به‌نام خدا

فهرست

پیشگفتار

خداوند منان را سپاسگزارم که توفیق داد برای فرزندان این مرزوبوم کتابی دیگر را به رشتهٔ تحریر درآورم. این کتاب جلد دوم از مجموعهٔ روش‌های ترکیبیات است. در جلد اول این مجموعه بیشتر به آموزش مفاهیم اولیه و روش‌های مقدماتی حل مسئله‌های ترکیبیات پرداختیم. غالب تمرین‌های این کتاب نیز در سطح مسئله‌های مرحلهٔ اول المپیادهای ریاضی و کامپیوتر بودند. در جلد دوم، هدف اصلی را آماده‌سازی دانش‌آموزان برای شرکت در آزمون مرحلهٔ دوم المپیادهای ریاضی و کامپیوتر و همچنین آشنایی با روش‌های پیشرفته‌تر در حل مسئله‌های ترکیبیات قرار داده‌ام. بر این اساس، پس از بررسی و دسته‌بندی مسئله‌های این آزمون‌ها، از مجموعهٔ مسئله‌هایی که از مسابقات ریاضی کشورهای مختلف گردآوری کرده بودم، مسئله‌های مرتبط را جدا و آنها را به‌صورت هدفمند دسته‌بندی کردم. البته، به علت حجم بالای مباحث و مسائل، به ناچار تعدادی را به سلیقهٔ خود برای این جلد برگزیدم و مابقی را برای انتشار در جلدهای بعدی این مجموعه گذاشتم.

کتاب حاضر در ۲۶ فصل تنظیم شده است. مباحث اصلی این کتاب به استقرای ریاضی، اصل لانه کبوتری، شمارش، رنگ‌آمیزی، زوجیت، ناوردایی، هندسهٔ ترکیبیاتی و نظریهٔ ترکیبیاتی اعداد اختصاص یافته است. برای اینکه روند آموزشی مشخصی را دنبال کرده باشیم، هر یک از این مباحث را به چند قسمت تقسیم کرده‌ایم و هر قسمت را در یک فصل آورده‌ایم. دو فصل از کتاب را نیز به مسئله‌های متفرقه اختصاص داده‌ایم. در هر فصل از کتاب یک مسئلهٔ نمونه حل شده است، پس از آن تعدادی تمرین آمده و پایان هر فصل نیز به حل تمرین‌ها اختصاص یافته است. همان‌گونه که ذکر کردیم، چیدمان تمرین‌های هر فصل هدفمند بوده است و حل کردن آنها باعث تسلط به یک یا چند روش متداول در حل مسئله‌های المپیادی می‌شود.

بسیاری از راه‌حل‌های مسئله‌های این کتاب متعلق به شاگردانی است که در سال‌های تدریس‌ام این مسئله‌ها را حل کرده‌اند و از این بابت سهم بزرگی در تکمیل این اثر دارند.

در روزگاری که مشغول نگارش این کتاب بودم متحمل ضایعه‌ای دردناک شدم. مرحوم مهندس منوچهر علیپور حامی اصلی من در زمینهٔ تألیف کتاب بود و همواره مرا به این امر تشویق می‌کرد.

به پاس الطاف و زحمات بی‌شائبهٔ پدر، این اثر را به روح بلندش تقدیم می‌کنم.

علی‌رضا علیپور

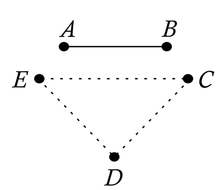
اسفند ۱۳۹۲

استقرای ریاضی (۱)

مسئلهٔ نمونهٔ این فصل از المپیاد ریاضی رومانی که در سال ۲۰۱۱ برگزار شده انتخاب شده است.

مسئله اضلاع و اقطار یک nضلعی محدب با دو رنگ رنگ شده‌اند ($n > ۲$). ثابت کنید می‌توان $[\frac{n+۱}{۳}]$ پاره‌خط همرنگ انتخاب کرد به‌طوری‌که هیچ دوتا نقطه‌ای مشترک نداشته باشند.

راه‌حل. به‌ازای $n = ۳$ و $n = ۴$ حکم واضح است. فرض کنید $n = ۵$ و اضلاع و اقطار ۵ضلعی محدب $ABCDE$ آبی و قرمز شده باشند. فرض کنید پاره‌خط AB آبی شده باشد. اگر یکی از پاره‌خط‌های CD، CE و DE آبی شده باشند حکم به‌ازای $n = ۵$ نتیجه خواهد شد. پس فرض کنید هر سه پاره‌خط به رنگ قرمز باشند. حال اگر هر دو پاره‌خط BC و AE آبی باشند حکم نتیجه می‌شود والاّ حداقل یکی، مثلاً BC، قرمز است. لذا BC و DE دو پاره‌خط موردنظر هستند و باز حکم نتیجه می‌شود. پس در هر صورت حکم به‌ازای $n = ۵$ درست است.



