تقدیم به همسر مهربانم
پیام ابراهیم‌نژاد

تقدیم به عزیزترین...
سپهر متولی

مقدمه ناشر

شاید برای شما خیلی‌سبزی‌ها هم اتفاق بیفتد!
این‌که نمودار کسینوس یادت بره!
اتحاد چاق و لاغر یادت بره!
تعریف دو پیشامد ناسازگار *(یعنی پیشامدهایی با هم دعوا دارن!)* یادت بره!
دیگه اوضاع خیلی بحرانی بشه و یادت بره چطوری نقطهٔ بحرانی یه تابع رو پیدا کنی!
...
خیلی وقتا پیش میاد وقتی که واسه کنکور یه فرمولی یه تعریفی یه نکتهٔ کنکوری ... خلاصه یه چیزی یادتون می‌ره دیگه! حالا بیا جمعش کن! باید کلی تو کتابات بگردی تو جزوه‌هات بگردی تا پیداش کنی! تازه از بس ورق زدی کتابارو دستاتم ممکنه پینه بزنه! 😊
نگران نباش! چون تو فرمول‌نامهٔ ریاضیات رو تو جیبت داری!
با این کتاب می‌تونی خیلی راحت همهٔ فرمول‌ها، تعاریف، نمودارها و نکات کنکوری رو سریع مرور کنی!
این کتاب حاصل دسترنج همهٔ دوستان تألیف و تولید خیلی‌سبزه که زحمت زیادی براش کشیدن. دم همتون گرم!

مقدمه مؤلف

اون موقعی که کنکور داشتم و یه کتاب کنکوری می‌خریدم بلافاصله مقدمشو می‌خوندم تا با تفکرات مؤلف آشنا بشم علی‌الخصوص کتابای خیلی‌سبز، اصلاً مقدمه‌های خیلی‌سبز یه چیز دیگه بودن! حالا نوبت خودم شده تا برای خیلی‌سبز مقدمه بنویسم. فرصت زیادی ندارم ولی بگم با این کتابی که دستتونه تو مدت کوتاهی مثلاً چند ساعت، می‌تونین یه مرور خوب و کافی از کل ریاضی کنکورتون داشته باشید... البته کارکرد این کتاب خیلی بیشتر از این حرفاست. قبل از هر آزمون برای دوره‌کردن مطالب یا برای چک‌کردن هر چیزی که فراموش کردید می‌تونید از این کتاب استفاده کنید.

فصل‌های کتاب به صورت موضوعی دسته‌بندی شدن و تمامی کتاب‌های ریاضی پایه، حسابان‌ها، هندسه‌ها، گسسته و آمار و احتمال رو پوشش می‌دن. هر فصل شامل تمامی فرمول‌ها، تعاریف، نمودارها، روابط و نکات کنکوریه. جاهایی هم که نیاز بوده از مثال استفاده کردیم تا مطلب حسابی براتون جا بیفته!

در تألیف این کتاب دوستان زیادی تلاش کردند که قدردان همشون هستیم. تشکر ویژه از:

- دکتر کمیل نصری که فرصت تألیف این کتاب رو به ما دادند.
- احسان حسینیان عزیز مدیر تألیف خوب و خوش ذوق انتشارات.
- کیوان صارمی بابت کمک‌هاش
- و بچه های خوب تولید خیلی‌سبز که زحمت زیادی برای این کتاب کشیدند.

و در پایان ممنون می‌شیم ایرادات کتاب رو باهامون در میون بذارید.

پیام ابراهیم نژاد @payamebrahimnejad **سپهر متولی @mathmots**

بهار ۱۴۰۲

فهرست مطالب

فصل اول	الگو و دنباله	۷
فصل دوم	توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	۱۴
فصل سوم	معادله، نامعادله و تعیین علامت	۱۹
فصل چهارم	هندسه تحلیلی	۲۹
فصل پنجم	قدرمطلق و جزءصحیح	۳۵
فصل ششم	تابع	۴۳
فصل هفتم	توابع نمایی و لگاریتمی	۶۵
فصل هشتم	مثلثات	۷۱
فصل نهم	حد و پیوستگی	۸۲
فصل دهم	مشتق	۱۰۳
فصل یازدهم	کاربرد مشتق	۱۱۳
فصل دوازدهم	مجموعه‌ها	۱۲۵
فصل سیزدهم	منطق ریاضی	۱۳۴

