

معادلات گویا و گنگ

کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای باشند را، عبارت گویا می‌نامند. یک عبارت گویا وقتی **تعریف شده** است که **مخرج آن صفر نباشد**. روش کلی حل معادلات گویا این است که با مخرج مشترک‌گیری معادله را به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ در بیاوریم. برای پیدا کردن جواب‌های معادله باید صورت را برابر صفر بگذاریم و در عین حال مخرج صفر نباشد. یعنی: $P(x) = 0$, $Q(x) \neq 0$. یعنی همیشه وقتی جواب‌های یک معادله گویا را به دست آوردید، باید بررسی کنید که جواب‌ها، مخرج کسر را صفر نکنند. همچنین می‌توان معادلات را به شکل $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{F(x)}{G(x)}$ در آورده و با **طرفین وسطین** حل کنیم و در پایان چک کنیم که **هیچ یک از مخرج‌ها صفر نشوند**.

+ مثال ۱ معادله $\frac{2x+1}{x+2} = \frac{2x-1}{x-3}$ را حل کنید.

$$(2x+1)(x-3) = (x+2)(2x-1) \rightarrow \cancel{2x^2} - 6x + x - 3 = \cancel{2x^2} - x + 4x - 2 \rightarrow -8x = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{8}$$

پاسخ:

$x = -\frac{1}{8}$ هیچ‌یک از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

+ مثال ۲ جواب‌های معادله $\frac{x-2}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{3}{2x+4}$ را به دست آورید.

پاسخ: سمت چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم و سپس طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{(x-3)(x+2)} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{2(x+2)} \rightarrow \frac{(x-2)^2 - (x-3)}{(x-3)(x+2)(x-2)} = \frac{3}{2(x+2)}$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 4x + 4 - x + 3}{(x-3)(x-2)} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3}{2} \rightarrow 2(x^2 - 5x + 6) = 3(x^2 - 5x + 6)$$

$$\rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 3x^2 - 15x + 18 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \rightarrow x = 1, 6$$

هیچ یک از ریشه‌ها، هیچ‌یک از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول هستند.

تذکر عبارتهای مشابه را در دو طرف تساوی اگر در مخرج باشند، ساده کنید ولی اگر در صورت باشند، ساده نکنید.

= تست ۱ معادله $\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2-x+1}$ چند ریشه دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه «۲»؛ سمت راست تساوی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{2}{x^2-x+1} \rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1-2x+2(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \rightarrow$$

$$\frac{1}{\cancel{x+1}} = \frac{3}{(\cancel{x+1})(x^2-x+1)} \rightarrow 3 = x^2 - x + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

چون $x = -1$ مخرج کسر را صفر می‌کند، قابل قبول نیست. $x = 2, -1$

نکته اگر $x = a$ جواب یک معادله باشد، باید a در معادله صدق کند.

تست ۲ $\frac{x-4}{3x+2} + \frac{4}{10x} = \frac{1}{a}$ کدام باشد تا $x=6$ جواب معادله a کدام باشد؟

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۱؛ $x=6$ باید در تساوی صدق کند: $\frac{2}{20} + \frac{4}{60} = \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{a} \rightarrow \frac{3+2}{30} = \frac{1}{a} \rightarrow a = \frac{30}{5} = 6$

تست ۳ اگر $x = -3$ جواب معادله $\frac{x+a}{x-1} - 1 = \frac{a-x}{x+1}$ باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

(۱) $x=1$ (۲) $x=2$ (۳) $x=3$ (۴) $x=4$

پاسخ: گزینه ۳؛ ابتدا $x = -3$ را در معادله قرار می‌دهیم و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$\frac{-3+a}{-4} - 1 = \frac{a+3}{-2} \rightarrow \frac{-3+a+4}{-4} = \frac{a+3}{-2} \rightarrow \frac{a+1}{-4} = \frac{a+3}{-2} \rightarrow a+1 = 2(a+3) \rightarrow a+1 = 2a+6 \rightarrow a = -5$$

حال $a = -5$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم و همه مقادیر x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x-5}{x-1} - 1 = \frac{-5-x}{x+1} \rightarrow \frac{x-5-x+1}{x-1} = \frac{-5-x}{x+1} \rightarrow \frac{-4}{x-1} = \frac{-5-x}{x+1} \rightarrow -4x-4 = -5x-x^2+5+x \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

پس $x = 3$ جواب دیگر معادله است که مخرج هیچ کسری را نیز صفر نمی‌کند.

