مقدمه

«بدون علاقه‌داشــتن به ریاضیات ممکن است آن را سرد و بیهوده بیابید! اما ریاضیات زیبایی خود را تنها به افراد صبور نشان می دهد.»

مریم میرزاخانی

سلام به بچه‌های باحال انسانی!

ما این‌جا دور هم جمع شدیم و مجموعه‌ای رو براتون آماده کردیم که توی کم‌ترین زمان ممکن، بهترین نتیجه رو تو درس ریاضی داشته باشید. تو این کتاب ۵تا مبحث خیلی‌خیلی ضروری از ریاضیات انسانی کنکور (مربوط به سال‌های دهم تا دوازدهم) رو براتون انتخاب کردیم تا هر موقع که احساس کردید زمان کم دارید و نمی‌دونید چه مطالبی رو بخونید، *خیلی فوری بیاید سراغ این کتاب جیبی!* و درصد کنکورتون رو تا ۶۰ درصد بیارید بالا!

آموزش تو این کتاب به یه سبک جدید و خفنِ!

بزارید بهتون بگم چه خبره:

۱ درس‌نامه‌های جمع و جور اما کاملی داریم که با خوندنشون مباحث پرسؤال کنکور رو یاد می‌گیرید.

۲ سؤال‌های تألیفی مهم و کنکوری که به شما کمک می کنه یه نظم خوب به ذهنتون بدید و با سبک فکری طراح‌های کنکور آشنا بشید.

۳ اما پاسخ تست‌ها!! گام‌به‌گام می‌ریم جلو:

اول سعی کنید خودتون سؤال رو بدون دیدن جواب حل کنید اما اگر نتوستید: هر گام رو مطالعه کنید و کاری که ازتون خواسته شده رو اجرا کنید تا به جواب برسید، بعد با پاسخ‌نامهٔ ما مطابقت بدید.
این‌طوریِ که یک آموزش کامل از اون مطلب و نکته خواهید داشت.
امیدوارم بتونید با این کتاب یک قدم برای موفقیت شما برداریم.

در آخر تشکر می‌کنم از:

- همسر عزیزم که توی این مدت پشتوانه و دلگرمی من بودند.
- دکتر نصری عزیز که همیشه از ایده‌های جدید حمایت کردند.
- تیم خفن تألیف و تولید خیلی‌سبز که همیشه بهترین‌اند.
- دوستان و همکاران گرامی علی‌رضا شریف خطیب، محمدحسین صابری و علی‌رضا شعبانی.
- پیام ابراهیم‌نژاد و همهٔ عزیزانی که با ایده‌هاشون به من کمک کردند.

در پایان خوشحال می‌شیم که اگر کتاب ایرادی داره باهامون در میون بزارید.

Hosseinkhanihamed_math

حامد حسینخانی ـ تابستان ۱۴۰۲

فهرست مطالب

معادله

فصل اول

فکت

معادلهٔ درجه‌دوم فصل اول ریاضی و آمار ۱ (سال دهم) است که در کنکورهای سراسری ۲ یا ۳ سؤال مستقیم از این فصل مطرح می‌شود.

تعداد و موضوعات مطرح‌شده از این فصل در کنکورهای اخیر را در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم:

	۹۹ داخل	۹۹ خارج	۱۴۰۰ داخل	۱۴۰۰ خارج	۱۴۰۱ داخل	۱۴۰۱ خارج	۱۴۰۲ نوبت اول
حل معادلهٔ درجه‌دوم							
مسائل هندسی توصیفی	۱	۱			۱	۱	۱
روابط بین ریشه‌ها							۲
معادلات و عبارت‌های گویا	۲	۲	۲	۲	۱	۱	

- از بخش حل معادلهٔ درجه‌دوم سؤال مستقیم نیامده است، اما اساس و پیش‌نیاز تمام بخش‌های دیگر (حتی بعضی از فصل‌های بعدی) است.
- هیچ الزامی به ثابت‌بودن پراکندگی سؤالات نیست، اما! مسائل هندسی، حل معادلهٔ گویا تقریباً در تمام کنکورها مورد سؤال قرار گرفته است.

حرف آخر این فصل با توجه به حجم کم و تعداد سؤال قابل قبول (حدود ۱۰ تا ۱۵ درصد سؤالات) اهمیت بسیار بالایی دارد.