حال فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. نشان می‌دهیم حکم به‌ازای $n + ۳$ نیز درست است و در این‌صورت حکم به‌ازای هر $n > ۲$ نتیجه خواهد شد. فرض کنید اضلاع و اقطار $n + ۳$ضلعی محدب $A_۱A_۲\cdots A_{n+۳}$ آبی و قرمز شده باشند. اگر همهٔ اضلاع همرنگ باشند، در این‌صورت

حکم به راحتی نتیجه خواهد شد (با انتخاب پاره‌خط‌های $A_۱A_۲$، $A_۳A_۴$، $A_۵A_۶$ و ...). پس فرض کنید در بین اضلاع هم پاره‌خط آبی و هم پاره‌خط قرمز وجود داشته باشد. دو ضلع مجاور غیرهمرنگ را در نظر می‌گیریم، مثلاً فرض کنید $A_{n+۱}A_{n+۲}$ و $A_{n+۲}A_{n+۳}$ غیرهمرنگ باشند. از درستی حکم به‌ازای n نتیجه می‌گیریم در بین اضلاع و اقطار nضلعی محدب $A_۱A_۲\cdots A_n$، $\lfloor\frac{n+۱}{۳}\rfloor$ پاره‌خط همرنگ وجود دارد به طوری‌که هیچ دوتا نقطهٔ مشترک نداشته باشند. این پاره‌خط‌ها با یکی از $A_{n+۱}A_{n+۲}$ و $A_{n+۲}A_{n+۳}$ همرنگ‌اند و توجه کنید که این دو ضلع با هیچ یک از اضلاع و اقطار nضلعی $A_۱A_۲\cdots A_n$ نقطهٔ مشترک ندارند، لذا در بین اضلاع و اقطار $n+۳$ضلعی

$$\left\lfloor\frac{n+۱}{۳}\right\rfloor+۱=\left\lfloor\frac{(n+۳)+۱}{۲}\right\rfloor$$

پاره‌خط همرنگ یافتیم که هیچ دوتا نقطهٔ مشترک نداشته باشند. پس حکم به‌ازای $n+۳$ نیز درست است.

تمرین‌ها

۱. روی $n > ۳$ نقطه دور یک دایره اعداد ۱ تا n به ترتیبی دلخواه نوشته شده‌اند. دو نقطهٔ غیرمجاور A و B را وابسته نامیم هرگاه روی یکی از دو کمان AB تمام اعداد از اعداد نوشته شده روی A و B کوچک‌تر باشند. ثابت کنید دقیقاً $n - ۳$ جفت وابسته وجود دارد.

(اسپانیا ـ ۱۹۸۸)

۲. $۲n$ شکلات در nقوطی گذاشته شده است. علی و رضا به نوبت و هربار یک شکلات برمی‌دارند (علی شروع‌کنندهٔ بازی است). ثابت کنید رضا می‌تواند طوری شکلات انتخاب کند که دو شکلات آخر متعلق به یک قوطی باشند.

(لنینگراد ـ ۱۹۸۰)

۳. ثابت کنید زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی را می‌توان در یک ردیف نوشت به طوری‌که تفاضل متقارن هر دو زیرمجموعهٔ مجاور دقیقاً یک عضو داشته باشد.

۴. ثابت کنید مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳n\}$، $n \geq ۲$، را می‌توان به ۳ دستهٔ nتایی افراز کرد به طوری‌که مجموع اعداد هر دسته با دیگری برابر باشد.

(رومانی ـ ۲۰۰۸)

۵. ثابت کنید ۲^n عدد از مجموعهٔ $\left\{۱, ۲, \ldots, \frac{۳^n+۱}{۲}\right\}$ می‌توان انتخاب کرد طوری‌که هیچ سه‌تا تشکیل تصاعد حسابی ندهند.

۶. یک مکعب $۲ \times ۲ \times ۲$ را که یک مکعب به ضلع واحد از یکی از گوشه‌های آن حذف شده باشد یک قطعه نامیم. ثابت کنید که اگر از یک مکعب به ضلع ۲^n که به $۲^{۳n}$ مکعب واحد تقسیم شده است یک مکعب واحد را به دلخواه حذف کنیم، آنگاه شکل باقی‌مانده را می‌توانیم به تعدادی قطعه ببریم.

