به نام خدای لوح و قلم

کتاب درسی زیرذره‌بین

هندسه(۲)

پایه یازدهم

تألیف و گردآوری: مجید فرهمندپور

نکات کتاب درسی

بررسی خط‌به‌خط کتاب درسی

تست‌ها و پرسش‌های متناسب با درس

سرشناسه : فرهمندپور، مجید، ۱۳۵۷-

عنوان : کتاب درسی زیر ذره‌بین هندسه (۲) پایه یازدهم: نکات کتاب درسی، بررسی خط‌به خط.../ تألیف و گردآوری مجید فرهمندپور.

مشخصات نشر : تهران: کتب آموزشی پیشرفته، ۱۴۰۱

مشخصات ظاهری : ۱۰۸ ص.: مصور(جدول رنگی)؛ ۲۲×۲۹ س‌م.

شابک : ۱۶۰۰۰۰۰ ریال: ۶-۸۵-۷۰۷۱-۶۲۲-۹۷۸

وضعیت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر

شماره کتابشناسی ملی : ۸۶۵۷۱۰۰

اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

این کتاب **۱۰۸** صفحه می‌باشد.

نام کتاب : **هندسه (۲)- پایه یازدهم (رشته ریاضی)**
ناشر : **کتب آموزشی پیشرفتـــه (کاپ)**
عنوان پروژه : **کتاب درسی زیر ذره‌بین**
تألیف : **مجید فرهمندپور**
مدیر تألیف : **احمد مصلایی**
ناظر فنی : **سیما رائفی‌نیا**
صفحه‌بندی : **نازنین احمدی شفق**
حروف‌چینی : **جواد جعفریان**
ویراستار فنی : **مریم مجاور**
ایده طرح جلد : **احمد مصلایی**
تصویرسازی جلد : **امیرحامد پاژتار**
طراحی جلد : **سپیده زارعی**
لیتوگرافی و چاپ : **گلپا گرافیک/ نگار نقش**
سال و نوبت چاپ : **۱۴۰۲/ اول**
شابک : **۶-۸۵-۷۰۷۱-۶۲۲-۹۷۸**
شمارگان : **۱۰۰۰ نسخه**
قیمت : **۱۶۰۰۰۰ تومان**

مرکز فروش: میـــدان انقلاب- خیابان فخـــررازی- خیـــابان وحیـــدنظری غربی- پـــلاک ۸۳
۰۲۱-۶۶۴۹۳۴۹۰   ۰۲۱-۶۶۹۶۱۰۷۹   ۰۲۱-۶۶۹۶۴۷۲۳ -۵   فروشگاه: ۰۲۱-۶۶۹۵۳۵۱۷-۱۸
صندوق پستی: ۱۳۱۴۵-۱۱۳۹   آدرس سایت زیرذره‌بین: www.zirezarebinpub.ir
سایت نشر کاپ: www.cup-book.com
cupbook.pub

مقدمهٔ ناشر

◄ معرفی انتشارات کاپ

انتشارات کاپ در سال ۱۳۹۸ با هدف «تولید محتوای آموزشی» اعلام موجودیت کرد. سیاست ما تولید آثاری است که فقدان و نیاز به آن‌ها در فضای آموزشی کشور احساس می‌شود.

◄ کتاب درسی خیلی مهم است!

مهم‌ترین و اولین منبعی که دانش‌آموز پس از حضور در کلاس درس باید به آن مراجعه کند، «کتاب درسی» است؛ این در حالی است که اکثر دانش‌آموزان قدم اول را به اشتباه با مطالعهٔ کتاب‌های کمک‌درسی که گاهی فاصلهٔ زیادی تا کتاب درسی دارند، برمی‌دارند و نتیجهٔ این تصمیم اشتباه و پرش مطالعاتی، یادگیری ناقص و ناآمادگی در آزمون‌های مرتبط با درس مورد نظر است.

◄ با مطالعهٔ «کتاب‌های درسی زیرذره‌بین» به چه نتایجی می‌رسید؟

واقعیت این است که اکثر دانش‌آموزان یا کتاب درسی را اصلاً نمی‌خوانند یا به‌طور سطحی می‌خوانند. این رویگردانی از کتاب درسی می‌تواند دلایل زیادی داشته باشد:

دلیل اول: ممکن است کتاب درسی برای دانش‌آموز قابل درک نباشد.

دلیل دوم: ممکن است دانش‌آموز با خواندن کتاب درسی به هدف خود در فهم کامل مفاهیم کتاب و گرفتن نتیجهٔ مناسب در آزمون‌های آن درس نرسد.

به دلایل دیگر کاری نداریم! «کتاب‌های درسی زیر ذره‌بین» دقیقاً برای رفع دو اشکال بالا طراحی و تألیف شده‌اند. در این کتاب‌ها، مؤلف خود را در جایگاهی قرار می‌دهد که مفاهیم یک درس را با استفادهٔ مستقیم از متن کتاب درسی به خواننده یاد می‌دهد و هرجا نیاز به تفسیر مطلب ، توضیح بیشتر، پرسش یا تست است، آن را به کتاب اضافه می‌کند تا کتاب درسی به‌طور کامل درک شود. با این کتاب‌ها به پایه‌های لازم برای پیشرفت در دروس خود دست پیدا می‌کنید. خیالتان که از بابت درک کتاب راحت شد، می‌توانید به منبع دیگری (مانند کتاب‌های تست) برای افزایش مهارت و رسیدن به تسلط در آن درس مراجعه کنید. تأکید می‌کنیم این کتاب‌ها حل‌المسائل نیستند، هر چند که ممکن است بعضی از پرسش‌های مهم کتاب درسی مورد بررسی قرار گرفته باشند.

مقدمهٔ مولف

سپاس و ستایش خدای متعال را که توفیق تألیف و تدوین این کتاب را عنایت فرمود تا سعی در پیشبرد اهداف ملی دانش‌آموزان این مرز و بوم داشته باشم.

