

مقدمه ناشر

به نام خدا

بدون شک مارادونا اسطوره فوتبال جهان!

جادوگری که از وسط زمین شروع به دریبل زدن بازیکن می‌کنه، سریعاً نزدیک و نزدیک دروازه می‌شه و ... !gooooooooal

حالا برای این که مارادونای کنکورتون باشین، یه سری کتاب جیبی براتون تألیف کردیم به اسم نکته‌باز!

در فرایند تألیف کتابای نکته‌باز، هوشمندانه عمل کردیم، این طوری که نکات کاملاً ضروری کنکور و استراتژی‌های لازم برای حل سؤالات رو، یک جا براتون آوردیم. علاوه بر همه این‌ها، شما با انتخاب نکته‌باز، می‌تونین در سریع‌ترین زمان ممکن مطالب رو جمع‌بندی کنین، چون تو این کتابا همه مطالب کنکور به صورت نکته‌محور دسته‌بندی شدن.

در پایان جا داره یه تشکر ویژه کنیم از تیم تألیف و تولید خیلی سبز که بدون زحماتشون، بدون شک کتابای به این خوبی نداشتیم ...!

مارادونای زندگی‌ت باش ...

مقدمه مؤلف

دوست خوبم سلام

در مجموعه پیش رو، ۲۱۰ تکه از پازل حسابان کنکور را با حوصله و دقت کنار هم چیدیم. حالا نوبت شماست. از شما می‌خواهیم مابقی تکه‌های این پازل را با مطالعه، تمرین و پشتکار کنار هم بچینی و پازل را کامل کنی و با کمی تلاش و حوصله در کم‌ترین زمان به یک نتیجه عالی که قطعاً لایقش هستی برسی.

با آرزوی موفقیت و سربلندی برای همه دانش‌آموزان سرزمینم در پایان ممنون می‌شم ایرادات کتاب رو باهامون در میون بزارید.

راه‌های ارتباطی:



s-mohammad-madineh

سید محمد مدینه



فهرست مطالب

- ۷ فصل اول: تابع
- ۵۶ فصل دوم: مثلثات
- ۹۲ فصل سوم: حد و پیوستگی
- ۱۳۹ فصل چهارم: مشتق
- ۱۷۰ فصل پنجم: کاربرد مشتق
- ۲۱۰ فصل ششم: الگو و دنباله
- ۲۲۳ فصل هفتم: توان‌های گویا و عبارت و عبارتهای جبری
- ۲۳۲ فصل هشتم: معادله درجه ۲ و سهمی
- ۲۴۷ فصل نهم: معادله و نامعادله
- ۲۶۳ فصل دهم: توابع نمایی و لگاریتمی
- ۲۷۹ فصل یازدهم: هندسه تحلیلی



معادله و نامعادله

معادلات گویا و روش حل آن

۱۸۷

هر معادله که شامل عبارات گویا باشد را معادله گویا می‌نامیم. برای حل معادلات گویا ابتدا مخرج‌ها را تجزیه کرده و سپس دو طرف تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا معادله به یک معادله غیر کسری تبدیل شود. در نهایت جواب‌هایش را پیدا می‌کنیم.

تذکره جواب‌های به دست آمده از معادلات گویا نباید مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر کنند.

تست معادله $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ چند جواب دارد؟

صفر ۱ ۲ بی‌شمار

پاسخ گزینه ۲ مخرج‌ها نیازی به تجزیه ندارند. ک.م.م مخرج کسرها برابر $x(x-2)$ است؛ پس دو طرف تساوی را در ک.م.م ضرب

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \quad \text{می‌کنیم؛ بنابراین:}$$

$$\frac{\overset{\times x(x-2)}{\times x(x-2)} \rightarrow \frac{5x(x-2)}{x} - \frac{4 \times \cancel{x} \cancel{(x-2)}}{x \cancel{(x-2)}} = \frac{(x-4) \times \cancel{x} \cancel{(x-2)}}{x-2}}$$

$$\Rightarrow 5(x-2) - 4 = (x-4)x \Rightarrow 5x - 10 - 4 = x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=7 \end{cases}$$

چون $x=2$ مخرج کسر را صفر می‌کند، پس $x=2$ جواب معادله نیست و $x=7$ تنها جواب این معادله است.