(لهستان ـ ۱۹۹۹)

۷. $۲^{n-۱}$ بازیکن تنیس در یک دوره مسابقه شرکت کردند. در این دوره هر دو بازیکن دقیقاً یک بار با هم بازی کردند و در هر بازی یک نفر پیروز مسابقه بود. ثابت کنید n بازیکن مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n یافت می‌شوند به طوری‌که برای هر $۱ \leq i \leq n$، a_i از همهٔ $a_{i+۱}$، $a_{i+۲}$، ... و a_n برده باشد.

۸. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید یک مربع را می‌توان به $۳ \times ۲^{n-۱} - ۲$ مربع تقسیم کرد به طوری‌که هر خط که با یکی از اضلاع مربع موازی است از درون حداکثر nتا از این مربع‌ها عبور کند.

۹. $n + ۱$ دختر و n پسر دور یک میز نشسته‌اند. ثابت کنید دختری وجود دارد که با شروع شمارش از او در جهت ساعتگرد تا هر جا تعداد دخترها از پسرها بیشترند. در ضمن ثابت کنید فقط یک دختر با این ویژگی وجود دارد.

۱۰. $۲n + ۱$ دختر و n پسر دور یک دایره نشسته‌اند. ثابت کنید دختری وجود دارد که با شروع شمارش از او در هر جهت و تا هرکجا تعداد دخترها از تعداد پسرها بیشتر است.

(نردیک ـ ۲۰۰۵)

۱۱. دو نفر با هم بازی می‌کنند. نفر اول در هر حرکت حرف A یا B را می‌نویسد (در ابتدا یک حرف می‌نویسد و در هر مرحله حرف جدید را در سمت راست حرف قبلی می‌نویسد)، پس از آن نفر دوم یا کاری نمی‌کند یا جای دوتا از حروفی را که تاکنون نوشته شده است عوض می‌کند. پس از $۲n - ۱$ مرحله بازی تمام می‌شود. ثابت کنید نفر دوم می‌تواند کاری کند که کلمهٔ پایانی پالیندرم باشد (کلمه‌ای که از ابتدا و انتها به یک صورت خوانده شود پالیندرم نامیده می‌شود).

(مسکو ـ ۱۹۹۹)

۱۲. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. مجموعهٔ درایه‌های سطر iام A را با X_i و مجموعهٔ درایه‌های ستون iام A را با Y_i نشان می‌دهیم. می‌گوییم A ماتریسی طلایی است اگر هیچ دوتا از مجموعه‌های $X_۱$، $\ldots$، X_n، $Y_۱$، $\ldots$ و Y_n برابر نباشند. به‌ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید ماتریس طلایی $۲^n \times ۲^n$ با درایه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n + ۲\}$ وجود دارد.

۱۳. اعداد حقیقی $x_۱$، $x_۲$، $\ldots$، x_m، $y_۱$، $y_۲$، $\ldots$ و y_n داده شده است. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریسی $m \times n$ باشد که در آن a_{ij} برابر ۱ است اگر $x_i + y_j \geq ۰$ و در غیر این‌صورت a_{ij} برابر صفر است. همچنین فرض کنید B ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های ۰ و ۱ باشد به طوری‌که مجموع درایه‌های هر سطر B با مجموع درایه‌های سطر متناظر در A و مجموع درایه‌های هر ستون B با مجموع درایه‌های ستون متناظر در A برابر باشد. ثابت کنید $A = B$.

(پیشنهادی المپیاد جهانی ـ ۲۰۰۳)

۱۴. برای یک مجموعهٔ ناتهی از اعداد مانند S، مجموع و حاصل‌ضرب اعضای S را به ترتیب با $\sigma(S)$ و $\pi(S)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید

$$\sum \frac{\sigma(S)}{\pi(S)} = (n^۲ + ۲n) - (n + ۱)\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}\right)$$

که مجموع روی همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است.

(امریکا ـ ۱۹۹۱)

۱۵. ثابت کنید مجموعهٔ اعداد nرقمی با ارقام ۱ و ۲ تشکیل یک دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانهٔ ۲^n می‌دهد (یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم هیچ دوتا از این اعداد بر ۲^n برابر نیست).

۱۶. اعداد ۱ تا $۲n$ روی $۲n$ نقطه از محیط یک دایره با ترتیبی دلخواه نوشته شده‌اند. روی هر وتری که دوتا از این نقاط را به هم وصل می‌کند تفاضل اعداد دو سر آن را می‌نویسیم. ثابت کنید می‌توان nتا از این وترها را انتخاب کرد به طوری‌که هیچ دوتا نقطهٔ مشترک نداشته باشند و در ضمن مجموع اعداد آنها برابر $n^۲$ باشد.