معادلهٔ درجه‌دوم

فرم کلی یک معادلهٔ درجه‌دوم به شکل $ax^{۲}+bx+c=۰$ است که در آن $a\neq ۰$ و تمام ضرایب (یعنی a، b و c) اعدادی حقیقی می‌باشند.

برای حل معادلهٔ درجه‌دوم از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱. تجزیه • عبارت داده‌شده را به کمک فاکتورگیری یا استفاده از اتحادهای «جمله‌مشترک»، «مربع دوجمله‌ای»، «مزدوج» و ... به حاصل‌ضرب دو عبارت تجزیه می‌کنیم و تک‌تک عبارت‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\bigcirc \times \square = ۰ \Rightarrow \bigcirc = ۰ \quad \text{یا} \quad \square = ۰$$

برای مثال حل معادله‌های زیر را با هم ببینیم:

• $۳x^{۲}-۷x=۰ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از x}} x(۳x-۷)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ ۳x-۷=۰ \Rightarrow x=\dfrac{۷}{۳} \end{cases}$$

• $x^{۲}-x-۶=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌مشترک}} (x-۳)(x+۲)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

• $۴x^{۲}-۴x+۱=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (۲x-۱)^{۲}=۰$

$$\Rightarrow ۲x-۱=۰ \Rightarrow ۲x=۱ \Rightarrow x=\dfrac{۱}{۲}$$

• $۹x^{۲}-۱۶=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (۳x-۴)(۳x+۴)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x-۴=۰ \Rightarrow ۳x=۴ \Rightarrow x=\dfrac{۴}{۳} \\ ۳x+۴=۰ \Rightarrow ۳x=-۴ \Rightarrow x=\dfrac{-۴}{۳} \end{cases}$$

۲. ریشه‌گیری اگر معادلهٔ درجه‌دوم را بتوان به شکل $\bigcirc^{۲} = k$ تبدیل کرد، با جذرگرفتن از طرفین معادله، یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

علامت k	وضعیت ریشه‌ها	مثال
$k < ۰$	ریشه ندارد.	$(x-۳)^{۲} = -۴$ ✖
$k = ۰$	یک ریشه دارد. $\bigcirc = ۰$	$(۳x+۲)^{۲} = ۰$ $\Rightarrow ۳x+۲=۰ \Rightarrow x = \frac{-۲}{۳}$
$k > ۰$	دو ریشه دارد. $\bigcirc = \pm\sqrt{k}$	$(x+۲)^{۲} = ۴$ $\Rightarrow \begin{cases} x+۲ = \sqrt{۴} = ۲ \Rightarrow x = ۰ \\ x+۲ = -\sqrt{۴} = -۲ \Rightarrow x = -۴ \end{cases}$

۳. روش کلی دلتا در معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$، دلتا به صورت $\Delta = b^{۲}-۴ac$ تعریف می‌شود و براساس علامت آن سه حالت مختلف داریم:

ریشه‌ها	تعداد ریشه‌ها	علامت دلتا
—	صفر	$\Delta < ۰$
مثال: $۵x^{۲}-۳x+۱=۰ \Rightarrow \Delta = (-۳)^{۲}-۴(۵)(+۱) = -۱۱ < ۰$		
$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(x \text{ ضریب})}{۲(x^{۲} \text{ ضریب})}$	یک ریشهٔ مضاعف	$\Delta = ۰$
مثال: $۹x^{۲}-۶x+۱=۰ \Rightarrow \Delta = (-۶)^{۲}-۴(۹)(۱) = ۰$ $\Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۶)}{۲\times۹} = \frac{۶}{۱۸} = \frac{۱}{۳}$		

علامت دلتا	تعداد ریشه‌ها	ریشه‌ها
$\Delta > ۰$	دو ریشهٔ متمایز	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$

مثال: $۳x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۲)^۲ - ۴(۳)(-۱) = ۱۶$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-۲) \pm \sqrt{۱۶}}{۲ \times ۳} \begin{cases} x = \dfrac{۲+۴}{۶} = ۱ \\ x = \dfrac{۲-۴}{۶} = \dfrac{-۲}{۶} = \dfrac{-۱}{۳} \end{cases}$$

توجه در حل معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اولین قدم قبل از این روش‌ها، چک‌کردن ضرایب در روابط زیر می‌باشد: *(واجب‌تر از نون شبه!)*