درتدوین کتاب عزیزان زیادی دست من را فشردند و پا به پای من دویدند که تشکر می‌کنم از همه این عزیزان به خصوص:

– مدیران محترم و فرهیخته انتشارات کاپ به خصوص جناب آقای مصلایی عزیز دوست قدیمی خودم؛

– خانم سیما رائفی نیا که در طراحی این اثر زحمت فراوان کشیدند.

این کتاب را تقدیم می‌کنم به همسرعزیزم که در این سالها نبودن‌هایم را بردباری کرد و با صبر و شکیبایی به من دلگرمی بخشید.

فهـــرست

فصل اوّل

دایــره

هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیهٔ بنیادی در هندسه موسوم به «قضیهٔ هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همهٔ شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعهٔ فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دورهٔ ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونهٔ گویایی از همین کاربردهاست.

درس اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصلهٔ ثابت (اندازهٔ شعاع دایره) هستند. معمولاً دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را به‌صورت C(O,r) نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که :

$A \Rightarrow OA < r$ داخل دایره

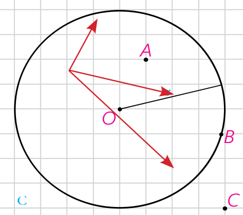
$B \Rightarrow OB = r$ روی دایره

$C \Rightarrow OC > r$ خارج دایره

الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ...برابر... شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره...بیش‌تر از... شعاع دایره است.

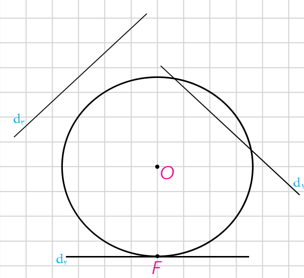
پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ...کم‌تر از... شعاع دایره است.



اوضاع نسبی خط و دایره

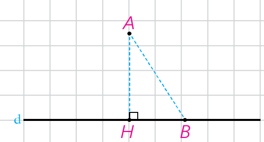
در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطهٔ اشتراک داشته، و یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر **دایره مماس** است و در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع** می‌نامیم.



یادآوری

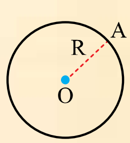
اگر خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر d داده شده، و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازهٔ پاره‌خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصلهٔ نقطهٔ A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است $(AB > AH)$.



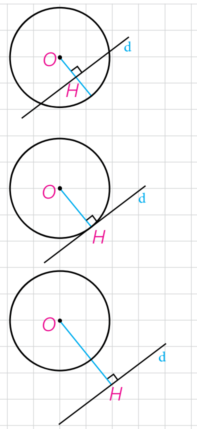
پرسش نقطهٔ A روی دایره $C(O,7)$ است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره $3m-2$ باشد، مقدار m را حساب کنید. (دبیرستان واله-۱۴۰۰)

پاسخ چون نقطهٔ A روی دایره است پس $OA = R$ است.

$$OA = R \Rightarrow 3m-2=7 \Rightarrow 3m=9 \Rightarrow \boxed{m=3}$$



اگر d یک خط و C(O,r) یک دایره و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.



الف) اگر فاصلهٔ خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد (OH < r)، خط و دایره ....دو...... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند

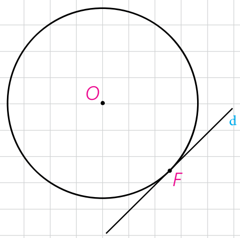
ب) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد (OH = r)، خط و دایره ...یک....... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی مماس‌اند.

پ) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد (OH > r)، خط و دایره نقطه مشترک ندارند.

هر وقت یک خط بر دایره مماس شود، شعاع که به خط مماس می‌شود یعنی OH بر خط مماس (یعنی d) عمود است.

فعالیت

۱ــ فرض کنیم خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ F مماس است.

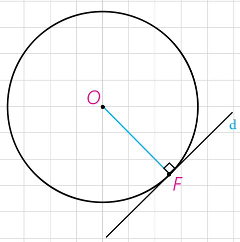


الف) نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O کدام است؟ چرا؟

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟

پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطهٔ F ...عمودند....... .

۲ــ خط d در نقطهٔ F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همهٔ نقاط خط d نسبت به دایرهٔ C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطهٔ تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

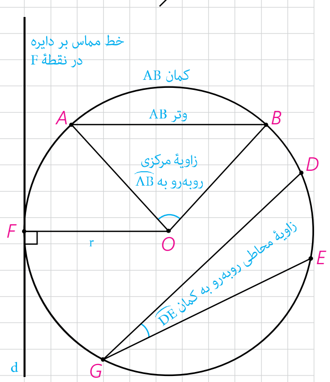


۳ــ با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خطِ مماس بر دایره را در نقطهٔ F رسم کنید؟

بنابراین : اول شعاع OF را رسم می‌کنیم سپس خطی که از F عبور می‌کند و بر OF عمود باشد، جواب مسئله است.

یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

زوایای مرکزی، محاطی و ظلی

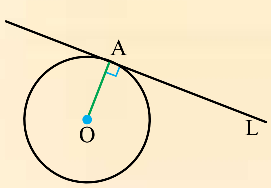


با تعاریف زوایای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

۱ــ **شعاع دایره** : پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

۲ــ **وتر دایره** : پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.

پرسش خط L بر دایره C(O,۱۲) مماس است. اگر فاصلهٔ خط L از مرکز این دایره ۳ − ۵m باشد، مقدار m را به‌دست آورید. (نخبگان علامه طباطبایی-۱۳۹۸)



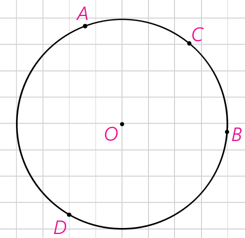
پاسخ چون خط L بر دایره مماس است، پس OA = R است.