(فیلیپین ـ ۲۰۱۳)

۱۷. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای متناهی از مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. می‌گوییم S مجموعه‌ای ویژه است اگر مجموع اعضای هیچ دو زیرمجموعه‌ای از S برابر نباشند.

الف) برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید مجموعه‌ای ویژه با n عضو وجود دارد.

ب) برای هر عدد طبیعی $n \geq ۴$ ثابت کنید زیرمجموعه‌ای ویژه با n عضو از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲^n - ۱\}$ وجود دارد.

۱۸. فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند، $k \leq n$ و S مجموعه‌ای شامل n عدد حقیقی باشد. ثابت کنید در بین زیرمجموعه‌های kعضوی S حداقل $k(n-k)+۱$ زیرمجموعه می‌توان یافت که مجموع اعضای هیچ دوتا برابر نباشند.

(پیشنهادی المپیاد جهانی ـ ۱۹۹۳)

۱۹. اعداد حقیقی مثبت $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n داده شده‌اند. برای هر جایگشت $\sigma = x_۱x_۲\ldots x_n$ از این اعداد تعریف می‌کنیم

$$S_۱(\sigma) = x_۱, S_۲(\sigma) = x_۱ + x_۲, \ldots, S_n(\sigma) = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n,$$
$$Q(\sigma) = S_۱S_۲\ldots S_n$$

حاصل $\sum \frac{۱}{Q(\sigma)}$ را بیابید (مجموع روی همهٔ $n!$ جایگشت σ از اعداد $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n است).

(کانادا ـ ۱۹۸۹)

راه‌حل‌ها

۱. به‌ازای $n = ۴$ به‌سادگی می‌توان ملاحظه کرد که دو نقطهٔ مجاور عدد ۱ تنها زوج وابسته می‌باشند. فرض کنید حکم به‌ازای $n - ۱$ درست باشد و اعداد ۱ تا n با ترتیبی دلخواه دور دایره نوشته شده باشند. با حذف عدد ۱ ترتیبی از $n - ۱$ عدد ۲، ۳، ... و n حاصل می‌شود. از درستی حکم به‌ازای $n - ۱$ نتیجه می‌گیریم برای این آرایش از اعداد ۲ تا n دقیقاً $n - ۴$ جفت وابسته وجود دارد. این جفت‌ها پس از برگرداندن عدد ۱ به سر جای اولیه همچنان وابسته‌اند، به‌اضافه اینکه دو نقطهٔ مجاور عدد ۱ که پس از حذف عدد ۱ به‌علت مجاورت وابسته نبودند، اکنون به‌علت وجود عدد ۱ وابسته‌اند. نتیجه می‌گیریم در این آرایش از اعداد ۱ تا n دقیقاً $n - ۳$ جفت وابسته وجود دارد.

۲. به‌ازای $n = ۱$ حکم واضح است، زیرا قبل از اینکه بازی شروع شود رضا به هدف خود رسیده است. فرض کنید حکم به‌ازای $n - ۱$ درست باشد و اکنون $۲n$ شکلات در n قوطی قرار داشته باشند. پس از حرکت اول علی $۲n - ۱$ شکلات در n قوطی باقی می‌ماند، لذا در این لحظه قوطی‌ای وجود دارد که حداکثر یک شکلات در آن قرار دارد. پس رضا در حرکت اول خود می‌تواند کاری کند که حداقل یک قوطی هیچ شکلاتی نداشته باشد. این قوطی را دور می‌اندازیم، لذا در این لحظه $۲(n - ۱)$ شکلات در $n - ۱$ قوطی باقی می‌ماند و مجدداً علی شروع‌کنندهٔ بازی است. از درستی حکم به‌ازای $n - ۱$ نتیجه می‌گیریم رضا در ادامه می‌تواند طوری بازی کند که دو شکلات آخر متعلق به یک قوطی باشند.