رابطهٔ بین ضرایب	ریشه‌ها	مثال
$a + b + c = ۰$	$x_۱ = ۱$ $x_۲ = \dfrac{c}{a}$	$\underbrace{\frac{۳}{۴}}_{a}x^۲ \underbrace{-\frac{۲}{۳}}_{b}x \underbrace{-\frac{۱}{۱۲}}_{c} = ۰$ $\xrightarrow[(a+b+c=۰)]{\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۱۲}=۰} \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۳}{۴}} = \dfrac{-۱}{۹} \end{cases}$
$a + c = b$	$x_۱ = -۱$ $x_۲ = \dfrac{-c}{a}$	$\underbrace{۲}_{a}x^۲ \underbrace{-۳}_{b}x \underbrace{-۵}_{c} = ۰$ $\xrightarrow[(a+c=b)]{۲-۵=-۳} \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{۵}{۲} \end{cases}$

تست

معادلهٔ درجه‌دوم $x(2x-5)=a$ به ازای یک مقدار a دارای ریشهٔ مضاعف است. مقدار ریشهٔ مضاعف کدام است؟

۱) $\frac{-5}{2}$ ۲) $\frac{-5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ | گزینهٔ «۳»

گام اول معادله را مرتب می‌کنیم.

$$x(2x-5)=a \Rightarrow 2x^2-5x=a \Rightarrow 2x^2-5x-a=0$$

گام دوم ریشهٔ مضاعف معادله را به کمک رابطهٔ $\frac{-(\text{ضریب } x)}{2(\text{ضریب } x^2)}$ به دست می‌آوریم.

$$\frac{-(\text{ضریب } x)}{2(\text{ضریب } x^2)}=\frac{-(-5)}{2(2)}=\frac{5}{4}$$

تذکر برای به دست آوردن ریشهٔ مضاعف اصلاً نیازی به عدد ثابت معادله (در این‌جا a) نداریم.

تست

اگر در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2-12x+9=0$، تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشهٔ این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

پاسخ | گزینهٔ «۳»

گام اول دلتای معادلهٔ داده‌شده را به دست می‌آوریم.

$$ax^2-12x+9=0 \Rightarrow \Delta=(-12)^2-4(a)(9)=144-36a$$

گام دوم تفاضل ریشه‌های این معادله برابر صفر است! پس این دو ریشه باید با هم برابر باشند. (معادله، ریشهٔ مضاعف داره.)

معادله دارای ریشهٔ مضاعف است، پس دلتای آن برابر صفر است:

$$۱۴۴-۳۶a=۰ \Rightarrow ۳۶a=۱۴۴ \Rightarrow a=\frac{۱۴۴}{۳۶}=۴$$

گام سوم $a=۴$ را در معادله جای‌گذاری کرده و به کمک رابطهٔ $x=\frac{-b}{۲a}$ ریشهٔ آن را به دست می‌آوریم.

$$ax^{۲}-۱۲x+۹=۰ \xrightarrow{a=۴} ۴x^{۲}-۱۲x+۹=۰$$

$$\xrightarrow{x=\frac{-b}{۲a}} x=\frac{-(-۱۲)}{۲(۴)}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

تست

به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ درجه‌دوم $۳x^{۲}+ax-۳=۰$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

۱) هر مقدار a
۲) هیچ مقدار a
۳) فقط $a=\pm ۶$
۴) فقط $a>۶$

پاسخ گزینهٔ «۱»

گام اول دلتای معادلهٔ داده‌شده را به دست می‌آوریم.

$$۳x^{۲}+ax-۳=۰ \Rightarrow \Delta=(a)^{۲}-۴(۳)(-۳)=a^{۲}+۳۶$$

گام دوم بررسی می‌کنیم به ازای چه مقادیری از a، دلتای به دست آمده مثبت است. *(دلتا مثبت باشه، معادله دو جواب حقیقی و متمایز داره.)*

می‌دانیم هر عبارت به شکل ^{۲}، همواره نامنفی است، در نتیجه داریم:

$$a^{۲}\geq ۰ \Rightarrow a^{۲}+۳۶\geq ۳۶$$

پس دلتای این معادله همواره مثبت است و به ازای هر مقدار a، معادله دو جواب حقیقی و متمایز دارد.

