درس ۲: تابع درجه سوم، تابع یکنوا، بخش‌پذیری و تقسیم

■ تابع چند جمله‌ای

هر تابع به شکل $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ را یک چندجمله‌ای از درجهٔ n گوییم، که در آن $a_n\neq 0$ است. $(a_i\in\mathbb{R}\ n\in\mathbb{N})$

برای نمونه، توابع زیر چندجمله‌ای هستند:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{2}x\quad,\quad g(x)=\sqrt{3}x^7-\frac{1}{\sqrt{5}}x^2-1$$

اما توابع زیر چندجمله‌ای **نیستند**:

$$f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}+x-1\ ,\ g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+7}\ ,$$

$$h(x)=x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}$$

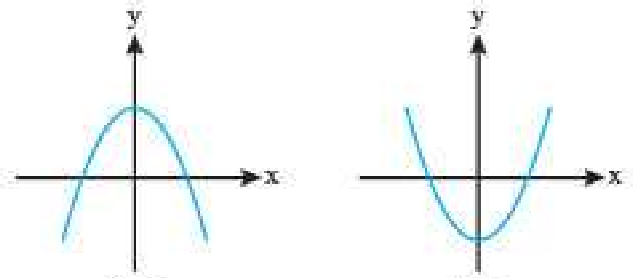
نکته: دامنهٔ توابع چندجمله‌ای، اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

در سال گذشته با تعدادی از توابع چندجمله‌ای آشنا شدید:

① **تابع ثابت،** چندجمله‌ای از درجهٔ صفر می‌باشد و دارای فرم کلی $f(x)=k\ (k\in\mathbb{R})$ است.

② **تابع خطی،** چندجمله‌ای از درجهٔ یک می‌باشد که دارای فرم کلی $f(x)=ax+b$ است.

③ **سهمی،** چندجمله‌ای از درجهٔ دو است که دارای فرم کلی $f(x)=ax^2+bx+c$ می‌باشد. در صورت کلی نمودار آن به صورت‌های مقابل است:



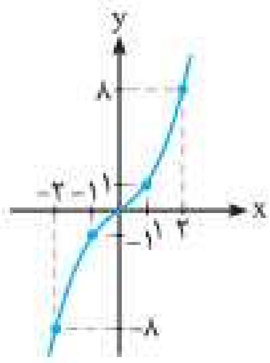
$a<0$ $\qquad$ $a>0$

④ **چندجمله‌ای درجهٔ سه،** هر چندجمله‌ای به‌فرم $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ را یک چندجمله‌ای درجهٔ سه گویند.

نکته: دامنه و برد یک چندجمله‌ای از درجهٔ سه، همواره $\mathbb{R}$ است.

مثال با استفاده از نقطه‌یابی، نمودار $f(x)=x^3$ را رسم کنید. (کتاب درسی)

پاسخ



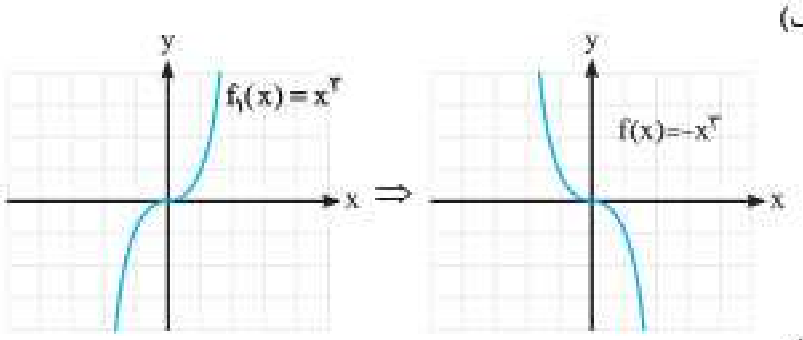
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8

مثال با استفاده از انتقال توابع، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