۳. به‌ازای $n = ۱$ به‌سادگی حکم قابل بررسی است. فرض کنید حکم به‌ازای $n - ۱$ درست باشد، در این‌صورت دنبالهٔ

$$A_۱, A_۲, \ldots, A_{۲^{n-۱}}$$

از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$ وجود دارد به‌طوری‌که هر زیرمجموعه از این مجموعه در این دنباله ظاهر شده باشد و تفاضل متقارن هر دو زیرمجموعهٔ مجاور تک‌عضوی باشد. فرض کنید $B_i = A_i \cup \{n\}$، $۱ \leq i \leq ۲^{n-۱}$. در این‌صورت در دنبالهٔ

$$A_۱, A_۲, \ldots, A_{۲^{n-۱}}, B_{۲^{n-۱}}, B_{۲^{n-۱}-۱}, \ldots, B_۱$$

هر زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ ظاهر شده است و تفاضل متقارن هر دو زیرمجموعهٔ مجاور تک‌عضوی است.

۴. روش اول. به‌ازای $n = ۲$ و $n = ۳$ درستی حکم به سادگی قابل بررسی است.

$$n = ۲: \quad \{۱, ۶\}, \{۲, ۵\}, \{۳, ۴\}$$
$$n = ۳: \quad \{۱, ۵, ۹\}, \{۲, ۶, ۷\}, \{۳, ۴, ۸\}$$

نشان می‌دهیم درستی حکم به‌ازای n درستی حکم به‌ازای $n + ۲$ را نتیجه می‌دهد و از این درستی حکم به‌ازای هر $n \geq ۲$ نتیجه خواهد شد. فرض کنید A، B و C افرازی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳n\}$ به سه زیرمجموعهٔ nعضوی باشد به طوری‌که مجموع اعداد هر یک از این زیرمجموعه‌ها با دیگری برابر باشد. در این‌صورت

$$A \cup \{۳n + ۱, ۳n + ۶\},\ B \cup \{۳n + ۲, ۳n + ۵\},\ C \cup \{۳n + ۳, ۳n + ۴\}$$

افرازی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳(n + ۲)\}$ با ویژگی‌های موردنظر است.

روش دوم. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و A، B و C افرازی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳n\}$ با ویژگی‌های موردنظر باشد. همچنین فرض کنید $۱ \in A$ و عدد k کوچک‌ترین عددی باشد که در A نیامده است، مثلاً $k \in B$ و توجه کنید که $k - ۱ \in A$. در این‌صورت

$$(A - \{k - ۱\}) \cup \{k, ۳n + ۱\},\ (B - \{k\}) \cup \{k - ۱, ۳n + ۳\},\ C \cup \{۳n + ۲\}$$

افرازی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳(n + ۱)\}$ با ویژگی‌های موردنظر است، لذا حکم به‌ازای $n + ۱$ درست است.

۵. به‌ازای $n = ۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و A زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\left\{۱, ۲, \ldots, \frac{۳^n+۱}{۲}\right\}$ با ۲^n عضو باشد به طوری‌که هیچ سه عضو A تشکیل تصاعدی حسابی ندهند. فرض کنید

$$B = \{x + ۳^n \mid x \in A\}$$

در این‌صورت B نیز ۲^n عضو دارد، $A \cap B = \varnothing$(زیرا هر عضو B از همهٔ اعضای A بزرگ‌تر است) و هیچ عضوی از B از $\frac{۳^{n+۱}+۱}{۲}$ بزرگ‌تر نیست. پس $A \cup B$ زیرمجموعه‌ای از

مجموعهٔ $\left\{۱, ۲, \ldots, \frac{۳^{n+۱}+۱}{۲}\right\}$ با $۲^{n+۱}$ عضو است. فرض کنید $x < y < z$ جملاتی از یک تصاعد حسابی و متعلق به $A \cup B$ باشند. چون در A تصاعد حسابی با سه جمله وجود ندارد، لذا $z \in B$. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول. $y \in A$. در این‌صورت

$$y - x \leq \frac{۳^n + ۱}{۲} - ۱ = \frac{۳^n - ۱}{۲}, \quad z - y \geq (۳^n + ۱) - \frac{۳^n + ۱}{۲} = \frac{۳^n + ۱}{۲}$$

لذا $z - y > y - x$، پس x, y, z نمی‌توانند تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند.

حالت دوم. $y \in B$ و $x \in A$. همانند حالت قبل می‌توان نشان داد $y - x > z - y$ و به تناقض رسید.

حالت سوم. $y \in B$ و $x \in B$. در این‌صورت $x - ۳^n, y - ۳^n, z - ۳^n$ همگی به A تعلق دارند و جملات یک تصاعد حسابی هستند ولی می‌دانیم در A چنین چیزی وجود ندارد.

اکنون درستی حکم به‌ازای $n + ۱$ مشخص است.