مستطیل طلایی

۱۸۸

مستطیل طلایی مستطیلی است که در آن تناسب $\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{\text{طول} + \text{عرض}}{\text{طول}}$


برقرار باشد؛ بنابراین اگر طول را x و عرض را y بگیریم، داریم:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \xrightarrow{\frac{x}{y}=t} 1 + \frac{1}{t} = t$$


$$\xrightarrow{\times t} t+1=t^2 \Rightarrow t^2-t-1=0$$

با حل معادله بالا، مقدار t به دست می‌آید که این مقدار را عدد طلایی می‌نامیم.

$$t = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1/618$$

تست  اگر محیط یک زمین مستطیل شکل برابر ۲۰ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول زمین چه قدر است؟

$$\frac{5\sqrt{10}+5}{2} \quad 5\sqrt{5}+5 \quad \frac{5\sqrt{10}-5}{2} \quad 5\sqrt{5}-5$$

پاسخ گزینه ۱  اگر طول زمین L و عرض آن W باشد با توجه به این که محیط زمین برابر ۲۰ است، پس:

$$2L + 2W = 20 \xrightarrow{\div 2} L + W = 10 \Rightarrow W = 10 - L$$

از طرفی طبق رابطه مستطیل طلایی داریم:

$$\frac{L}{W} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{W=10-L} \frac{L}{10-L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow 2L = 10 - (1 + \sqrt{5})L + 10\sqrt{5} \Rightarrow (3 + \sqrt{5})L = 10(1 + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow L = \frac{10(1 + \sqrt{5})}{3 + \sqrt{5}} = \frac{10(1 + \sqrt{5})}{3 + \sqrt{5}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$$


$$= \frac{10(1 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{9 - 5}$$

$$\Rightarrow L = \frac{10(3 - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5)}{4} = \frac{10(2\sqrt{5} - 2)}{4} = 5(\sqrt{5} - 1)$$

ردپای معادلات گویا در زندگی

۱۸۹

گاهی معادلات گویا در مسائل کاربردی مثل «زمان اتمام کار توسط دو کارگر»، «اختلاف زمان رفت و برگشت» و ... ظاهر می‌شوند.

تست  بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود.


بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

۳۶ 

۳۵ 

۳۳ 

۳۲ 

پاسخ گزینه ۴  اگر بهروز در x ساعت مجله را تایپ کند، فرهاد در $x + 9$ ساعت تایپ می‌کند؛ بنابراین بهروز در یک ساعت $\frac{1}{x}$ و فرهاد

$\frac{1}{x+9}$ کار تایپ را انجام می‌دهند و اگر هر دو با هم کار کنند، در یک

ساعت $\frac{1}{20}$ کار انجام می‌شود؛ پس داریم:


$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{20x(x+9)}{20x(x+9)} \rightarrow \frac{1 \times 20x(x+9)}{x} + \frac{1 \times 20x(x+9)}{x+9}$$

$$= \frac{1 \times 20x(x+9)}{20} \Rightarrow 20(x+9) + 20x = x(x+9)$$

$$\Rightarrow 20x + 180 + 20x = x^2 + 9x \Rightarrow x^2 - 31x - 180 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 36)(x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 36 \\ x = -5 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

تست  سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟


(سراسری تجربی ۹۸)

۲۵ 

۲۰ 

۱۵ 

۱۲ 

پاسخ گزینه ۳  سرعت آب رودخانه را V متر در دقیقه نظر می‌گیریم؛ بنابراین سرعت قایق هنگامی که موافق جریان آب حرکت می‌کند برابر $V + 100$ و هنگامی که مخالف جریان آب حرکت می‌کند برابر $V - 100$ است. حال داریم:

$$\text{زمان رفت} = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}} = \frac{1200}{100 + V}$$

$$\text{زمان برگشت} = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}} = \frac{1200}{100 - V}$$

اختلاف زمان رفت و برگشت، ۵ دقیقه است؛ پس:

$$\frac{1200}{100 - V} - \frac{1200}{100 + V} = 5 \Rightarrow 1200 \left(\frac{1}{100 - V} - \frac{1}{100 + V} \right) = 5$$

$$\Rightarrow \frac{100 + V - 100 + V}{10000 - V^2} = \frac{5}{1200} \Rightarrow \frac{2V}{10000 - V^2} = \frac{1}{240}$$

$$\Rightarrow 480V = 100000 - V^2 \Rightarrow V^2 + 480V - 100000 = 0$$

$$(V - 200)(V + 500) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V = 200 \\ V = -500 \text{ غرق} \end{cases}$$

معادلات گنگ و روش حل آن

۱۹۰

هر معادله که شامل عبارات رادیکالی باشد را معادله گنگ می‌نامیم. برای حل معادلات گنگ ابتدا رادیکال را یک طرف تساوی تنها می‌کنیم و سپس با به توان رساندن طرفین تساوی، رادیکال را از بین برده و معادله به دست آمده را حل می‌کنیم.

تذکر جواب‌های به دست آمده از معادلات گنگ را باید در معادله اصلی بررسی کنیم تا عبارت زیر رادیکال‌ها و عبارت حاصل رادیکال را منفی نکنند.

تست اگر $2a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۸)

۲/۵

۱/۵

۴/۵

۳/۵

پاسخ گزینه ۴ ابتدا رادیکال را در سمت چپ تساوی تنها می‌کنیم، سپس با به توان ۲ رساندن طرفین، رادیکال را حذف و معادله را حل می‌کنیم.

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 2a \xrightarrow{\text{به توان } 2} 2a^2 + 4a = 4 - 4a + 4a^2$$

$$\Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0 \Rightarrow a^2 - 16a + 28 = (a-2)(a-14) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 14 \end{cases} \xrightarrow{\div 7} \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ a = 2 \end{cases} \text{ ریشه‌های اصلی}$$

$a = 2$ حاصل رادیکال را منفی می‌کند و غیر قابل قبول است، اما $\frac{2}{7}$ جواب قابل قبول است؛ پس:

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4 \frac{1}{2}$$

تست حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

۴ ۲ ۱ -۲

پاسخ گزینه ۲ با فرض $x^2 + 4x + 3 = t$ می‌توان نوشت:

$$t = \sqrt{t+2} \Rightarrow t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$t = -1$ حاصل رادیکال را منفی می‌کند؛ بنابراین غیر قابل قبول است، پس $t = 2$ قابل قبول است.

$$t = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

حاصل ضرب ریشه‌ها $= \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$

تست فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

$\sqrt{15}$ $2\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{3}$

پاسخ گزینه ۴ با به توان رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

$$x^2 = (\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}) \Rightarrow x^2 = y+3+y-3-2\sqrt{y^2-9}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 &= 2y - 2\sqrt{y^2 - 9} \\ x^2 &= 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2y = 2y - 2\sqrt{y^2 - 9}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y^2 - 9} = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6} \\ y = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$


بنابراین نقطه تلاقی ۲ منحنی $A(\sqrt{6}, 3)$ است و داریم:

$$OA = \sqrt{6 + 9} = \sqrt{15}$$

معادلات قدر مطلق

۱۹۱

روش حل معادله	فرم معادله
$ u = a \Rightarrow u = \pm a$	$ u = a > 0$
$ u = v \Rightarrow u = \pm v$	$ u = v $


تست  معادله $|2x - 3| = \left| \frac{1}{x - 2} \right|$ چند جواب طبیعی دارد؟

۴ 

۳ 

۲ 

۱ 

پاسخ گزینه ۱ با توجه به جدول بالا خواهیم داشت: 

$$|2x - 3| = \left| \frac{1}{x - 2} \right| \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = \frac{1}{x - 2} \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \\ 2x - 3 = -\frac{1}{x - 2} \Rightarrow 2x^2 - 7x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ \rightarrow \\ \Delta < 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

ریشه حقیقی ندارد.

بنابراین معادله فقط یک ریشه طبیعی دارد.



در معادلاتی که به فرم $|u| = |v|$ یا $|u| = a$ نیستند، علامت عبارت داخل قدرمطلق را با توجه به ریشه‌های آن، تعیین و قدرمطلق را حذف می‌کنیم؛ سپس جواب‌ها را با توجه به محدودیت بازه انتخاب می‌کنیم.

تست مجموع جواب‌های معادله $|2x-1| + |x+2| = 3$ کدام

(سراسری ریاضی ۹۸)

است؟

$\frac{4}{3}$

۱

$\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}$

پاسخ گزینه ۲ ریشه عبارت داخل قدرمطلق‌ها $x = \frac{1}{2}$ و

$x = -2$ است؛ بنابراین معادله را در سه ناحیه حل می‌کنیم:

۱) $x \leq -2 \Rightarrow -2x + 1 - x - 2 = 3 \Rightarrow -3x - 1 = 3$

$\Rightarrow -3x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

جواب به دست آمده در بازه $x \leq -2$ نیست؛ بنابراین قابل قبول نیست.

۲) $-2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x + 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow -x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$

۳) $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow 3x + 1 = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

مجموع جواب‌های قابل قبول برابر $\frac{2}{3}$ است.

تعیین علامت

۱۹۲

برای تعیین علامت عبارت درجه یک $y = ax + b$ ابتدا آن را به معادله $ax + b = 0$ تبدیل می‌کنیم و ریشه معادله را به دست می‌آوریم. سپس مطابق جدول زیر علامت آن را مشخص می‌کنیم.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	مخالف علامت a		موافق علامت a



برای تعیین علامت عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ابتدا آن را به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل می‌کنیم و ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم. سپس با توجه به جدول زیر علامت عبارت خواسته شده را تعیین می‌کنیم.

جدول تعیین علامت		$\Delta = b^2 - 4ac$										
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td colspan="2">موافق علامت a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a			$\Delta < 0$				
x	$-\infty$	$+\infty$										
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a											
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td>موافق علامت a</td> <td> </td> <td>موافق علامت a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		موافق علامت a		$\Delta = 0$		
x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$									
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		موافق علامت a									
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td>موافق علامت a</td> <td> </td> <td>مخالف علامت a</td> <td>موافق علامت a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		مخالف علامت a	موافق علامت a		$\Delta > 0$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$								
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		مخالف علامت a	موافق علامت a								

مثال عبارت $y = 2x^2 + 3x - 5$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ ابتدا عبارت را به معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ تبدیل می‌کنیم، سپس ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم.

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

حال جدول تعیین علامت را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

x		$-\frac{5}{2}$		1	
$2x^2 + 3x - 5$	+		-		+

برای این‌که بتوانیم هر عبارتی را سریع تعیین علامت کنیم، ابتدا ریشه همه عبارت‌ها را می‌یابیم و از کوچک به بزرگ در جدول تعیین علامت می‌نویسیم؛ سپس علامت ضریب بزرگ‌ترین توان در همه عبارت‌ها را در هم ضرب کرده و علامت حاصل را در اولین خانه از سمت راست قرار می‌دهیم. در ریشه‌های ساده، علامت‌ها یکی در میان عوض می‌شوند ولی در ریشه‌های مضاعف، علامت عوض نمی‌شود.

مثال عبارت $\frac{(x+2)(4-x)}{x^2-x-2}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ ابتدا مخرج کسر را به صورت $(x-2)(x+1)$ تجزیه می‌کنیم و ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ مطابق جدول زیر می‌نویسیم و سپس به روش بالا تعیین علامت می‌کنیم:

x	-2	-1	2	4
$\frac{(x+2)(4-x)}{(x-2)(x+1)}$	-	+	-	+
		تن	تن	

نامعادله

۱۹۳

منظور از حل یک نامعادله، یافتن مقادیری از متغیر است که برای آن‌ها، نامساوی داده شده برقرار باشد. در حالت کلی برای حل یک نامعادله ابتدا همه عبارت‌ها را در یک طرف نامعادله جمع می‌کنیم، سپس مجموعه جواب نامعادله را به کمک تعیین علامت به دست می‌آوریم.

تذکر برخی از ویژگی‌های نامساوی‌ها که در حل نامعادله‌ها استفاده می‌شوند به صورت زیر است:

$$a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c \quad \text{جمع یا تفریق نامعادله با عدد } c$$