فصل چهاردهم — آشنایی با نظریهٔ اعداد — ۱۴۱

فصل پانزدهم — گراف و مدل‌سازی — ۱۵۰

فصل شانزدهم — ترکیبیات(شمارش) — ۱۶۱

فصل هفدهم — احتمال — ۱۷۰

فصل هجدهم — آمار — ۱۷۷

فصل نوزدهم — ترسیم‌های هندسی و استدلال — ۱۹۴

فصل بیستم — قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن — ۲۰۲

فصل بیست و یکم — چندضلعی‌ها — ۲۱۱

فصل بیست و دوم — تجسم فضایی — ۲۲۵

فصل بیست و سوم — دایره — ۲۳۵

فصل بیست و چهارم — تبدیل‌های هندسی و کاربردها — ۲۴۸

فصل بیست و پنجم — روابط طولی در مثلث — ۲۵۸

فصل بیست و ششم — ماتریس و کاربردها — ۲۶۲

فصل بیست و هفتم — آشنایی با مقاطع مخروطی — ۲۷۴

فصل بیست و هشتم — بردارها — ۲۹۲

فصل ۱

الگو و دنباله

۱ الگو: ساختاری منظم از شکل‌ها یا اعداد که تکرارشونده باشند.

۲ جملهٔ عمومی الگو: رابطه‌ای که ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند.

مثال

$$\underbrace{a_n = 3n - 1}_{\text{جملهٔ عمومی=جملهٔ nام}} \quad ,\ldots, \quad \underbrace{11}_{\substack{\text{جملهٔ چهارم}\\ a_4}} \quad , \quad \underbrace{8}_{\substack{\text{جملهٔ سوم}\\ a_3}} \quad , \quad \underbrace{5}_{\substack{\text{جملهٔ دوم}\\ a_2}} \quad , \quad \underbrace{2}_{\substack{\text{جملهٔ اول}\\ a_1}}$$

نکته به کمک جملهٔ عمومی می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.

الگوهای مهم

۳ الگوی خطی:

جملهٔ عمومی: $t_n = an + b$

نکته اختلاف هر دو جملهٔ متوالی این الگو، برابر عددی ثابت (a) است.

۴ الگوی درجه‌دوم:

جملهٔ عمومی: $t_n = an^2 + bn + c$

نکته اعداد حاصل از اختلاف هر دو جملهٔ متوالی الگوی درجه‌دوم، یک الگوی خطی، تشکیل می‌دهند که اختلاف جملات این الگوی خطی، برابر $2a$ است.

مثال

$t_n = n^2 - 1$

۳ , ۸ , ۱۵ , ۲۴ , ...

+۵ +۷ +۹ , ... → الگوی خطی

+۲ +۲

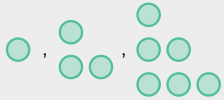
۵ الگوی مربعی:

جملهٔ عمومی: $t_n = n^2$

جملات الگو: ۱,۴,۹,۱۶,...

۶ الگوی مثلثی:

جملهٔ عمومی: $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$



جملات الگو: ۱,۳,۶,۱۰,...

۷ الگوی بازگشتی: الگویی که هر جملهٔ آن از روی جملات قبلی، به دست می‌آید.

مثال

الگوی فیبوناچی: $\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \end{cases}$

جملات الگو: ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,...

۸ دنباله: تعدادی عدد که پشت سر هم نوشته می‌شوند.

۹ دنبالهٔ حسابی: اختلاف هر دو جملهٔ متوالی برابر عددی ثابت است که به این عدد ثابت، قدرنسبت (d) می‌گوییم.

تذکر دنبالهٔ حسابی، یک نوع دنبالهٔ خطی است.

۱۰ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

قدرنسبت: d و جملهٔ اول دنباله: a_1

نکته ضریب n در جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی برابر قدرنسبت (d) است.

مثال

$a_n = 3n + 4 \Rightarrow$ قدرنسبت $= d = 3$

۱۱ تعداد جملات در یک دنبالهٔ حسابی:

$$n = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{قدرنسبت}} + 1$$

مثال

$4, 8, 12, \ldots, 80 \Rightarrow$ تعداد جملات $= \frac{80-4}{4} + 1 = 20$

۱۲ روابط بین جملات دنبالهٔ حسابی:

$$a_n - a_m = (n-m)d \qquad d = a_n - a_{n-1}$$

$$n + m = r + q \Rightarrow a_n + a_m = a_r + a_q$$

نکته اگر به دنبال سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشیم، بهتر است آن‌ها را به صورت $a-d, a, a+d$ بنویسیم.