$OA = R \Rightarrow ۵m - ۳ = ۱۲ \Rightarrow ۵m = ۱۵ \Rightarrow \underline{m = ۳}$

۳ـ **قطر دایره** : وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

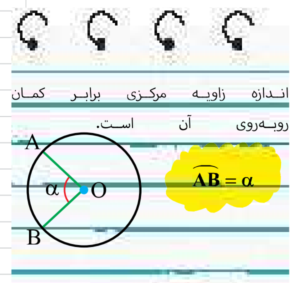
۴ـ **زاویهٔ مرکزی** : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

۵ـ **زاویهٔ محاطی** : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

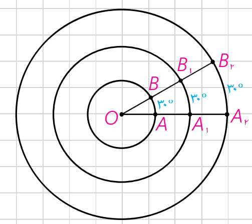


۶ـ **کمان** : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\overset{\frown}{ACB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان کوچک‌تر مشخص شده توسط A و B است.

۷ـ **اندازهٔ کمان**، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.



۸ـ با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.



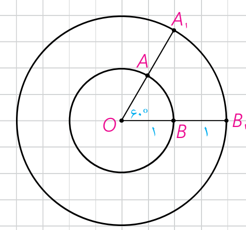
کار در کلاس

۱ـ با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازهٔ °۳۶۰ است، خواهیم داشت :

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{۳۶۰}=\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$

$۲\pi R$

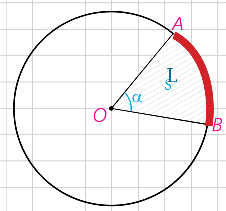
این زاویه به درجه است.



۲ـ با توجه به شکل، اندازهٔ کمان‌های زیر را بنویسید.

$\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ طول $\overset{\frown}{AB}=\frac{۶۰}{۳۶۰}\times ۲\pi\times ۱=\frac{\pi}{۳}$

$\overset{\frown}{A_۱B_۱}=۶۰^\circ$ طول $\overset{\frown}{A_۱B_۱}=\frac{۶۰}{۳۶۰}\times ۲\pi\times ۲=\frac{۲\pi}{۳}$

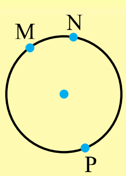


۳ـ ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ C(O,R) برحسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با : $L=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با : $S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}$

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{۳۶۰}=\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط ۳۶۰}}\Rightarrow\frac{\alpha}{۳۶۰}=\frac{L}{۲\pi R}\Rightarrow L=\frac{۲\pi R\times\alpha}{۳۶۰}\Rightarrow L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}$$

$$\frac{\text{S رنگی}}{\text{S کل}}=\frac{\alpha}{۳۶۰}\Rightarrow\frac{S}{\pi R^۲}=\frac{\alpha}{۳۶۰}\Rightarrow S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}$$

تست در شکل زیر $\overset{\frown}{MP}=\overset{\frown}{NP}=۴\overset{\frown}{MN}$ اگر شعاع دایره R=۹ باشد. طول کمان MN کدام است؟ (آزمون‌های گاج-۹۹)



۱) ۴π ۲) ۵π ۳) ۲π ۴) π

۳ می‌دانیم مجموع کل کمان‌های دایره °۳۶۰ است.

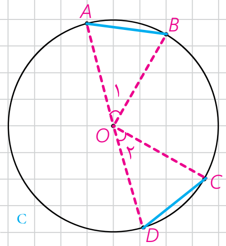
$$\overset{\frown}{MP}=\overset{\frown}{NP}=۴\overset{\frown}{MN}=۴\alpha\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{MP}=۴\alpha\\ \overset{\frown}{NP}=۴\alpha\\ \overset{\frown}{MN}=\alpha\end{cases}$$

$$\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{NP}+\overset{\frown}{PM}=۳۶۰\Rightarrow\alpha+۴\alpha+۴\alpha=۳۶۰\Rightarrow\alpha=۴۰^\circ$$

$$|\overset{\frown}{MN}|=L\Rightarrow L=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰}\Rightarrow L=\frac{۴۰\pi\times ۹}{۱۸۰}\Rightarrow L=۲\pi$$

فعالیت

۱ــ فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایرهٔ $C(O,r)$ باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.



$\hat{O}_1 = \overset{\frown}{AB}$, $\hat{O}_2 = \overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$

$OA = OC = R$, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, $OB = OD = R$

$\xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\Delta}{ABO} \cong \overset{\Delta}{OCD}$

$\xrightarrow{\text{ا.م}} AB = CD$

۲ــ فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

$AD = OC = R$

$BO = OD = R$

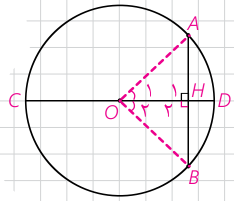
فرض $AB = CD$

$\xrightarrow{\text{ضضض}} \overset{\Delta}{ABO} \cong \overset{\Delta}{OCD}$

$\xrightarrow{\text{ا.م}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\hat{O}_1 = \overset{\frown}{AB}$, $\hat{O}_2 = \overset{\frown}{CD}$, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ $\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

۳ــ وتر AB و قطری از دایره، که بر وتر AB عمود است، مانند شکل مقابل داده شده‌است. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



(وتر) $AH = HB = R$

$OH = OH$

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\frown}{OAH} \cong \overset{\frown}{OBH}$

$\xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} AH = HB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{مرکزی}} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

۴ــ این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

۵ــ حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

۶ــ اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟ *کافی است وسط کمان را به وسط وتر وصل کرده و امتداد می‌دهیم.*

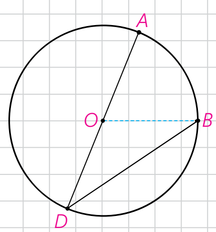
۱ اگر شعاع دایره ای بر یک وتر از آن دایره عمود باشد، آن وتر و کمان مربوط به آن را نصف می‌کند.

۲ اگر قطر دایره یک وتر از آن دایره را نصف کند، کمان آن را هم نصف می‌کند و بر وتر عمود است.