نکته

گاهی اوقات، معادله‌ها شکل و ظاهر متفاوتی دارند! در این معادله‌ها معمولاً یک عبارت برحسب x تکرار شده است! (یا باید خودمون یک عبارت تکراری بسازیم.) آن عبارت را مساوی t قرار می‌دهیم (تغییر متغیر می‌دهیم) و معادله‌ای جدید تشکیل داده و آن را حل می‌کنیم.
تست زیر را با هم ببینیم:

تست

تعداد جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^۴ + ۱۰x^۲ + ۹ = ۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ | گزینهٔ «۱»

گام اول $x^۲$ را برابر t قرار داده و به کمک تغییر متغیر معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$x^۴ + ۱۰x^۲ + ۹ = ۰ \xrightarrow{x^۲ = t} t^۲ + ۱۰t + ۹ = ۰$$

گام دوم معادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم.

در معادلهٔ $t^۲ + ۱۰t + ۹ = ۰$، $a = ۱$، $b = ۱۰$ و $c = ۹$ است. در نتیجه با توجه به این‌که $a + c = b$، داریم:

$$t = -۱ , t = \frac{-c}{a} = -۹$$

گام سوم با توجه به این‌که t، همان $x^۲$ است، $x^۲$ را برابر مقادیر به دست آمده قرار داده و x را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} t = -۱ \Rightarrow x^۲ = -۱ \quad \times \\ t = -۹ \Rightarrow x^۲ = -۹ \quad \times \end{cases}$$

(می‌دونیم $\bigcirc^۲$ همیشه مثبته!)

در نتیجه معادلهٔ داده‌شده جواب ندارد.

مسائل هندسی

در سؤال‌هایی که در رابطه با محیط، مساحت و ... صحبت شده مراحل زیر را طی می‌کنیم:

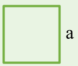
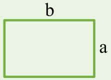
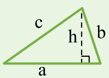
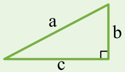
۱ شکل مسئله را رسم می‌کنیم.

۲ شکل را به بخش‌های ساده‌تر (مربع، مستطیل، مثلث و ...) تقسیم می‌کنیم.

۳ معادلهٔ گفته‌شده را تشکیل داده و حل می‌کنیم.

نکته

روابط مهم شکل‌های پرکاربرد هندسی در جدول زیر آمده است:

	مربع	مستطیل	مثلث	مثلث قائم‌الزاویه
شکل	 مربع	 مستطیل	 مثلث	 مثلث قائم‌الزاویه
محیط	$۴a$	$۲(a+b)$	$a+b+c$	$a+b+c$
مساحت	$a^{۲}$	ab	$\frac{ah}{۲}$	$\frac{bc}{۲}$
قطر	$a\sqrt{۲}$	$\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$	—	—

نکته

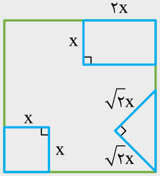
محیط و مساحت مربع برحسب قطر آن از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\text{محیط} = ۲\sqrt{۲} \times (\text{قطر})$$

$$\text{مساحت} = \frac{(\text{قطر})^{۲}}{۲}$$

تست

از مربعی به ضلع $۶\,cm$ سه شکل به صورت روبه‌رو بریده شده است. اگر مساحت مربع باقی‌مانده $۲۴\,cm^۲$ باشد، طول ضلع مربع بریده‌شده چه‌قدر است؟



۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ | گزینهٔ «۱»

گام اول مساحت هر یک از قسمت‌های بریده‌شده را برحسب x به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\text{مساحت مربع} = (\text{یک ضلع})^۲ = x^۲$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (\text{طول})\times(\text{عرض}) = (۲x)(x) = ۲x^۲$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{۲} = \frac{(\sqrt{۲}x)(\sqrt{۲}x)}{۲} = \frac{۲x^۲}{۲} = x^۲$$

در نتیجه کل مساحت بریده‌شده برابر $x^۲ + ۲x^۲ + x^۲ = ۴x^۲$ می‌باشد.