۱۳ واسطهٔ حسابی:

a ، b و c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی $\xrightarrow{\text{b واسطهٔ حسابی } a \text{ و } c \text{ است.}} b = \frac{a+c}{2}$

مفهوم در سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ وسطی میانگین دو جملهٔ دیگر است.

۱۴ درج واسطهٔ حسابی: قراردادن k عدد بین دو عدد a و b، به طوری که همهٔ اعداد با هم تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند:

$$\text{قدرنسبت} = d = \frac{b-a}{k+1}$$

مثال

$$a = ۱۴, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, ۵۹ \xrightarrow[k=۴]{\text{درج ۴ واسطهٔ حسابی}}$$

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \frac{۵۹-۱۴}{۵} = ۹ \xrightarrow[\text{دنباله}]{\text{جملات}} ۱۴, \textcircled{۲۳}, \textcircled{۳۲}, \textcircled{۴۱}, \textcircled{۵۰}, ۵۹$$

۱۵ دنباله‌های حسابی کاهشی و افزایشی:

نوع دنباله	قدرنسبت
کاهشی	$d < ۰$
افزایشی	$d > ۰$

۱۶ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

تعداد جملات: n و جملهٔ اول: $a_۱$ و جملهٔ آخر: a_n

مثال

$$۲, ۷, ۱۲, \ldots \xrightarrow[d=۵]{a_۱=۲} S_n = \frac{n}{۲}(۲\times ۲ + (n-۱)۵)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(۵n-۱)$$

نکته اگر n عددی فرد و a_k جملهٔ وسط دنبالهٔ حسابی باشد:

$$S_n = na_k$$

۱۷ مجموع‌های معروف:

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\underbrace{۱+۳+۵+\cdots+۲n-۱}_{\text{تا } n}=n^۲$$

$$۲+۴+۶+\cdots+۲n=n(n+۱)$$

۱۸

جملهٔ عمومی از روی مجموع جملات دنباله	جملهٔ اول از روی مجموع جملات دنباله
$a_n=S_n-S_{n-۱}$	$a_۱=S_۱$

مثال

$$S_n=n^۲-۳n \xrightarrow[\text{است؟}]{\text{جملهٔ چندام دنباله}} ۵۲ \quad S_{n-۱}=(n-۱)^۲-۳(n-۱)$$

$$\Rightarrow a_n=S_n-S_{n-۱}=n^۲-۳n-[n^۲-۲n+۱-۳n+۳]=۲n-۴$$

$$\Rightarrow ۵۲=۲n-۴ \Rightarrow n=۲۸$$

۱۹ پیدا کردن جملات مشترک دو دنباله: اولین جملهٔ مشترک دو دنباله، جملهٔ اول دنبالهٔ مشترک و ک.م.م قدرنسبت‌های دو دنباله، قدرنسبت دنبالهٔ مشترک است.

مثال

$$۱,۵,۹,۱۳,\ldots \to d_۱=۴ \qquad ۳,۶,۹,۱۲,\ldots \to d_۲=۳$$

اولین جملهٔ مشترک $=۹$ ، قدرنسبت $=[۳,۴]=۱۲$

جملات دنبالهٔ مشترک: $۹,۲۱,۳۳,\ldots$

۲۰ دنبالهٔ هندسی: هر جمله از ضرب جملهٔ قبلی در عددی ثابت (به‌جز صفر) به دست می‌آید. به عدد ثابت دنبالهٔ هندسی، قدرنسبت (r) می‌گویند.