۳ اگر وسط یک کمان را به وسط وتر آن وصل کنیم حتما از مرکز دایره عبور می‌کند.

فعالیت

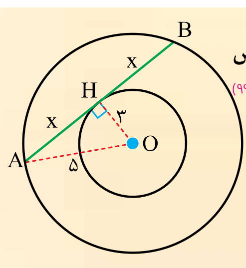
۱ــ در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.



ــ اگر از B به O وصل کنیم، زاویهٔ AOB یک زاویهٔ خارجی برای مثلث OBD است.

بنابراین: $\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \underbrace{...}_{\widehat{OBD}} = 2\widehat{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود:

$\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$..



پرسش شعاع‌های دو دایرهٔ هم مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر را که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است پیدا کنید. (پژوهندگان علم کرج - دی ۹۹)

پاسخ شعاع OH حتما به پاره خط AB که بر دایره مماس است، عمود می‌باشد پس قطعا وتر AB را نصف می‌کند، یعنی $AH = HB = x$

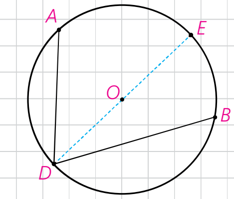
$\overset{\frown}{OHA} : \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 25 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$AB = 2x \Rightarrow AB = 8$

۲ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

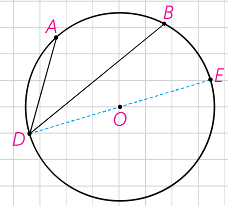
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE}=\frac{1}{2}\widehat{AE}\\ \widehat{EDB}=\frac{1}{2}\widehat{BE}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{ADB}=\frac{1}{2}\widehat{AB}$$



۳ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE}=\frac{1}{2}\widehat{AE}\\ \widehat{BDE}=\frac{1}{2}\widehat{BE}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{ADB}=\frac{1}{2}\widehat{AE}$$

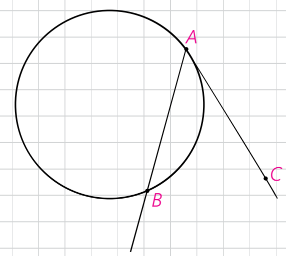


بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه.

زاویهٔ ظلی

نوع دیگری از زاویه، که در دایره مطرح است، زاویهٔ ظلی است. زاویهٔ ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره وضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ ظلی است.



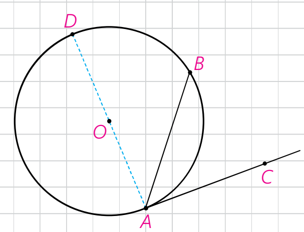
فعالیت

۱ــ زاویهٔ ظلی $\widehat{CAB}$ را درنظر بگیرید و قطری از دایره را رسم کنید که شامل نقطهٔ A هست.

الف) $\widehat{DAC}=$ ..۹۰..° و بنابراین : $\widehat{DAC}=\frac{1}{2}\widehat{AD}$

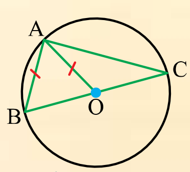
ب) زاویهٔ DAB یک زاویهٔ محاطی است.

بنابراین : $\widehat{DAB}=\frac{1}{2}\widehat{BD}$



پرسش در شکل مقابل اگر O مرکز دایره باشد، زاویهٔ $A\hat{C}O$ چند درجه است؟ $(AO = AB)$

(دبیرستان امام محمد باقر- دی ماه ۹۹)



پاسخ

$$\left.\begin{array}{l}AO=R\\ AB=AO\end{array}\right\}\Rightarrow AB=R$$

زاویه C یک زاویه محاطی است پس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABO}: AB=AO=OB=R \xrightarrow[\text{زاویه مرکزی}]{\text{متساوی‌الاضلاع}} \left.\begin{array}{l}A\hat{O}B=60\\ A\hat{O}B=\widehat{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{AB}=60$$

$$\hat{C}=\frac{\widehat{AB}}{2}\Rightarrow \hat{C}=\frac{60^\circ}{2}\Rightarrow \hat{C}=30^\circ$$

پ) از (الف) و (ب) داریم : $\widehat{DAC}-\widehat{DAB}=\frac{۱}{۲}(\widehat{AD}-\widehat{BD})$

و بنابراین $\widehat{BAC}=\frac{۱}{۲}\widehat{AB}$

ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با .... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

$AB \parallel CD$, مورب $AD \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} D\hat{A}B = A\hat{D}C$ ①

$B\hat{A}D = \frac{\widehat{BD}}{۲}$ محاطی ②

$A\hat{D}C = \frac{\widehat{AC}}{۲}$ ③

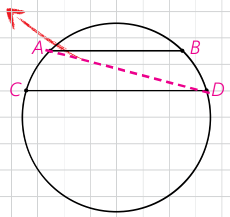
①، ② و ③ $\Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}$

کاردرکلاس

۱ــ در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) کمان‌های $\widehat{BD}$ و $\widehat{AC}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



۲ــ در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.

الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

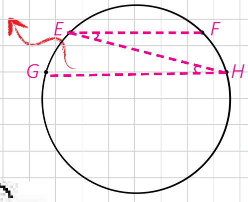
پ) وترهای EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$\hat{H}=\frac{\widehat{BG}}{۲}$ محاطی

$\hat{E}=\frac{\widehat{FH}}{۲}$ محاطی

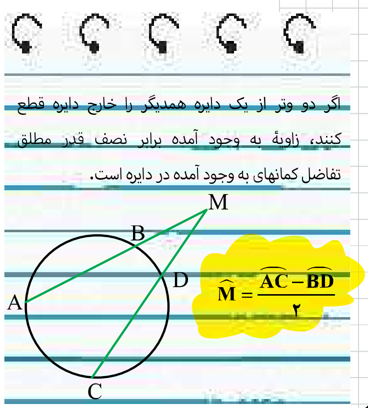
$\widehat{BG}=\widehat{EH}$

$\Rightarrow \hat{H}=\hat{E} \xrightarrow{\text{عکس قضیه خطوط موازی}} FE \parallel HG$



نتیجه

دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

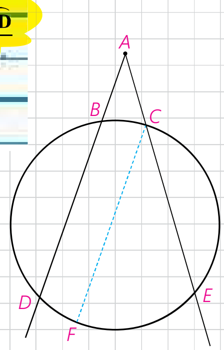


تاکنون زاویه‌هایی را بررسی کردیم که رأس آنها روی دایره باشد و رابطهٔ اندازه این زاویه‌ها را با اندازهٔ کمان‌های ایجاد شده توسط آنها مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی می‌پردازیم که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند.