تست ۴ شرط آنکه معادله $\frac{t}{x} = \frac{x}{x^2+2}$ برای x جواب داشته باشد، کدام است؟

(۱) $t \geq 1$ (۲) $t \leq 0$ (۳) $0 < t < 1$ (۴) $-1 < t < 1, t \neq 0$

پاسخ: گزینه ۳؛ ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم:

معلوم است که برای اینکه این معادله جواب داشته باشد، باید $\frac{-t}{t-1} \geq 0$ باشد:

$\frac{-2t}{t-1} \geq 0 \rightarrow \frac{2t}{t-1} \leq 0$ جدول تعیین علامت \rightarrow

		۰	۱	
$2t$	-	○	+	+
$t-1$	-	-	○	+
$\frac{2t}{t-1}$	+	○	-	+

ت.ن

$\rightarrow 0 \leq t < 1$

تذکره البته دقت کنید که اگر $t = 0$ باشد، مقدار $x = 0$ خواهد بود که مخرج کسرها را صفر می‌کند. پس مجموعه جواب $0 < t < 1$ است.

مسائل کاربردی معادلات گویا

مثال در یک مستطیل نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن است. نسبت طول به

(کتاب درسی)

عرض این مستطیل را بیابید.

پاسخ: طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر می‌گیریم، طبق صورت سؤال:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \rightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \xrightarrow{\frac{x}{y}=t} 1 + \frac{1}{t} = t \rightarrow \frac{t+1}{t} = t \rightarrow t+1 = t^2 \rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

معلوم است که $t = \frac{x}{y}$ عددی مثبت است، پس مقدار $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ صحیح است.

☆ نکته این مستطیل را مستطیل طلایی و نسبت طول به عرض آن یعنی عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ را عدد طلایی می‌نامیم. بهتر است این عدد را حفظ کنید.

+ مثال ۳ یک قطار شهری مسافتی به طول ۶۰ km را با سرعت ثابت طی می‌کند و همان مسیر را با $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ سرعت کمتر نسبت به سرعت رفت برمی‌گردد. اگر مدت زمان برگشت نیم‌ساعت بیشتر از زمان رفت باشد، سرعت رفت و برگشت و همچنین زمان رفت و برگشت را بیابید. (کتاب درسی)

پاسخ: سرعت رفت را V در نظر می‌گیریم، پس سرعت برگشت $(V-10)$ خواهد بود. در این صورت زمان رفت $\frac{60}{V}$ و زمان برگشت $\frac{60}{V-10}$ خواهد بود: دقت کنید که مسافت ۶۰ km است و واحد سرعت را نیز $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ در نظر می‌گیریم. پس زمان‌ها بر اساس ساعت به دست می‌آیند.

$$\frac{60}{V-10} - \frac{60}{V} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{60V - 60(V-10)}{V(V-10)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{600}{V(V-10)} = \frac{1}{2} \rightarrow V^2 - 10V = 1200 \rightarrow V^2 - 10V - 1200 = 0$$

$$\rightarrow (V-40)(V+30) = 0 \rightarrow V = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}, V = -30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

معلوم است که $V = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ صحیح است. پس سرعت برگشت نیز $40 - 10 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ خواهد بود. در این صورت زمان رفت $\frac{60}{40} = 1.5 \text{ h}$ و زمان برگشت $1.5 + 0.5 = 2 \text{ h}$ خواهد بود.