۶. به‌ازای $n = ۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم به‌ازای $n - ۱$ درست باشد و یک مکعب واحد از مکعب به ضلع ۲^n حذف شده باشد. مکعب به ضلع ۲^n را می‌توانیم به ۸ مکعب به ضلع $۲^{n-۱}$ تقسیم کنیم. مکعب واحد حذف شده در یکی از این ۸ مکعب قرار دارد. از هر یک از ۷ مکعب دیگر، مکعب واحد واقع در گوشهٔ آن را که در مرکز مکعب به ضلع ۲^n قرار دارد حذف می‌کنیم. حال از هر یک از ۸ مکعب یک مکعب واحد آن حذف شده است. از درستی حکم به‌ازای $n - ۱$ نتیجه می‌گیریم شکل باقی‌مانده از هر یک از این ۸ مکعب را می‌توانیم به تعدادی قطعه ببریم. در ضمن توجه کنید که ۷ مکعب واحد حذف شده از مرکز مکعب اصلی خود تشکیل یک قطعه می‌دهند. لذا درستی حکم به‌ازای n نتیجه می‌شود.

۷. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. تورنمنتی با ۲^n بازیکن در نظر بگیرید و فرض کنید x یکی از بازیکنان باشد. A را مجموعهٔ بازیکنانی بگیرید که از x برده‌اند و B را مجموعهٔ آنهایی بگیرید که از x باخته‌اند، در این‌صورت $|A| + |B| = ۲^n - ۱$ و لذا یکی از A و B، مثلاً A، حداقل $۲^{n-۱}$ عضو دارد. از درستی حکم به‌ازای n نتیجه می‌گیریم n بازیکن در A مانند $a_۱$، $a_۲$، … و a_n با ویژگی گفته‌شده وجود دارد. قرار دهید $a_{n+۱} = x$. چون x به همهٔ اعضای A باخته است، لذا $n + ۱$ بازیکن $a_۱$، $a_۲$، … و $a_{n+۱}$ درستی حکم به‌ازای $n + ۱$ را نتیجه می‌دهند.

۸. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. ساختار ایجادشده روی مربع با ویژگی‌های گفته‌شده را X_n می‌گیریم و از روی آن ساختار $X_{n+۱}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

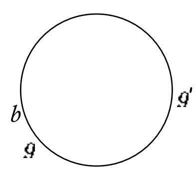
X_n	
	X_n

اگر a_n تعداد مربع‌ها در ساختار X_n و $a_{n+۱}$ تعداد مربع‌های ساختار $X_{n+۱}$ باشد، آنگاه

$$a_{n+۱} = ۲a_n + ۲ = ۲(۳ \times ۲^{n-۱} - ۲) + ۲ = ۳ \times ۲^n - ۲$$

در ضمن هر خط که با یکی از اضلاع مربع موازی باشد، با توجه به اینکه از درون حداکثر nتا از مربع‌های ساختار X_n عبور می‌کند، لذا از روی شکل مشخص است که از درون حداکثر $n + ۱$ تا از مربع‌های ساختار $X_{n+۱}$ عبور خواهد کرد. اکنون درستی حکم به‌ازای $n + ۱$ مشخص است.

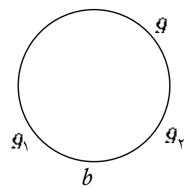
۹. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. $n + ۲$ دختر و $n + ۱$ پسر دور یک میز در نظر بگیرید. فرض کنید g و b یک دختر و پسر مجاور هم باشند به‌طوری‌که هنگام حرکت در جهت ساعتگرد اول g و بعد b قرار داشته باشد. این دو نفر را از دور میز کنار می‌گذاریم. $n + ۱$ دختر و n پسر باقی می‌مانند. از درستی حکم به‌ازای n نتیجه می‌گیریم دختری مانند g' با ویژگی گفته‌شده وجود دارد. مشخص است که پس از بازگشتن g و b به سر جای خود، g' همچنان ویژگی موردنظر را دارد. لذا درستی حکم به‌ازای $n + ۱$ نتیجه می‌شود.



حال چنانچه دو دختر مانند $g_۱$ و $g_۲$ این ویژگی را داشته باشند، در این‌صورت در جهت ساعتگرد از $g_۱$ تا قبل از $g_۲$ و همچنین از $g_۲$ تا قبل $g_۱$ تعداد دخترها از پسرها بیشتر است. نتیجه می‌گیریم دور میز تعداد دخترها حداقل دوتا از پسرها بیشتر است. از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم فقط یک دختر با ویژگی موردنظر وجود دارد.

۱۰. فرض‌کنید حکم به‌ازای n درست باشد. $۲n+۳$ دختر و $n+۱$ پسر دور میز در نظر بگیرید. یک پسر را به همراه اولین دخترهایی که سمت چپ و راست او نشسته‌اند حذف می‌کنیم. $۲n + ۱$

پسر و n دختر باقی می‌مانند. از درستی حکم به‌ازای n نتیجه می‌گیریم دختری مانند g با ویژگی گفته شده وجود دارد. مشخص است که پس از بازگشتن دخترها و پسر حذف‌شده به سر جای خود، g همچنان ویژگی موردنظر را دارد. لذا درستی حکم به‌ازای $n + ۱$ نتیجه می‌شود.



۱۱. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. حال بازی را به‌ازای $n + ۱$ در نظر بگیرید. این بازی در $۲n + ۱$ مرحله انجام می‌شود. از درستی حکم به‌ازای n نتیجه می‌گیریم نفر دوم می‌تواند کاری کند که کلمهٔ $۲n - ۱$ حرفی که از مرحلهٔ دوم تا مرحلهٔ $۲n$ام حاصل می‌شود پالیندرم باشد. حال اگر پس از نوشتن حرف آخر توسط نفر اول، این حرف و حرف اول کلمه یکی بودند که کلمهٔ $۲n + ۱$ حرفی حاصل پالیندرم است و نفر دوم کاری نمی‌کند، والاّ اگر حروف اول و آخر کلمه متمایز باشند، در این صورت حرف میانی کلمه (حرف $n + ۱$ام) با یکی از حروف اول و آخر برابر و با دیگری فرق دارد. حال کافی است نفر دوم حرف میانی را با یکی از حروف اول و آخر که با آن فرق دارد عوض کند. پس از انجام این کار حروف اول و آخر کلمه نیز یکی می‌شوند و لذا کلمهٔ حاصل پالیندرم می‌شود. نتیجه می‌گیریم حکم به‌ازای $n + ۱$ نیز درست است.

۱۲. فرض کنید A یک ماتریس طلایی $۲^n \times ۲^n$ با درایه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n + ۲\}$ باشد. در این‌صورت

A	A
A	$n + ۳$

یک ماتریس طلایی $۲^{n+۱} \times ۲^{n+۱}$ با درایه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n + ۳\}$ است (در بلوک $۲^n \times ۲^n$ سمت راست و پایین ماتریس فوق همهٔ درایه‌ها را برابر $n + ۳$ قرار داده‌ایم).

۱۳. **روش اول.** به استقرا روی $m + n$ حکم را ثابت می‌کنیم. در حالتی که $m = ۱$ یا $n = ۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم به‌ازای $m + n - ۱$ درست باشد، نشان می‌دهیم به‌ازای $m + n$ نیز درست است. فرض کنید x_p بزرگ‌ترین عدد در بین x_iها و y_q کوچک‌ترین عدد در بین y_jها باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول. $x_p+y_q \geq \circ$. در این حالت برای هر $\text{۱} \leq j \leq n$، $x_p+y_j \geq x_p+y_q \geq \circ$، لذا کلیهٔ درایه‌های سطر pام A برابر ۱ است. نتیجه می‌گیریم کلیهٔ درایه‌های سطر pام B نیز برابر ۱ است. فرض کنید A' ماتریس $(m-\text{۱}) \times n$ حاصل از حذف سطر pام A و B' ماتریس $(m-\text{۱}) \times n$ حاصل از حذف سطر pام B باشد، در این‌صورت A' ماتریس متناظر با اعداد $x_\text{۱}$، $x_\text{۲}$، ... و x_m غیر از x_p، و $y_\text{۱}$، $y_\text{۲}$، ... و y_n است، در ضمن مجموع درایه‌های هر سطر B' با مجموع درایه‌های سطر متناظر در A' و مجموع درایه‌های هر ستون B' با مجموع درایه‌های ستون متناظر در A' برابر است، لذا بنابه فرض استقرا $A'=B'$، پس $A=B$.

حالت دوم. $x_p+y_q < \circ$. در این حالت برای هر $\text{۱} \leq i \leq m$، $x_i+y_q \leq x_p+y_q < \circ$، لذا کلیهٔ درایه‌های ستون qام A برابر صفر است. نتیجه می‌گیریم کلیهٔ درایه‌های ستون qام B نیز برابر صفر است. ستون qام A و B را حذف و ماتریس‌های حاصل را A' و B' می‌نامیم. ادامهٔ استدلال مشابه حالت قبل است.

روش دوم. فرض کنید $B=[b_{ij}]$. قرار دهید $S=\sum\limits_{i=\text{۱}}^{m}\sum\limits_{j=\text{۱}}^{n}(x_i+y_j)(a_{ij}-b_{ij})$. طبق تعریف ماتریس A هر جمله از این مجموع نامنفی است. فرض کنید مجموع اعداد سطر iام A برابر r_i و مجموع اعداد ستون jام A برابر c_j باشد، در این‌صورت

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=\text{۱}}^{m}\sum_{j=\text{۱}}^{n} x_i(a_{ij}-b_{ij}) + \sum_{i=\text{۱}}^{m}\sum_{j=\text{۱}}^{n} y_j(a_{ij}-b_{ij}) \\
&= \sum_{i=\text{۱}}^{m}\left(x_i\sum_{j=\text{۱}}^{n} a_{ij}\right) - \sum_{i=\text{۱}}^{m}\left(x_i\sum_{j=\text{۱}}^{n} b_{ij}\right) + \sum_{j=\text{۱}}^{n}\left(y_j\sum_{i=\text{۱}}^{m} a_{ij}\right) \\
&\quad - \sum_{j=\text{۱}}^{n}\left(y_j\sum_{i=\text{۱}}^{m} b_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=\text{۱}}^{m} x_i r_i - \sum_{i=\text{۱}}^{m} x_i r_i + \sum_{j=\text{۱}}^{n} y_j c_j - \sum_{j=\text{۱}}^{n} y_j c_j = \circ
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم برای هر $\text{۱} \leq i \leq m$ و $\text{۱} \leq j \leq n$، $(x_i+y_j)(a_{ij}-b_{ij})=\circ$. لذا برای هر i و j که $x_i+y_j \neq \circ$، $a_{ij}=b_{ij}$. اگر اندیس‌های i و j وجود داشته باشند که $a_{ij} \neq b_{ij}$، در این‌صورت $x_i+y_j=\circ$، لذا طبق تعریف ماتریس A، $a_{ij}=\text{۱}$، پس $b_{ij}=\circ$. نتیجه می‌گیریم مجموع درایه‌های سطر iام B کوچک‌تر از مجموع درایه‌های سطر iام A است. از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم برای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$.

۱۴. به استقرا روی n حکم را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد، در این‌صورت اگر $\{S_۱, S_۲, \ldots, S_{۲^n-۱}\}$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد، آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{۲^n-۱} \frac{\sigma(S_i)}{\pi(S_i)} = (n^۲ + ۲n) - (n+۱)H_n$$

که در آن $H_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}$. فرض کنید

$$\begin{aligned}
&S_{۲^n} = \{n+۱\}\\
&S_{۲^n+۱} = S_۱ \cup \{n+۱\}\\
&S_{۲^n+۲} = S_۲ \cup \{n+۱\}\\
&\quad\vdots\\
&S_{۲^{n+۱}-۱} = S_{۲^n-۱} \cup \{n+۱\}
\end{aligned}$$

در این‌صورت به‌ازای $۱ \leq i \leq ۲^n - ۱$،

$$\sigma(S_{۲^n+i}) = \sigma(S_i) + n + ۱, \quad \pi(S_{۲^n+i}) = (n+۱)\pi(S_i)$$

و در ضمن $\{S_۱, S_۲, \ldots, S_{۲^{n+۱}-۱}\}$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n+۱\}$ است. حال می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{۲^{n+۱}-۱} \frac{\sigma(S_i)}{\pi(S_i)} &= \sum_{i=۱}^{۲^n-۱} \frac{\sigma(S_i)}{\pi(S_i)} + \frac{\sigma(S_{۲^n})}{\pi(S_{۲^n})} + \sum_{i=۱}^{۲^n-۱} \frac{\sigma(S_{۲^n+i})}{\pi(S_{۲^n+i})}\\
&=(n^۲ + ۲n) - (n+۱)H_n + \frac{n+۱}{n+۱} + \sum_{i=۱}^{۲^n-۱} \frac{\sigma(S_i) + n + ۱}{(n+۱)\pi(S_i)}\\
&=(n^۲ + ۲n) - (n+۱)H_n + ۱ + \frac{۱}{n+۱} \sum_{i=۱}^{۲^n-۱} \frac{\sigma(S_i)}{\pi(S_i)}\\
&\quad + \sum_{i=۱}^{۲^n-۱} \frac{۱}{\pi(S_i)}\\
&=(n^۲ + ۲n) - (n+۱)H_n + ۱\\
&\quad + \frac{۱}{n+۱}\big((n^۲ + ۲n) - (n+۱)H_n\big) + n \qquad (*)
\end{aligned}$$