فعالیت

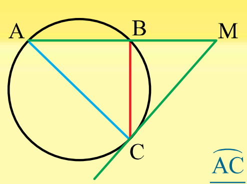
۱ــ فرض کنید رأس زاویهٔ DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده، و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویهٔ موردنظر مشخص شده باشد.

الف) از نقطهٔ C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.



$$\widehat{DAE}=\widehat{FCE}=\frac{۱}{۲}\widehat{FE}=\frac{۱}{۲}(\widehat{DE}-\widehat{DF})=\frac{۱}{۲}(\widehat{DE}-\widehat{BC})$$

در شکل زیر پاره خط MC بر دایره مماس شده است. اگر نسبت دو کمان $\widehat{AC}$ و $\widehat{BC}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ بوده و دو زاویهٔ $\widehat{BMC}$ و $\widehat{BCA}$ برابر باشند، زاویهٔ $\widehat{ABC}$ چند درجه است؟ (آزمون مرات-آبان ۹۹)



۱) ۸۵° ۲) ۸۸° ۳) ۹۰° ۴) ۹۲°

۳

$$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{BC}}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \begin{cases}\widehat{AC}=۴x\\ \widehat{BC}=۳x\end{cases}$$

$$B\hat{M}C=\frac{\widehat{AC}-\widehat{BC}}{۲}\Rightarrow B\hat{M}C=\frac{۴x-۳x}{۲}=\frac{x}{۲}\Rightarrow B\hat{M}C=B\hat{C}A=\frac{x}{۲}$$

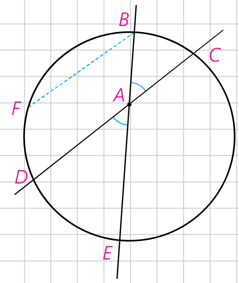
$$B\hat{C}A=\frac{\widehat{AB}}{۲}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{\widehat{AB}}{۲}\Rightarrow \widehat{AB}=x$$

$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CA}=۳۶۰\Rightarrow x+۳x+۴x=۳۶۰\Rightarrow ۸x=۳۶۰\Rightarrow x=۴۵$$

$$A\hat{B}C=\frac{\widehat{AC}}{۲}=\frac{۴x}{۲}=۲x=۲(۴۵)=۹۰$$

ب) از C به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی در مثلث ACD رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

۲ــ رأس زاویهٔ DAE مانند شکل در درون دایره است و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

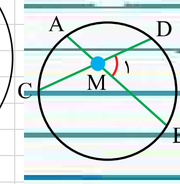


الف) از نقطهٔ B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE}=\widehat{FBE}=\frac{۱}{۲}\widehat{FE}=\frac{۱}{۲}(\widehat{FD}+\widehat{DE})=\frac{۱}{۲}(\widehat{BC}+\widehat{DE})$$

ب) از B به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی مثلث ABD رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

اگر دو وتر از یک دایره همدیگر را در داخل دایره قطع کنند، زاویه به وجود آمده نصف مجموع کمان‌های مقابل آن است.

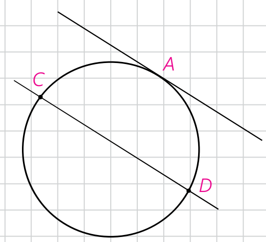


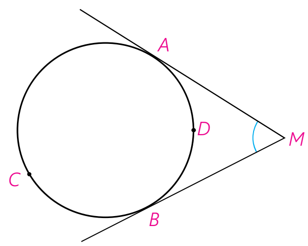
$$\hat{M}_۱=\frac{\widehat{AC}+\widehat{BD}}{۲}$$

تمرین

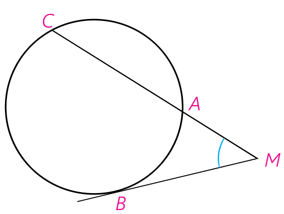
۱ــ در شکل‌های زیر ثابت کنید :

راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



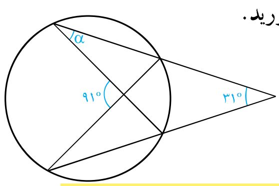


ب) $\hat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$

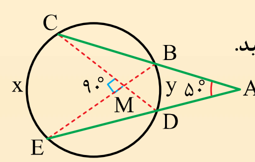


پ) $\hat{M}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{۲}$

۲ــ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.