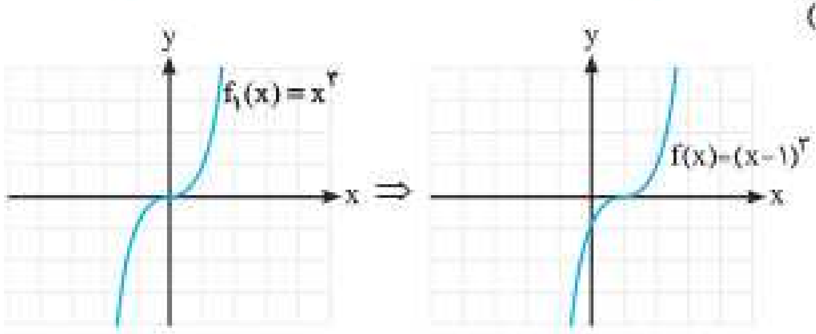
الف) $f(x)=-x^3$ ب) $g(x)=(x-1)^3$ پ) $h(x)=-(x+1)^3+2$

پاسخ

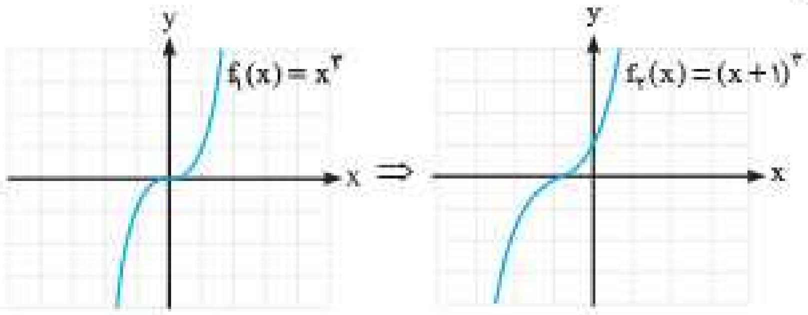
الف)

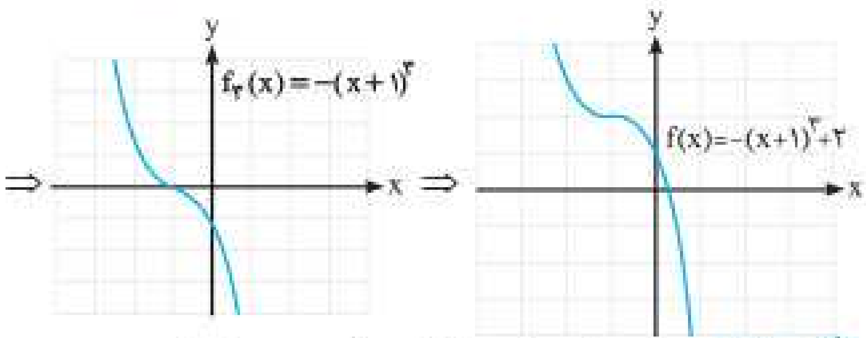


ب)



پ)





مثال تعداد جواب‌های معادلهٔ $x|x|-x^3=0$ را بیابید.

پاسخ قرار می‌دهیم $f(x)=x^3$ و $g(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & ;\ x\geq 0\\ -x^2 & ;\ x<0\end{cases}$. بنابراین:

$$\begin{cases}x\geq 0\Rightarrow x^2-x^3=0\Rightarrow x^2(1-x)=0\\ x<0\Rightarrow -x^2-x^3=0\Rightarrow x^3+x^2=0\Rightarrow x^2(1+x)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x\geq 0}\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\\ \xrightarrow{x<0}\begin{cases}x=0\ \text{غ ق ق}\\x=-1\end{cases}\end{cases}\xrightarrow{\cup}x=0,\pm 1$$

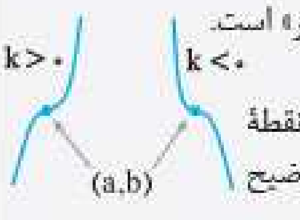
نکته: چندجمله‌ای‌های درجهٔ سه که از معادلهٔ $f(x)=k(x-a)^3+b$ پیروی می‌کنند، دارای نمودارهای ذکر شده در بالا به صورت کلمهٔ «لر» یا عکس کلمهٔ «لر» هستند و داریم:

الف) اگر $k>0$، نمودار به صورت کلمهٔ «لر» است.

ب) اگر $k<0$، نمودار به صورت عکس کلمهٔ «لر» است.

ج) f نسبت به نقطهٔ (a,b) متقارن است.

