این سؤال شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان از (t_1 تا t_2)، (t_4 تا t_5) و (t_1 تا t_5) مثبت بوده و تنها در بازهٔ زمانی (t_2 تا t_4) منفی است. بنابراین در بازهٔ (t_2 تا t_4)، شتاب متوسط با سایر بازه‌ها هم‌جهت نیست (برای راحت‌تر شدن مقایسه، همهٔ خط های واصل موردنظر، در یک شکل ترسیم شده است).



۱۵۷ (۲) در صورتی‌که یک حرکت در چند مرحله انجام شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر حرکت برابر است با:

$\vec{v}_{av\,\text{کل}}=\frac{\text{جابه‌جایی کل}}{\text{کل زمان انجام جابه‌جایی}}$

$\vec{v}_{av\,\text{کل}}=\frac{d}{\Delta t_1+\Delta t_2}\vec{i}=\frac{-500}{30+20}\vec{i}=-10\vec{i}$ (در SI)