پرسش در شکل روبرو مقادیر x و y را تعیین کنید. (دبیرستان صدرای نور تبریز- دی ۹۹)



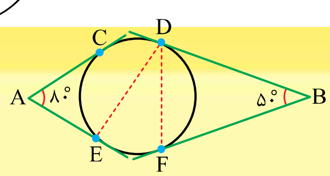
پاسخ

$$\hat{M}=\frac{\widehat{CE}+\widehat{BD}}{۲}\Rightarrow ۹۰=\frac{x+y}{۲}\Rightarrow x+y=۱۸۰$$

$$\hat{N}=\frac{\widehat{CE}-\widehat{BD}}{۲}\Rightarrow ۵۰=\frac{x-y}{۲}\Rightarrow x-y=۱۰۰$$

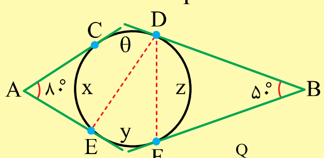
$$\xrightarrow{+}۲x=۲۸۰\Rightarrow x=۱۴۰ \qquad ۱۴۰+y=۱۸۰\Rightarrow y=۴۰$$

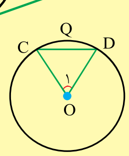
تست در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۹۸)



۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

پاسخ گزینهٔ ۳





$OC=OD=CD=R\Rightarrow \overset{\triangle}{OCD}$ متساوی‌الاضلاع $\Rightarrow \hat{O}_۱=۶۰^\circ$

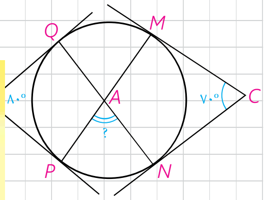
مرکزی $\hat{O}_۱=\widehat{CD}\Rightarrow ۶۰=\widehat{CD}\Rightarrow \theta=۶۰$

$$\hat{A}=\frac{(\theta+z+y)-x}{۲}\Rightarrow ۸۰=\frac{۶۰+z+y-x}{۲}\Rightarrow ۱۶۰=۶۰+z+y-x\Rightarrow z+y-x=۱۰۰$$

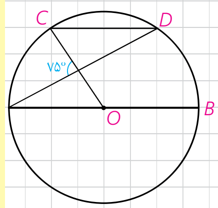
$$\hat{B}=\frac{(x+y+\theta)-z}{۲}\Rightarrow ۵۰=\frac{x+y+۶۰-z}{۲}\Rightarrow ۱۰۰=x+y-z+۶۰\Rightarrow x+y-z=۴۰$$

$$\begin{cases}z+y-x=۱۰۰\\ x+y-z=۴۰\end{cases}\xrightarrow{+}۲y=۱۴۰\Rightarrow y=۷۰^\circ \qquad E\hat{D}F=\frac{\widehat{EF}}{۲}=\frac{y}{۲}=\frac{۷۰}{۲}=۳۵^\circ$$

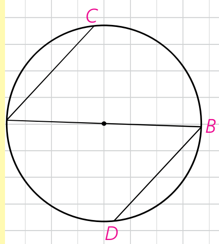
۳ــ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



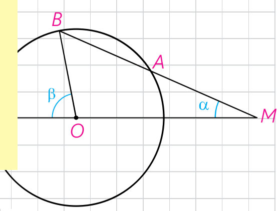
۴ــ در دایره رسم شده شکل مقابل CD||AB، اندازه کمان CD را به‌دست آورید.



۵ــ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.
ثابت کنید : AC = BD



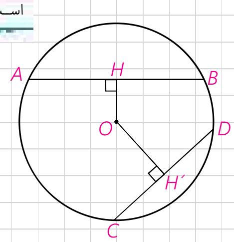
۶ــ دایرهٔ C(O,R) مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و MA = R؛ نشان دهید : $\beta = ۳\alpha$



۷ــ در دایرهٔ C(O,R)، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.

۸ــ در دایرهٔ C(O,R) نشان دهید AB > CD اگر و تنها اگر $OH < OH'$ (OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)

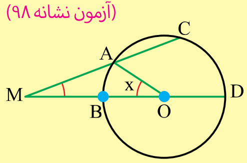
راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.



نمونه سوال ۶

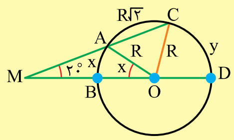
در شکل زیر اگر $AC = \sqrt{۲}R$ و $\hat{M} = ۲۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ x کدام است؟

(آزمون نشانه ۹۸)



۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۳۰

۳ C را به O و A وصل می‌کنیم.



$\overset{\triangle}{OAC} : AC^۲ = OA^۲ + OC^۲ \Rightarrow A\hat{O}C = ۹۰^\circ$

$\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰$

$\Rightarrow x + ۹۰ + y = ۱۸۰ \Rightarrow x + y = ۹۰$

$\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

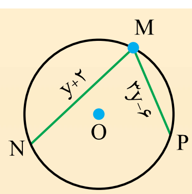
$\Rightarrow ۲۰ = \dfrac{y - x}{۲} \Rightarrow y - x = ۴۰$

$\begin{cases} x + y = ۹۰ \\ x - y = -۴۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x = ۵۰ \Rightarrow x = ۲۵$

از دو وتر نابرابر در یک دایره، آن‌که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

پرسش در شکل مقابل MN به مرکز نزدیک‌تر است. حدود y را بیابید.

(دبیرستان امام محمد باقر- دی ۹۹)

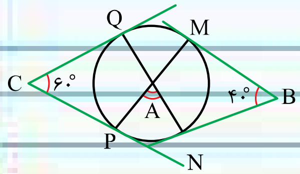


وتری که به مرکز دایره نزدیک‌تر است، بزرگ‌تر است.

$$\left.\begin{array}{l} MN > MP \Rightarrow y + ۲ > ۳y - ۶ \Rightarrow -۲y > -۸ \Rightarrow y < ۴ \\ MN > ۰ \Rightarrow y + ۲ > ۰ \Rightarrow y > -۲ \\ MP > ۰ \Rightarrow ۳y - ۶ > ۰ \Rightarrow ۳y > ۶ \Rightarrow y > ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲ < y < ۴$$

سوالات امتحانی زیر ذره بین

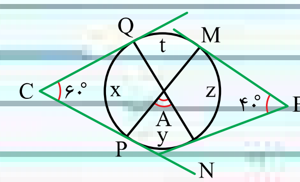
۱. در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ A را بیابید. (دبیرستان دکتر حاجی-دی ۹۹)



پاسخ:

$$\hat{C}=\frac{(y+z+t)-x}{۲}\Rightarrow ۶۰=\frac{y+z+t-x}{۲}\Rightarrow y+z+t-x=۱۲۰$$

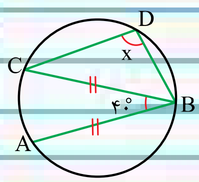
$$\hat{B}=\frac{x+t+y-z}{۲}\Rightarrow ۴۰=\frac{x+t+y-z}{۲}\Rightarrow x+t+y-z=۸۰$$



$$\begin{cases} y+z+t-x=۱۲۰ \\ x+t+y-z=۸۰ \end{cases}\overset{+}{\Rightarrow} ۲y+۲t=۲۰۰\Rightarrow y+t=۱۰۰$$

$$\hat{A}=\frac{y+t}{۲}=\frac{۱۰۰}{۲}\Rightarrow \hat{A}=۵۰$$

۲. مقدار x را پیدا کنید. (سرای دانش واحد حافظ-دی ۹۷)



پاسخ:

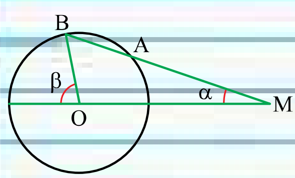
$$BC=AB\Rightarrow \overset{\frown}{BDC}=\overset{\frown}{AB}=\alpha$$

$$\text{عاملی}\ \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow ۴۰=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۸۰$$

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BDC}+\overset{\frown}{CA}=۳۶۰\Rightarrow \alpha+\alpha+۸۰=۳۶۰\Rightarrow ۲\alpha=۲۸۰\Rightarrow \alpha=۱۴۰$$

$$\text{محاطی}\ C\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{CAB}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۸۰+\alpha}{۲}=\frac{۸۰+۱۴۰}{۲}\Rightarrow x=۱۱۰$$

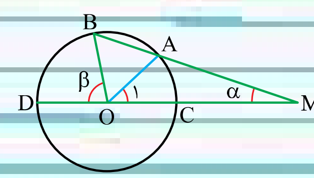
۳. دایرهٔ $C(۰,۲)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خط چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA=۲$. اگر $\alpha=۲۰°$ باشد، نشان دهید که $\beta=۶۰°$ (سرای دانش واحد رسالت-خرداد ۹۸)



پاسخ: O را به A وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} OA=R=۲ \\ AM=۲ \end{array}\right\}\Rightarrow OA=AM\xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}}\hat{O}_۱=\hat{M}=\alpha=۲۰°$$

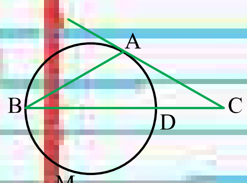
$$\text{مرکزی}\ \hat{O}_۱=\overset{\frown}{AC}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\alpha=۲۰°$$



$$M=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow ۲۰=\frac{\overset{\frown}{BD}-۲۰}{۲}\Rightarrow ۴۰=\overset{\frown}{BD}-۲۰\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۶۰°$$

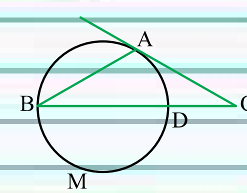
$$\text{مرکزی}\ \hat{\beta}=\overset{\frown}{BD}\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۶۰°$$

۴. در شکل زیر، مماس AC با وتر AB از دایره برابر است. اگر کمان $\overset{\frown}{BMD}=۲۲۲°$ باشد، اندازهٔ $\hat{C}$ را حساب کنید. (دبیرستان کوشش-ماه ۹۸)



پاسخ:

$$\text{محاطی}\ \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BMD}}{۲}=\frac{۲۲۲}{۲}\Rightarrow A=۱۱۱$$



$$\overset{\Delta}{ABC}:AC=AB\longrightarrow \hat{B}=\hat{C}=\alpha$$

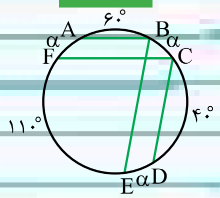
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰\Rightarrow ۱۱۱+\alpha+\alpha=۱۸۰\Rightarrow ۲\alpha=۶۹\Rightarrow \alpha=۳۴/۵$$

$$\text{محاطی}\ \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\Rightarrow ۳۴/۵=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۶۹$$

$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AD}}{۲}\Rightarrow ۳۴/۵=\frac{\overset{\frown}{AB}-۶۹}{۲}\Rightarrow ۶۹=\overset{\frown}{AB}-۶۹\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۱۳۸$$

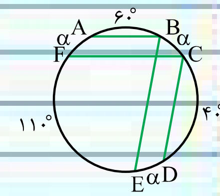
۵. درشکل $AB \parallel FC$ و $BE \parallel CD$ و $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ و $\overset{\frown}{CD}=۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF}=۱۱۰^\circ$ باشد آنگاه زاویهٔ $\angle FCD$ چقدر است؟

(دبیرستان فرگام-۹۸)



پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel FC \Rightarrow \overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BC} \\ BE \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{ED} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{ED}=\alpha$$



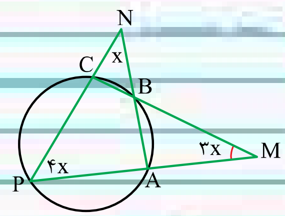
$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FA}=۳۶۰ \Rightarrow ۶۰+\alpha+۴۰+\alpha+۱۱۰+\alpha=۳۶۰$$

$$\Rightarrow ۳\alpha=۱۵۰ \Rightarrow \alpha=۵۰$$

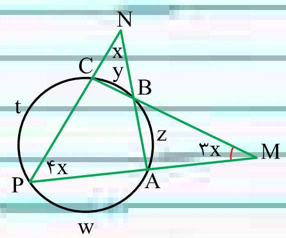
$$\text{محاطی}\ F\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{FED}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED}}{۲}=\frac{۱۱۰+۵۰}{۲}\Rightarrow \underline{F\hat{C}D=۸۰^\circ}$$

۶. در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

(دبیرستان واله-خرداد ۱۴۰۰)



پاسخ: فرض کنیم $\overset{\frown}{BC}=y$ و $\overset{\frown}{BA}=z$ و $\overset{\frown}{AP}=w$ و $\overset{\frown}{PC}=t$ باشد.