گام دوم تفاضل مساحت مربع اصلی و قسمت‌های بریده‌شده را برابر ۲۴ قرار می‌دهیم.

$$(\text{مساحت مربع اصلی}) - (\text{مساحت بریده‌شده}) = ۲۴$$

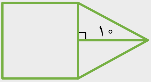
$$\Rightarrow ۶^۲ - ۴x^۲ = ۲۴ \Rightarrow ۳۶ - ۴x^۲ = ۲۴$$

گام سوم با حل معادلهٔ به دست آمده، مقدار x (ضلع مربع بریده‌شده) را به دست می‌آوریم.

$$۳۶ - ۴x^۲ = ۲۴ \Rightarrow ۴x^۲ = ۱۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \ \checkmark \\ x = -\sqrt{۳} \ \times \quad (\text{طول منفی نمی‌شه}) \end{cases}$$

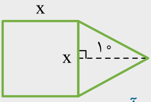
در شکل زیر، مساحت مثلث متساوی‌الساقین از $\frac{۲}{۳}$ مساحت مربع به اندازهٔ $\frac{۸}{۳}$ واحد مربع، کم‌تر است. مساحت مثلث کدام است؟ (سراسری ۹۹)



۱) ۳۰
۲) ۳۵
۳) ۴۰
۴) ۴۵

پاسخ | گزینهٔ «۳»

گام اول ضلع مربع و مثلث را برابر x در نظر می‌گیریم.



گام دوم مساحت مثلث و مربع را برحسب x به دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت مربع} = x^{۲} \quad \text{و} \quad \text{مساحت مثلث} = \frac{۱۰x}{۲} = ۵x$$

گام سوم رابطهٔ داده‌شده برای مساحت‌ها را نوشته و با حل معادلهٔ به دست آمده، مقدار x را به دست می‌آوریم.

طبق فرض مسئله، مساحت مثلث متساوی‌الساقین از $\frac{۲}{۳}$ مساحت مربع، $\frac{۸}{۳}$ واحد کم‌تر است؛ در نتیجه داریم:

$$\frac{۸}{۳} = \frac{۲}{۳}(\text{مساحت مربع}) - \text{مساحت مثلث متساوی الساقین}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}x^{۲} - ۵x = \frac{۸}{۳} \xrightarrow{\times ۳} ۲x^{۲} - ۱۵x = ۸ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۱۵x - ۸ = ۰$$

در نتیجه داریم:

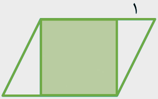
$$\Delta = (-۱۵)^{۲} - ۴(۲)(-۸) = ۲۸۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۱۵ + \sqrt{۲۸۹}}{۲(۲)} = \dfrac{۱۵ + ۱۷}{۴} = \dfrac{۳۲}{۴} = ۸ \\[2ex] x = \dfrac{۱۵ - \sqrt{۲۸۹}}{۲(۲)} = \dfrac{۱۵ - ۱۷}{۴} = \dfrac{-۲}{۴} \quad \times \quad \text{(طول منفی نیست.)} \end{cases}$$

گام چهارم با جای‌گذاری x مساحت مثلث را به دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت مثلث} = ۵x = ۵(۸) = ۴۰$$

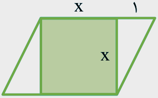
تست



در شکل مقابل، مساحت مربع هاشورخورده از $\frac{۳}{۴}$ مساحت یکی از مثلث‌ها به اندازهٔ $\frac{۲۷}{۳۲}$ واحد مربع بیشتر است. اندازهٔ قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ | گزینهٔ «۳»



گام اول ضلع مربع و مثلث را برابر x در نظر می‌گیریم.

گام دوم مساحت مثلث و مربع را برحسب x به دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت مربع} = x^{۲} \quad , \quad \text{مساحت مثلث} = \frac{۱ \times x}{۲} = \frac{x}{۲}$$

گام سوم رابطهٔ داده‌شده برای مساحت‌ها را نوشته و با حل معادلهٔ به دست آمده، مقدار x را به دست می‌آوریم.