در حقیقت، محل تغییر قوس نمودار همان نقطهٔ (a,b) است. (در فصل پنجم بیشتر توضیح خواهیم داد)

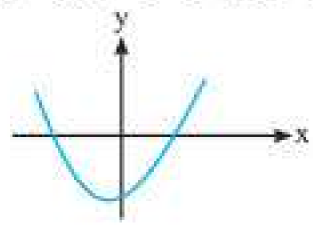


تعریف فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

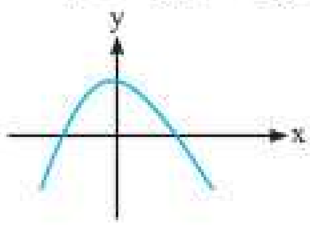
تعریف فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تعریف فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

مثال‌های زیر در درک بهتر تعاریف فوق می‌تواند بسیار مفید باشد:



$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$



$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$

نکته: همواره داریم:

- فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$

- فرض کنیم $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L$ و $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=m$. در این صورت:

الف) $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\pm\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=L\pm m$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\times\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=L\cdot m$

پ) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)}=\frac{L}{m}\quad(m\neq 0)$

- فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد آن گاه:

الف) $\lim_{x\to+\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & (\text{a مثبت})\\ -\infty & (\text{a منفی})\end{cases}$

ب) $\lim_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & (\text{n زوج و a مثبت})\\ -\infty & (\text{n زوج و a منفی})\\ -\infty & (\text{n فرد و a مثبت})\\ +\infty & (\text{n فرد و a منفی})\end{cases}$

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این‌صورت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

مثال حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to+\infty} 2x^7-x^2+x-1$

ب) $\lim_{x\to+\infty} -x^2-3x^3+7x+3$

پ) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x^3+x-4}{2x-5x^3-1}$

ت) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-x+2}{-x^2+x-1}$

ث) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-x^3+1}{3-x^5+x}$

پاسخ

الف) $\lim_{x\to+\infty}(2x^7-x^2+x-1)=\lim_{x\to+\infty} 2x^7=+\infty$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(-x^2-3x^3+7x+3)=\lim_{x\to+\infty} -3x^3=-\infty$

پ) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x^3+x-4}{2x-5x^3-1}=\frac{\lim_{x\to\pm\infty}(2x^2-x^3+x-4)}{\lim_{x\to\pm\infty}(2x-5x^3-1)}$

$=\frac{\lim_{x\to\pm\infty}(-x^3)}{\lim_{x\to\pm\infty}(-5x^3)}=\frac{1}{5}$

ت) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-x+2}{-x^2+x-1}=\frac{\lim_{x\to-\infty}(x^5-x+2)}{\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-1)}$

$=\frac{\lim_{x\to-\infty}(x^5)}{\lim_{x\to-\infty}(-x^2)}=\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$

ث) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-x^3+1}{3-x^5+x}=\frac{\lim_{x\to\pm\infty}(2x-x^3+1)}{\lim_{x\to\pm\infty}(3-x^5+x)}$

$=\frac{\lim_{x\to\pm\infty}(-x^3)}{\lim_{x\to\pm\infty}(-x^5)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0$

نکته: فرض کنید $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n و $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ m باشد. در این صورت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m} & ;\ n=m\\ \text{صفر} & ;\ m>n\\ \infty & ;\ m<n\end{cases}$$

در حقیقت نکتهٔ فوق به ما می‌گوید برای محاسبهٔ حد توابع کسری در بی‌نهایت، اگر درجهٔ صورت از مخرج بزرگ‌تر باشد، حاصل حد، بی‌نهایت و اگر درجهٔ مخرج از صورت بزرگ‌تر باشد، حاصل حد، برابر صفر می‌باشد.

مثال اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^4+3x^2+1}{2x^b+x^2+1}=1$ باشد، $a+b$ کدام است؟

پاسخ با توجه به نکتهٔ گفته‌شده حاصل این حد زمانی عددی غیرصفر می‌شود که درجهٔ صورت و مخرج با هم برابر باشند. بنابراین باید $b=4$ باشد. لذا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^4+3x^2+1}{2x^4+x^2+1}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^4}{2x^4}=1\Rightarrow\frac{a}{2}=1\Rightarrow a=2$$

در نتیجه $a+b=6$.