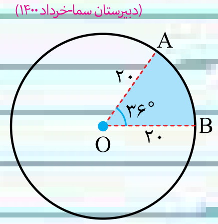


$$\left.\begin{array}{l} \hat{N}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow x=\dfrac{w-y}{۲}\Rightarrow ۲x=w-y \\ \hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{PC}-\overset{\frown}{BA}}{۲}\Rightarrow ۳x=\dfrac{t-z}{۲}\Rightarrow ۶x=t-z \\ \text{محاطی}\ \hat{P}=\dfrac{\overset{\frown}{CBA}}{۲}\Rightarrow ۴x=\dfrac{y+z}{۲}\Rightarrow ۸x=y+z\xrightarrow{\times ۲}۱۶x=۲y+۲z \end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$$۲x+۶x+۱۶x=w-y+t-z+۲y+۲z\Rightarrow ۲۴x=y+z+w+t\Rightarrow ۲۴x=۳۶۰\Rightarrow \underline{x=۱۵}$$

۷. مساحت قطاعی از دایره $C(O,۲۰)$ را به‌دست آورید که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان ۳۶° است.

(دبیرستان سما-خرداد ۱۴۰۰)

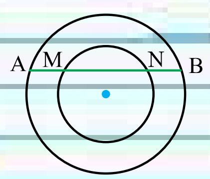


پاسخ:

$$S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}=\frac{\pi(۲۰)^۲\times ۳۶}{۳۶۰}=۴۰\pi$$

۸. در شکل روبه‌رو دو دایره با هم، هم‌مرکز هستند. ثابت کنید AM=BN.

(دبیرستان دین و دانش-۹۸)

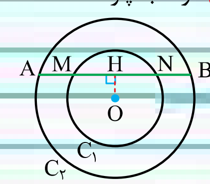


پاسخ: از O به پاره خط AB عمود می‌کنیم.

در دایره $C_۱$، OH عمود بر وتر MN است پس: MN = HN

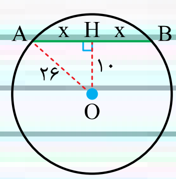
در دایره $C_۲$، OH عمود بر وتر AB است پس: AH = HB

$$\left.\begin{array}{l} AH=HB \\ MH=NH \end{array}\right\}\Rightarrow AH-MH=HB-NH\Rightarrow AM=BN$$



۹. دایره $C(O,۲۶)$ مفروض است. اگر فاصلهٔ وتر AB از مرکز دایره ۱۰ باشد، طول وتر AB را حساب کنید.

(کتاب هندسه سوم دبیرستان نظام قدیم)



پاسخ:

$$OH\perp AB\Rightarrow AH=HB=x$$

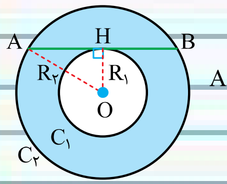
$$\overset{\Delta}{OAH}:\hat{H}=۹۰^\circ\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}OA^۲=OH^۲+AH^۲$$

$$\Rightarrow ۲۶^۲=۱۰^۲+x^۲\Rightarrow ۶۷۶=۱۰۰+x^۲\Rightarrow x^۲=۵۷۶\Rightarrow x=۲۴$$

$$AB=۲x=۲(۲۴)\Rightarrow \underline{AB=۴۸}$$

۱۰. دایره‌های $C_1(O,R_1)$ و $C_2(O,R_2)$ هم مرکز هستند. اگر طول وتر از دایره C_2 که مماس بر دایره C_1 باشد برابر ۲۴ باشد، مساحت ناحیهٔ بین دو دایره را حساب کنید.

(دبیرستان نخبگان علامه طباطبایی-خرداد ۹۸)



پاسخ:

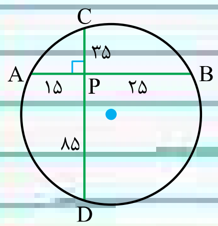
$$OH \perp AB \Rightarrow AH = HB = \frac{AB}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

$$\overset{\Delta}{AHO}: \hat{H} = ۹۰^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ \Rightarrow R_۲^۲ = ۱۲^۲ + R_۱^۲ \Rightarrow R_۲^۲ - R_۱^۲ = ۱۴۴$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_۲ - S_۱ = \pi R_۲^۲ - \pi R_۱^۲ = \pi\left(R_۲^۲ - R_۱^۲\right) = \underline{۱۴۴\pi}$$

۱۱. در شکل روبه‌رو دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازهٔ شعاع این دایره را حساب کنید.

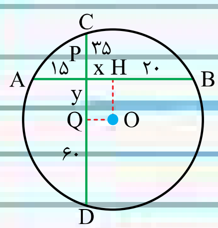
(دبیرستان واله-خرداد ۱۴۰۰)



پاسخ:

$$AB = AP + PB = ۱۵ + ۲۵ = ۴۰$$

$$CD = CP + PD = ۳۵ + ۸۵ = ۱۲۰$$



از O به AB و CD عمود می‌کنیم.

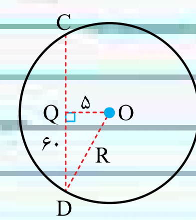
$$OH \perp AB \Rightarrow AH = HB = \frac{AB}{۲} = ۲۰$$

$$OQ \perp CD \Rightarrow CQ = QD = \frac{CD}{۲} = ۶۰$$

$$AP + PH + HB = AB \Rightarrow ۱۵ + x + ۲۰ = ۴۰ \Rightarrow x = ۵ \Rightarrow OQ = ۵$$

حالا OD را رسم می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{OQD}: \hat{Q} = ۹۰ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OD^۲ = OQ^۲ + QD^۲ \Rightarrow R^۲ = ۲۵ + ۳۶۰۰ \Rightarrow R^۲ = ۳۶۲۵ \Rightarrow R = \sqrt{۳۶۲۵}$$



یادداشت