۲۱ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی:

$$t_n=t_۱\,r^{n-۱}$$

جملهٔ اول: $t_۱$ و قدرنسبت: r

مثال

$$۵ \;,\; ۱۵ \;,\; ۴۵ \;,\; ۱۳۵ \;,\ldots \xrightarrow[r=۳]{t_۱=۵} \text{جملهٔ عمومی} = ۵\times ۳^{n-۱}$$

(×۳ ، ×۳ ، ×۳)

۲۲ روابط بین جملات دنبالهٔ هندسی:

$$\frac{t_n}{t_{n-۱}} = r \qquad \frac{t_n}{t_m} = r^{n-m}$$

$$n+m=p+q \;\Rightarrow\; t_n \times t_m = t_p \times t_q$$

مثال

$$۲,۶,۱۸,۵۴,۱۶۲,\ldots \;\rightarrow\; t_۷ = ?$$

$$۴+۴=۱+۷ \;\Rightarrow\; t_۴ \times t_۴ = t_۱ \times t_۷$$

$$\Rightarrow\; ۵۴^۲ = ۲\times t_۷ \;\Rightarrow\; t_۷ = \frac{۵۴^۲}{۲} = ۱۴۵۸$$

۲۳ واسطهٔ هندسی:

$$a\;,\;b\;,\;c \xrightarrow[\text{هندسی}]{\text{واسطهٔ } b} b^۲ = ac$$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی

مفهوم در سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی، مربع عدد وسطی، برابر با حاصل‌ضرب دو عدد دیگر است.

۲۴ درج واسطهٔ هندسی: قراردادن k عدد بین دو عدد a و b، به طوری که همهٔ اعداد با هم تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند:

$$r^{k+۱} = \frac{b}{a}$$

مثال

$$a = ۲۵۶ \;,\; \bigcirc \;,\; \bigcirc \;,\; \bigcirc \;,\; b = ۱۶ \xrightarrow[k=۳]{\text{درج ۳ واسطهٔ هندسی}}$$

$$r^{۳+۱} = \frac{۱۶}{۲۵۶} \;\Rightarrow\; r^۴ = \frac{۱}{۱۶} = (\frac{۱}{۲})^۴ \;\Rightarrow\; r = \frac{۱}{۲}$$

۲۵ دنباله‌های هندسی افزایشی یا کاهشی: در دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r، اگر جملهٔ اول مثبت باشد، آن‌گاه:

مفهوم	نوع دنباله	قدرنسبت
جملات دنباله در حال افزایش	دنبالهٔ افزایشی	$r > ۱$
جملات دنباله در حال کاهش	دنبالهٔ کاهشی	$۰ < r < ۱$
جملات دنباله، یکی در میان مثبت یا منفی هستند.	نه افزایشی، نه کاهشی	$r < ۰$

۲۶ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی:

$$S_n = \frac{t_۱(۱-r^n)}{۱-r}$$

تعداد جملات :n و قدرنسبت :r، جملهٔ اول : $t_۱$

مثال

$$۷۵,۱۵,۳,\frac{۳}{۵},\ldots \xrightarrow[r=\frac{۱}{۵},\ t_۱=۷۵]{\text{مجموع ۱۰ جملهٔ اول}} S_{۱۰} = \frac{۷۵(۱-(\frac{۱}{۵})^{۱۰})}{۱-\frac{۱}{۵}}$$

۲۷ دنبالهٔ ثابت: تمام جملات دنباله، یکسان هستند.

نکته دنبالهٔ ثابت، هم دنبالهٔ هندسی است، هم دنبالهٔ حسابی.

۲۸ ترکیب دنبالهٔ هندسی و حسابی: اگر جملات nاُم، mاُم و pاُم از یک دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$r = \frac{p-n}{n-m}$$

احتمال

فصل ۱۷

۱ پدیدهٔ تصادفی: آزمایشی است که نتیجهٔ آن قبل از وقوع به طور دقیق مشخص نیست، اما تمام حالت‌های ممکن آن قبل از به وقوع پیوستن، مشخص است.

۲ فضای نمونه:

{تمام حالت‌های ممکن در یک پدیدهٔ تصادفی} = S

۳ برآمد: هر عضو فضای نمونه‌ای

۴ پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای

نکته اگر فضای نمونه‌ای دارای n عضو باشد، تعداد پیشامدهای این فضای نمونه‌ای ۲^n است.

مثال

پیشامدهای تصادفی	برامدها	فضای نمونه‌ای	آزمایش تصادفی
{رو} {پشت} { } {پشت،رو}	پشت رو	{رو،پشت}	پرتاب سکه

۵ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای:

تعداد اعضای S	آزمایش تصادفی
۲^n	پرتاب n سکه
۶^n	پرتاب n تاس
$۲^m \times ۶^n$	پرتاب n تاس و m سکه
۲^n	جنسیت فرزندان (n فرزند)
$\binom{m}{n}$	انتخاب n شیء از m شیء

۶ مجموع اعداد روشده در پرتاب دو تاس:

مجموع اعداد روشده در پرتاب تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

تفکر تمامی اعمال و قوانینی که برای مجموعه‌ها گفته شده، برای پیشامدها نیز برقرار است.

۷ احتمال رخ‌دادن یک پیشامد:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

A پیشامدی از S

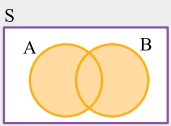
نکته الف) اگر A پیشامدی از S باشد، آن‌گاه: $0 \le P(A) \le 1$

ب) اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه: $P(A) \le P(B)$

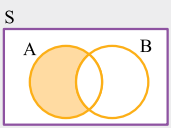
قوانین احتمال

الف) $P(\varnothing)=0 \quad , \quad P(S)=1$

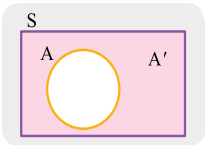
ب) احتمال اجتماع: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$



ب) احتمال تفاضل: $P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)$



ت احتمال متمم: $P(A') = ۱ - P(A)$



نتیجه:

الف $P(A' \cap B') = ۱ - P(A \cup B)$

ب $P(A' \cup B') = ۱ - P(A \cap B)$

پ اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه: $P(A - B) = P(A) - P(B)$

ت اگر A و B ناسازگار باشند:

$P(A - B) = P(A)$ و $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ت اگر A، B و C دو به دو ناسازگار باشند:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

۸ احتمال غیرهم‌شانس: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده (پیشامد تک‌عضوی) از فضای نمونه‌ای S احتمال نابرابر داشته باشند، به S فضای نمونه‌ای با احتمال **غیرهم‌شانس** می‌گوییم.

۹ قوانین احتمال غیرهم‌شانس: اگر $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$ زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس باشد، آن‌گاه:

الف $۰ \le P(A) \le ۱$ ب $P(S) = ۱$

پ $P(A) = P(a_۱) + P(a_۲) + \cdots + P(a_k)$

۱۰ احتمال شرطی:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B ناتهی است.

تعریف: احتمال رخ‌دادن A به شرط آن‌که B رخ داده باشد.

۱۱ قانون ضرب احتمال:

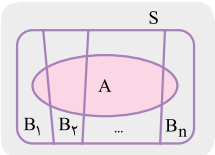
$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

۱۲ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid (A \cap B))$$

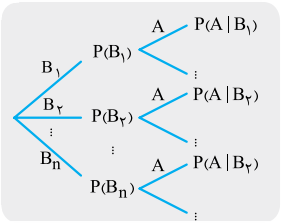
۱۳ قانون احتمال کل:

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2)$$
$$+ \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)$$



شرط: B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهای ناتهی باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند و A پیشامدی دلخواه.

۱۴ حل مسائل احتمال کل به کمک نمودار درختی:



$$P(A) = \underbrace{P(B_1) \times P(A \mid B_1)}_{\text{حاصل‌ضرب احتمال‌های شاخهٔ اول}} + \underbrace{P(B_2) \times P(A \mid B_2)}_{\text{حاصل‌ضرب احتمال‌های شاخهٔ دوم}}$$
$$+ \cdots + \underbrace{P(B_n) \times P(A \mid B_n)}_{\text{حاصل‌ضرب احتمال‌های شاخهٔ nام}}$$

۱۵ نتیجهٔ قانون احتمال کل:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(B')P(A \mid B')$$

شرط: $0 < P(B) < 1$ و A دلخواه.

نکته اگر در برخی مسائل کیسه و مهره، مهره یا مهره‌هایی را بدون دیدن رنگ آن‌ها، از کیسه کنار بگذاریم، تأثیری در احتمال مهره‌های خارج‌شدهٔ بعد از آن ندارد.

مثال

در کیسه‌ای که ۳ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ قرمز وجود دارد ۲ مهره بدون دیدن، برداشته و کنار می‌گذاریم. احتمال این‌که مهرهٔ سوم قرمز باشد، $\frac{۴}{۷}$ است.

۱۶ قانون بیز:

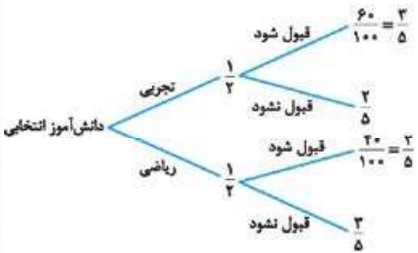
$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)}$$

احتمال کل

شرط: B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهای ناتهی که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، A دلخواه و $i \leq n$.

مثال

در مدرسه‌ای دو گروه دانش‌آموز تجربی و ریاضی داریم. احتمال قبولی دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی در کنکور ۶۰ درصد و احتمال قبولی دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی ۴۰ درصد است. یک دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم؛ اگر بدانیم این فرد در کنکور قبول شده باشد، آن‌گاه احتمال این‌که از رشتهٔ تجربی باشد برابر است با:



$$P(\text{تجربی} \mid \text{قبول}) = ?$$

$$P(\text{قبول}) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5} = \frac{3}{10}+\frac{2}{10} = \frac{5}{10}$$

$$P(\text{تجربی} \cap \text{قبول}) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{تجربی} \mid \text{قبول}) = \frac{P(\text{تجربی} \cap \text{قبول})}{P(\text{قبول})} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{5}$$

۱۷ پیشامدهای مستقل و وابسته: به پیشامدهای A و B **مستقل** می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. به دو پیشامدی که مستقل نباشد، **وابسته** می‌گوییم.

۱۸ شرط مستقل‌بودن دو پیشامد:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

نکته اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه:

الف) $P(A \mid B) = P(A)$ و $P(B \mid A) = P(B)$

ب) (B', A)، (A', B') و (A', B) نیز مستقل هستند.

۱۹ سه پیشامد مستقل: سه پیشامد A، B و C مستقل هستند، هرگاه شرط‌های زیر به طور همزمان برقرار باشد:

الف) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

ب) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$

پ) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$

ت) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

نکته الف) در n بار پرتاب سکه:

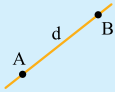
$$\text{احتمال } k \text{ بار «پشت» آمدن} = \text{احتمال } k \text{ بار «رو» آمدن} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

ب) در بین n فرزند:

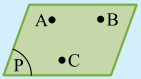
$$\text{احتمال } k \text{ تا پسر داشتن} = \text{احتمال } k \text{ تا دختر داشتن} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

فصل ۲۲
تجسم فضایی

۱ نحوهٔ نمایش نقطه، خط و صفحه:



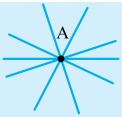
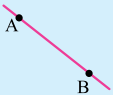
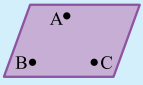
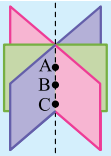
خط AB یا BA، یا خط d

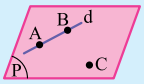


صفحهٔ ABC، BAC، ...
یا صفحهٔ P

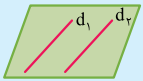
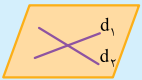
نقطهٔ A

۲ ویژگی نقطه، خط و صفحه در فضا:

شکل	ویژگی
	از یک نقطه در صفحه (یا فضا)، بی‌شمار خط می‌گذرد.
	از هر دو نقطهٔ متمایز در صفحه (فضا)، یک و تنها یک خط می‌گذرد.
	از هر سه نقطهٔ متمایز در فضا که در یک راستا (روی یک خط) نباشند، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.
	از هر سه نقطهٔ متمایز در فضا که در یک راستا هستند (روی یک خط باشند)، بی‌شمار صفحه می‌گذرد.

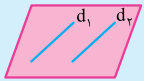
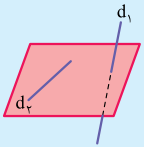
شکل	ویژگی
	از یک خط و یک نقطه خارج آن، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۳ حالت‌های مختلف دو خط در صفحه:

موازی		متقاطع
منطبق	غیرمنطبق	
		

نکته از دو خط متقاطع و هم‌چنین از دو خط موازی در صفحه، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۴ حالت‌های مختلف دو خط در فضا

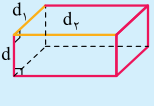
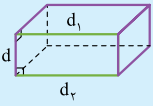
شکل	ویژگی	حالت
	دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند.	متقاطع
	دو خط هیچ نقطهٔ اشتراکی ندارند اما صفحه‌ای وجود دارد که شامل هر دوی آن‌هاست.	موازی
	دو خط هیچ نقطهٔ اشتراکی ندارند و هیچ صفحه‌ای که شامل هر دوی آن‌ها باشد، وجود ندارد.	متنافر

تذکر در حالتی که دو خط بر هم منطبق می‌شوند، آن‌ها را یک خط در نظر می‌گیریم.