= تست ۵ سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر بر دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر بر دقیقه است؟ (تجربی دافل ۹۸)

۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳؛

سرعت آب رودخانه را $V \frac{\text{m}}{\text{min}}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین وقتی در جهت حرکت آب حرکت کنیم، سرعت قایق $100+V$ و وقتی خلاف جهت حرکت آب حرکت کنیم، سرعت قایق $100-V$ متر بر دقیقه خواهد بود. پس زمان‌های رفت و برگشت، $\frac{1200}{100+V}$ و $\frac{1200}{100-V}$ خواهند بود:

$$\frac{1200}{100-V} - \frac{1200}{100+V} = 5 \rightarrow \frac{1200(100+V) - 1200(100-V)}{10000 - V^2} = 5 \rightarrow \frac{2400V}{10000 - V^2} = 5 \rightarrow 10000 - V^2 = 480V$$

$$V^2 + 480V - 10000 = 0 \rightarrow (V+500)(V-20) = 0 \rightarrow V = -500, V = 20 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

معلوم است که $V = 20$ متر بر دقیقه صحیح است.

+ مثال ۴ دو ماشین چمن‌زنی با هم در ۴ ساعت چمن‌های یک پارک را کوتاه می‌کنند. اگر سرعت یکی از آنها دو برابر دیگری باشد هر یک به تنهایی در چند ساعت چمن‌های پارک را کوتاه می‌کنند؟ (کتاب درسی)

پاسخ: فرض کنید ماشین A، در t ساعت و ماشین B (که کندتر است) در $2t$ ساعت به تنهایی کار را انجام می‌دهند. پس ماشین A و B در یک ساعت به ترتیب، $\frac{1}{t}$ و $\frac{1}{2t}$ از کار را انجام می‌دهند. پس اگر هر دو باهم کار کنند، در یک ساعت $\frac{1}{t} + \frac{1}{2t}$ از کار انجام خواهد شد. از طرفی می‌دانیم دو ماشین با هم در ۴ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{2+1}{2t} = \frac{1}{4} \rightarrow 2t = 12 \rightarrow t = 6$$

پس ماشین A در ۶ ساعت و ماشین B در ۱۲ ساعت به تنهایی کار را انجام می‌دهند.

☆ نکته اگر افراد A, B, C و ... هریک به تنهایی کاری را در t_A , t_B , t_C و ... ساعت و با هم در t ساعت انجام دهند، داریم:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} + \frac{1}{t_C} + \dots$$

== تست ۶ ==

بهبروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم تایپ کنند در ۲۰ ساعت کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

(ریاضی دافل ۹۸)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۴

زمان اینکه بهروز به تنهایی مجله را تایپ کند، t ساعت و فرهاد را $t+9$ ساعت در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20} \rightarrow \frac{t+9+t}{t(t+9)} = \frac{1}{20} \rightarrow \frac{2t+9}{t^2+9t} = \frac{1}{20} \rightarrow t^2+9t = 40t+180 \rightarrow t^2-31t-180=0 \rightarrow (t-39)(t+5)=0 \xrightarrow{t>0} t=36$$

== تست ۷ ==

سینا و رضا هریک به تنهایی یک خانه را به ترتیب طی ۸ و ۱۲ ساعت نقاشی می‌کنند. اگر سینا ۲ ساعت به تنهایی به نقاشی ساختمان بپردازد و پس از آن رضا به کمک او بیاید، در مجموع نقاشی ساختمان در چند ساعت انجام می‌شود؟

- (۱) ۶/۸ (۲) ۳/۶ (۳) ۵/۶ (۴) ۴/۸

پاسخ: گزینه ۳

سینا به تنهایی در ۸ ساعت رنگ‌آمیزی ساختمان را انجام می‌دهد، پس طی دو ساعت اول، $\frac{1}{4}$ از نقاشی ساختمان را انجام و $\frac{3}{4}$ آن باقی می‌ماند. در