طبق فرض مسئله، مساحت مربع از $\frac{۳}{۴}$ مساحت یکی از مثلث‌ها به اندازهٔ $\frac{۲۷}{۳۲}$ بیشتر است؛ پس داریم:

$$\text{مساحت مربع} - \frac{۳}{۴}(\text{مساحت مثلث}) = \frac{۲۷}{۳۲} \Rightarrow x^{۲} - \frac{۳}{۴}\left(\frac{x}{۲}\right) = \frac{۲۷}{۳۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۳۲} ۳۲x^{۲} - ۱۲x - ۲۷ = ۰$$

با حل این معادلهٔ درجه‌دوم داریم:

$$\Delta = (-۱۲)^۲ - ۴(۳۲)(-۲۷) = ۳۶۰۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۱۲ + \sqrt{۳۶۰۰}}{۲(۳۲)} = \dfrac{۱۲ + ۶۰}{۶۴} = \dfrac{۹}{۸} \checkmark \\ x = \dfrac{۱۲ - \sqrt{۳۶۰۰}}{۲(۳۲)} = \dfrac{۱۲ - ۶۰}{۶۴} = \dfrac{-۴۸}{۶۴} \times \end{cases}$$

(طول منفی نیست.)

گام چهارم با جای‌گذاری x قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع را به دست می‌آوریم.

در نتیجه اندازهٔ قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع برابر $x + ۱ = \dfrac{۹}{۸} + ۱ = \dfrac{۱۷}{۸}$ است.

تست

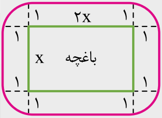
می‌خواهیم دورتادور باغچه‌ای به شکل مستطیل که طول آن، دو برابر عرض آن است را حصار بکشیم، به طوری‌که بازدیدکنندگان به یک متری باغچه نزدیک نشوند. اگر مساحت زمین محصورشده، $۱ + \dfrac{۱}{۱۸}\pi$ برابر بیشتر از مساحت باغچه باشد، طول باغچه چند متر است؟ (سراسری نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) ۸   ۲) ۶   ۳) ۴   ۴) ۳

پاسخ | گزینهٔ «۲»

گام اول شکل مربوط به مسئله را رسم می‌کنیم.

توجه داریم برای آن‌که بازدیدکنندگان به یک متری باغچه نزدیک نشوند باید از هر طرف یک متر فاصله بدهیم. به همین دلیل در چهار گوشهٔ باغچه، چهار ربع دایره ساخته می‌شود (مثل شکل مقابل).



گام دوم مساحت باغچه و مساحت کل را به دست می‌آوریم:

مساحت باغچه: $۲x \times x = ۲x^۲$

مساحت دو مستطیل مجاور طول + مساحت باغچه = مساحت کل

مساحت چهار ربع دایره + مساحت دو مستطیل مجاور عرض +

$$= ۲x^۲ + ۲(۲x \times ۱) + ۲(x \times ۱) + ۴(\frac{۱}{۴}\pi(۱)^۲) = ۲x^۲ + ۶x + \pi$$

گام سوم با توجه به فرض مسئله مساحت کل را $۱ + \frac{۱}{۱۸}\pi$ برابر بیشتر از مساحت باغچه قرار می‌دهیم.

مساحت باغچه + مساحت باغچه $(۱ + \frac{\pi}{۱۸})$ = مساحت کل

$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۲x^۲(۱ + \frac{\pi}{۱۸}) = ۲x^۲ + ۶x + \pi$$

$$\Rightarrow ۲x^۲(۲ + \frac{\pi}{۱۸}) = ۲x^۲ + ۶x + \pi$$

گام چهارم به کمک گزینه‌ها جواب این معادله را به دست می‌آوریم.

گزینه‌های داده‌شده برابر طول باغچه است (یعنی $۲x$)، پس آن‌ها را نصف کرده و در معادله جای‌گذاری می‌کنیم تا جواب به دست آید.

گزینهٔ (۱):

$$۲x = ۸ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow ۲(۴)^۲(۲ + \frac{\pi}{۱۸}) = ۲(۴)^۲ + ۶(۴) + \pi$$

$$\Rightarrow ۶۴ + \frac{۱۶\pi}{۹} = ۵۶ + \pi \quad \times$$

گزینهٔ (۲):

$$۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow ۲(۳)^۲(۲ + \frac{\pi}{۱۸}) = ۲(۳)^۲ + ۶(۳) + \pi$$

$$\Rightarrow ۳۶ + \pi = ۳۶ + \pi \quad \checkmark$$

به جواب رسیدم و نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست!

روابط بین ریشه‌ها

می‌دانیم در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ با شرط $a \neq ۰$ و در حالت $\Delta > ۰$، دو ریشهٔ متمایز داریم. حالا اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم باشند، آن‌گاه داریم: