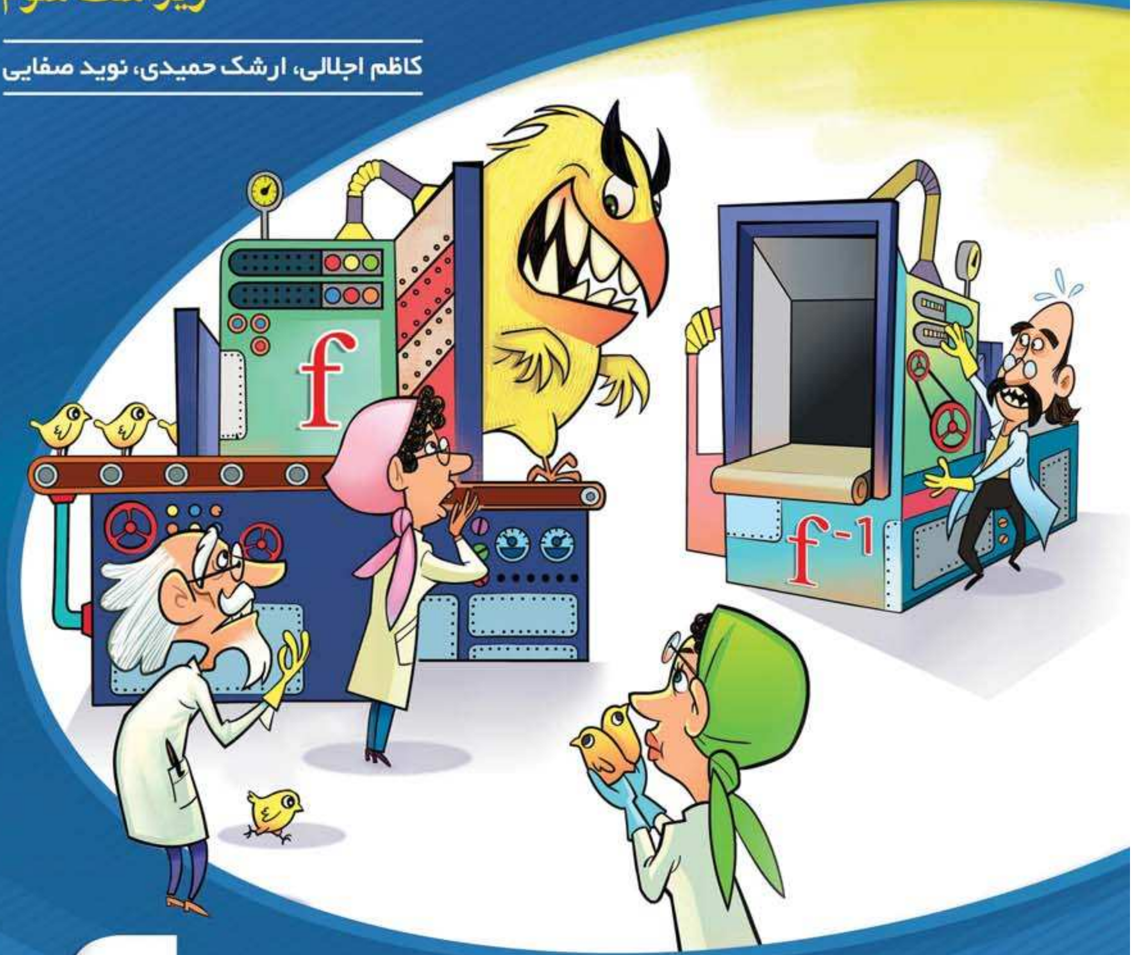
درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

حسابان ۱ (یازدهم)

ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



نشر الگو

مجموعه کتاب‌های یازدهم و جامع نشر الگو ویژهٔ رشتهٔ ریاضی:

- شیمی ۲ (تست)
- جمع‌بندی شیمی یازدهم
- حسابان ۱ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۲ (تست و سه‌بعدی)
- آمار و احتمال (تست و سه‌بعدی)
- فیزیک ۲ ریاضی (تست و سه‌بعدی)
- هندسه پایه
- ریاضیات پایه
- جامع هندسه
- جامع ریاضی ۱ و حسابان + موج آزمون
- جامع ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

- درس‌نامه کامل با پوشش همه مطالب و نکات
- تقسیم مطالب و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس درس‌های کتاب درسی
- دسته‌بندی پرسش‌های چهارگزینه‌ای در سه سطح ساده، متوسط و دشوار
- ۵۸۸ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۳۱۱۱ پرسش چهارگزینه‌ای در پایان درس‌نامه‌ها
- پوشش سؤالات کنکور سراسری سال‌های اخیر
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

9786007950586

نشر الگو
www.olgoobooks.ir

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

(رشته ریاضی) https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشته تجربی) https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اســاس محتوای کتاب درســی حسابان پایهٔ یازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس و هر درس به چند بخش تقسیم شده است. در ابتدای هر بخش، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرســش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرســش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعهٔ این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرســش‌های چهارگزینه‌ای و کســب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست ساختار کتاب و محتوای آن تغییرات زیادی کرده است:

- درس‌نامه‌ها کامل‌تر شده‌اند؛
- تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه شده است؛
- هرجا که لازم بوده است، پاسخ‌ها بازنویسی و راه‌حل‌های جدید اضافه شده‌اند.

هر درس کتاب به چند بخش جدید تقسیم شده است که موضوع و حجم مطالب آن متناسب با تدریس یک جلسه تدریس معلم در کلاس است. پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش هم در انتهای آن بخش آمده است تا دسترسی به آن‌ها ساده‌تر باشد. همچنین پرســش‌های هر بخش را به ســه سطح تقسیم کرده‌ایم: در سطح اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شــوند. این پرســش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شــوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری اســت. در ســطح دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراســری بیشــتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح اول است و حل آن‌ها به تمام دانش‌آموزان توصیه می‌شود. در سطح سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

در انتهای هر درس، ســؤالات کنکورهای سراســری متناسب با آن درس را آورده‌ایم و در انتهای هر فصل، سه آزمون جامع از مباحث آن فصل قرار داده‌ایم تا بتوانید با حل آن‌ها میزان تسلط خود بر مطالب فصل را محک بزنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم عاطفه ربیعی، دکتر آریس آقانیانس و دکتر ابوالفضل علی‌بمانی بــرای ویراســتاری علمی، خانم‌ها فاطمــه احدی و مریم احمــدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم ســکینه مختــار مدیر واحد ویراســتاری و حروفچینی تشــکر و قدردانی کنیم.

مؤلفــان

فهرست

فصل اول: جبر و معادله

فصل دوم: تابع

درس اول: آشنایی بیشتر با تابع

مفاهیم اولیهٔ تابع

هر **تابع** از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را **دامنهٔ** این تابع و B را **هم‌دامنهٔ** این تابع می‌نامند. مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند **برد** این تابع می‌نامند. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنهٔ تابع است. دامنهٔ تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می‌دهیم. برای نشان دادن اینکه f تابعی با دامنهٔ A و هم‌دامنهٔ B است می‌نویسیم $f:A\to B$ (بخوانید f تابعی از A به B است).

ضابطهٔ تابع

می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که در ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنهٔ تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند. در ضمن، به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد، البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند. اگر x عضوی از دامنهٔ تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشند، می‌نویسیم $y=f(x)$. به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا آن را به خروجی تبدیل کند، **ضابطهٔ تابع** می‌گویند.

تست ۱

در تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}(۲-x)^{۲}$، حاصل $f(۱+x)-f(۱-x)$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) $۴x$　　۳) $۲x^{۲}$　　۴) $۴x^{۲}$

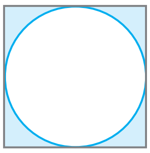
راه‌حل در ضابطهٔ تابع به جای x مقدارهای $۱+x$ و $۱-x$ را قرار می‌دهیم:

$f(۱+x)=(۱+x)^{۲}(۱-x)^{۲},\quad f(۱-x)=(۱-x)^{۲}(۱+x)^{۲}$

بنابراین $f(۱+x)-f(۱-x)=۰$.

تست ۲

در شکل روبه‌رو مساحت قسمت‌های رنگ شده تابعی از محیط مربع (P) است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $S(P)=(\frac{۴-\pi}{۶۴})P^{۲}$　　۲) $S(P)=(\frac{۴-\pi}{۱۶})P^{۲}$

۳) $S(P)=(\frac{۱۶-\pi}{۶۴})P^{۲}$　　۴) $S(P)=(\frac{۱۶-\pi}{۱۶})P^{۲}$

راه‌حل اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{۲}$ و محیط مربع برابر $۴a$ می‌شود. بنابراین

$$a^{۲}=\text{مساحت مربع}\ ,\ \frac{\pi a^{۲}}{۴}=\text{مساحت دایره}\ ,\ P=۴a\Rightarrow a=\frac{P}{۴}$$

$$\text{مساحت قسمت‌های رنگ شده}=a^{۲}-\frac{\pi a^{۲}}{۴}=a^{۲}(\frac{۴-\pi}{۴})=\frac{P^{۲}}{۱۶}(\frac{۴-\pi}{۴})=(\frac{۴-\pi}{۶۴})P^{۲}$$

تست ۳

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x+۱)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x$، مقدار $f(\sqrt[۳]{۲})$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) $\sqrt[۳]{۴}$　　۴) $\sqrt[۳]{۲}$

راه‌حل تساوی داده شده را به‌صورت $f(x+۱)=(x+۱)^{۳}-۱$ می‌نویسیم. اکنون اگر فرض کنیم $x+۱=\sqrt[۳]{۲}$، یعنی $x=\sqrt[۳]{۲}-۱$، به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt[۳]{۲})=(\sqrt[۳]{۲})^{۳}-۱=۱$$

تست ۴

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x)+xf(۲)=x^{۳}+۱$، حاصل $f(-۲)$ کدام است؟

۱) -۷　　۲) -۱　　۳) ۹　　۴) ۳

راه‌حل در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $x=۲$:

$x=۲\Rightarrow f(۲)+۲f(۲)=۸+۱\Rightarrow f(۲)=۳$

بنابراین

$f(x)+۳x=x^{۳}+۱\Rightarrow f(x)=x^{۳}-۳x+۱\Rightarrow f(-۲)=-۸+۶+۱=-۱$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر (مساوی) می‌نامیم و می‌نویسیم $f=g$، به شرطی که
۱) $D_f=D_g$ ۲) به ازای هر x از دامنهٔ دو تابع $f(x)=g(x)$.

مثال: تابع‌های مقابل برابرند:

$f(x)=\frac{x^۳+۳x}{x^۲+۳}\ ,\quad g(x)=x$

در واقع دامنهٔ هر دو تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است و چون

$f(x)=\frac{x^۳+۳x}{x^۲+۳}=\frac{x(x^۲+۳)}{x^۲+۳}=x$ (همواره $x^۲+۳\neq ۰$)

پس ضابطهٔ دو تابع هم یکسان است.

مثال: تابع‌های مقابل برابر نیستند:

$f(x)=\frac{x}{x}\ ,\quad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ $\qquad g(x)=۱\ ,\quad D_g=\mathbb{R}$

تست ۵

اگر تابع‌های $f=\{(۱,۲),(۲,۶),(a,۴)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۱,b),(۲,bc)\}$ برابر باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $D_f=\{۱,۲,a\}$ و $D_g=\{۱,۲,۳\}$. بنابراین $D_f=D_g$، پس $a=۳$. از طرف دیگر

$f(۱)=g(۱)\Rightarrow ۲=b\ ,\quad f(۲)=g(۲)\Rightarrow ۶=bc\xrightarrow{b=۲}۶=۲c\Rightarrow c=۳$

پس $a+b+c=۸$.

تست ۶

کدام دو تابع با هم برابر نیستند؟

۱) $f(x)=\sqrt{x^۴}$ و $g(x)=x^۲$
۲) $f(x)=\sqrt{۲x+|x|}$ و $g(x)=\sqrt{۳x}$
۳) $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{۲x-|x|}$
۴) $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}^۲$

راه‌حل گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و $f(x)=\sqrt{x^۴}=|x^۲|=x^۲=g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینهٔ (۲) $D_f=D_g=[۰,+\infty)$ و اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=\sqrt{۲x+|x|}=\sqrt{۲x+x}=\sqrt{۳x}=g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینهٔ (۳) $D_f=D_g=[۰,+\infty)$ و اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $g(x)=\sqrt{۲x-|x|}=\sqrt{۲x-x}=\sqrt{x}=g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینهٔ (۴) $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=[۰,+\infty)$. پس دامنهٔ تابع‌های f و g برابر نیست، یعنی این دو تابع برابر نیستند.

نکته

اگر دو تابع f و g برابر باشند، آن‌گاه بردهای آن‌ها نیز برابرند. ولی اگر دامنه‌های دو تابع f و g با هم و بردهای دو تابع f و g نیز با هم برابر باشند، این دو تابع لزوماً برابر نیستند.

مثال: تابع‌های f و g را به‌صورت مقابل در نظر بگیرید

$f=\{(۱,۲),(۳,۴)\}\ ,\quad g=\{(۱,۴),(۳,۲)\}$

این دو تابع برابر نیستند، زیرا $f(۱)=۲\neq ۴=g(۱)$، درحالی‌که $D_f=D_g$ و $R_f=R_g$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای — آشنایی بیشتر با تابع

سطح ۱

۸۷۸- اگر $f(x+۲)=x^۲+۴x+۲$، مقدار $f(\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۷۹- در تابع $f(x)=۲x^۳+x^۲-۴x-۵$، حاصل $f(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+f(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۴\sqrt{۶}$ ۳) $-۴\sqrt{۶}$ ۴) صفر

۸۸۰- اگر تابع‌های $f=\{(۱,a),(۲,۲a+b),(c,۳)\}$ و $g=\{(۱,۴),(۲,۵),(۴,۳)\}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

سطح ۲

۸۸۱- اگر $f(x)=۳f(x-۱)$ و $f(۱)=۳$، مقدار $f(۹)$ کدام است؟

۱) $۳^{۸}$　　۲) $۳^{۹}$　　۳) $۳^{۱۰}$　　۴) $۳^{۱۱}$

۸۸۲- اگر $f(x)=۲f(x-۱)-۶$ و $f(۱)=f(۲)$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۱۲

۸۸۳- اگر $f(۴x-۱)+۲f(۱)=۲x+۵$، مقدار $f(-۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $-\frac{۱}{۴}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) ۲

۸۸۴- اگر $xf(x+۲)+f(۳x+۱)=۲x^{۲}+۳x+۴$ ، مقدار $f(۳)+f(۴)$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۹

۸۸۵- اگر $f(۳x+۱)=۳x+۲f(-۳x)-۳$، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$　　۳) $\frac{۷}{۳}$　　۴) $\frac{۱۱}{۳}$

۸۸۶- اگر $g(x-۲)=۲-x$ و $f(x)=\begin{cases}\frac{x+۲}{۳} & x<۰\\ g(x) & x\geq ۰\end{cases}$، حاصل $f(-۵)+f(۰)$ کدام است؟

۱) -۲　　۲) -۱　　۳) صفر　　۴) -۳

۸۸۷- اگر $f(x)=۳x+۴$، حاصل $f(۲x-۱)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $۲f(x)+۷$　　۲) $۳f(x)-۷$　　۳) $۳f(x)+۷$　　۴) $۲f(x)-۷$

۸۸۸- اگر $f(\frac{x-۱}{۲})=x^{۲}-۲x+۱$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=۲x^{۲}$　　۲) $f(x)=\frac{x^{۲}}{۴}$　　۳) $f(x)=\frac{x^{۲}}{۲}$　　۴) $f(x)=۴x^{۲}$

۸۸۹- اگر $f(۲x-۱)=۴x^{۲}-۸x$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=x^{۲}+۲x-۳$　　۲) $f(x)=x^{۲}+۲x+۲$　　۳) $f(x)=x^{۲}-۲x-۱$　　۴) $f(x)=x^{۲}-۲x-۳$

۸۹۰- اگر $f(x+۲)=x^{۳}+۶x^{۲}+۱۲x+۹$، حاصل $f(x)$ کدام است؟

۱) $f(x)=x^{۳}-۱$　　۲) $f(x)=x^{۳}+۱$　　۳) $f(x)=x^{۳}-۲$　　۴) $f(x)=x^{۳}+۲$

۸۹۱- اگر $f(x^{۲}+۱)=x^{۴}-x^{۲}$، آن‌گاه برای $x\geq ۱$ ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=x^{۲}-۳x$　　۲) $f(x)=x^{۲}-۳x+۲$　　۳) $f(x)=x^{۲}-x+۲$　　۴) $f(x)=x^{۲}-x$

۸۹۲- کدام تابع با تابع $f(x)=x-۲+|x-۴|$ برابر است؟

۱) $g(x)=\begin{cases}۲ & x<۴\\ ۲x+۶ & x\geq ۴\end{cases}$　　۲) $h(x)=\begin{cases}۲ & x<۴\\ ۶-۲x & x\geq ۴\end{cases}$　　۳) $k(x)=\begin{cases}۲ & x<۴\\ ۲x-۶ & x\geq ۴\end{cases}$　　۴) $t(x)=\begin{cases}۴ & x<۴\\ ۲x-۶ & x\geq ۴\end{cases}$

۸۹۳- تابع $f(x)=|x|(x-|x|)$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=|x|(x+|x|)$　　۲) $h(x)=x(x+|x|)$　　۳) $k(x)=|x(x-|x|)|$　　۴) $t(x)=x(|x|-x)$

۸۹۴- تابع $f(x)=۲+|x+۳|-|x-۱|$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=\begin{cases}x-۱ & x<-۳\\ x+۴ & -۳\leq x\leq ۱\\ ۴ & x>۱\end{cases}$　　۲) $h(x)=\begin{cases}-۲ & x<-۳\\ ۲x+۴ & -۳\leq x\leq ۱\\ ۶ & x>۱\end{cases}$　　۳) $k(x)=\begin{cases}x & x<-۳\\ ۲x+۴ & -۳\leq x\leq ۱\\ ۱-x & x>۲\end{cases}$　　۴) $t(x)=\begin{cases}۲x-۲ & x<۲\\ x+۱ & x>۲\end{cases}$

سطح ۳

۸۹۵- دربارهٔ تابع f می‌دانیم همواره $f(xy)=f(x)+f(y)$. اگر $f(۱۰)=۱$، $f(۵)=a$ و $f(۳)=b$، مقدار $f(۶)$ کدام است؟

۱) $a-b$ ۲) $a+b$ ۳) $a+b-۱$ ۴) $b-a+۱$

۸۹۶- اگر برای هر x تساوی $xf(x)+f(-x)=x^۲-x$ برقرار باشد، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=x$ ۲) $f(x)=-x$ ۳) $f(x)=x+۱$ ۴) $f(x)=x-۱$

۸۹۷- اگر $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ و $f(\frac{۱}{۲})=۸$، مقدار $f(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۹۸- کدام‌یک از تابع‌های زیر با تابع $f(x)=\left|x-|x-|x||\right|$ برابر است؟

۱) $g(x)=\begin{cases} ۳x & x<۰ \\ -x & x\geq۰ \end{cases}$ ۲) $h(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ -x & x\geq۰ \end{cases}$ ۳) $k(x)=\begin{cases} -۳x & x<۰ \\ x & x\geq۰ \end{cases}$ ۴) $t(x)=\begin{cases} x & x\leq۰ \\ -۳x & x>۰ \end{cases}$

کنکور سراسری

۸۹۹- اگر $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$، برابر کدام است؟ تجربی ۹۷

۱) $x^۲-x+۳$ ۲) $x^۲-۲x-۱$ ۳) $x^۲-۲x+۱$ ۴) $x^۲-x+۱$

فصل دوم: تابع

درس دوم / بخش اول: توابع گویا

تابع گویا

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد، به تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ و دامنهٔ $D_f=\{x|Q(x)\neq۰\}$ **تابع گویا** می‌گوییم.

مثال: تابع‌های زیر گویا هستند:

الف) $f(x)=\frac{۱}{x}, \quad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ ب) $f(x)=\frac{x}{x-۱}, \quad D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ پ) $f(x)=\frac{x-۱}{x^۲+۱}, \quad D_f=\mathbb{R}$

تست ۱

اگر $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲-۱}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱\}$، حاصل $f(\frac{۱}{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{۱-x^۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱-x^۲}$ ۳) $\frac{۱-x^۲}{x^۲}$ ۴) $\frac{x^۲-۱}{x^۲}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$f(\frac{۱}{x})=\frac{(\frac{۱}{x})^۲}{(\frac{۱}{x})^۲-۱}=\frac{\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۱}{x^۲}-۱}=\frac{\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۱-x^۲}{x^۲}}=\frac{۱}{۱-x^۲}$$

تست ۲

اگر $D_f=\mathbb{R}-\{1,\frac{1}{3}\}$ و $f(\frac{x-1}{x+1})=\frac{x+1}{x-2}$، مقدار $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر معادلهٔ $\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $x=3$. بنابراین اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=3$ مقدار $f(\frac{1}{2})$ به‌دست می‌آید:

$$f(\frac{2}{4})=\frac{4}{1}\Rightarrow f(\frac{1}{2})=4$$

تست ۳

اگر $f(\frac{x-1}{2x+1})=\frac{2x-1}{x+1}$، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}-\{2,\frac{1}{2}\}$ کدام است؟

۱) $\frac{4x+1}{x+1}$ ۲) $\frac{2x+1}{1-x}$ ۳) $\frac{1}{2x-1}$ ۴) $\frac{4x+1}{2-x}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $t=\frac{x-1}{2x+1}$ ، بنابراین

$$2tx+t=x-1 \Rightarrow (2t-1)x=-t-1 \Rightarrow x=\frac{t+1}{1-2t}$$

در نتیجه

$$f(t)=\frac{2(\frac{t+1}{1-2t})-1}{\frac{t+1}{1-2t}+1}\xrightarrow[\text{را در } (1-2t) \text{ ضرب می کنیم}]{\text{صورت و مخرج کسر}}\frac{2t+2-1+2t}{t+1+1-2t}=\frac{4t+1}{2-t}\Rightarrow f(x)=\frac{4x+1}{2-x}$$

پیدا کردن دامنهٔ تابع از روی ضابطه

وقتی می‌خواهیم یک تابع را معرفی کنیم، باید دامنهٔ آن را نیز مشخص کنیم. مثلاً دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-2$ می‌تواند $\mathbb{R}$ یا $[1,2]$ یا $\{0,1,2,3\}$ یا هر مجموعهٔ دلخواه دیگری باشد. ولی اگر دامنهٔ تابع f را معین نکردیم و فقط ضابطهٔ آن را نوشتیم، قرارداد می‌کنیم که دامنهٔ تابع f را مجموعهٔ تمام مقادیری از x در نظر بگیریم که $f(x)$ به‌ازای آن‌ها بامعنی است. مثلاً اگر ضابطهٔ تابع f را به صورت $f(x)=\frac{1}{x}$ معرفی کنیم، دامنهٔ تابع f را طبق این قرارداد مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ در نظر می‌گیریم، زیرا عبارت $\frac{1}{x}$ فقط به‌ازای $x=0$ بامعنی نیست.

دامنهٔ توابع گویا

برای پیدا کردن دامنهٔ توابع گویا، همهٔ مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند، پیدا می‌کنیم و مجموعهٔ آن‌ها را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\frac{x+2}{x^3-x}$ را پیدا کنیم. ابتدا عددهایی را پیدا می‌کنیم که مخرج را صفر می‌کنند. توجه کنید که

$$x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=0\ ,x=1\ ,x=-1$$

بنابراین باید مجموعهٔ $\{0,-1,1\}$ را از $\mathbb{R}$ کم کنیم تا دامنهٔ تابع f به‌دست بیاید، پس $D_f=\mathbb{R}-\{0,-1,1\}$.

تست ۴

مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+1}$ قرار ندارند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اعدادی که جواب معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. مجموع این اعداد برابر ۳ است.

تست ۵

دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+kx+1}$ به ازای کدام مقدار k برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) $k=2$ ۲) $k=5$ ۳) $k=-3$ ۴) $k=\frac{1}{2}$

راه‌حل اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^2+kx+1=0\xrightarrow{\Delta<0}\Delta=k^2-4<0\Rightarrow k^2<4\Rightarrow |k|<2\Rightarrow -2<k<2$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینهٔ (۴) درست است.

تست ۶ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-1}{2x^2+ax+b}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-2\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ $(a^2\geq 8b)$

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

راه‌حل فقط عدد -2 در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس تنها ریشهٔ مخرج $f(x)$ عدد -2 است. بنابراین عبارت مخرج مضربی از $(x+2)^2$ است. با توجه به ضریب x^2 در مخرج $f(x)$، این عبارت $2(x+2)^2$ است و در نتیجه

$$2(x+2)^2=2x^2+ax+b\Rightarrow 2x^2+8x+8=2x^2+ax+b\Rightarrow a=8\,,b=8\Rightarrow a+b=16$$

تست ۷ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{2x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-3,1\}$ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل $x=-3$ و $x=1$ ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع هستند، یعنی

$$2(-3)^2+a(-3)+b=0\Rightarrow b=3a-18\,,\quad 2(1)^2+a(1)+b=0\Rightarrow b=-a-2$$

بنابراین $3a-18=-a-2\Rightarrow 4a=16\Rightarrow a=4\Rightarrow b=-6\Rightarrow a-b=10$

تست ۸ کدام دو تابع با هم برابرند؟

۱) $f(x)=\frac{x^2}{x}$ و $g(x)=x$

۲) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x)=x+1$

۳) $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$ و $g(x)=x$

۴) $f(x)=\frac{x^3-4x}{x-2}$ و $g(x)=x^2+2x$

راه‌حل تابع‌های $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$ و $g(x)=x$ برابرند، زیرا $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x=g(x)$. در بقیهٔ گزینه‌ها دامنهٔ دو تابع داده شده، برابر نیستند.

گزینهٔ (۱) $D_f=\mathbb{R}-\{0\},D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ (۲) $D_f=\mathbb{R}-\{1\},D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ (۴) $D_f=\mathbb{R}-\{2\},D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

تست ۹ اگر دو تابع $f(x)=\frac{7}{x-3}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم مساوی باشند، مقدار $|ad-bc|$ کدام است؟

۱) ۷۵ ۲) ۶۳ ۳) ۵۱ ۴) ۶۵

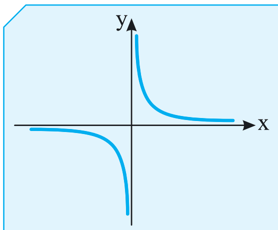
راه‌حل برای اینکه دو تابع برابر باشند باید ضابطهٔ تابع g به‌صورت $g(x)=\frac{a(x-3)}{(x-3)^2}$ باشد، که دامنهٔ دو تابع برابر $\mathbb{R}-\{3\}$ شود. بنابراین

$$x^2+cx+d=(x-3)^2\Rightarrow x^2+cx+d=x^2-6x+9\Rightarrow c=-6,d=9,\quad g(x)=\frac{ax+b}{(x-3)^2}=\frac{7}{x-3}\Rightarrow ax+b=7(x-3)=7x-21$$

پس $a=7$، $b=-21$ و در نتیجه $ad-bc=63-126=-63\Rightarrow |ad-bc|=63$

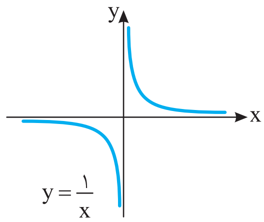
تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$

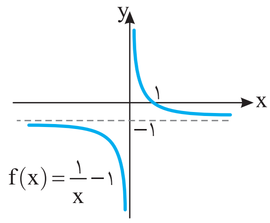
نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$ که دامنهٔ آن $\mathbb{R}-\{0\}$ است، به شکل مقابل است.



از روی این نمودار معلوم است که برد تابع f مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ است.

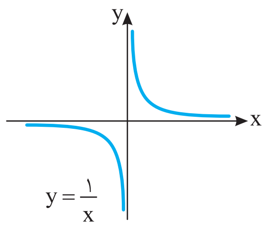
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم.

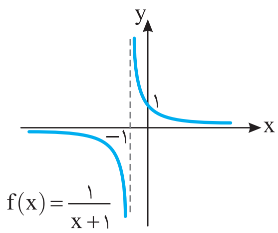




$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$
$R_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$

مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم.



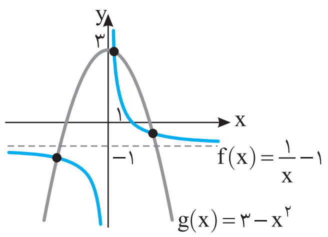


$D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$
$R_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

تست ۱۰ **نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=۳-x^۲$ را قطع می‌کند؟**

۱) ۱   **۲)** ۲   **۳)** ۳   **۴)** ۴

راه‌حل اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ به‌دست می‌آید که مطابق شکل مقابل در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=۳-x^۲$ را قطع می‌کند.



تابع هموگرافیک

به تابعی گویا که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq ۰$ و $ad\neq bc$) و دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ است، **تابع هموگرافیک** می‌گویند.

برد تابع f برابر $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

نکته

- اگر $c=۰$ و $d\neq ۰$، آن‌گاه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابع خطی $f(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ است.
- اگر $c\neq ۰$ و $ad=bc$، آن‌گاه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابع ثابت $f(x)=\frac{a}{c}$ است.

تست ۱۱ **اگر تابع $f(x)=\frac{۲x-k^۲}{kx+۴}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(x)$ کدام است؟**

۱) −۱   **۲)** −۲   **۳)** ۱   **۴)** ۲

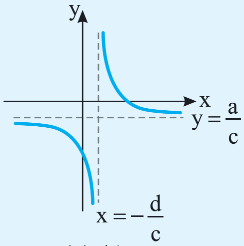
راه‌حل چون f تابعی ثابت است، پس $۲\times ۴=(-k^۲)\times k$. بنابراین $k^۳=-۸$، یعنی $k=-۲$. در نتیجه $f(x)=\frac{۲x-۴}{-۲x+۴}=-۱$.

رسم نمودار تابع هموگرافیک

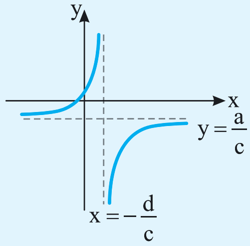
برای رسم نمودار تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا خط‌های $x=-\frac{d}{c}$ و $y=\frac{a}{c}$ را به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم.

۲) اگر $ad-bc<0$، نمودار تابع f به‌صورت شکل (۱) و اگر $ad-bc>0$، نمودار تابع f به‌صورت شکل (۲) است.

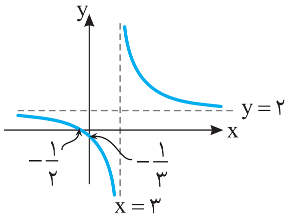


شکل (۱)

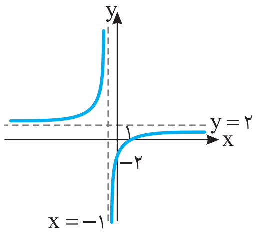


شکل (۲)

مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$، ابتدا خط‌های $x=۳$ و $y=۲$ را به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم. چون $ad-bc=۲(-۳)-۱\times۱=-۷<۰$، پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



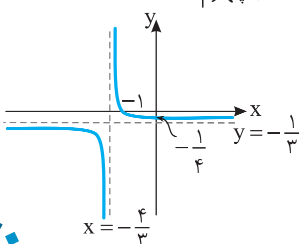
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۲}{x+۱}$، ابتدا خط‌های $x=-۱$ و $y=۲$ را به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم. چون $ad-bc=۲\times۱-(-۲)\times۱=۴>۰$، پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



تست ۱۲ نمودار تابع $f(x)=\frac{-۱-x}{۳x+۴}$ از کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

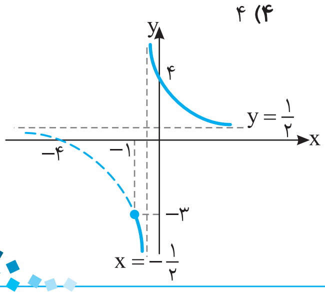
راه‌حل ابتدا توجه کنید که $ad-bc=(-۱)\times۴-(-۱)\times۳=-۱<۰$. پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است که از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.



تست ۱۳ اگر $f(x)=\frac{x+۴}{۲x+۱}$ و $D_f=[-۱,+\infty]$، برد تابع f شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $ad-bc=۱\times۱-۴\times۲=-۷<۰$. پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. بنابراین برد تابع f برابر با $(-\infty,-۳]\cup(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است، که شامل عددهای صحیح -۲، -۱ و صفر نیست.



سطح ۱

۹۰۰- اگر $\frac{2x+f(x)}{xf(x)-3}=4$ ، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{2x}{4x+1}$ ۲) $f(x)=\frac{4x+12}{4x-1}$ ۳) $f(x)=\frac{3x-2}{2x+1}$ ۴) $f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$

۹۰۱- اگر $f(x)=\frac{3x-4}{2x+1}$ ، جواب معادلهٔ $f(2x)=2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) -3

۹۰۲- در تابع $f(x)=\frac{8x}{x^2+3}$ ، اگر $f(a)=-2$ ، مقدار $f(a+2)$ کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 4 ۴) صفر

۹۰۳- اگر $f(x-2)=\frac{3x}{2x+5}$ ، جواب معادلهٔ $f(x)=3$ کدام است؟

۱) -7 ۲) 1 ۳) صفر ۴) -5

۹۰۴- در تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ، مقدار $f(a)f(-\frac{1}{a})$ به ازای $a\neq 1,-1$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $(a+1)^2$ ۴) $\frac{1}{(a-1)^2}$

۹۰۵- در تابع $f(x)=\frac{x-k}{x+1}$ حاصل عبارت $f(-x)f(\frac{k}{x})$ کدام است؟ $(x\neq \pm 1,-k)$

۱) kx ۲) $\frac{k}{x}$ ۳) k ۴) $-k$

۹۰۶- اگر $f(\frac{x^4-1}{x^4+2})=x^4-x^8+x^{16}$ ، مقدار $f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۹۰۷- اگر $f(\frac{3x+4}{5x+2})=\frac{x^2+6x+10}{3x+2}$ ، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۰۸- اگر $f(\frac{1}{x})=\frac{3x+1}{x}+f(x+2)$ و $f(1)=2$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 4 ۴) 6

۹۰۹- اگر $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{mx+1}{x+1}$ و $f(4)=3$ ، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) -7 ۲) -2 ۳) 7 ۴) 2

۹۱۰- اگر $f(\frac{x^2+1}{x})=3x+\frac{3}{x}-4$ ، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۹۱۱- اگر $f(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1})=x^3+3x+2$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۹۱۲- چند عدد حقیقی در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ قرار ندارد؟ کتاب درسی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

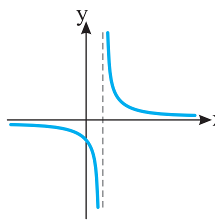
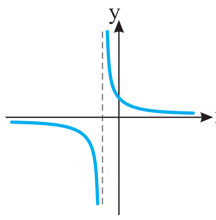
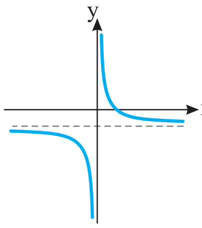
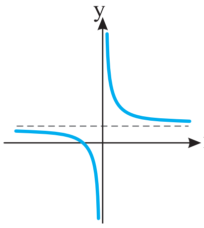
۹۱۳- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{۲x^۳-۵x^۲+۲x}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

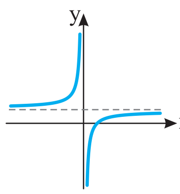
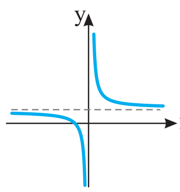
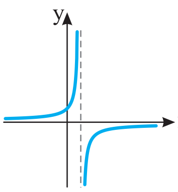
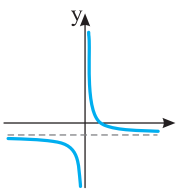
۹۱۴- در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۱}{x}+۱$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$، مجموع اعدادی که در برد تابع قرار ندارند، کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

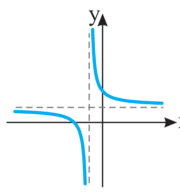
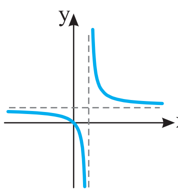
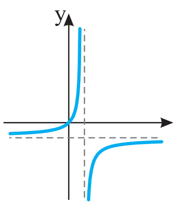
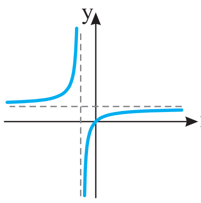
۹۱۵- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

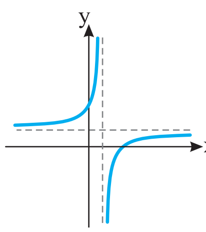
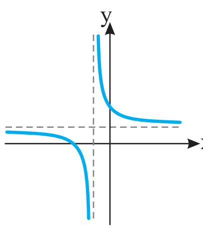
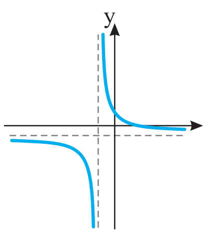
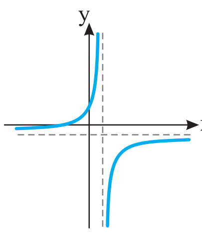
۹۱۶- نمودار تابع $f(x)=۱-\dfrac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

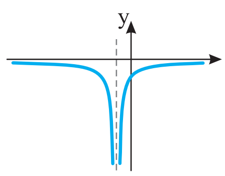
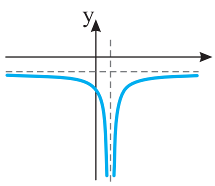
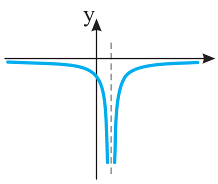
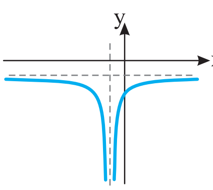
۹۱۷- نمودار تابع $f(x)=۱+\dfrac{۱}{x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

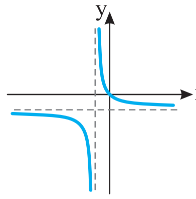
۹۱۸- نمودار تابع $y=\dfrac{x+۲}{x+۱}$ کدام است؟

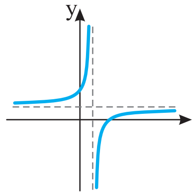
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

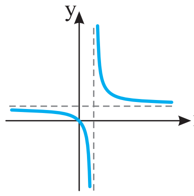
۹۱۹- نمودار تابع $y=-\dfrac{۱}{|x-۱|}$ کدام است؟

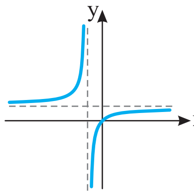
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۲۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹۲۱- اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۲}$ و $R_f=\mathbb{R}-\{۰,۱,۲\}$، حاصل‌ضرب اعدادی که در دامنهٔ تابع f قرار <u>ندارند</u>، کدام است؟

۱) -۳ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) صفر

۹۲۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=|x|$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۲۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۱-x}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=x^۲$ را قطع می‌کند؟

۱) در یک نقطه با طول مثبت ۲) در یک نقطه با طول منفی

۳) در یک نقطه با طول مثبت و یک نقطه با طول منفی ۴) در دو نقطه با طول‌های منفی

۹۲۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}+۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=x^۲$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۲۵- تابع $f(x)=\frac{x^۳+x}{x^۲+۱}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟ کتاب درسی

۱) $g(x)=\frac{x^۲-x}{x-۱}$ ۲) $h(x)=\frac{x^۲+x}{x+۱}$ ۳) $k(x)=\frac{x^۳+۲x}{x^۲+۲}$ ۴) $t(x)=\frac{x^۳-x}{x^۲-۱}$

سطح ۲

۹۲۶- اگر $\frac{x+۴}{x-۸}=\frac{f(۲x+۱)+x}{۱-f(۳x-۴)}$، مقدار $f(۱۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۲۷- اگر $f(\frac{۲}{x-۱})=\frac{x+۱}{x-۱}$، ضابطهٔ تابع f برای هر $x\neq ۰$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{x+۱}{۲}$ ۲) $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ۳) $f(x)=x+۱$ ۴) $f(x)=\frac{۲}{x+۱}$

۹۲۸- اگر $f(\frac{x+۱}{x-۲})=۲x-۱$، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x\neq ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۳x+۳}{x-۱}$ ۲) $\frac{۳x-۱}{x-۱}$ ۳) $\frac{۲x-۳}{x-۱}$ ۴) $\frac{۵x+۴}{x-۱}$

۹۲۹- اگر $f(\frac{x-۲}{x+۳})=\frac{۲x+۱}{x-۲}+۲(\frac{x-۲}{x+۳})$، ضابطهٔ تابع f به ازای هر $x\in\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ کدام است؟

۱) $f(x)=۱+\frac{۱}{x}+x$ ۲) $f(x)=۱+\frac{۱}{x}+۲x$ ۳) $f(x)=۱+\frac{۲}{x}+x$ ۴) $f(x)=۱+\frac{۲}{x}+۲x$

۹۳۰- اگر $f(\frac{۱-x}{۱+x})=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$، ضابطهٔ تابع f به ازای هر $x\neq -۱$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$ ۲) $f(x)=-\frac{۲x}{۱+x^۲}$ ۳) $f(x)=\frac{۲x}{۱+x^۲}$ ۴) $f(x)=-\frac{x}{۱+x^۲}$

۹۳۱- اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^{2}+\frac{1}{x^{2}}$، ضابطهٔ تابع f برای $|x|\geq 2$ کدام است؟

۱) $f(x)=x^{2}$ ۲) $f(x)=x^{2}+2$ ۳) $f(x)=x^{2}-2$ ۴) $f(x)=x^{2}-x$

۹۳۲- اگر $f(x-\frac{1}{x})=x^{3}-\frac{1}{x^{3}}$، آن‌گاه $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x^{3}+3x$ ۲) $x^{3}-3x$ ۳) $-x^{3}+3x$ ۴) $-x^{3}-3x$

۹۳۳- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^{3}-2x^{2}-x+2}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۳۴- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^{2}+x+1}{x^{4}-3x^{2}+2}$ قرار ندارند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۹۳۵- سه عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^{3}+kx^{2}+x}$ قرار ندارند. حدود k کدام است؟

۱) $|k|<1$ ۲) $|k|>2$ ۳) $|k|<2$ ۴) $1<|k|<2$

۹۳۶- اگر $x=-2$ در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{x^{3}-ax^{2}+2ax}$ نباشد، دامنهٔ این تابع کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{-2,0,1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-2,-1,1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-2,-1,0\}$

۹۳۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^{2}+mx+2}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$ ۲) $m>2\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$ ۴) $m>\sqrt{2}$

۹۳۸- اگر m عددی صحیح و دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{4}{x^{2}+2x-m+4}$ مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد، بیشترین مقدار ممکن m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۳۹- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x^{2}-(a^{2}+1)x-b^{2}}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-1,6\}$ است. مقدار $a^{2}+b^{2}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۹۴۰- اگر دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{2x^{2}-ax+3b}$ برابر $\mathbb{R}-\{-1\}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۳ ۴) $-\frac{8}{3}$

۹۴۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{m^{2}x^{2}+x+1}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $-\frac{1}{2}$

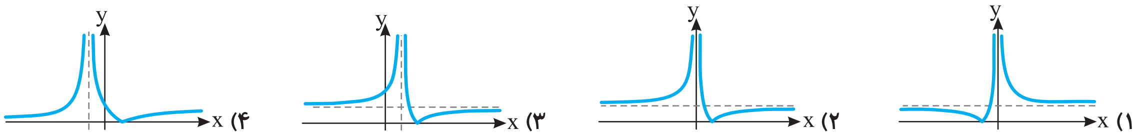
۹۴۲- خطهایی که از نقطهٔ $A(1,2)$ عبور می‌کنند با محورهای مختصات در ناحیهٔ اول مثلثی می‌سازند. ضابطهٔ تابعی که مساحت این مثلث را برحسب شیب خط، m، نشان می‌دهد کدام است؟

۱) $S(m)=-\frac{(m+2)^{2}}{2m}$ ۲) $S(m)=-\frac{(m+2)^{2}}{m}$ ۳) $S(m)=-\frac{(m-2)^{2}}{m}$ ۴) $S(m)=-\frac{(m-2)^{2}}{2m}$

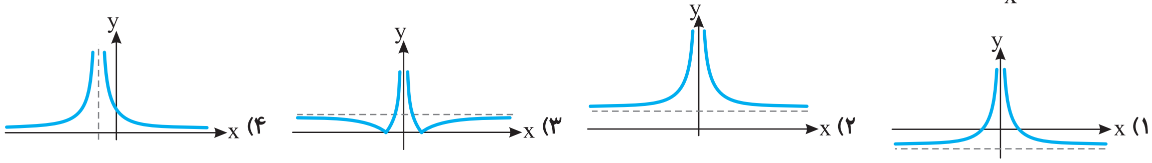
۹۴۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=1-x^{2}$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

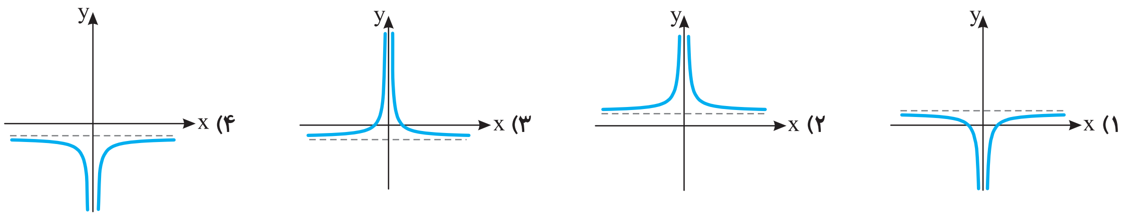
۹۴۴- نمودار تابع $y=|\frac{1}{x}-1|$ کدام است؟



۹۴۵- نمودار تابع $y=|\frac{1}{x}|+1$ کدام است؟



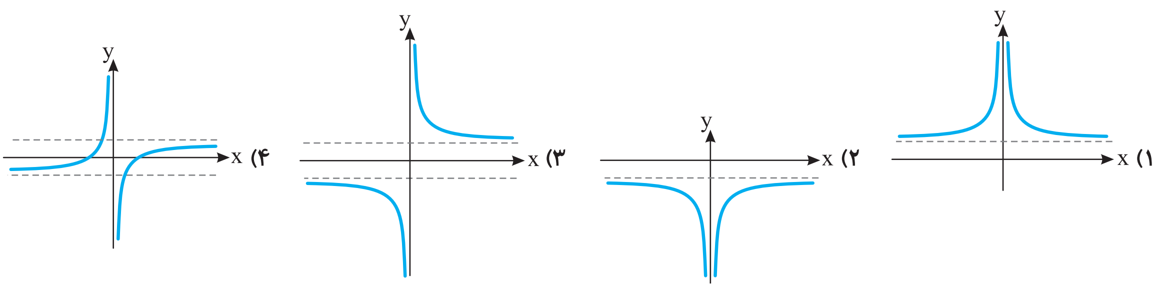
۹۴۶- نمودار تابع $f(x)=1-\frac{1}{|x|}$ کدام است؟ کتاب درسی



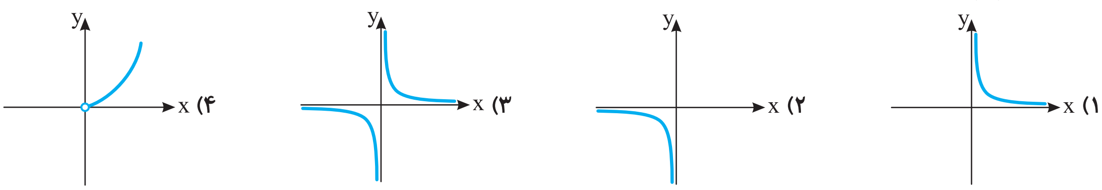
۹۴۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم، سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر آن را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده است، کدام است؟

۱) $y=\frac{x}{x-1}$ ۲) $y=\frac{x}{x+1}$ ۳) $y=\frac{-x}{x-1}$ ۴) $y=\frac{-x}{x+1}$

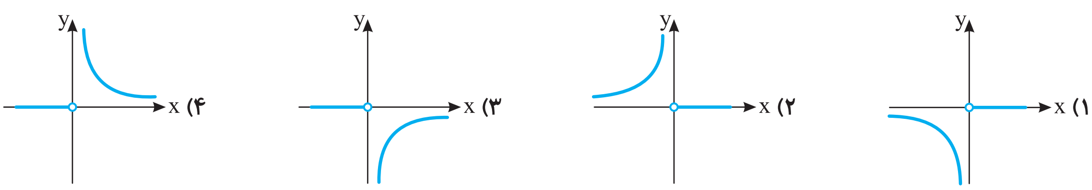
۹۴۸- نمودار تابع $y=\frac{1+|x|}{x}$ کدام است؟



۹۴۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{2}{x+|x|}$ به کدام صورت است؟



۹۵۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|-x}{x^2}$ کدام است؟



۹۵۱- برد تابع $f(x)=\frac{۴x+۱}{۲x-۶}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۲\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۳\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۲,۳\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۲\}$

۹۵۲- اگر $f(x)=\frac{۶x-۱}{۲x-۴}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{۲,۴\}$، مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند، کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۹۵۳- چند عدد صحیح در برد تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{x+۲}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۱]-\{-۲\}$ قرار ندارند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹۵۴- معادلهٔ $|\frac{۱}{x}-۱|=k$ دو جواب مثبت دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k\neq ۱$ ۲) $k\neq ۱$ و $k\neq ۰$ ۳) $۰<k<۱$ ۴) $k>۱$

۹۵۵- تابع $f(x)=\frac{x^۳-۱}{x^۲+x+۱}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟ کتاب درسی

۱) $g(x)=\frac{x^۲-۱}{x+۱}$ ۲) $h(x)=\frac{x^۳+۱}{x^۲-x+۱}$ ۳) $k(x)=\frac{x^۳-x^۲}{x^۲}$ ۴) $t(x)=\frac{x^۳-x^۲+x-۱}{x^۲+۱}$

۹۵۶- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x} & x\neq ۳\\ n & x=۳\end{cases}$ با یک تابع خطی برابر باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۵۷- تابع $f(x)=|\frac{x}{|x|}-\frac{|x-۱|}{x-۱}-۱|$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=۱$ ۲) $h(x)=\frac{x^۲-x}{x^۲-x}$ ۳) $k(x)=\frac{۲(x^۲-x)}{x^۲-x}$ ۴) $t(x)=\frac{x}{|x|}+\frac{|x-۱|}{x-۱}$

۹۵۸- تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۲x-۳ & x<۰\\ ۰ & x=۰\\ x^۲+۲x+۳ & x>۰\end{cases}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟

۱) $g(x)=(x^۲+۳)\frac{|x|}{x}+۲x$ ۲) $h(x)=x^۲\frac{|x|}{x}+۳$

۳) $k(x)=\begin{cases}(x^۲+۳)\frac{|x|}{x}+۲x & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ ۴) $t(x)=\begin{cases}x^۲\frac{|x|}{x}+۳ & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$

۹۵۹- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{۵}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^۲+cx+۴}$ با هم برابرند. مقدار abc کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) -۱۰۰ ۴) -۲۰۰

۹۶۰- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x-a}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲-bx+c}$ با هم برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶۱- تابع $f(x)=\frac{bx+۱}{۸x+۲b}$ با تابع $g(x)=c, x\neq a$ مساوی است. حاصل $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۲ ۳) ± ۴ ۴) ± ۸

۹۶۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=x^2-2$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ خط $y=k$ را قطع نمی‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

سطح ۳

۹۶۴- اگر $f(x)=\frac{1}{x}$، کدام گزینه حاصل $f(a)-f(b)$ را درست نشان می‌دهد؟

۱) $f(\frac{b-a}{ab})$ ۲) $f(\frac{ab}{a-b})$ ۳) $f(\frac{a-b}{ab})$ ۴) $f(\frac{ab}{b-a})$

۹۶۵- اگر $f(x)=\frac{x+1}{x}$، حاصل $f(x-1)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2+f(x)}$ ۲) $\frac{1}{2-f(x)}$ ۳) $\frac{f(x)}{1-f(x)}$ ۴) $\frac{f(x)}{1+f(x)}$

۹۶۶- اگر $f(x)=\frac{x}{x+2}$، حاصل $f(x-2)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2f(x)+1}{f(x)}$ ۲) $\frac{f(x)-2}{f(x)}$ ۳) $\frac{2f(x)-1}{f(x)}$ ۴) $\frac{f(x)+2}{f(x)}$

۹۶۷- اگر $f(\frac{x+2}{x-2})=\frac{x-3}{x+1}$، آن‌گاه $f(\frac{x-2}{x+2})$ کدام است؟

۱) $\frac{x+1}{x-3}$ ۲) $\frac{x+3}{x-1}$ ۳) $\frac{x-1}{x-3}$ ۴) $\frac{x-3}{x+1}$

۹۶۸- اگر برای هر x تساوی $f(x)+xf(-x)=x^2+2x$ برقرار باشد، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{-x^3-x^2+2}{x^2+1}$ ۲) $f(x)=\frac{-x^3+3x^2+2x}{x^2+1}$ ۳) $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2+4}$ ۴) $f(x)=\frac{x^3-2x}{x^2+1}$

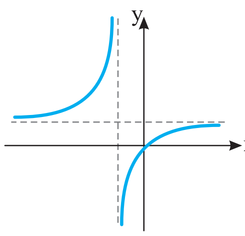
۹۶۹- اگر $f(x)+2f(\frac{1}{x})=x$، ضابطهٔ تابع f برای $x\neq 0$ کدام است؟

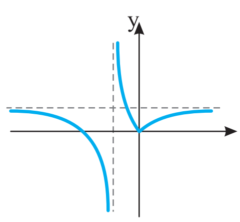
۱) $f(x)=\frac{2-x^2}{3x}$ ۲) $f(x)=\frac{1-x^2}{x}$ ۳) $f(x)=\frac{1+x^2}{3x}$ ۴) $f(x)=\frac{1+x^2}{x}$

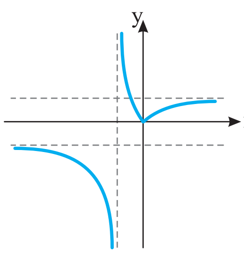
۹۷۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{x^3+ax^2+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{2\}$ است. مجموعهٔ مقادیر ممکن a کدام است؟

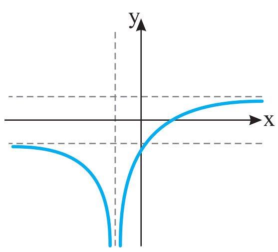
۱) $(-2,6)$ ۲) $(2,6)$ ۳) $(-6,2)$ ۴) $(-6,-2)$

۹۷۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x+1}$ به کدام صورت است؟

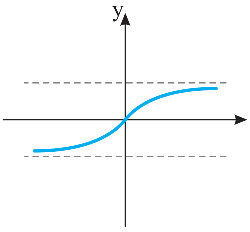
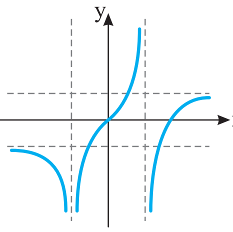
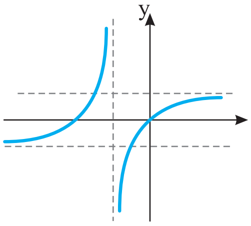
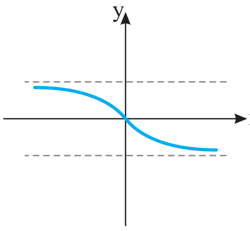
۱)


۲)


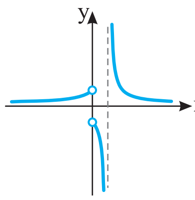
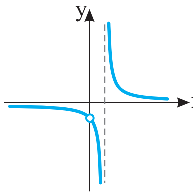
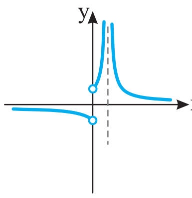
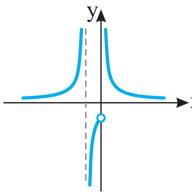
۳)


۴)


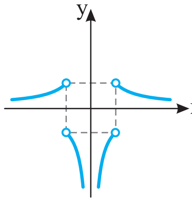
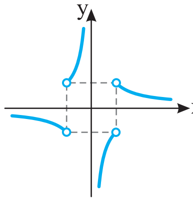
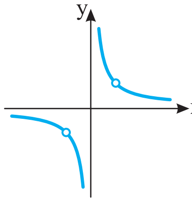
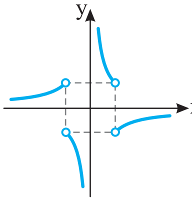
۹۷۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۷۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x^{2}-x}$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۷۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x^{2}-1|}{x^{3}-x}$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

فصل دوم: تابع

درس دوم / بخش دوم: توابع رادیکالی

تابع رادیکالی

به تابعی که به هر عدد حقیقی نامنفی، جذر آن را نسبت می‌دهد **تابع رادیکالی** می‌گوییم.

مثال: تابع‌های زیر رادیکالی هستند:

الف) $f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad D_f=[0,+\infty)$

ب) $f(x)=\sqrt{x-1}\ ,\quad D_f=[1,+\infty)$

تست ۱

اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $a<0$، حاصل $f(1-a^{2})$ کدام است؟

۱) $-a$ ۲) a ۳) $1-a$ ۴) $1+a$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$f(1-a^{2})=\sqrt{1-(1-a^{2})}=\sqrt{1-1+a^{2}}=\sqrt{a^{2}}=|a|=-a$$

دامنهٔ توابع رادیکالی

برای پیدا کردن دامنهٔ توابع رادیکالی، مجموعهٔ همهٔ مقادیری را پیدا می‌کنیم که عبارت زیر رادیکال به ازای آن‌ها نامنفی است.

مثال: دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x+3}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3\Rightarrow D_f=[-3,+\infty)$$

تست ۲

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل

مقادیری از x را پیدا می‌کنیم که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال نامنفی است:

$$3x-x^2\geq 0\Rightarrow x(3-x)\geq 0$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین به ازای $x\in[0,3]$ عبارت $3x-x^2$ که زیر رادیکال قرار دارد، نامنفی اســت، یعنی $D_f=[0,3]$، در نتیجه فقط چهار عدد صحیح صفر، ۱، ۲ و ۳ در دامنهٔ تابع f وجود دارند.

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$

برحسب اینکه عبارت ax^2+bx+c ثابت، خطی یا درجهٔ دوم باشد، دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ به‌صورت زیر است:

حالت ۱: $a=b=0$. در این صورت $f(x)=\sqrt{c}$ و با توجه به علامت c، تابع f مطابق جدول زیر است:

	$c\geq 0$	$c<0$
D_f	$\mathbb{R}$	$\varnothing$

حالت ۲: $a=0$ و $b\neq 0$. در این صورت $f(x)=\sqrt{bx+c}$ و با توجه به علامت b، تابع f مطابق جدول زیر است:

	$b>0$	$b<0$
D_f	$[-\frac{c}{b},+\infty)$	$(-\infty,-\frac{c}{b}]$

- $-\frac{c}{b}$ ریشهٔ چندجمله‌ای $bx+c$ (عبارت زیر رادیکال) است.

حالت ۳: $a\neq 0$. در این صورت با توجه به علامت a و علامت دلتای عبارت زیر رادیکال، دامنهٔ تابع f مطابق جدول زیر است:

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$a>0$	$D_f=(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$	$D_f=\mathbb{R}$	$D_f=\mathbb{R}$
$a<0$	$D_f=[x_1,x_2]$	$D_f=\{-\frac{b}{2a}\}$	$D_f=\varnothing$

- x_1 و x_2 ریشه‌های چندجمله‌ای ax^2+bx+c (عبارت زیر رادیکال) هستند و $x_1\leq x_2$.

تست ۳

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a^2-16)x+a}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

ابتـدا توجـه کنید که عبارت زیر رادیکال یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۱ اسـت. پس مطابق جدول‌هـای بالا، اگر ضریب x در عبارت زیر رادیکال برابر صفـر نباشـد، آن‌گاه دامنـهٔ تابع f بازه‌ای اسـت کـه برابر با $\mathbb{R}$ نیسـت. بنابراین بایـد $a^2-16=0$، یعنی $a=-4$ یـا $a=4$. در این صورت $f(x)=\sqrt{a}$، پس $a=-4$ قابل قبول نیست. بنابراین $a=4$ و $f(a)=f(4)=\sqrt{4}=2$.

تست ۴

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax+a^2-3}$ بازهٔ $(-\infty,2]$ باشد، مقدار $f(\frac{a}{3})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

مطابق جدول‌های بالا، باید a منفی باشد و $x=2$ ریشهٔ چندجمله‌ای $ax+a^2-3$ باشد. در نتیجه

$$a\times 2+a^2-3=0\Rightarrow a^2+2a-3=0\Rightarrow a=-3\ ,\ a=1$$

چون a باید عددی منفی باشد، پس $a=-3$. بنابراین $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. در نتیجه $f(\frac{a}{3})=f(-1)=\sqrt{-3(-1)+6}=\sqrt{9}=3$

تست ۵ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2x^2+mx+8}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حداکثر مقدار ممکن m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

راه‌حل برای اینکه دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ باشد باید عبارت $2x^2+mx+8$ به ازای هر مقدار حقیقی x نامنفی باشد. بنابراین باید ضریب x^2 در این عبارت، مثبت و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta\le 0\Rightarrow m^2-64\le 0\Rightarrow m^2\le 64\Rightarrow |m|\le 8\Rightarrow -8\le m\le 8$$

بنابراین حداکثر مقدار ممکن m برابر ۸ است.

تست ۶ اگر دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{(a-2)x^2+bx+6}$ بازهٔ $(-\infty,2]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -5

راه‌حل باید جواب $(a-2)x^2+bx+6\ge 0$ به صورت $x\le 2$ باشد. با توجه به تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم، ممکن نیست جواب نامعادلهٔ درجهٔ دوم به شکل $x\le 2$ باشد. بنابراین باید $a-2=0$ تا نامعادله به صورت $bx+6\ge 0$ درآید. برای اینکه جواب نامعادلهٔ اخیر به صورت $x\le 2$ باشد، باید ۲ ریشهٔ عبارت $bx+6$ باشد. یعنی

$$2b+6=0\Rightarrow b=-3$$

بنابراین $a=2$، $b=-3$ و $a+b=-1$.

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$ برابر با مجموعهٔ همهٔ xهایی از دامنهٔ تابع f است که به ازای آن‌ها $f(x)\ge 0$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$، اشتراک دامنهٔ تابع f و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)\ge 0$ را پیدا می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{|x|-1}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که دامنهٔ تابع $f(x)=|x|-1$ برابر با $\mathbb{R}$ است. همچنین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|-1\ge 0$ به‌صورت زیر است:

$$|x|-1\ge 0\Rightarrow |x|\ge 1\Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

اشتراک این مجموعه جواب‌ها با $\mathbb{R}$ برابر است با $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. در نتیجه $D_g=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

مثال: می‌خواهیم دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ را پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع $f(x)=1-\sqrt{x}$ برابر با $[0,+\infty)$ است. از طرف دیگر،

$$1-\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}\le 1\Rightarrow x\in[0,1]$$

در نتیجه $D_g=[0,+\infty)\cap[0,1]=[0,1]$.

تست ۷ چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}$ قرار دارند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

راه‌حل عبارت‌های زیر رادیکال‌ها باید نامنفی باشند، پس

$$1-2x\ge 0\Rightarrow x\le\frac{1}{2}\ ,\quad 4-\sqrt{1-2x}\ge 0\Rightarrow 4\ge\sqrt{1-2x}\Rightarrow 4^2\ge 1-2x\Rightarrow 2x\ge -15\Rightarrow x\ge -\frac{15}{2}$$

بنابراین $D_f=[-\frac{15}{2},\frac{1}{2}]$. عددهای صحیح ۰، ۱−، ۲−، ۳−، ۴−، ۵−، ۶− و ۷− در دامنهٔ تابع قرار دارند.

تست ۸ چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\left||x|-۲\right|-۱}$ ، قرار ندارند؟

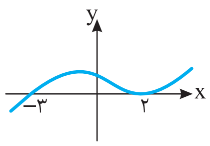
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس

$$\left||x|-۲\right|-۱\geq ۰ \Rightarrow \left||x|-۲\right|\geq ۱ \Rightarrow |x|-۲\geq ۱ \Rightarrow |x|\geq ۳ \Rightarrow x\geq ۳ \text{ یا } x\leq -۳ \quad \text{یا} \quad |x|-۲\leq -۱ \Rightarrow |x|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

در نتیجه $D_f=(-\infty,-۳]\cup[-۱,۱]\cup[۳,+\infty)$. بنابراین فقط عددهای صحیح ۲ و ۲− در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

تست ۹ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{f(x)}{۱-x^۲}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-۳)\cup[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)$

۳) $(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)\cup\{۲\}$ ۴) $(-\infty,-۳]\cup[-۱,۱]$

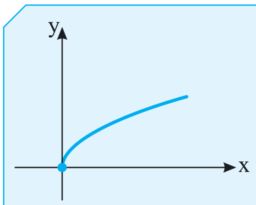
راه‌حل توجه کنید که $D_g=\{x|\dfrac{f(x)}{۱-x^۲}\geq ۰, x^۲\neq ۱\}$. در جدول زیر $f(x)$ ، $۱-x^۲$ و $\dfrac{f(x)}{۱-x^۲}$ تعیین علامت شده‌اند:

x	$-\infty$		-۳		-۱		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$		−	۰	+		+		+	۰	+	
$۱-x^۲$		−		−	۰	+	۰	−		−	
$\dfrac{f(x)}{۱-x^۲}$		+	۰	−	ت ن	+	ت ن	−	۰	−	

بنابراین $D_g=(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)\cup\{۲\}$.

تابع $f(x)=\sqrt{x}$

نمودار تابع ریشهٔ دوم به‌صورت روبه‌رو است.



$f(x)=\sqrt{x}$

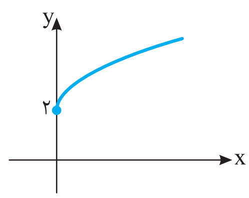
$D_f=[۰,+\infty)$

$R_f=[۰,+\infty)$

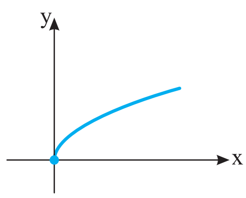
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}+۲$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به سمت بالا منتقل کنیم.

$D_f=[۰,+\infty)$

$R_f=[۲,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x}+۲$

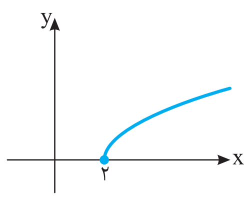


$y=\sqrt{x}$

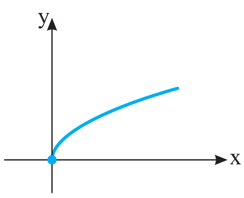
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم.

$D_f=[۲,+\infty)$

$R_f=[۰,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x-۲}$



$y=\sqrt{x}$

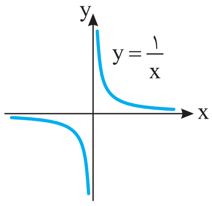
تست ۱۰

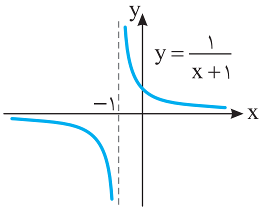
نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ را در نقطه‌ای به طول a قطع می‌کند. a در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(\frac{۳}{۲},۲)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(۳,۴)$

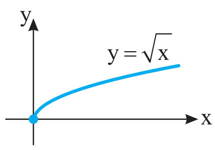
راه‌حل

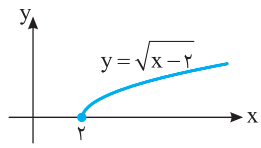
اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ به‌دست می‌آید.



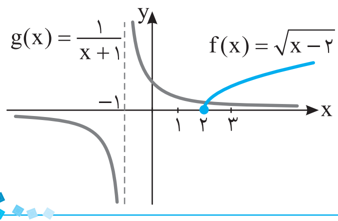


اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ به‌دست می‌آید.



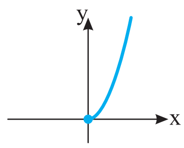


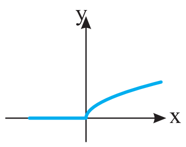
مطابق شکل روبه‌رو نمودارهای توابع f و g در نقطهٔ $x=a$ متقاطع‌اند و $a\in(۲,۳)$.

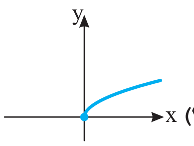


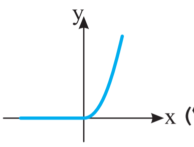
تست ۱۱

نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۲x-|x|}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

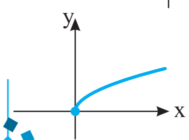
۳) 

۴) 

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که اگر $x<۰$، آن‌گاه $۲x-|x|=۲x-(-x)=۳x<۰$ و اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $۲x-|x|=۲x-x=x\geq ۰$.

بنابراین $D_f=[۰,+\infty)$. از طرف دیگر، اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=\sqrt{۲x-|x|}=\sqrt{x}$. در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



تست ۱۲

نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-\frac{x}{|x|}}$ چند نقطهٔ مشترک با نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}+۱$ دارد؟

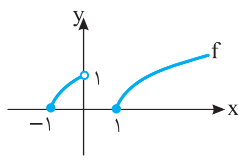
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

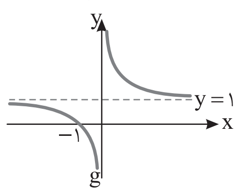
ابتدا توجه کنید که $x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases} x-۱ & x>۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$.

چون دامنهٔ تابع f مجموعهٔ مقادیری از x است که به ازای آن‌ها $x-\frac{x}{|x|}\geq ۰$، پس $D_f=[-۱,۰)\cup[۱,+\infty)$.

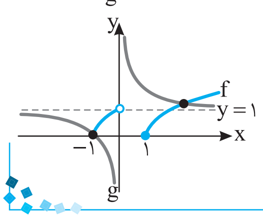
بنابراین $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-۱} & x\geq ۱ \\ \sqrt{x+۱} & -۱\leq x<۰ \end{cases}$. پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است.



از طرف دیگر نمودار تابع g به‌صورت روبه‌رو است.



اکنون توجه کنید که مطابق شکل مقابل، نمودارهای تابع‌های f و g دو نقطهٔ مشترک دارند.



سطح ۱

۹۷۵- اگر تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۲}-۲ & x\geq a\\ -۲x+۴ & x\leq a\end{cases}$ تعریف شود، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۷۶- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}-۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=|x|$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۷۷- اگر $f(x)=\sqrt{x}+۱$ و $D_f=(۰,+\infty)-\{۴\}$، چند عدد طبیعی در برد تابع f وجود ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۷۸- اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}+۲$ و $D_f=[۰,۳]$، مجموع اعداد صحیحی که در برد تابع f قرار دارند، کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۷۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۵-|x-۳|}$ کدام است؟

۱) $[-۲,۸]$ ۲) $(-۲,۸)$ ۳) $[-۸,۲]$ ۴) $(-۸,۲)$

۹۸۰- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲-|x+۱|}$ قرار دارند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۹۸۱- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{|x-۱|-۳}$ قرار ندارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

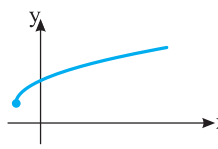
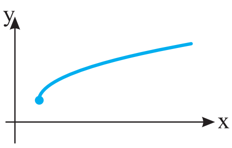
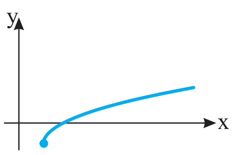
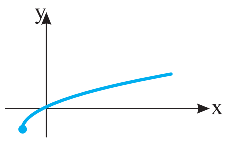
۹۸۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^۲+۲x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $\{۱\}$ ۴) $[۰,۱]$

۹۸۳- دامنهٔ $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲-۳}$ بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $۲a+b$ کدام است؟ کتاب درسی

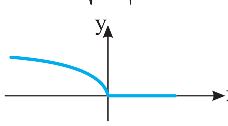
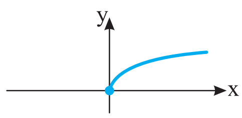
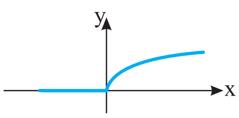
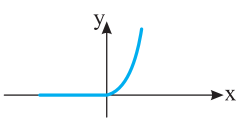
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۸۴- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}+۱$ کدام است؟ کتاب درسی

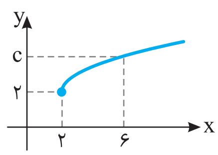
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

سطح ۲

۹۸۵- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+|x|}{۲}}$ کدام است؟

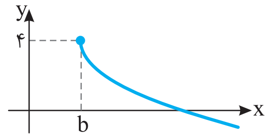
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۸۶- نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۶
۳) ۴ ۴) ۲

۹۸۷- اگر نمودار تابع $f(x)=a-\sqrt{x-۳}$ به‌صورت شکل مقابل باشد، حاصل ab کدام است؟

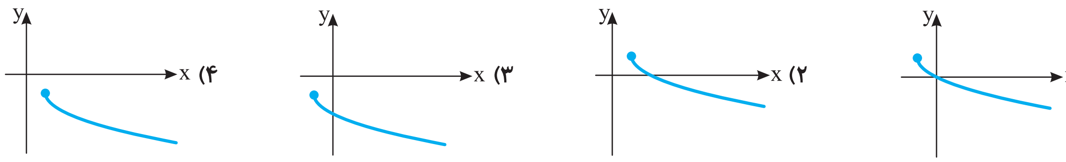


۱) ۱۰ ۲) ۱۲

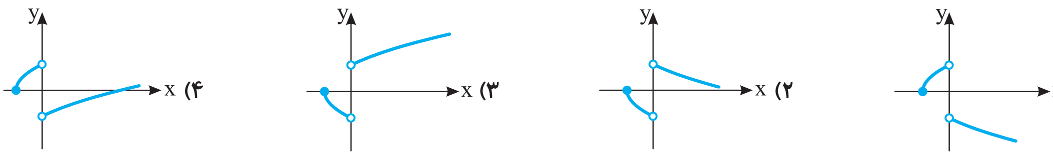
۳) ۶ ۴) ۸

کتاب درسی

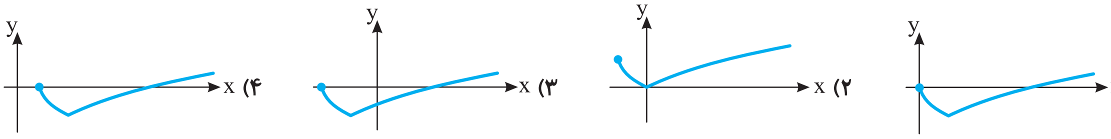
۹۸۸- نمودار تابع $f(x)=۱-\sqrt{x+۱}$ کدام است؟



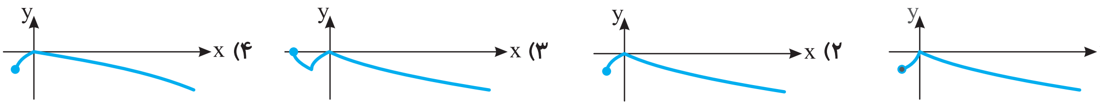
۹۸۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt{x+۱}$ کدام است؟



۹۹۰- نمودار تابع $y=|\sqrt{x}-۱|-۱$ کدام است؟



۹۹۱- نمودار تابع $y=-|\sqrt{x+۱}-۱|$ کدام است؟



۹۹۲- نمودار تابع $y=\sqrt{۱-x}+۱$ را دو واحد در کدام جهت انتقال دهیم تا محورهای مختصات را قطع نکند؟

۱) چپ ۲) راست ۳) بالا ۴) پایین

۹۹۳- اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم، سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار به‌دست آمده در نقطه‌ای با کدام طول نمودار اولیه را قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۹۹۴- اگر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار به‌دست آمده نمودار اولیه را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۵}$

۹۹۵- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. سپس آن را یک واحد به بالا و یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. نمودار به‌دست آمدهٔ نمودار تابع f را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۹۶- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}-۱$ را یک واحد به چپ و دو واحد به بالا می‌بریم. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده است، کدام است؟

۱) $y=-\sqrt{x+۱}-۱$ ۲) $y=-\sqrt{x-۱}-۱$ ۳) $y=-\sqrt{x+۱}+۱$ ۴) $y=-\sqrt{x-۱}+۱$

۹۹۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۹-|x^{۲}-۴|}$ کدام است؟

۱) $[-\sqrt{۱۳},\sqrt{۱۳}]$ ۲) $[-۳,\sqrt{۱۳}]$ ۳) $[-۱,\sqrt{۱۳}]$ ۴) $[-۴,۵]$

۹۹۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)\cup(\frac{۱}{۲},۱)$ ۲) $(-\infty,۰]\cup(\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(-\infty,۰)\cup[\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $[\frac{۱}{۲},۱)$

۹۹۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x}-۲}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۰)$ ۲) $(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۲}]-\{۰\}$ ۴) $[-\frac{۱}{۲},۱)-\{۰\}$

۱۰۰۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x^{۲}-۲x+۸}{-x^{۲}+۲x+۸}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-(-۲,۴)$ ۳) $\mathbb{R}-[-۲,۴]$ ۴) $(-۲,۴)$

۱۰۰۱- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^{۴}-۹x^{۲}}$ قرار ندارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۰۲- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}-|x+۶|}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۰۳- اگر $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۲ax+a+۲}$ و $D_f=\mathbb{R}$، حدود a کدام است؟

۱) $(-۱,۲)$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-۲,-۱)$

۱۰۰۴- تابع $f(x)=\sqrt{ax^{۲}+bx+۲a^{۲}}$ در تمام نقاط بازهٔ $[-۳,۲]$ تعریف می‌شود و در تمام نقاط مجموعهٔ $\mathbb{R}-[-۳,۲]$ تعریف نمی‌شود. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) صفر

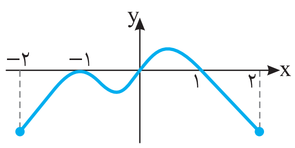
۱۰۰۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-۲x^{۲}+۸x+m}$ فقط می‌تواند مجموعه‌ای یک‌عضوی باشد. مقدار m کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۰۰۶- تابع $f(x)=\sqrt{(a+۲)x^{۲}+ax+b}$ در بازهٔ $(-\infty,۳]$ تعریف می‌شود و در بقیهٔ اعداد تعریف نمی‌شود. مقدار b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) ۴

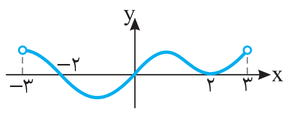
۱۰۰۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-x^{۳}f(x)}$ چند عدد صحیح وجود دارد؟



۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

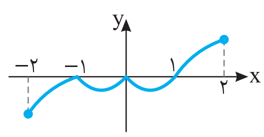
۱۰۰۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{۴-x^{۲}}{f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,۳)$

۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(-۳,-۲)\cup(۲,۳)$

۱۰۰۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{x^{۲}-x}}$ کدام است؟



۱) $(۰,۲]-\{۱\}$ ۲) $(-۱,۲]-\{۱\}$

۳) $(۰,۲]\cup\{-۱\}$ ۴) $(۰,۱)\cup(۱,۲]\cup\{-۱\}$

۱۰۱۰- معادلهٔ $\sqrt{x+1}=\left||x|-1\right|$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۱۱- معادلهٔ $|x^2-x|=\sqrt{x+2}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۱۲- معادلهٔ $\frac{\sqrt{x-1}}{x}=|x-2|$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۱۳- معادلهٔ $\sqrt{x+1}=1+\frac{1}{x}$ چند جواب دارد؟

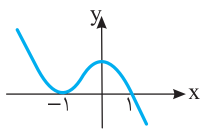
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۱۴- معادلهٔ $x\sqrt{x-1}=1$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

سطح ۳

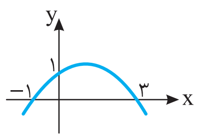
۱۰۱۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x-f(x+1)}$ کدام است؟



۱) $[0,+\infty)$ ۲) $(-\infty,0]$

۳) $[1,+\infty)$ ۴) $[-1,+\infty)$

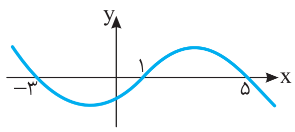
۱۰۱۶- نمودار تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم f در شکل مقابل رسم شده است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x^2+3f(x)}$ کدام است؟



۱) $[1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,\frac{3}{2}]$

۳) $[-\frac{3}{2},+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]$

۱۰۱۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل‌جمع عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x-2)f(x+2)}$، نیستند، کدام است؟



۱) ۱۱ ۲) ۱۶

۳) ۹ ۴) ۷

فصل دوم: تابع

درس دوم / بخش سوم: معادلات و توابع

رابطه و تابع

فرض کنید رابطه‌ای بین x و y به‌صورت یک تساوی داریم. در این صورت y تابعی از x است اگر و فقط اگر به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد که در تساوی داده شده صدق کند. به عبارت دیگر، اگر (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در تساوی مورد نظر صدق کنند و $x_1=x_2$، آن‌گاه $y_1=y_2$.

مثال: مجموعهٔ زوج مرتب‌هایی که در رابطهٔ $y^2=x$ صدق می‌کنند، تابع نیست، زیرا مثلاً زوج مرتب‌های $(1,1)$ و $(1,-1)$ عضو این مجموعه هستند (این دو زوج مرتب مؤلفه‌های اول برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر دارند). توجه کنید که به ازای هر مقدار مثبت x، دو مقدار برای y وجود دارد، زیرا $y=\sqrt{x}$ یا $y=-\sqrt{x}$.

مثال: در رابطهٔ $x^۲+۴y^۲+۴x-۴y+۵=۰$، y تابعی از x است. توجه کنید که این رابطه را می‌توانیم به شکل مجموع دو مربع کامل بنویسیم:

$$x^۲+۴x+۴+۴y^۲-۴y+۱=۰\Rightarrow(x+۲)^۲+(۲y-۱)^۲=۰$$

بنابراین باید هر دو عبارت $(x+۲)^۲$ و $(۲y-۱)^۲$ برابر صفر باشند که نتیجه می‌شود $x=-۲$ و $y=\frac{۱}{۲}$. یعنی تنها زوج مرتبی که در رابطهٔ داده شده صدق می‌کند $(-۲,\frac{۱}{۲})$ است. پس در این رابطه y تابعی از x است.

نکته

اگر رابطه‌ای را بتوان به‌صورت $y=f(x)$ نوشت، که در این‌جا $f(x)$ عبارتی جبری برحسب x است، آن‌گاه y تابعی از x است.

مثال: در رابطهٔ $y^۳+۳y^۲+۳y=x$، y تابعی از x است، زیرا رابطه را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$(y+۱)^۳-۱=x\Rightarrow(y+۱)^۳=x+۱\Rightarrow y+۱=\sqrt[۳]{x+۱}\Rightarrow y=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$$

واضح است که در تساوی بالا به ازای هر مقدار از x فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید. پس در این رابطه y تابعی از x است.

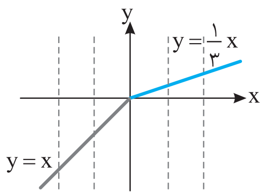
نکته

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، این رابطه یک تابع است، اگر و فقط اگر هر خط موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: در رابطهٔ $۲y+|y|=x$، y تابعی از x است.

ابتدا توجه کنید که اگر $y\geq۰$، آن‌گاه رابطه به‌صورت مقابل است: $۲y+y=x\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x$

و اگر $y<۰$، آن‌گاه رابطه به‌صورت مقابل است: $۲y-y=x\Rightarrow y=x$



پس نمودار رابطه به شکل روبه‌رو است و چون هر خط موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس در این رابطه y تابعی از x است.

نکته

به کمک تعریف تابع می‌توانیم ثابت کنیم در رابطهٔ داده شده، y تابعی از x است.

مثال: در رابطهٔ $y^۳+y=x$، y تابعی از x است.

فرض کنید دو زوج مرتب $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ عضو رابطه باشند. اگر $x_۱=x_۲$، آن‌گاه باید نشان دهیم $y_۱=y_۲$ تا در رابطهٔ داده شده y تابعی از x باشد. پس

$$x_۱=x_۲\Rightarrow y_۱^۳+y_۱=y_۲^۳+y_۲\Rightarrow y_۱^۳-y_۲^۳+y_۱-y_۲=۰$$

$$(y_۱-y_۲)(y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲)+(y_۱-y_۲)=۰\Rightarrow(y_۱-y_۲)(y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲+۱)=۰$$

اکنون توجه کنید که عبارت $y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲+۱$ ممکن نیست صفر شود و همواره مقداری مثبت دارد، زیرا

$$y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲+۱=(y_۱+\frac{۱}{۲}y_۲)^۲+\frac{۳}{۴}y_۲^۲+۱>۰$$

بنابراین $y_۱-y_۲=۰\Rightarrow y_۱=y_۲$

تست ۱ **کدام‌یک از رابطه‌های زیر y را تابعی بر حسب x تعریف نمی‌کند؟**

۱) $y=-x^۲+\frac{۱}{۲}x-۴$ ۲) $x=y$ ۳) $x=y^۲+۲$ ۴) $y=x^۳+۲x$

راه‌حل در مورد گزینهٔ (۳) توجه کنید که $x=۳\Rightarrow y^۲=۱\Rightarrow y=\pm۱$

بنابراین y تابعی از x نیست. بقیهٔ گزینه‌ها همگی چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x هستند، پس تابع‌اند.

تست ۲ در کدام رابطه y تابعی از x است؟

۱) $y-\sqrt{y}=x-2$
۲) $y+\frac{1}{y}=x^2-2$
۳) $y-\frac{1}{y}=x^3-2$
۴) $y+\sqrt{y}=x^4-2$

راه‌حل گزینه‌های (۱) تا (۳) را به کمک مثال نقض رد می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $x=2 \Rightarrow y-\sqrt{y}=0 \Rightarrow y=0,\ y=1$

گزینهٔ (۲): $x=\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y+\frac{1}{y}=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2} \Rightarrow y=2,\ y=\frac{1}{2}$

گزینهٔ (۳): $x=\sqrt[3]{2} \Rightarrow y-\frac{1}{y}=0 \Rightarrow y=1,\ y=-1$

توجه کنید که در هر قسمت مقدار x را طوری انتخاب می‌کنیم که معادلهٔ حاصل ساده باشد و بیش از یک جواب داشته باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای — معادلات و توابع

سطح ۱

۱۰۱۸- در کدام رابطه، y تابعی از x است؟

۱) $y^2=|x|$
۲) $y^3=|x-1|$
۳) $|y|=x^2-1$
۴) $|y^3|=x+1$

۱۰۱۹- در کدام‌یک از رابطه‌های زیر، y تابعی از x نیست؟

۱) $y-|x|=2$
۲) $y-x^3=1$
۳) $|y|-x=2$
۴) $y^3-x=1$

سطح ۲

۱۰۲۰- در کدام رابطه، y تابعی از x است؟

۱) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2$
۲) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$
۳) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=2$
۴) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$

۱۰۲۱- در کدام رابطه، y تابعی از x نیست؟

۱) $y^2+x^2+2x=-1$
۲) $y^2+x^2-4y=-4$
۳) $y^2+x^2+2x-4y=-5$
۴) $y^2+x^2-2x+4y=-4$

۱۰۲۲- در کدام‌یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x است؟

۱) $y^3+3y^2+3y+x^3=0$
۲) $y^2+2y+x^2=0$
۳) $y^3-xy+x^3=1$
۴) $y^2+xy+x^2=4$

۱۰۲۳- در کدام‌یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x است؟

۱) $y=y^2-x+1$
۲) $y=y^3-x$
۳) $y=x-y^3$
۴) $y=x-y^2-1$

۱۰۲۴- در کدام رابطه y تابعی از x نیست؟

۱) $2y-|y|=x$
۲) $2y+|y|=x$
۳) $y-\sqrt{y}=\sqrt{x}$
۴) $y+\sqrt{y}=\sqrt{x}$

سطح ۳

۱۰۲۵- در کدام رابطه، y تابعی از x نیست؟

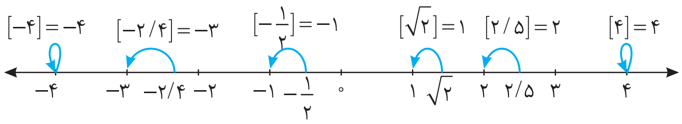
۱) $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$
۲) $x=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$
۳) $x=y+\sqrt{y^2+1}$
۴) $x=y+2\sqrt{y^2+1}$

درس دوم / بخش چهارم: جزء صحیح یک عدد حقیقی

جزء صحیح یک عدد حقیقی

جزء صحیح هر عدد حقیقی، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچک‌تر یا با آن برابر است. جزء صحیح عدد حقیقی x را با $[x]$ نشان می‌دهیم.

مثال:



نکته

برای اینکه جزء صحیح عدد حقیقی x را پیدا کنیم، باید عددی صحیح مانند n پیدا کنیم که $n\le x<n+۱$. در این صورت $[x]=n$.

تست ۱

مقدار $[-۱۰\sqrt{۲}]+[۱۰\sqrt{۳}]$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) صفر

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴۱\Rightarrow -۱۰\sqrt{۲}\simeq -۱۴/۱\Rightarrow -۱۵<-۱۰\sqrt{۲}<-۱۴\Rightarrow [-۱۰\sqrt{۲}]=-۱۵$$

$$\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳\Rightarrow ۱۰\sqrt{۳}\simeq ۱۷/۳\Rightarrow ۱۷<۱۰\sqrt{۳}<۱۸\Rightarrow [۱۰\sqrt{۳}]=۱۷$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $-۱۵+۱۷=۲$.

تست ۲

حاصل $[x^۳]+[۲x]$ به ازای $x=-\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۵ ۴) -۸

راه‌حل ابتدا $x=-\sqrt{۲}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$[(-\sqrt{۲})^۳]+[۲(-\sqrt{۲})]=[-\sqrt{۸}]+[-۲\sqrt{۲}]=[-۲\sqrt{۲}]+[-۲\sqrt{۲}]=۲[-۲\sqrt{۲}]$$

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید

$$۱<\sqrt{۲}<۱/۵\Rightarrow ۲<۲\sqrt{۲}<۳\Rightarrow -۳<-۲\sqrt{۲}<-۲\Rightarrow [-۲\sqrt{۲}]=-۳\Rightarrow ۲[-۲\sqrt{۲}]=-۶$$

تست ۳

مقدار $[۴\sin ۴۰^\circ]$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$\sin ۳۰^\circ<\sin ۴۰^\circ<\sin ۴۵^\circ\Rightarrow \frac{۱}{۲}<\sin ۴۰^\circ<\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۲<۴\sin ۴۰^\circ<۲\sqrt{۲}\simeq ۲/۸$$

بنابراین $[۴\sin ۴۰^\circ]=۲$.

ویژگی‌های جزء صحیح

فرض کنید x عددی حقیقی باشد. در این صورت

۱) اگر x عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x]=x$ و برعکس.

۲) اگر n عددی صحیح باشد و $n\le x<n+۱$، آن‌گاه $[x]=n$ و برعکس.

۳) $x-۱<[x]\le x$ و $[x]\le x<[x]+۱$.

۴) $۰\le x-[x]<۱$.

۵) اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+n]=[x]+n$ و برعکس.

۶) $[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ (این تساوی به‌صورت $[-x]+[x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ نیز بیان می‌شود).

نکته

اگر x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آن‌گاه در حالت کلی نابرابری‌های زیر برقرارند:

۱) $[x+y]\neq[x]+[y]$ ۲) $[x-y]\neq[x]-[y]$ ۳) $[xy]\neq[x][y]$ ۴) $[\frac{x}{y}]\neq\frac{[x]}{[y]}$

توجه کنید که برای برخی از مقادیر x و y ممکن است هر کدام از نابرابری‌های بالا به تساوی تبدیل شوند. مثلاً اگر $x=1/2$ و $y=2/3$، آن‌گاه

$$[x+y]=[1/2+2/3]=[3/5]=3=1+2=[1/2]+[2/3]=[x]+[y]$$

تست ۴ مقدار عبارت $A=[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\cdots+[\sqrt[3]{30}]$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۷ ۳) ۵۹ ۴) ۴۷

راه‌حل می‌دانیم $\sqrt[3]{1}=1$، $\sqrt[3]{8}=2$ و $\sqrt[3]{27}=3$. بنابراین

$$[\sqrt[3]{1}]=[\sqrt[3]{2}]=\cdots=[\sqrt[3]{7}]=1,\quad [\sqrt[3]{8}]=[\sqrt[3]{9}]=\cdots=[\sqrt[3]{26}]=2,\quad [\sqrt[3]{27}]=[\sqrt[3]{28}]=[\sqrt[3]{29}]=[\sqrt[3]{30}]=3$$

پس $A=7\times1+19\times2+4\times3=57$.

تست ۵ اگر $x^2+x<0$، حاصل $[x]+[x^2]+\cdots+[x^{10}]$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۵ ۴) -5

راه‌حل ابتدا با حل نامعادله، محدودهٔ x را می‌یابیم:

$$x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\Rightarrow -1<x<0$$

اگر عددی بین ۱− و صفر باشد، به توان هر عدد فردی برسد در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی

$$-1<x<0\Rightarrow\begin{cases}0<x^{2k}<1\Rightarrow[x^{2k}]=0\\ -1<x^{2k+1}<0\Rightarrow[x^{2k+1}]=-1\end{cases}\Rightarrow[x]+[x^2]+\cdots+[x^{10}]=5\times0+5\times(-1)=-5$$

تست ۶ اگر $[x]=3$ و $[y]=5$، حاصل $[x+y]$ چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $[x]=3$ نتیجه می‌دهد $3\le x<4$ و $[y]=5$ نتیجه می‌دهد $5\le y<6$. اگر این دو نابرابری را با هم جمع کنیم به دست می‌آید $8\le x+y<10$، بنابراین $[x+y]$ یکی از عددهای صحیح ۸ یا ۹ است.

تست ۷ اگر $[\frac{1-4x}{3}]=-2$، مقدار $[-x]$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

راه‌حل چون $[\frac{1-4x}{3}]=-2$، پس

$$-2\le\frac{1-4x}{3}<-1\Rightarrow-6\le1-4x<-3\Rightarrow-7\le-4x<-4\Rightarrow-\frac{7}{4}\le-x<-1\Rightarrow[-x]=-2$$

تست ۸ اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]$ برابر کدام است؟

۱) n ۲) $n+1$ ۳) $n-1$ ۴) $2n-1$

راه‌حل **راه‌حل اول** از نابرابری $n^3<n^3+3n^2<(n+1)^3$، نتیجه می‌گیریم $n<\sqrt[3]{n^3+3n^2}<n+1$، بنابراین $[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]=n$.

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=2$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=2$، آن‌گاه $[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]=[\sqrt[3]{20}]=2$. از طرف دیگر فقط عبارت گزینهٔ (۱) به ازای $n=2$ برابر ۲ می‌شود.

تست ۹

اگر x عددی غیرصحیح باشد، حاصل $[x^۲-۱]+[۲-x^۲]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) صفر یا ۱- ۴) صفر یا ۱

راه‌حل می‌دانیم عدد صحیح را می‌توان از داخل جزء صحیح بیرون آورد، پس $[x^۲-۱]+[۲-x^۲]=[x^۲]-۱+۲+[-x^۲]=[x^۲]+[-x^۲]+۱$

می‌دانیم $[a]+[-a]$ به ازای مقدارهای صحیح a برابر صفر و برای مقدارهای غیرصحیح a برابر ۱- است. اگر x عددی غیرصحیح باشد، $x^۲$ می‌تواند صحیح باشد (مثل $x=\sqrt{۲}$) یا غیرصحیح باشد (مثل $x=\frac{۱}{۲}$). بنابراین $[x^۲]+[-x^۲]+۱$ می‌تواند برابر صفر یا ۱ باشد.

حل معادله‌های شامل جزء صحیح

- **اگر k عدد صحیحی باشد، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]=k$ بازهٔ $[k,k+۱)$ است.**
- **اگر k عدد غیرصحیحی باشد، معادلهٔ $[x]=k$ جواب ندارد.**

مثال: الف) مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]=۳$ بازهٔ $[۳,۴)$ است.

ب) معادلهٔ $[x]=\frac{۱}{۲}$ جواب ندارد، زیرا سمت چپ آن عددی صحیح و سمت راست آن عددی غیرصحیح است.

تست ۱۰

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{۲x+۱}{۳}]=۲$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل ابتدا مجموعهٔ جواب‌های معادله را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$[\frac{۲x+۱}{۳}]=۲\Rightarrow ۲\leq\frac{۲x+۱}{۳}<۳\Rightarrow ۶\leq ۲x+۱<۹\Rightarrow ۵\leq ۲x<۸\Rightarrow \frac{۵}{۲}\leq x<۴$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[\frac{۵}{۲},۴)$ است، که تنها عدد صحیح در آن ۳ است.

تست ۱۱

معادلهٔ $[x-۱]+۲[x]=m$ جواب دارد. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل ابتدا معادله را به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $[x]-۱+۲[x]=m\Rightarrow ۳[x]=m+۱\Rightarrow [x]=\frac{m+۱}{۳}$

اگر $\frac{m+۱}{۳}$ عدد صحیحی باشد، آن‌گاه معادلهٔ بالا جواب دارد. با توجه به گزینه‌های داده شده، به ازای $m=۲$ مقدار $\frac{m+۱}{۳}$ صحیح است.

تست ۱۲

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+۱]+[x-[x]]=۲$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $[x+۱]+[x-[x]]=۲\Rightarrow [x]+۱+[x]-[x]=۲\Rightarrow [x]=۱$

در نتیجه $۱\leq x<۲$، پس $a=۱$ و $b=۲$. بنابراین $b-a=۱$.

تست ۱۳

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[۴-x]+[x-۳]=۰$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $[۰,+\infty)$

راه‌حل می‌توان نوشت $[۴-x]+[x-۳]=۰\Rightarrow ۴+[-x]+[x]-۳=۰\Rightarrow [x]+[-x]=-۱\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

تست ۱۴

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^۲-۵[x]+۶=۰$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر فرض کنیم $[x]=t$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت مقابل درمی‌آید: $t^۲-۵t+۶=۰\Rightarrow (t-۲)(t-۳)=۰$

در نتیجه $t=۲\Rightarrow [x]=۲\Rightarrow x\in[۲,۳)\ ,\quad t=۳\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow x\in[۳,۴)$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $[۲,۳)\cup[۳,۴)=[۲,۴)$. پس $a=۲$ و $b=۴$. در نتیجه $b-a=۲$.

تست ۱۵

معادلهٔ $[x^۲]+[۲x]-x=۶$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

ابتدا توجه کنید از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود $[x^۲]+[۲x]=x+۶$. سمت چپ این معادله عددی صحیح است، پس سمت راستش، یعنی $x+۶$ نیز عددی صحیح است. بنابراین x هم عددی صحیح است. بنابراین $x^۲$ و $۲x$ نیز عددهایی صحیح‌اند. در نتیجه $[x^۲]=x^۲$ و $[۲x]=۲x$ و معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x^۲+۲x-x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۳)=۰\Rightarrow x=۲, x=-۳$$

هر دو این عددها در معادلهٔ مورد نظر صدق می‌کنند. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

تست ۱۶

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $۴[x]=۳x$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۸}{۳}$

راه‌حل

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x]=k\ (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow ۴k=۳x \Rightarrow x=\frac{۴k}{۳}=۰,\pm\frac{۴}{۳},\pm\frac{۸}{۳},\pm۴,\dots$$

از طرف دیگر، $x-۱<[x]\le x$ ، پس $[x]=\frac{۳x}{۴} \Rightarrow x-۱<\frac{۳x}{۴}\le x \Rightarrow ۰\le x<۴$

تنها عددهای $x=۰,\frac{۴}{۳},\frac{۸}{۳}$ در این محدوده قرار دارند. پس مجموع جواب‌ها برابر ۴ است.

حل نامعادله‌های شامل جزء صحیح

فرض کنید k عددی صحیح باشد. در این صورت

$$[x]>k\Rightarrow x\ge k+۱\ ,\quad [x]\ge k\Rightarrow x\ge k$$
$$[x]<k\Rightarrow x<k\ ,\quad [x]\le k\Rightarrow x<k+۱$$

مثال: مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $-۱<[x]\le ۲$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[x]>-۱\Rightarrow x\ge ۰\ ,\quad [x]\le ۲\Rightarrow x<۳$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های $[۰,+\infty)$ و $(-\infty,۳)$ است، که برابر است با $[۰,۳)$.

تست ۱۷

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۲[x+۱]+[x]>۳$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳},+\infty)$ ۲) $(\frac{۱}{۳},۱]$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $[x+۱]=[x]+۱$. بنابراین نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۲([x]+۱)+[x]>۳\Rightarrow ۳[x]+۲>۳\Rightarrow [x]>\frac{۱}{۳}$$

چون $[x]$ عددی صحیح و بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۳}$ است، پس $[x]\ge۱$. بنابراین $x\ge۱$ ، یعنی مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر $[۱,+\infty)$ است.

تست ۱۸

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳[x]-[x]^۲\ge۰$ بازهٔ $[a,b)$ است. طول این بازه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $۳[x]-[x]^۲\ge۰\Rightarrow [x](۳-[x])\ge۰$

بنابراین $۰\le[x]\le۳$. اکنون می‌توان نوشت $[x]\ge۰\Rightarrow x\in[۰,+\infty)\ ,\quad [x]\le۳\Rightarrow x\in(-\infty,۴)$

بنابراین $x\in[۰,+\infty)\cap(-\infty,۴)=[۰,۴)$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[۰,۴)$ است که طول آن برابر است با $۴-۰=۴$.

سطح ۱

۱۰۲۶- مقدار $[-۲۰/۹]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) -۱۹ ۲) -۲۰ ۳) -۲۱ ۴) -۲۲

۱۰۲۷- اگر $x^{۳}=۲۰$، مقدار $[-x]$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) -۴

۱۰۲۸- حاصل $[\frac{۱}{۲}]+[\frac{۲}{۲}]+\cdots+[\frac{۲۰}{۲}]$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۲۰

۱۰۲۹- مقدار عبارت $A=[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}]+\cdots+[\sqrt{۲۰}]$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

۱۰۳۰- مقدار عبارت $A=[\sqrt[۳]{۲}]+[\sqrt[۳]{۳}]+\cdots+[\sqrt[۳]{۶۳}]$ کدام است؟

۱) ۱۵۵ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۵۷ ۴) ۱۵۸

۱۰۳۱- اگر $\frac{۱}{۳}<x<\frac{۲}{۳}$، مقدار عبارت $[۳x]-[\frac{۲}{۳x}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) صفر

۱۰۳۲- اگر $[x]=۲$، مجموعهٔ مقدارهای $[۳x-۵]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) $\{۱,۲,۳\}$ ۲) $\{۱,۲,۳,۴\}$ ۳) $\{۲,۳,۴\}$ ۴) $\{۲,۳\}$

۱۰۳۳- اگر $[\frac{۵-x}{۲}]=-۳$، حدود x کدام است؟

۱) $(۹,۱۱]$ ۲) $(-۱۱,۱۱)$ ۳) $[-۱۱,-۹]$ ۴) $[۹,۱۱)$

۱۰۳۴- اگر $[۳x-۲]=۱$، مقدار $[۲x-۳]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) فقط -۱ ۲) -۲ ۳) -۱ یا صفر ۴) فقط صفر

۱۰۳۵- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[۲x-\frac{۱}{۲}]=۳$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۳۶- اگر $۲[x+۲]-[x-۱]=۷$، حدود x کدام است؟

۱) $۱\le x<۲$ ۲) $۲\le x<۳$ ۳) $۳\le x<۴$ ۴) $۴\le x<۵$

سطح ۲

۱۰۳۷- مقدار $[\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۳۸- مقدار $[\sqrt[۳]{۲+\sqrt[۳]{۲+\sqrt[۳]{۲}}}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۳۹- مقدار عبارت $A=[-\sqrt{۱۰}]+[-\sqrt{۹}]+[-\sqrt{۸}]+\cdots+[\sqrt{۱۰}]$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۶ ۳) -۷ ۴) -۸

۱۰۴۰- مقدار $[3/25+\frac{7}{8}]+\cdots+[3/25+\frac{2}{8}]+[3/25+\frac{1}{8}]+[3/25]$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۱۰۴۱- اگر $[\sqrt{x}]=9$ و $[\sqrt{y}]=12$، بیشترین مقدار $[x+y]$ کدام است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۴۲ ۳) ۲۵۶ ۴) ۲۶۸

۱۰۴۲- اگر $[x]=[y]=2$، حاصل $[\frac{2x+3y}{5}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲ یا ۳

۱۰۴۳- اگر $[x]=2$، عبارت $[x^2-4x]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۴۴- اگر $[x^2+x]=-1$، مقدار $[x^{10}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۴۵- اگر $[x^2-2x]=-1$، مقدار $[\frac{x^5}{32}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۴۶- اگر $[x^2-5x]=[x^2-7x]=-1$، مقدار $[x^2-6x+1]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) -2

۱۰۴۷- اگر $[3x]=-2$، مقدار عبارت $A=[x]+[x^2]+[x^3]+\cdots+[x^{10}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) -5 ۴) ۳

۱۰۴۸- اگر $[x^2]=0$ و $x\neq 0$، مقدار عبارت $A=[-x^4]+[-x^6]+\cdots+[-x^{20}]$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -9 ۳) -10 ۴) -12

۱۰۴۹- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^2+2n}]$ کدام است؟

۱) $n-1$ ۲) n ۳) $n+1$ ۴) $n+2$

۱۰۵۰- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^2+4n+1}]$ کدام است؟

۱) n ۲) $n+1$ ۳) $n+2$ ۴) $n+3$

۱۰۵۱- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}]$ کدام است؟

۱) $n-1$ ۲) n ۳) $n+1$ ۴) $n+2$

۱۰۵۲- اگر $[x+[x-3]]=1$، حدود x کدام است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $[2,3)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $[2,4)$

۱۰۵۳- اگر $[x+[x]]=3[x]+1$، مقدار $[x^3]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -2 ۴) صفر

۱۰۵۴- مجموع جواب‌های صحیح معادلهٔ $[\frac{x}{3}+[\frac{x}{3}+[\frac{x}{3}]]]=12$ چقدر است؟

۱) ۵۴ ۲) ۳۹ ۳) ۳۶ ۴) ۲۵

۱۰۵۵- معادلهٔ $2[x]=x+1$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۵۶- اگر $[x+2]+[3-x]=x$، چند مقدار مختلف برای x وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۵۷- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[-2x]+[1-2x]+[3-2x]=1$ کدام است؟

۱) $(0,\frac{1}{3}]$ ۲) $(0,\frac{1}{2}]$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(0,\frac{1}{4}]$

۱۰۵۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۳|x|+۲[x]=۱$ **که در بازهٔ** $(-۲,۱)$ **قرار دارند، کدام است؟**

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$ ۳) $-\frac{۷}{۳}$ ۴) صفر

۱۰۵۹- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+\frac{۱}{۳}]+[x+\frac{۷}{۳}]=۴$ **بازهٔ** $[a,b)$ **است. مقدار** $a-b$ **کدام است؟**

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

۱۰۶۰- اگر معادلهٔ $[x+۲[x]]+[x-۲]=k$ **جواب داشته باشد،** k **کدام عدد می‌تواند باشد؟**

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۰۶۱- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^۲-۳[x]+۲=۰$ **بازهٔ** $[a,b)$ **است. مقدار** $a+b$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۶۲- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $۲[x]^۲+[x-۱]=۰$ **کدام است؟**

۱) $[-۱,-\frac{۱}{۲}]$ ۲) $[-۱,۰)$ ۳) $[-۲,۰)$ ۴) $[-۲,-۱]$

۱۰۶۳- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^۲=[x+۲]$ **به صورت** $[a,۰)\cup[b,c)$ **است. مقدار** $a+b+c$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۶۴- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+۱]^۲-۲[x+۱]=۸$ **کدام است؟**

۱) $(۳,۴)$ ۲) $[-۳,۳]$ ۳) $[-۳,-۲)\cup[۳,۴)$ ۴) $[-۳,۴)$

۱۰۶۵- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{۲[x]+۱}{۳}]=۳$ **کدام است؟**

۱) $[۵,۶)$ ۲) $[۴,۵)$ ۳) $[۴,۶)$ ۴) $[۴,۷)$

۱۰۶۶- معادلهٔ $[۲x]=\frac{x}{۲}$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۶۷- معادلهٔ $x^۲+۱=[x]$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

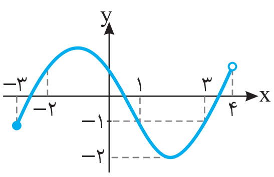
۱۰۶۸- معادلهٔ $x[x]=۱$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۶۹- معادلهٔ $|x^۲-۱|+[x]=۰$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۷۰- نمودار تابع f **در شکل مقابل رسم شده است. مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ** $[f(x)]=-۲$ **کدام است؟**



۱) $[۱,۳]$ ۲) $\{-۳,۱,۳\}$

۳) $(۱,۳)$ ۴) $[-۳,-۲)$

۱۰۷۱- معادلهٔ $[x]+\sqrt{x}=۱$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۷۲- معادلهٔ $[x]=|x^۲-۱|$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۷۳- معادلهٔ $x^۲-x[x]=۱$ **چند جواب مثبت و چند جواب منفی دارد؟**

۱) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۲) چهار جواب مثبت دارد و جواب منفی ندارد.

۳) مجموعهٔ جواب‌های مثبت معادله نامتناهی است ولی جواب منفی ندارد.

۴) مجموعهٔ جواب‌های منفی معادله نامتناهی است ولی جواب مثبت ندارد.

۱۰۷۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳\le[x]\le۴$ **به‌صورت** $[a,b)$ **است. مقدار** $a+b$ **کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰۷۵- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\left|[2x+3]\right|<1$ کدام است؟

۱) $[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ ۲) $(-2,-1)$ ۳) $[-\frac{3}{2},-1)$ ۴) $(-2,-\frac{3}{2}]$

۱۰۷۶- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $[2x]\leq 2x-1$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(\frac{1}{2},1)$ ۴) $\varnothing$

سطح ۳

۱۰۷۷- اگر a عدد طبیعی باشد و $[\sqrt{100}]=[\sqrt{101}]=\cdots=[\sqrt{100+a}]$، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۲

۱۰۷۸- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{x-2}{x-1}]-[\frac{1}{1-x}]=[\frac{1}{x+1}]$ کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{2},0)$ ۲) $(-\frac{1}{2},0]$ ۳) $(-\frac{1}{2},1)$ ۴) $(-\frac{1}{2},2)$

۱۰۷۹- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+2]^2-[x-2]^2=-24$ کدام است؟

۱) $[-4,-3)$ ۲) $[-3,-1)$ ۳) $[-3,-2)$ ۴) $[-2,-1)$

۱۰۸۰- معادلهٔ $[2x^2]-[4x]=x-2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۸۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $[\frac{x}{2}-\frac{1}{3}]=x+1$ چقدر است؟

۱) -7 ۲) -6 ۳) -5 ۴) -4

۱۰۸۲- معادلهٔ $x^2+[x]=3-[-x]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۰۸۳- اگر مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x-3]-[-x]=-2$ بازهٔ (a,b) باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۸۴- معادلهٔ $3[x]=2x$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۸۵- چند عدد صحیح در معادلهٔ $[\frac{x}{3}-4]=\frac{x}{2}+8$ صدق می‌کنند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۸۶- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $[x-\frac{1}{2}][x+\frac{1}{2}]=2$ به صورت $[-m,n)\cup[m,k)$ است. مقدار $m+n+k$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{11}{2}$

۱۰۸۷- به ازای کدام مقدار از k معادلهٔ $[x-\frac{1}{2}][x+\frac{1}{2}]=k$ جواب <u>ندارد</u>؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) صفر

۱۰۸۸- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{1-|x-\frac{1}{2}|}=[x]^2-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{5}{8}$ ۳) $-\frac{5}{16}$ ۴) $-\frac{5}{24}$

۱۰۸۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $[x]^2-2[x]\leq 3$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -3 ۴) -2

۸۸۶ (۲) توجه کنید که $f(-۵)=\frac{-۵+۲}{۳}=\frac{-۳}{۳}=-۱,\quad f(\circ)=g(\circ)$

اکنون با توجه به تساوی $g(x-۲)=۲-x$ می‌توان نوشت:

$$g(x-۲)=-(x-۲)\Rightarrow g(x)=-x\xrightarrow{x=\circ}g(\circ)=\circ$$

بنابراین $f(-۵)+f(\circ)=-۱+\circ=-۱$.

۸۸۷ (۴) اگر در تساوی $f(x)=۳x+۴$ به جای x قرار دهیم $۲x-۱$ به‌دست می‌آید

$$f(۲x-۱)=۳(۲x-۱)+۴=۶x+۱=۲(۳x+۴)-۷=۲f(x)-۷$$

۸۸۸ (۴) **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(\frac{x-۱}{۲})=(x-۱)^۲\xrightarrow{\frac{x-۱}{۲}=t}f(t)=(۲t)^۲\Rightarrow f(t)=۴t^۲$$

بنابراین $f(x)=۴x^۲$.

راه‌حل دوم به جای x ، $۲x+۱$ قرار می‌دهیم. بنابراین

$$f(x)=(۲x+۱-۱)^۲=(۲x)^۲=۴x^۲$$

۸۸۹ (۴) اگر فرض کنیم $۲x-۱=t$ ، آن‌گاه $x=\frac{t+۱}{۲}$. در تساوی داده شده به جای x قرارمی‌دهیم $\frac{t+۱}{۲}$:

$$f(t)=۴(\frac{t+۱}{۲})^۲-۸(\frac{t+۱}{۲})=t^۲+۲t+۱-۴t-۴=t^۲-۲t-۳$$

بنابراین $f(x)=x^۲-۲x-۳$.

۸۹۰ (۲) توجه کنید که $f(x+۲)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۹=(x+۲)^۳+۱$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $x-۲$ ، به‌دست می‌آید $f(x)=x^۳+۱$

۸۹۱ (۲) اگر فرض کنیم $t=x^۲+۱$ ، آن‌گاه $x^۲=t-۱$ و $t\geq ۱$ بنابراین

$$f(x^۲+۱)=(x^۲)^۲-x^۲\Rightarrow f(t)=(t-۱)^۲-(t-۱)=t^۲-۳t+۲$$

بنابراین اگر $x\geq ۱$ ، آن‌گاه $f(x)=x^۲-۳x+۲$.

۸۹۲ (۳) اگر $x\geq ۴$ ، آن‌گاه $f(x)=x-۲+x-۴=۲x-۶$. اگر $x<۴$ ، آن‌گاه $f(x)=x-۲+۴-x=۲$. در نتیجه

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۶ & x\geq ۴\\ ۲ & x<۴\end{cases}\Rightarrow f(x)=k(x)$$

۸۹۳ (۴) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که دامنهٔ همهٔ توابع برابر $\mathbb{R}$ است و

$$x\geq\circ\Rightarrow f(x)=x(x-x)=\circ,\quad x<\circ\Rightarrow f(x)=-x(x+x)=-۲x^۲$$

ازطرف‌دیگر $x\geq\circ\Rightarrow t(x)=x(x-x)=\circ,\quad x<\circ\Rightarrow t(x)=x(-x-x)=-۲x^۲$

بنابراین توابع t و f برابرند. دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱)

$$\begin{array}{l}x\geq\circ\Rightarrow g(x)=x(x+x)=۲x^۲\\ x<\circ\Rightarrow g(x)=-x(x-x)=\circ\end{array}\Rightarrow g(x)\neq f(x)$$

گزینهٔ (۲)

$$\begin{array}{l}x\geq\circ\Rightarrow h(x)=x(x+x)=۲x^۲\\ x<\circ\Rightarrow h(x)=x(x-x)=\circ\end{array}\Rightarrow h(x)\neq f(x)$$

گزینهٔ (۳)

$$\begin{array}{l}x\geq\circ\Rightarrow k(x)=|x(x-x)|=\circ\\ x<\circ\Rightarrow k(x)=|x(x+x)|=۲x^۲\end{array}\Rightarrow k(x)\neq f(x)$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(-۱)=-۲$ ، $g(-۱)=\circ$ ، $h(-۱)=\circ$ ، $k(-۱)=۲$ و $t(-۱)=-۲$. بنابراین تابع f نمی‌تواند با توابع g، h و k برابر باشد. پس باید با تابع t برابر باشد.

۸۹۴ (۲) دامنهٔ تابع را به سه قطعهٔ $x<-۳$ ، $-۳\leq x\leq ۱$ و $x>۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$x<-۳\Rightarrow f(x)=۲+(-x-۳)-(۱-x)=-۲$$

$$-۳\leq x\leq ۱\Rightarrow f(x)=۲+x+۳-(۱-x)=۲x+۴$$

$$x>۱\Rightarrow f(x)=۲+x+۳-(x-۱)=۶$$

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x<-۳\\ ۲x+۴ & -۳\leq x\leq ۱\\ ۶ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین تابع f با تابع h برابر است.

۸۹۵ (۴) اگر در تساوی $f(xy)=f(x)+f(y)\quad (۱)$

قرار دهیم $x=۲$ و $y=۵$ به‌دست می‌آید

$$f(۱\circ)=f(۲)+f(۵)\Rightarrow ۱=f(۲)+a\Rightarrow f(۲)=۱-a$$

اکنون اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=۲$ و $y=۳$ ، به‌دست می‌آید

$$f(۶)=f(۲)+f(۳)=۱-a+b$$

۸۹۶ (۱) اگر در تساوی داده شده $-x$ را به جای x قرار دهیم، تساوی زیر به‌دست می‌آید

$$-xf(-x)+f(x)=x^۲+x\Rightarrow f(-x)=\frac{x^۲+x-f(x)}{-x}$$

در تساوی داده شده به جای $f(-x)$ قرار می‌دهیم $\frac{x^۲+x-f(x)}{-x}$ و در نتیجه

$$xf(x)+\frac{x^۲+x-f(x)}{-x}=x^۲-x\Rightarrow -x^۲f(x)+x^۲+x-f(x)=-x^۳+x^۲$$

$$(x^۲+۱)f(x)=x^۳+x\Rightarrow f(x)=\frac{x(x^۲+۱)}{x^۲+۱}\Rightarrow f(x)=x$$

۸۹۷ (۴) توجه کنید که $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}\Rightarrow f(y)f(x-y)=f(x)\quad (۱)$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$ و $y=\frac{۱}{۲}$ ، به‌دست می‌آید

$$f(\frac{۱}{۲})\times f(\frac{۱}{۲})=f(۱)\Rightarrow f(۱)=۸^۲=۶۴$$

اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=۱$ و $y=\frac{۱}{۳}$ ، به‌دست می‌آید

$$f(\frac{۱}{۳})f(\frac{۲}{۳})=f(۱)=۶۴\quad (۲)$$

و اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=\frac{۲}{۳}$ و $y=\frac{۱}{۳}$ ، به‌دست می‌آید

$$f(\frac{۱}{۳})f(\frac{۱}{۳})=f(\frac{۲}{۳})\Rightarrow f(\frac{۲}{۳})=(f(\frac{۱}{۳}))^۲\quad (۳)$$

بنابراین از تساوی‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $(f(\frac{۱}{۳}))^۳=۶۴\Rightarrow f(\frac{۱}{۳})=۴$

۸۹۸ (۳) توجه کنید که

$$|x-|x||=\begin{cases}-۲x & x<\circ\\ \circ & x\geq\circ\end{cases}$$

بنابراین اگر $x<\circ$ ، آن‌گاه $f(x)=|x-(-۲x)|=|۳x|=-۳x$ و اگر $x\geq\circ$ ، آن‌گاه

$$f(x)=|x-\circ|=|x|=x$$

بنابراین تابع f با تابع k برابر است.

۸۹۹ (۴) **راه‌حل اول** با تغییر متغیر $۲x-۳=t$ می‌توان نوشت

$$۲x-۳=t\Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲}$$

$$f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳\Rightarrow f(t)=۴(\frac{t+۳}{۲})^۲-۱۴(\frac{t+۳}{۲})+۱۳$$

$$f(t)=t^۲+۶t+۹-۷t-۲۱+۱۳\Rightarrow f(t)=t^۲-t+۱\Rightarrow f(x)=x^۲-x+۱$$

راه‌حل دوم عبارت $۴x^۲-۱۴x+۱۳$ را برحسب $۲x-۳$ می‌نویسیم

$$f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳=(۴x^۲-۱۲x+۹)+(-۲x+۴)$$

$$f(۲x-۳)=(۲x-۳)^۲-(۲x-۳)+۱\Rightarrow f(x)=x^۲-x+۱$$

راه‌حل سوم اگر در عبارت $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ قرار دهیم $x=۱$ ، نتیجه می‌شود $f(-۱)=۳$. فقط در گزینهٔ (۴) این شرط برقرار است.

۹۰۰ (۴) تساوی را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$۲x+f(x)=۴x\times f(x)-۱۲$$

در نتیجه $(۴x-۱)\times f(x)=۲x+۱۲$ ، بنابراین $f(x)=\frac{۲x+۱۲}{۴x-۱}$.

۹۰۱ (۴) توجه کنید که $f(۲x)=\frac{۳(۲x)-۴}{۲(۲x)+۱}=\frac{۶x-۴}{۴x+۱}$

بنابراین باید معادلهٔ $\frac{۶x-۴}{۴x+۱}=۲$ را حل کنیم:

$$\frac{۶x-۴}{۴x+۱}=۲\Rightarrow ۶x-۴=۲(۴x+۱)\Rightarrow ۶x-۴=۸x+۲\Rightarrow -۶=۲x\Rightarrow x=-۳$$

۹۰۲ (۲) از تساوی داده شده به‌دست می‌آید $f(a)=\frac{۸a}{a^۲+۳}=-۲$

بنابراین $۸a=-۲a^۲-۶$، در نتیجه

$$۲a^۲+۸a+۶=۰\Rightarrow a^۲+۴a+۳=۰\Rightarrow a=-۱ \text{ یا } a=-۳$$

بنابراین $f(a+۲)$ یکی از دو عدد مقابل است: $a=-۱\Rightarrow f(a+۲)=f(۱)=\frac{۸\times۱}{۱^۲+۳}=۲$

$$a=-۳\Rightarrow f(a+۲)=f(-۱)=\frac{۸\times(-۱)}{(-۱)^۲+۳}=-۲$$

۹۰۳ (۱) اگر در تساوی $f(x-۲)=\frac{۳x}{۲x+۵}$ به جای x قرار دهیم $x+۲$، به‌دست می‌آید $f(x+۲-۲)=\frac{۳(x+۲)}{۲(x+۲)+۵}=\frac{۳x+۶}{۲x+۹}$

اکنون اگر معادلهٔ $\frac{۳x+۶}{۲x+۹}=۳$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $x=-۷$.

۹۰۴ (۲) با جای‌گذاری عدد $-\frac{۱}{a}$ به جای x در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(-\frac{۱}{a})=\frac{-\frac{۱}{a}+۱}{-\frac{۱}{a}-۱}=\frac{\frac{-۱+a}{a}}{\frac{-۱-a}{a}}=\frac{a-۱}{-a-۱}=\frac{۱-a}{a+۱}$$

بنابراین $f(a)\times f(-\frac{۱}{a})=\frac{a+۱}{a-۱}\times\frac{۱-a}{a+۱}=-۱$

۹۰۵ (۴) ابتدا توجه کنید که

$$f(-x)=\frac{-x-k}{-x+۱}=\frac{x+k}{x-۱},\quad f(\frac{k}{x})=\frac{\frac{k}{x}-k}{\frac{k}{x}+۱}=\frac{k-kx}{k+x}=\frac{-k(x-۱)}{x+k}$$

بنابراین $f(-x)f(\frac{k}{x})=\frac{x+k}{x-۱}\times\frac{-k(x-۱)}{x+k}=-k$

۹۰۶ (۲) مقدار $x^۴$ را طوری پیدا می‌کنیم که $\frac{x^۴-۱}{x^۴+۲}=\frac{۱}{۴}$، یعنی

$$۴x^۴-۴=x^۴+۲\Rightarrow ۳x^۴=۶\Rightarrow x^۴=۲$$

بنابراین $x^۸=۴$ و $x^{۱۶}=۱۶$. با جای‌گذاری این مقادیر در تساوی داده شده، مشخص می‌شود که $f(\frac{۱}{۴})=۲-۴+۱۶=۱۴$.

۹۰۷ (۴) ابتدا معادلهٔ $\frac{۳x+۴}{۵x+۲}=۲$ را حل می‌کنیم:

$$۳x+۴=۲(۵x+۲)\Rightarrow ۳x+۴=۱۰x+۴\Rightarrow ۳x=۱۰x$$

پس $x=۰$. اکنون اگر در تساوی $f(\frac{۳x+۴}{۵x+۲})=\frac{x^۲+۶x+۱۰}{۳x+۲}$، به جای x قرار دهیم صفر، به‌دست می‌آید $f(\frac{۴}{۲})=\frac{۱۰}{۲}\Rightarrow f(۲)=۵$

۹۰۸ (۲) اگر در تساوی $f(\frac{۱}{x})=\frac{۳x+۱}{x}+f(x+۲)$ قرار دهیم $x=۱$ به‌دست می‌آید $f(۱)=\frac{۳\times۱+۱}{۱}+f(۳)$. چون $f(۱)=۲$، پس $f(۳)=۲-۴=-۲$.

۹۰۹ (۳) ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $\frac{x+۲}{x-۱}=۴$. به این‌ترتیب

$$\frac{x+۲}{x-۱}=۴\Rightarrow x+۲=۴(x-۱)\Rightarrow x=۲$$

اکنون اگر در تساوی $f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{mx+۱}{x+۱}$ قرار دهیم $x=۲$، به‌دست می‌آید

$$f(\frac{۲+۲}{۲-۱})=\frac{m\times۲+۱}{۲+۱}\Rightarrow f(۴)=\frac{۲m+۱}{۳}$$

چون $f(۴)=۳$، پس $\frac{۲m+۱}{۳}=۳$ یعنی $m=۴$. به این‌ترتیب $f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{۴x+۱}{x+۱}$.

اکنون xای را پیدا می‌کنیم که $\frac{x+۲}{x-۱}=۰$. به این‌ترتیب $x=-۲$. در نتیجه $f(\frac{-۲+۲}{-۲-۱})=\frac{۴\times(-۲)+۱}{-۲+۱}$ یعنی $f(۰)=۷$.

۹۱۰ (۳) توجه‌کنیدکه $f(x+\frac{۱}{x})=۳(x+\frac{۱}{x})-۴,\quad f(\frac{x^۲+۱}{x})=۳x+\frac{۳}{x}-۴$

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x+\frac{۱}{x}=۴$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا معادلهٔ $x+\frac{۱}{x}=۴$ معادل است با $x^۲-۴x+۱=۰$، که دلتای آن مثبت است، پس جواب حقیقی دارد)، آن‌گاه $f(۴)=۳\times۴-۴=۸$.

۹۱۱ (۳) ابتدا معادلهٔ $\frac{x^۲+x+۱}{x^۲-x+۱}=۳$ را حل می‌کنیم که به‌صورت $۲x^۲-۴x+۲=۲(x-۱)^۲=۰$ درمی‌آید و تنها جواب آن $x=۱$ است. حال اگر در تساوی فرض مسئله به جای x، ۱ قرار دهیم، آن‌گاه $f(۳)=۱+۳+۲=۶$

۹۱۲ (۲) توجه کنید که $x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow x=۱,\ x=۲$

بنابراین دو عدد ۱ و ۲ در دامنهٔ تابع f قرار ندارند.

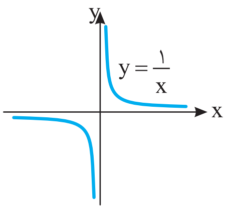
۹۱۳ (۲) ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم

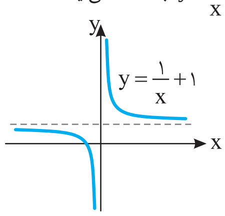
$$۲x^۳-۵x^۲+۲x=۰\Rightarrow x(۲x^۲-۵x+۲)=۰$$

$$x(۲x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰,\quad x=\frac{۱}{۲},\quad x=۲$$

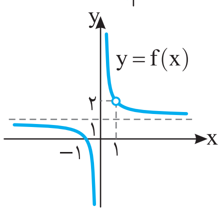
پس دو عدد صحیح $x=۰$ و $x=۲$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۹۱۴ (۳) اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}+۱$ به‌دست می‌آید.

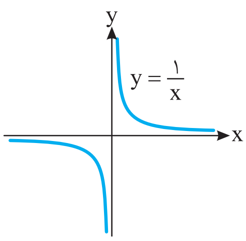


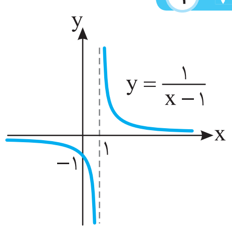


بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و برد این تابع $\mathbb{R}-\{۱,۲\}$ است و در نتیجه مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند، برابر ۳ است.

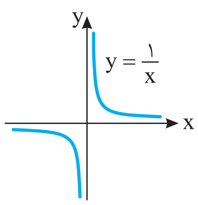


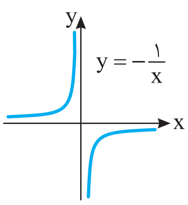
۹۱۵ (۱)

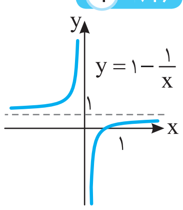




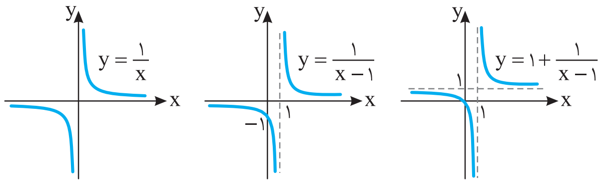
۹۱۶ (۱)



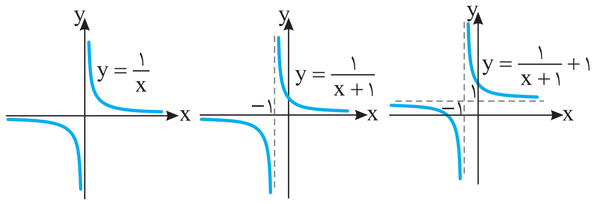




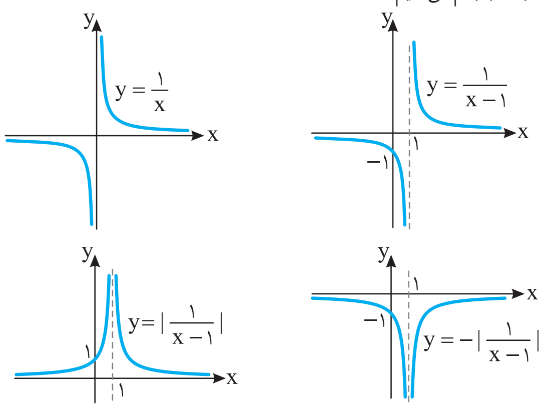
۹۱۷ (۲)



۹۱۸ (۲) ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت $f(x)=۱+\frac{۱}{x+۱}$ می‌نویسیم، سپس نمودار را به ترتیب زیر رسم می‌کنیم.



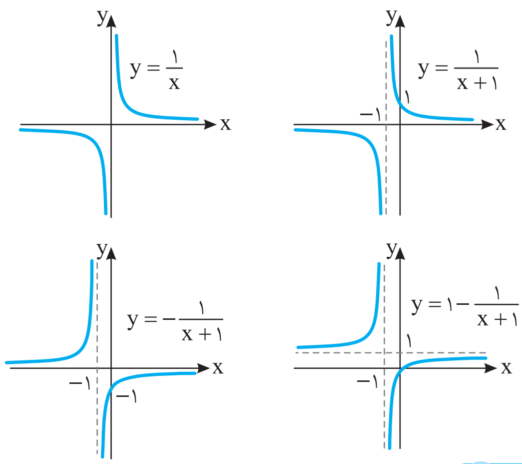
۹۱۹ (۳) ضابطهٔ تابع را به صورت $y=-\left|\frac{۱}{x-۱}\right|$ می‌نویسیم و به ترتیب زیر نمودار آن را رسم می‌کنیم:



۹۲۰ (۴) ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۱-۱}{x+۱}=\frac{x+۱}{x+۱}-\frac{۱}{x+۱}=۱-\frac{۱}{x+۱}$$

به‌ترتیب زیر نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

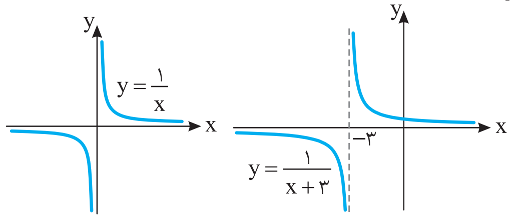


۹۲۱ (۱) معلوم است که $x=-۲$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد، اکنون توجه کنید که

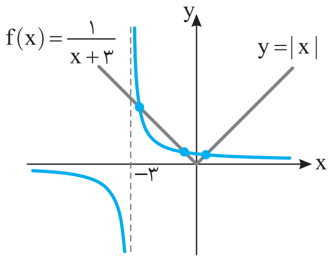
$$\frac{۱}{x+۲}=۰\ (\text{غ.ق.ق})،\quad \frac{۱}{x+۲}=۱\Rightarrow x=-۱،\quad \frac{۱}{x+۲}=۲\Rightarrow x=\frac{-۳}{۲}$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-۲,-۱,\frac{-۳}{۲}\}$ و حاصل‌ضرب اعدادی که در دامنهٔ تابع f قرار ندارند، برابر ۳− است.

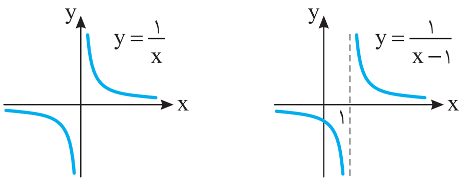
۹۲۲ (۳) اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را سه واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۳}$ به‌دست می‌آید.



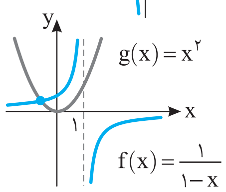
مطابق شکل زیر، نمودارهای توابع $y=\frac{۱}{x+۳}$ و $g(x)=|x|$ در سه نقطه متقاطع‌اند.



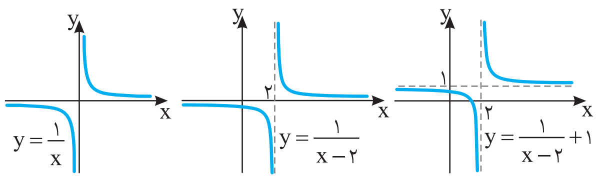
۹۲۳ (۲) ابتدا توجه کنید که $f(x)=\frac{۱}{۱-x}=-\frac{۱}{x-۱}$. بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=\frac{۱}{x-۱}$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=-\frac{۱}{x-۱}$ به‌دست آید.



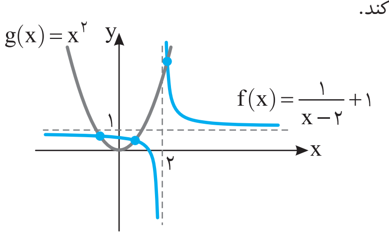
واضح است که نمودار تابع $f(x)=-\frac{۱}{x-۱}$ نمودار تابع $g(x)=x^۲$ را در یک نقطه با طول منفی قطع می‌کند.



۹۲۴ (۳) اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\frac{۱}{x-۲}$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}+۱$ به‌دست می‌آید.



با توجه به شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}+۱$ ، نمودار تابع $g(x)=x^۲$ را در سه نقطه قطع می‌کند.



۹۲۵ **(۳)** ابتدا توجه کنید که $x^2+1\neq 0$ و در نتیجه $D_f=\mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x$$

همچنین $x^2+2\neq 0$ و در نتیجه $D_k=\mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$k(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+2}=\frac{x(x^2+2)}{x^2+2}=x$$

بنابراین توابع f و k برابرند. دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $D_g=\mathbb{R}-\{1\}\Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ (۲) $D_h=\mathbb{R}-\{-1\}\Rightarrow D_f\neq D_h$

گزینهٔ (۴) $D_t=\mathbb{R}-\{1,-1\}\Rightarrow D_f\neq D_t$

۹۲۶ **(۴)** توجه کنید که اگر $x=5$، آن‌گاه $2x+1=11$. از طرف دیگر اگر $x=5$، آن‌گاه $3x-4=3\times 5-4=11$. بنابراین، اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=5$، به‌دست می‌آید $\frac{f(11)+5}{1-f(11)}=\frac{9}{-3}=-3$. در نتیجه

$$f(11)+5=-3+3f(11)\Rightarrow 2f(11)=8\Rightarrow f(11)=4$$

۹۲۷ **(۳)** اگر فرض کنیم $\frac{2}{x-1}=t$، آن‌گاه $t\neq 0$ و $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{t}$، پس $x=\frac{2}{t}+1=\frac{2+t}{t}$. به این ترتیب

$$f(\frac{2}{x-1})=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{t}+1}{\frac{2+t}{t}-1}=\frac{2+2t}{2}=t+1\Rightarrow f(x)=x+1, x\neq 0$$

۹۲۸ **(۱)** **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $\frac{x+1}{x-2}=t$ و در نتیجه

$$tx-2t=x+1\Rightarrow tx-x=2t+1\Rightarrow (t-1)x=2t+1\Rightarrow x=\frac{2t+1}{t-1}$$

در رابطهٔ داده شده به جای x قرار می‌دهیم $\frac{2t+1}{t-1}$:

$$f(t)=2(\frac{2t+1}{t-1})-1=\frac{4t+2-t+1}{t-1}=\frac{3t+3}{t-1}$$

و در نتیجه $f(x)=\frac{3x+3}{x-1}$.

راه‌حل دوم اگر در رابطهٔ داده شده قرار دهیم $x=-1$، به‌دست می‌آید $f(0)=-3$. اکنون در توابع داده شده در گزینه‌ها به جای x مقدار صفر را قرار می‌دهیم. تابعی که در آن $f(0)=-3$، فقط تابع گزینهٔ (۱) است.

۹۲۹ **(۲)** ابتدا توجه کنید که $f(\frac{x-2}{x+3})=1+\frac{x+3}{x-2}+2(\frac{x-2}{x+3})$

در نتیجه اگر $\frac{x-2}{x+3}=t$، آن‌گاه $f(t)=1+\frac{1}{t}+2t$. پس $f(x)=1+\frac{1}{x}+2x$.

۹۳۰ **(۳)** **راه‌حل اول** ابتدا کسر $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ را به شکل $\frac{\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x^2}{(1+x)^2}}$ می‌نویسیم. اکنون توجه کنید که $\frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}=1+(\frac{1-x}{1+x})^2$. بنابراین $f(\frac{1-x}{1+x})=\frac{\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1}{2}(1+(\frac{1-x}{1+x})^2)}$

فرض می‌کنیم $\frac{1-x}{1+x}=t$، در این صورت $f(t)=\frac{t}{\frac{1}{2}(1+t^2)}=\frac{2t}{1+t^2}$ و در نتیجه

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم $\frac{1-x}{1+x}=t$، در نتیجه $x=\frac{-t+1}{t+1}$، پس

$$f(t)=\frac{1-(\frac{1-t}{1+t})^2}{1+(\frac{1-t}{1+t})^2}=\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{(1+t)^2+(1-t)^2}=\frac{4t}{2(1+t^2)}=\frac{2t}{1+t^2}$$

و در نتیجه $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

۹۳۱ **(۳)** ابتدا توجه کنید که

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2x(\frac{1}{x})\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$$

بنابراین $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2$. اگر فرض کنیم $t=x+\frac{1}{x}$، آن‌گاه $f(t)=t^2-2$ و $|t|\geq 2$. بنابراین اگر $|x|\geq 2$ آن‌گاه $f(x)=x^2-2$.

۹۳۲ **(۴)** ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$x^3-\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}+x\times\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})((x-\frac{1}{x})^2+2x\times\frac{1}{x}+1)$$

$$=(x-\frac{1}{x})((x-\frac{1}{x})^2+3)$$

از طرف دیگر، هر عدد حقیقی را می‌توان به شکل $x-\frac{1}{x}$ نوشت، زیرا معادلهٔ $x-\frac{1}{x}=t$ معادل است با $x^2-tx-1=0$ که Δ ی آن مثبت است. بنابراین همواره

$$f(t)=t(t^2+3)=t^3+3t$$

در نتیجه $f(-x)=(-x)^3+3(-x)=-x^3-3x$

۹۳۳ **(۳)** مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$x^3-2x^2-x+2=0\Rightarrow x^3-x-2x^2+2=0$$

$$x(x^2-1)-2(x^2-1)=0\Rightarrow (x^2-1)(x-2)=0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2)=0\Rightarrow x=1,-1,2$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{1,-1,2\}$. پس سه عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۹۳۴ **(۳)** ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$x^4-3x^2+2=0\Rightarrow (x^2-1)(x^2-2)=0$$

$$x^2=1\Rightarrow x=\pm 1,\quad x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1,\pm\sqrt{2}\}$ و چهار عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۹۳۵ **(۲)** ابتدا توجه کنید که

$$x^3+kx^2+x=0\Rightarrow x(x^2+kx+1)=0$$

اگر سه عدد در دامنهٔ تابع f قرار نداشته باشند، باید معادلهٔ $x^2+kx+1=0$ دو جواب داشته باشد که به همراه $x=0$ سه عددی باشند که در دامنهٔ f قرار ندارند. بنابراین

$$\Delta>0\Rightarrow k^2-4>0\Rightarrow k^2>4\Rightarrow |k|>2$$

۹۳۶ **(۱)** عددهایی که مخرج ضابطهٔ تابع را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس $x=-2$ جواب معادلهٔ $x^3-ax^2+2ax=0$ است.

$$-8-4a-4a=0\Rightarrow a=-1$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{1}{x^3+x^2-2x}$ است. دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$x^3+x^2-2x=0\Rightarrow x(x^2+x-2)=0\Rightarrow x(x-1)(x+2)=0$$

$$x=0, x=1, x=-2$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{-2,0,1\}$.

۹۳۷ **(۱)** برای اینکه دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج کسر $\frac{x}{x^2+mx+2}$ ریشه نداشته باشد. بنابراین

$$\Delta=m^2-8<0\Rightarrow -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$$

۹۳۸ **۳** توجه کنید که $D_f=\{x|x^۲+۲x-m+۴\neq ۰\}$. برای اینکه معادلهٔ $x^۲+۲x-m+۴=۰$ جواب نداشته باشد، باید $\Delta<۰$:

$$\Delta=۲^۲-۴(-m+۴)=۴+۴m-۱۶<۰\Rightarrow m<۳$$

چون m عددی صحیح است، پس بیشترین مقدار آن ۲ است.

۹۳۹ **۳** **راه‌حل اول** دو عدد ۶ و ۱- در دامنهٔ تابع قرار ندارند، پس $x=۶$ و $x=-۱$ ریشه‌های مخرج ضابطهٔ تابع هستند

$$x=۶\Rightarrow ۳۶-۶(a^۲+۱)-b^۲=۰\Rightarrow b^۲=۳۰-۶a^۲$$

$$x=-۱\Rightarrow ۱+(a^۲+۱)-b^۲=۰\Rightarrow b^۲=a^۲+۲$$

بنابراین $۳۰-۶a^۲=a^۲+۲\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow b^۲=۶$

در نتیجه $a^۲+b^۲=۱۰$.

راه‌حل دوم معادله درجه دومی که ۱- و ۶ جواب‌های آن باشد را می‌نویسیم و برابر عبارت مخرج قرار می‌دهیم $x^۲-۵x-۶=x^۲-(a^۲+۱)x-b^۲$ ، پس

$$b^۲=۶,\quad a^۲+۱=۵\Rightarrow a^۲=۴$$

در نتیجه $a^۲+b^۲=۱۰$.

۹۴۰ **۴** شرط محاسبهٔ دامنه به صورت $۲x^۲-ax+۳b\neq۰$ است. چون فقط $x=-۱$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس باید معادلهٔ $۲x^۲-ax+۳b=۰$ ریشهٔ مضاعف برابر ۱- داشته باشد. یعنی باید مخرج کسر به صورت $۲(x+۱)^۲$ باشد. بنابراین

$$۲x^۲-ax+۳b=۲(x+۱)^۲\Rightarrow ۲x^۲-ax+۳b=۲x^۲+۴x+۲$$

پس $a=-۴$ و $b=\frac{۲}{۳}$ و در نتیجه $ab=-\frac{۸}{۳}$.

۹۴۱ **۲** چون فقط یک عدد حقیقی در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس معادلهٔ $m^۲x^۲+x+۱=۰$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد: $\Delta=۱-۴m^۲=۰\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$

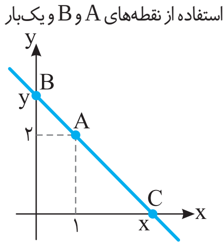
در این حالت $x=-۲$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-۲$.

حالت دوم مخرج عبارت درجهٔ اول باشد، یعنی ضریب $x^۲$ برابر صفر باشد: $m=۰$.

در این حالت $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-۱$.

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n برابر ۲ است.

۹۴۲ **۴** با توجه به شکل زیر شیب خط را یک‌بار با استفاده از نقطه‌های A و B و یک‌بار هم با استفاده از نقطه‌های A و C به‌دست می‌آوریم:



$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y-۲}{۰-۱}\Rightarrow y=۲-m$$

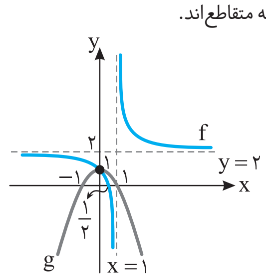
$$m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{۰-۲}{x-۱}\Rightarrow x=۱-\frac{۲}{m}$$

بنابراین مساحت مثلث به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$S=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۲}{m})(۲-m)=\frac{(m-۲)(۲-m)}{۲m}$$

در نتیجه $S(m)=-\frac{(m-۲)^۲}{۲m}$.

۹۴۳ **۱** **راه‌حل اول** نمودارهای تابع‌های f و g در شکل زیر رسم شده‌اند. این نمودارها فقط در یک نقطه متقاطع‌اند.

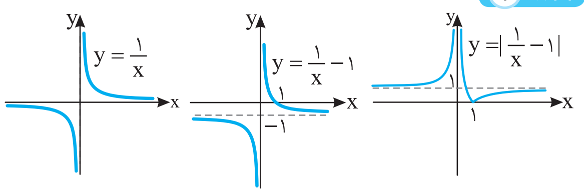


راه‌حل دوم تعداد نقاط تقاطع نمودارهای توابع f و g برابر با تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است. $f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{۲x-۱}{x-۱}=۱-x^۲\Rightarrow ۲x-۱=x-x^۳-۱+x^۲$

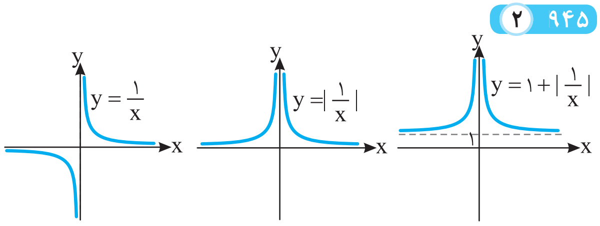
$$x^۳-x^۲+x=۰\Rightarrow x(x^۲-x+۱)=۰$$

چون معادلهٔ $x^۲-x+۱=۰$ جواب ندارد $(\Delta<۰)$، پس تنها جواب معادله $x=۰$ است و در نتیجه تعداد نقاط تلاقی نمودارها یکی است.

۹۴۴ **۲**

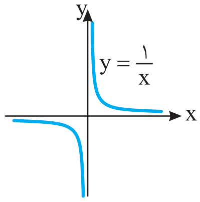


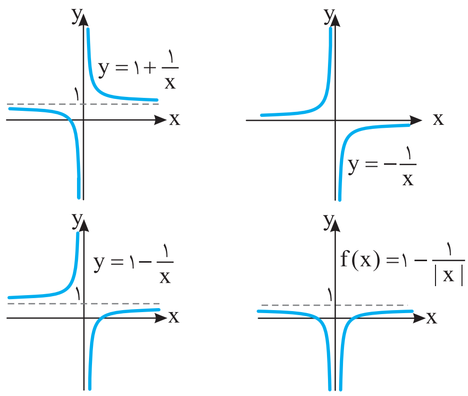
۹۴۵ **۲**



۹۴۶ **۱** ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۱+\frac{۱}{x} & x<۰\\ ۱-\frac{۱}{x} & x>۰\end{cases}$$





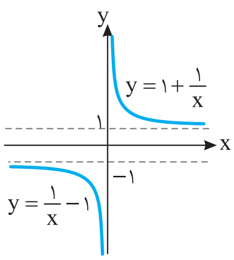
۹۴۷ **۲** اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۲}$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۲}-۱$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-(\frac{۱}{x+۲}-۱)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-(\frac{۱}{x-۱+۲}-۱)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده، به‌صورت مقابل است. $y=-(\frac{۱}{x+۱}-۱)=-(\frac{۱-x-۱}{x+۱})=\frac{x}{x+۱}$

۹۴۸ **۳** ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. اکنون ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x>۰\Rightarrow y=\frac{۱+x}{x}=\frac{۱}{x}+۱$$

$$x<۰\Rightarrow y=\frac{۱-x}{x}=\frac{۱}{x}-۱$$

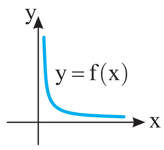
بنابراین نمودار تابع به شکل مقابل است.



۹۴۹ (۱) ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$.

پس $f(x)=\frac{۲}{x+x}=\frac{۱}{x}$

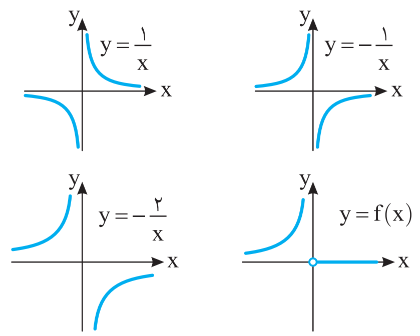
بنابراین نمودار این تابع به‌صورت مقابل خواهد بود.



۹۵۰ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$x>۰\Rightarrow|x|=x\Rightarrow f(x)=\frac{x-x}{x^۲}=۰$$
$$x<۰\Rightarrow|x|=-x\Rightarrow f(x)=\frac{-x-x}{x^۲}=-\frac{۲}{x}$$

باید روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ نمودار تابع $y=۰$ را رسم کنیم و روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ نمودار تابع $y=-\frac{۲}{x}$ را رسم کنیم. از طرف دیگر برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{۲}{x}$ باید ابتدا نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، تا نمودار تابع $y=-\frac{۱}{x}$ به‌دست آید، سپس عرض نقاط نمودار به‌دست آمده را دو برابر کنیم تا نمودار تابع $y=-\frac{۲}{x}$ به‌دست آید. پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۹۵۱ (۱) می‌دانیم برد تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

پس برد تابع $f(x)=\frac{۴x+۱}{۲x-۶}$ برابر $\mathbb{R}-\{\frac{۴}{۲}\}$، یعنی $\mathbb{R}-\{۲\}$ است.

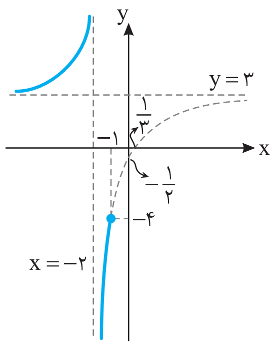
۹۵۲ (۴) اگر $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$، آن‌گاه برد تابع $f(x)=\frac{۶x-۱}{۲x-۴}$ برابر $\mathbb{R}-\{\frac{۶}{۲}\}$، یعنی $\mathbb{R}-\{۳\}$ است. اکنون باید ببینیم $x=۴$ که در دامنهٔ تابع f قرار ندارد، باعث حذف چه مقداری از برد تابع f می‌شود. توجه کنید که $x=۴\Rightarrow y=\frac{۶x-۱}{۲x-۴}=\frac{۶\times۴-۱}{۲\times۴-۴}=\frac{۲۳}{۴}$

بنابراین $\frac{۲۳}{۴}$ هم در برد تابع f قرار ندارد. پس $R_f=\mathbb{R}-\{۳,\frac{۲۳}{۴}\}$ و در نتیجه مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند برابر است با $۳+\frac{۲۳}{۴}=\frac{۳۵}{۴}$.

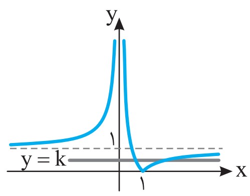
۹۵۳ (۳) نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. از روی شکل معلوم است که برد تابع f برابر است با

$$(-\infty,-۴]\cup(۳,+\infty)$$

بنابراین هفت عدد صحیح ±۳، ±۲، ±۱ و صفر در برد تابع f قرار ندارند.



۹۵۴ (۳) نمودارهای توابع $y=|\frac{۱}{x}-۱|$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم. اگر $۰<k<۱$، آن‌گاه خط $y=k$ در دو نقطه با طول مثبت نمودار تابع $y=|\frac{۱}{x}-۱|$ را قطع می‌کند و معادله دو جواب مثبت دارد.



۹۵۵ (۴) ابتدا توجه کنید که $x^۲+x+۱\neq۰$ و در نتیجه $D_f=\mathbb{R}$. از طرف دیگر

$$f(x)=\frac{x^۳-۱}{x^۲+x+۱}=\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{x^۲+x+۱}=x-۱$$

$$t(x)=\frac{x^۳-x^۲+x-۱}{x^۲+۱}=\frac{(x^۳+x)-(x^۲+۱)}{x^۲+۱}=\frac{x(x^۲+۱)-(x^۲+۱)}{x^۲+۱}$$
$$=\frac{(x-۱)(x^۲+۱)}{x^۲+۱}=x-۱$$

همچنین $x^۲+۱\neq۰$ و در نتیجه $D_t=\mathbb{R}$. بنابراین توابع f و t برابرند. در سه تابع دیگر دامنه $\mathbb{R}$ نیست. بنابراین تابع $y=f(x)$ نمی‌تواند با هیچ از آن‌ها برابر باشد.

۹۵۶ (۲) **راه‌حل اول** فرض کنید $g(x)=ax+b$ و $f=g$. در این صورت به ازای هر $x\neq۳$ تساوی $\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}=ax+b$ برقرار است. پس

$$x^۲-mx+۳=۳ax+۳b-ax^۲-bx$$
$$(a+۱)x^۲+(b-۳a-m)x+۳-۳b=۰$$

پس تساوی بالا به ازای هر $x\neq۳$ برقرار است. بنابراین

$$a+۱=۰\Rightarrow a=-۱,\quad ۳-۳b=۰\Rightarrow b=۱$$
$$b-۳a-m=۰\Rightarrow m=-۳a+b\Rightarrow m=۴$$

همچنین باید تساوی $f(۳)=g(۳)$ درست باشد. پس

$$f(۳)=n,\quad g(۳)=۳a+b=-۳+۱=-۲\Rightarrow n=-۲$$

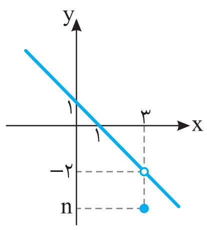
در نتیجه $m+n=۲$.

راه‌حل دوم برای اینکه تابع f خطی باشد، باید کسر $\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}$ ساده شود، یعنی باید صورت کسر عامل $x-۳$ داشته باشد. پس صورت کسر به ازای $x=۳$ صفر می‌شود:

$$۹-۳m+۳=۰\Rightarrow m=۴$$
$$\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}=\frac{x^۲-۴x+۳}{۳-x}=\frac{(x-۱)(x-۳)}{-(x-۳)}=-x+۱$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است

$$f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x\neq۳\\ n & x=۳\end{cases}$$



واضح است که اگر $n\neq-۲$، آن‌گاه تابع f خطی نیست. پس $n=-۲$، بنابراین $m+n=۲$.

۹۵۷ (۲) توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ و

$$x>۱\Rightarrow f(x)=|\frac{x}{x}-\frac{x-۱}{x-۱}-۱|=|۱-۱-۱|=۱$$
$$۰<x<۱\Rightarrow f(x)=|\frac{x}{x}-\frac{-(x-۱)}{x-۱}-۱|=|۱+۱-۱|=۱$$
$$x<۰\Rightarrow f(x)=|\frac{x}{-x}-\frac{-(x-۱)}{x-۱}-۱|=|-۱+۱-۱|=۱$$

بنابراین برای هر x از دامنهٔ تابع f، $f(x)=۱$. از طرف دیگر $D_h=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ و $h(x)=۱$. پس توابع f و h برابرند. اما در گزینه‌های دیگر داریم

گزینهٔ (۱) $D_g=\mathbb{R},\quad g(x)=۱$

گزینهٔ (۳) $D_k=\mathbb{R}-\{۰,۱\},\quad k(x)=۲$

گزینهٔ (۴) $D_t=\mathbb{R}-\{۰,۱\},\quad x>۱\Rightarrow t(x)=۱+۱=۲$

$$۰<x<۱\Rightarrow t(x)=۱-۱=۰$$
$$x<۰\Rightarrow t(x)=-۱-۱=-۲$$

۹۵۸ **(۳)** توجه کنید $\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$. در نتیجه گزینه‌ها به شکل زیر می‌شوند:

گزینهٔ (۱)

$$g(x)=\begin{cases}-x^۲+۲x-۳ & x<۰\\ x^۲+۲x+۳ & x>۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۲)

$$h(x)=\begin{cases}-x^۲+۳ & x<۰\\ x^۲+۳ & x>۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۳)

$$k(x)=\begin{cases}-x^۲+۲x-۳ & x<۰\\ ۰ & x=۰\\ x^۲+۲x+۳ & x>۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۴)

$$t(x)=\begin{cases}-x^۲+۳ & x<۰\\ ۰ & x=۰\\ x^۲+۳ & x>۰\end{cases}$$

بنابراین تابع f با تابع k برابر است.

۹۵۹ **(۲)** دامنهٔ تابع f به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$ است. پس باید دامنهٔ g هم به همین صورت باشد، یعنی $x=۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج $g(x)$ باشد:

$$x^۲+cx+۴=(x-۲)^۲\Rightarrow x^۲+cx+۴=x^۲-۴x+۴\Rightarrow c=-۴$$

از طرف دیگر ضابطهٔ f و g باید برابر باشند، پس باید صورت $g(x)$ یک عامل ۵ و یک عامل $x-۲$ داشته باشد:

$$g(x)=f(x)\Rightarrow \frac{ax+b}{(x-۲)^۲}=\frac{۵}{x-۲}\Rightarrow ax+b=۵(x-۲)\Rightarrow a=۵, b=-۱۰$$

بنابراین $abc=۵(-۱۰)(-۴)=۲۰۰$.

۹۶۰ **(۲)** دامنهٔ تابع f به صورت $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ است، پس دامنهٔ تابع g هم باید به همین صورت باشد. پس باید $x=۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج $g(x)$ باشد.

$$x^۲-bx+c=(x-۱)^۲\Rightarrow x^۲-bx+c=x^۲-۲x+۱\Rightarrow b=۲\ ,\ c=۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع g به شکل مقابل است $g(x)=\frac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{x+۱}{x-۱}$

از طرف دیگر باید $f(x)=g(x)$، پس $\frac{x+۱}{x-۱}=\frac{x-a}{x-۱}\Rightarrow a=-۱$. بنابراین

$$a+b+c=-۱+۲+۱=۲$$

۹۶۱ **(۳)** ضابطهٔ دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

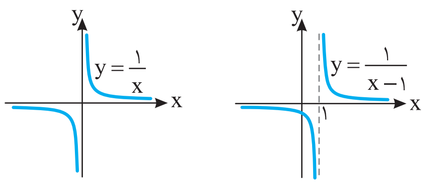
$$\frac{bx+۱}{۸x+۲b}=c\Rightarrow ۸cx+۲bc=bx+۱$$

$$\begin{cases}۸c=b\\ ۲bc=۱\end{cases}\Rightarrow ۲c\times ۸c=۱\Rightarrow ۱۶c^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{۱}{۴}, b=۲\\ c=-\frac{۱}{۴}, b=-۲\end{cases}$$

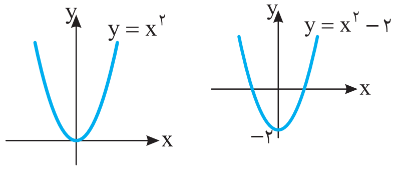
اگر $b=۲$، آن‌گاه $f(x)=\frac{۲x+۱}{۸x+۴}$. بنابراین $x=-\frac{۱}{۲}$ در دامنهٔ f قرار ندارد و در دامنهٔ g نیز نباید قرار داشته باشد. پس $a=-\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $\frac{ab}{c}=-۴$. در حالت $b=-۲$ نیز $f(x)=\frac{-۲x+۱}{۸x-۴}$ که نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{ab}{c}=۴$.

۹۶۲ **(۳)** ابتدا توجه کنید که $\frac{x^۲+x+۱}{x^۳-۱}=\frac{x^۲+x+۱}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\frac{۱}{x-۱}$

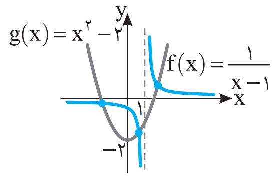
پس تابع f با تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۱\}$ برابر است. بنابراین اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع f به‌دست می‌آید.



همچنین اگر نمودار تابع $y=x^۲$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع g به‌دست می‌آید.

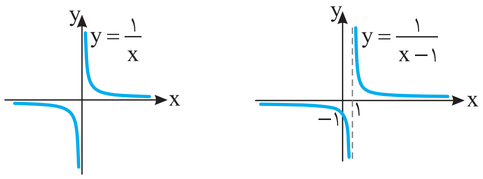


مطابق شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+۱}{x^۳-۱}$ در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=x^۲-۲$ را قطع می‌کند.

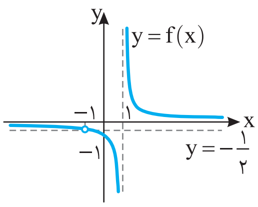


۹۶۳ **(۴)** ابتدا توجه کنید که $\frac{x+۱}{x^۲-۱}=\frac{x+۱}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{۱}{x-۱},\quad x\neq -۱$

پس تابع f با تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$ برابر است. اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ به‌دست می‌آید.



بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است که خطوط $y=۰$ و $y=-\frac{۱}{۲}$ را قطع نمی‌کند. پس k فقط می‌تواند مقادیر صفر و $-\frac{۱}{۲}$ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.



۹۶۴ **(۴)** می‌توان نوشت $f(a)-f(b)=\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{۱}{\frac{ab}{b-a}}=f(\frac{ab}{b-a})$

۹۶۵ **(۲)** اگر در تساوی $f(x)=\frac{x+۱}{x}$ به جای x قرار دهیم $x-۱$ به‌دست می‌آید

$$f(x-۱)=\frac{x}{x-۱}\qquad (۱)$$

از طرف دیگر، $f(x)=\frac{x+۱}{x}\Rightarrow xf(x)=x+۱\Rightarrow x(f(x)-۱)=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{f(x)-۱}$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $f(x-۱)=\frac{x}{x-۱}=\frac{\frac{۱}{f(x)-۱}}{\frac{۱}{f(x)-۱}-۱}=\frac{۱}{۲-f(x)}$

۹۶۶ **(۳)** اگر در تساوی $f(x)=\frac{x}{x+۲}$ به جای x قرار دهیم $x-۲$، به‌دست می‌آید

$$f(x-۲)=\frac{x-۲}{x}\qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x}{x+۲}\Rightarrow xf(x)+۲f(x)=x\Rightarrow x(۱-f(x))=۲f(x)\Rightarrow x=\frac{۲f(x)}{۱-f(x)}$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f(x-۲)=\frac{x-۲}{x}=\frac{\frac{۲f(x)}{۱-f(x)}-۲}{\frac{۲f(x)}{۱-f(x)}}=\frac{۲f(x)-۲(۱-f(x))}{۲f(x)}=\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}$$

۹۶۷ ۲ در تساوی داده‌شده به‌جای x قرار می‌دهیم $-x$: $f(\frac{-x+۲}{-x-۲})=\frac{-x-۳}{-x+۱}$

بنابراین $f(\frac{x-۲}{x+۲})=\frac{x+۳}{x-۱}$

۹۶۸ ۲ در تساوی داده شده $-x$ را به جای x قرار می‌دهیم:

$$f(-x)-xf(x)=x^۲-۲x\Rightarrow f(-x)=x^۲-۲x+xf(x)$$

بنابراین اگر در تساوی داده شده به جای $f(-x)$ قرار دهیم $x^۲-۲x+xf(x)$، می‌توانیم $f(x)$ را به‌دست آوریم:

$$f(x)+x(x^۲-۲x+xf(x))=x^۳+۲x\Rightarrow f(x)+x^۳-۲x^۲+x^۲f(x)=x^۳+۲x$$

$$(x^۲+۱)f(x)=-x^۳+۳x^۲+۲x\Rightarrow f(x)=\frac{-x^۳+۳x^۲+۲x}{x^۲+۱}$$

۹۶۹ ۱ بنابر فرض $f(x)+۲f(\frac{۱}{x})=x \qquad (۱)$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $\frac{۱}{x}$ به‌دست می‌آید $f(\frac{۱}{x})+۲f(x)=\frac{۱}{x} \qquad (۲)$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم به‌دست می‌آید $f(x)=\frac{۱}{۳}(\frac{۲}{x}-x)=\frac{۲-x^۲}{۳x}$

۹۷۰ ۱ چون عدد ۲ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد، پس $x=۲$ جواب معادلهٔ $x^۳+ax^۲+b=۰$ است. بنابراین $۸+۴a+b=۰\Rightarrow b=-۴a-۸$

از طرف دیگر چون تمام اعداد حقیقی به‌جز ۲ در دامنهٔ تابع f قرار دارند، پس معادلهٔ $x^۳+ax^۲+b=۰$ جواب دیگری ندارد. اکنون توجه کنید که

$$x^۳+ax^۲+b=۰\Rightarrow x^۳+ax^۲-۴a-۸=۰$$

$$(x^۳-۸)+(ax^۲-۴a)=۰\Rightarrow(x-۲)(x^۲+۲x+۴)+a(x-۲)(x+۲)=۰$$

$$(x-۲)(x^۲+۲x+۴+ax+۲a)=۰\Rightarrow(x-۲)(x^۲+(a+۲)x+۲a+۴)=۰$$

پس معادلهٔ $x^۲+(a+۲)x+۲a+۴=۰$ جواب ندارد یا ریشهٔ مضاعف $x=۲$ دارد. اگر این معادله جواب نداشته باشد، آن‌گاه

$$\Delta<۰\Rightarrow(a+۲)^۲-۴(۲a+۴)<۰\Rightarrow(a+۲)^۲-۸(a+۲)<۰$$

$$(a+۲)(a+۲-۸)<۰\Rightarrow(a+۲)(a-۶)<۰\Rightarrow-۲<a<۶$$

اگر این معادله ریشهٔ مضاعف $x=۲$ داشته باشد، آن‌گاه

$$x^۲+(a+۲)x+۲a+۴=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴$$

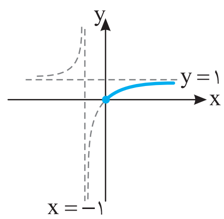
$$\begin{cases}a+۲=-۴\Rightarrow a=-۶\\ ۲a+۴=۴\Rightarrow a=۰\end{cases}$$

چون دو مقدار مختلف برای a به دست آمد، پس حالت داشتن ریشهٔ مضاعف $x=۲$ اتفاق نمی‌افتد. در نتیجه مجموعهٔ مقادیر ممکن a بازهٔ $(-۲,۶)$ است.

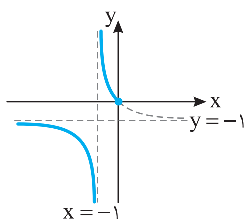
۹۷۱ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$ و

$$f(x)=\frac{|x|}{x+۱}=\begin{cases}\frac{x}{x+۱} & x\geq ۰\\ \frac{-x}{x+۱} & x\leq ۰,\ x\neq -۱\end{cases}$$

نمودارهای تابع‌های $y=\frac{x}{x+۱}$ و $y=\frac{-x}{x+۱}$ در دامنه‌های مربوطه به‌صورت زیر هستند:

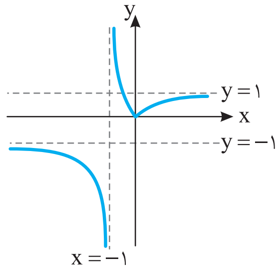


$y=\frac{x}{x+۱},\ x\geq ۰$



$y=\frac{-x}{x+۱},\ x\leq ۰, x\neq -۱$

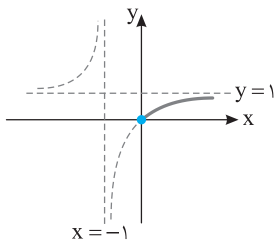
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



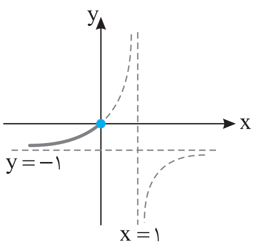
۹۷۲ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و

$$f(x)=\frac{x}{|x|+۱}=\begin{cases}\frac{x}{x+۱} & x\geq ۰\\ \frac{x}{-x+۱} & x\leq ۰\end{cases}$$

نمودارهای تابع‌های $y=\frac{x}{x+۱}$ و $y=\frac{x}{-x+۱}$ در دامنه‌های مربوطه به‌صورت زیر هستند:

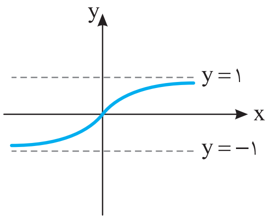


$y=\frac{x}{x+۱},\ x\geq ۰$



$y=\frac{x}{-x+۱},\ x\leq ۰$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.

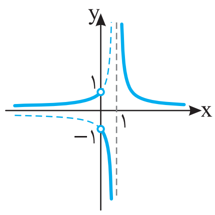


۹۷۳ ۱ ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$x>۰\ ,\ x\neq ۱\Rightarrow y=\frac{x}{x^۲-x}=\frac{x}{x(x-۱)}=\frac{۱}{x-۱}$$

$$x<۰\Rightarrow y=\frac{-x}{x^۲-x}=\frac{-x}{x(x-۱)}=\frac{-۱}{x-۱}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل مقابل است.



۹۷۴ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{|x^۲-۱|}{x(x^۲-۱)}=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x^۲-۱>۰\\ -\frac{۱}{x} & x^۲-۱<۰\end{cases}=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۱ \text{ یا } x<-۱\\ -\frac{۱}{x} & -۱<x<۱\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.