درس: حسابان (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ:

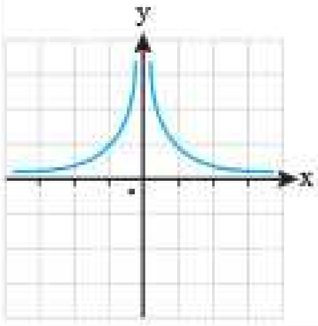
ردیف	سؤالات	نمره
	فصل اول	
۱	**درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.** اگر $k>1$ باشد، نمودار تابع $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود. پرتکرار	۰/۲۵
۲	**جای‌خالی را کامل کنید.** اگر $A(-2,5)$ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ متناظر آن روی نمودار $y=f(x+2)-3$ به صورت ...... است.	۰/۵
۳	اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب $[-2,1)$ و $(-\infty,-1)$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x)=f(-\frac{1}{2}x)-3$ را به‌دست‌آورید. پرتکرار	۱/۵
۴	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** الف) برای تابع $f(x)=-1$ درجه تعریف نمی‌شود. ب) عبارت x^n+a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است. پرتکرار	 ۰/۲۵ ۰/۲۵
۵	**جای خالی را کامل‌کنید.** تابع $f(x)=2x-x^2$ روی بازهٔ ...... اکیداً نزولی است.	۰/۵
۶	تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار تابع را رسم‌کنید. ب) این تابع در چه بازه‌ای صعودی و درچه بازه‌ای نزولی است؟	 ۰/۲۵ ۱
۷	نمودار تابعی رسم‌کنید که در بازهٔ $(-\infty,2]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی باشد (اکیداً صعودی نباشد).	۱
۸	الف) چند جمله‌ای x^n-1 را با عامل $(x-1)$ تجزیه‌کنید. ب) مقادیر a و b را طوری به‌دست‌آورید که باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)=x^3-ax^2+bx$ بر $(x+3)$ و $(x-1)$ به ترتیب ۴ و ۳− باشد. پرتکرار	۰/۵ ۱
	فصل دوم	
۹	**درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص‌کنید.** تابع $y=\tan\theta$ در $(-\pi,\pi)$ صعودی است. پرتکرار	۰/۲۵
۱۰	**جای‌خالی را کامل‌کنید.** الف) دامنهٔ تابع $y=\tan\frac{x}{2}$ برابر ...... است. ب) ضابطهٔ تابع کسینوسی که $T=4\pi$، $\max=4$ و $\min=-5$ برابر با ...... است.	 ۰/۵ ۱
۱۱	الف) نمودار یک تابع رسم کنید که دورهٔ تناوب آن برابر ۴ باشد. ب) در تابع $y=-3-\frac{1}{2}\sin 3x$، دورهٔ تناوب، بیشترین مقدار و کمترین مقدار را به‌دست‌آورید.	۰/۷۵ ۱
۱۲	معادله‌های زیر را حل‌کنید و جواب عمومی آن‌ها را بنویسید. پرتکرار الف) $2\sin 3x-\sqrt{2}=0$ ب) $2\cos^2 x-9\cos x=0$ ج) $\tan x+\tan 2x=0$	 ۱ ۰/۷۵ ۱

امتحان ۱۰

مهروماه

سؤالات امتحانی دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور نوبت دوم

درس: حسابان (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: خرداد ۱۴۰۰

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.** الف) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، .... می‌گوییم. ب) برد تابع تانژانت $(y = \tan x)$ برابر .... است. پ) باتوجه به شکل مقابل، حد تابع $f(x) = \frac{1}{\|x\|}$ در نقطهٔ $x = 0$ برابر است با .... ت) اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a .... است. 	۱
۲	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.** الف) اگر تابع f در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود. ب) تابع صعودی اکید، نقطهٔ عطف ندارد. پ) اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آن‌گاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است. ت) در نقطهٔ عطف، علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.	۱
۳	نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید.	۰/۷۵
۴	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$، تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.	۰/۷۵
۵	باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان است. مقدار a را بیابید.	۰/۷۵
۶	ضابطهٔ تابع مثلثاتی سینوس با دورهٔ تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید.	۰/۷۵
۷	معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید. پرتکرار	۱
۸	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x+1}{\|x-2\|}$ ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{4}{x} - 2}$	۱
۹	مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{x^2 - 1}$ را در صورت وجود بیابید.	۱/۲۵
۱۰	معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در نقطهٔ $A(1, f(1))$ به‌دست آورید.	۱/۵
۱۱	باتوجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید. ب) طول نقطهٔ «گوشه‌ای» را بنویسید. پ) طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط، هر دو منفی است را بنویسید. 	۰/۷۵
۱۲	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ $h(t) = -5t^2 + 40t$ به‌دست می‌آید. مطلوب است: الف) سرعت متوسط در بازهٔ $[1, 2]$ ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 3$	۱

امتحان ۲ ـ نوبت اول

۱ درست (فصل ۱ / انبساط و انقباض عمودی). (۰/۲۵)

۲ $B(-۴,۲)$ (۰/۵)

$y=f(x+۲)-۳ \Rightarrow x+۲=-۲ \Rightarrow x=-۴$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow f(-۴+۲)-۳=f(-۲)-۳=۵-۳=۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow A'(-۴,۲)$

(فصل ۱ / انتقال توابع)

۳ $-۲\le -\frac{۱}{۲}x<۱ \Rightarrow -۲<x\le ۴ \Rightarrow D_g=(-۲,۴]$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$f(x)<-۱ \Rightarrow g(x)=f(-\frac{۱}{۲}x)-۳<-۱-۳=-۴$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow R_f=(-\infty,-۴)$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / تبدیل نمودار توابع)

۴ نادرست. درجهٔ تابع ثابت برابر صفر است. (۰/۲۵)

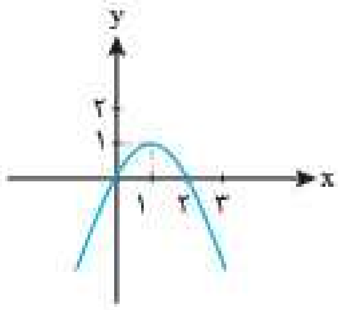
ب) نادرست (۰/۲۵) زیرا:

$x-a=۰ \Rightarrow x=a \Rightarrow x^n+a^n=a^n+a^n\neq ۰$

(فصل ۱ / تقسیم و بخش‌پذیری)

۵ $[۱,+\infty]$ (۰/۲۵)

$f(x)=۲x-x^۲=-(x^۲-۲x)=-[(x-۱)^۲-۱]$

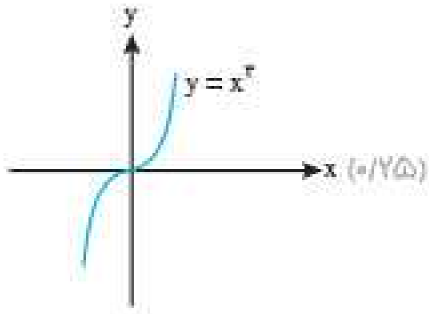


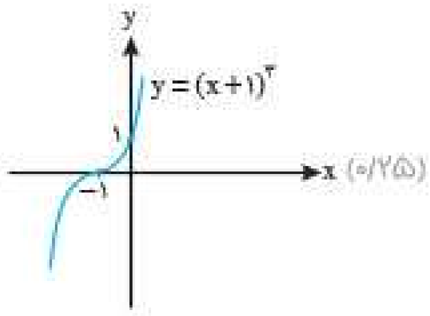
(فصل ۱/ توابع یکنوا و اکیداً یکنوا)

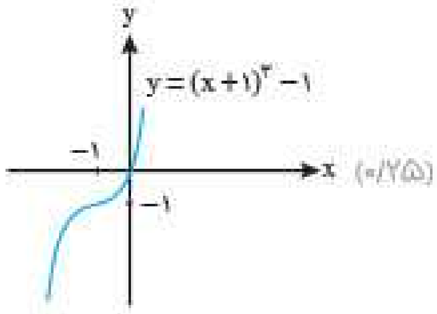
۶ الف) $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱$

$\Rightarrow (x+۱)^۳-۱$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / تابع درجه ۳)



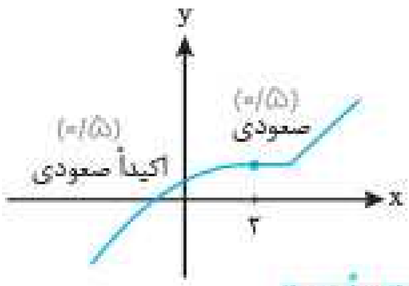




ب) مطابق نمودار، تابع در $\mathbb{R}$ صعودی است. (۰/۲۵)

(فصل ۱ / توابع یکنوا)

۷



(فصل ۱ / توابع یکنوا و اکیداً یکنوا)

۸ الف) $(x^n-۱)=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+x^{n-۳}+...+x^۲+x+۱)$

(۰/۵)

ب) $x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳ \Rightarrow p(-۳)=(-۳)^۳-a(-۳)^۲+b(-۳)=۴$

$\Rightarrow -۹a-۳b=۲۷+۴=۳۱ \Rightarrow -۹a-۳b=۳۱$ (۰/۲۵)

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow p(۱)=۱^۳-a(۱)^۲+b(۱)=-۳ \Rightarrow -a+b=-۴$ (۰/۲۵)

$$\begin{cases}۹a+۳b=-۳۱\\ -a+b=-۴\end{cases}\Rightarrow \underline{\begin{cases}\cancel{۹a}+۳b=-۳۱\\ -\cancel{۹a}+۹b=-۳۶\end{cases}}_{۱۲b=-۶۷}\Rightarrow b=\frac{-۶۷}{۱۲}$$ (۰/۲۵)

$-a+b=-a-\frac{۶۷}{۱۲}=-۴$

$a=۴-\frac{۶۷}{۱۲}=\frac{۴۸-۶۷}{۱۲}=\frac{-۱۹}{۱۲}$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / بخش‌پذیری و تقسیم)

۹ درست (فصل ۲ / تابع تانژانت) (۰/۲۵)

۱۰ الف) $\frac{x}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq ۲k\pi+\pi,\ K\in\mathbb{Z}$

(۰/۲۵)

$D_y=\mathbb{R}-\{۲k\pi+\pi \mid k\in\mathbb{Z}|\}$

(۰/۲۵)

(فصل ۲ / دامنهٔ تابع تانژانت)

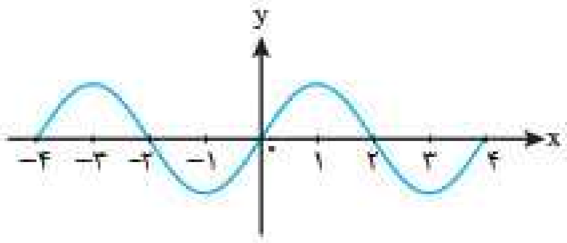
ب) $T=\cancel{۴}^{۲}\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

$$\begin{cases}c=\frac{max+min}{۲}=\frac{-۵+۴}{۲}=\frac{-۱}{۲} & (۰/۲۵)\\ max=|a|+c=|a|+(\frac{-۱}{۲})=۴\Rightarrow |a|=\frac{۹}{۲} & (۰/۲۵)\end{cases}$$

$\Rightarrow y=\frac{۹}{۲}\cos(\frac{۱}{۲}x)-\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

(فصل ۲ / دورهٔ تناوب)

۱۱ الف) (۰/۷۵)



ب) دورهٔ تناوب: $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{|۳|}=\frac{۲\pi}{۳}$ (۰/۵)

$max=|a|+c=|\frac{-۱}{۲}|+۳=\frac{۷}{۲}$ (۰/۲۵)

$min=-|a|+c=-|\frac{-۱}{۲}|+۳=\frac{۵}{۲}$ (۰/۲۵)

(فصل ۲ / دورهٔ تناوب)

۱۰ الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}^+} \tan(x+\frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{2})^+ = -\infty$ (۰/۵)

ب) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2+x-1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ (۱)

پ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{(\cancel{1}-3x+3x^2-\cancel{x^3})\cancel{-1}+\cancel{x^3}}{(x-1)^2}$ (۰/۵)

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$ (۰/۵)

(فصل ۳ / حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت)

۱۱ $|x|-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$

(خط $x=1$ مجانب قائم نیست.) (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{3(x-1)}{-x-1} = \infty$

(خط $x=-1$ مجانب قائم است.) (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x-3}{x-1} = 3$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x-3}{-x-1} = -3$ (۰/۲۵)

(خطوط $y=3$ و $y=-3$ مجانب‌های افقی تابع هستند.) (۰/۲۵)

(فصل ۳ / مجانب قائم و افقی)

۱۲ باید مخرج صفر شود و چون فقط یک مجانب داریم، پس مخرج یک ریشه دارد، یعنی Δی مخرج صفر است (مخرج ریشهٔ مضاعف $x=2$ دارد). (۰/۵)

$x^2+ax+b=(x-2)^2$ (۰/۵)

$\Rightarrow x^2+ax+b = x^2-4x+4$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases} a=-4 & (۰/۲۵) \\ b=4 & (۰/۲۵) \end{cases}$

(فصل ۳ / مجانب قائم)

۱۳ اگر $k=5$ باشد، جواب حد برابر $\frac{1}{2}$ است. (۰/۲۵)

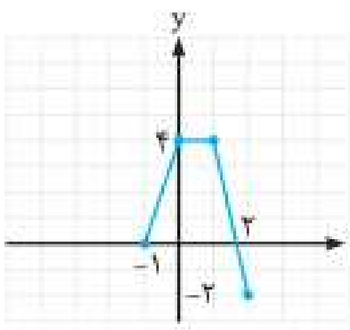
اگر $k>5$ باشد، جواب حد $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. (۰/۲۵)

اگر $k<5$ باشد، جواب حد صفر خواهد بود. (۰/۲۵)

امتحان ۵ ـ خرداد ماه ۱۳۹۸ (نوبت دوم)

۱ الف) نادرست. زیرا اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید. (فصل ۱/ انقباض و انبساط افقی) (۰/۲۵)/ ب) درست (فصل ۲ / تابع تانژانت) (۰/۲۵)/ پ) درست (فصل ۳ / حد بی‌نهایت) (۰/۲۵) / ت) نادرست. شیب خط مماس در نقطهٔ B مثبت و در نقطهٔ A منفی است. (فصل ۴ / خط مماس بر منحنی) (۰/۲۵)

۲



(۰/۵)

$D_g=[-1,2]$ (۰/۲۵)

$R_g=[-2,4]$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / انتقال توابع)

۳ $f(-1)=0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 1-a-3=0 \Rightarrow a=-2$ (۰/۲۵)

$f(2)=4-4-3=-3$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / بخش‌پذیری و تقسیم)

۴ $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$ (۰/۵)

(فصل ۱ / تقسیم چندجمله‌ای‌ها)

۵ الف) ۸ (فصل ۲ / دورهٔ تناوب) (۰/۲۵) / ب) ۳ (فصل ۳ / حد بی‌نهایت) (۰/۲۵) / پ) A (فصل ۴ / شیب خط مماس) (۰/۲۵) / ت) بحرانی (فصل ۵ / تعریف نقطهٔ بحرانی) (۰/۲۵)

۶ $2\cos^2 x-1+\cos x+1=0$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \cos x(2\cos x+1)=0$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \;(۰/۲۵) \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \;(۰/۲۵) \\ \cos x=-\frac{1}{2} \;(۰/۲۵) \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \;(۰/۲۵) \end{cases}$

(فصل ۲ / معادلات مثلثاتی)

۷ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3} = \infty$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}}_{(۰/۵)} = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

بنابراین خط $x=-1$ مجانب قائم منحنی f است (۰/۲۵) ولی $x=3$ مجانب قائم منحنی تابع f نیست. (۰/۲۵) (فصل ۳ / مجانب قائم و افقی)

۸ $y=-2$ (۰/۲۵) و $y=1$ (۰/۲۵) (فصل ۳ / مجانب قائم و افقی)

۹ تابع f در $x=-1$ پیوسته است. (۰/۲۵)

$f'_+(-1) = \underbrace{\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{|x^2+x|}{x+1}}_{(۰/۲۵)}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{-x(x+1)}{x+1}$ (۰/۲۵) $=1$ (۰/۲۵)

$f'_-(-1) = \underbrace{\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{x(x+1)}{x+1}}_{(۰/۵)}$ (۰/۲۵) $=-1$ (۰/۲۵)

مشتق‌های راست و چپ تابع هر دو متناهی ولی نابرابرند. پس $x=-1$ نقطهٔ گوشه‌ای تابع است. (۰/۲۵) (فصل ۴ / مشتق چپ و راست ـ نقاط مشتق‌ناپذیر)

۱۰ کافی است نشان دهیم:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \underbrace{\lim\limits_{x\to a}(x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})}_{(۰/۲۵)}$

$= \underbrace{\lim\limits_{x\to a}(x-a)\times\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})}_{(۰/۲۵)} = 0\times f'(a)=0$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (۰/۲۵)

(فصل ۴ / مشتق‌پذیری و پیوستگی)