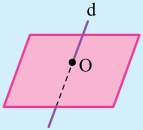
نکته در صفحه یا فضا: **الف** از هر نقطه خارج یک خط، تنها یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.

ب دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند.

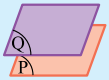
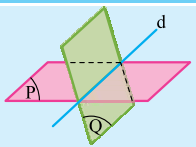
۵ دو خط عمود بر یک خط: در صفحه، دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند، اما در فضا، دو خط عمود بر یک خط، ممکن است موازی، متقاطع یا متنافر باشند.

خط‌های d_1 و d_2 بر خط d عمودند.		
		
d_1 و d_2 متنافر	d_1 و d_2 متقاطع	d_1 و d_2 موازی

۶ حالت‌های مختلف خط و صفحه:

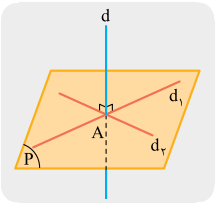
موازی	متقاطع	خط واقع بر صفحه
		

۷ حالت‌های مختلف دو صفحه

موازی	متقاطع
	 خط d فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q است.

تذکر وقتی دو صفحه بر هم منطبق می‌شوند، آن‌ها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.

تعامد



۸ عمودبودن خط بر صفحه: خط d بر صفحهٔ P عمود است، هرگاه صفحهٔ P را در نقطهٔ A قطع کند و بر تمام خط‌های صفحهٔ P که از نقطهٔ A می‌گذرند، عمود باشد.

۹ ویژگی‌های خط عمود بر صفحه:

الف) اگر خطی فقط بر یکی از خط‌های آن صفحه عمود باشد، ممکن است بر آن صفحه عمود نباشد.

ب) اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای، در محل تقاطع آن‌ها عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

پ) دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.

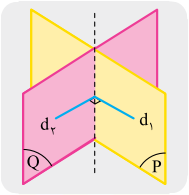
ت) دو صفحهٔ عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

ث) اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

ج) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، خط دیگر نیز بر این صفحه عمود است.

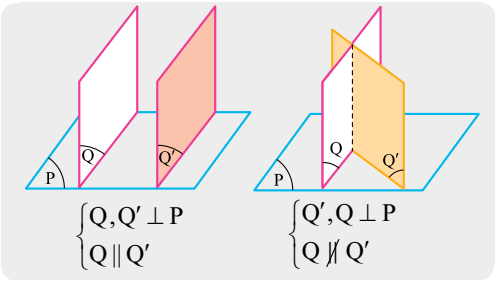
۱۰ عمودبودن دو صفحه: دو صفحه بر هم عمودند؛ هرگاه هر کدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.

$$\text{خط } d_1 \text{ از صفحهٔ } P \text{ عمود بر خط } d_2 \text{ از صفحهٔ } Q \Rightarrow P \perp Q$$



۱۱ ویژگی‌های دو صفحهٔ عمود برهم:

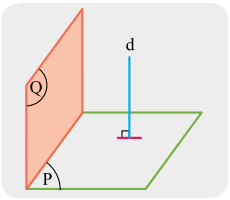
الف دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه ممکن است موازی یا متقاطع باشند.



$\begin{cases} Q, Q' \perp P \\ Q \parallel Q' \end{cases}$ $\begin{cases} Q', Q \perp P \\ Q \not\parallel Q' \end{cases}$

ب اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر خط عمود بر یکی از آن‌ها، با دیگری موازی است.

$\begin{cases} P \perp Q \\ d \perp P \end{cases} \Rightarrow d \parallel Q$



پ اگر دو صفحهٔ متقاطع بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترک آن‌ها بر آن صفحه عمود است.

$P \Rightarrow d \perp L$ و Q عمود بر L