صورتی که با هم نقاشی کنند، کل کار را در t ساعت انجام می‌دهند. در این صورت داریم:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} \rightarrow \frac{1}{t} = \frac{3+2}{24} \rightarrow t = \frac{24}{5} = 4.8h$$

این مدت زمانی است که کل کار رنگ‌آمیزی می‌شود. چون $\frac{3}{4}$ از ساختمان باقی‌مانده است، داریم:

$$\frac{3}{4} \times 4.8 = 3.6$$

پس در مجموع $2 + 3.6 = 5.6$ ساعت نقاشی ساختمان به طول می‌انجامد.

== تست ۸ ==

به ازای چند مقدار t ، معادله $\frac{t-1}{2x} = \frac{x+1}{x^2-2x}$ ، به ازای مجموعه مقادیر x جواب ندارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا x را از مخرج کسرها ساده می‌کنیم:

$$\frac{t-1}{2x} = \frac{x+1}{x(x-2)} \rightarrow 2x+2 = (t-1)x - 2t+2 \rightarrow (t-3)x = 2t \rightarrow x = \frac{2t}{t-3}$$

اگر معادله حاصل جواب نداشته باشد، باید $t=3$ باشد تا عبارت $\frac{2t}{t-3}$ تعریف نشده باشد. همچنین در صورتی که مقدار به دست آمده برای x مخرج

کسرها را صفر کند، قابل قبول نخواهد بود. $x=2$ و $x=0$ مخرج کسرها را صفر می‌کند.

$$\frac{2t}{t-3} = 0 \rightarrow t=0$$

$$\frac{2t}{t-3} = 2 \rightarrow 2t = 2t - 6 \rightarrow 0 = -6$$

پس به ازای دو مقدار $t=0$ و $t=3$ معادله مذکور پاسخی نخواهد داشت.

== تست ۹ ==

در یک مغازه ماهی‌ها تزئینی، ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب و نمک ۴ درصدی موجود است اگر در این مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد، تقریباً چند کیلوگرم آب باید تبخیر شود تا غلظت آب و نمک به ۷ درصد برسد؟

(کتاب درسی)

۸۷ (۱) ۸۱ (۲) ۹۱ (۳) ۹۴ (۴)

$$200 \times \frac{4}{100} = 8$$

پاسخ: گزینه ۳؛ میزان نمک موجود در محلول برابر است با:

۵ کیلوگرم نمک را اضافه و فرض می‌کنیم y کیلوگرم از آب تبخیر شود:

$$\frac{8}{200 + 5 - y} = \frac{7}{100} \rightarrow 1435 - 7y = 800 \rightarrow 635 = 7y \rightarrow y = \frac{635}{7} \approx 91 \text{ kg}$$

== تست ۱۰ ==

پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

(تجربی فارغ ۹۸)

۱۲ (۱) ۱۲/۵ (۲) ۱۳/۵ (۳) ۱۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴؛ سرعت پرنده در هوای آرام را V (کیلومتر بر ساعت) در نظر می‌گیریم، در این صورت وقتی در جهت باد حرکت کنیم، سرعت پرنده،

$V + 5$ و وقتی خلاف جهت باد حرکت کند، سرعت پرنده $V - 5$ خواهد بود. پس زمان رفت و برگشت، $\frac{1}{V+5}$ و $\frac{1}{V-5}$ خواهد بود:

$$\frac{1}{V-5} + \frac{1}{V+5} = \frac{9}{60} \rightarrow \frac{V+5+V-5}{V^2-25} = \frac{3}{20} \rightarrow \frac{2V}{V^2-25} = \frac{3}{20} \rightarrow 3V^2 - 75 = 40V \rightarrow 3V^2 - 40V - 75 = 0$$

دقت کنید که کسرهای دارای واحد ساعت هستند.

$$\rightarrow (3V+5)(V-15) = 0 \rightarrow V = 15, -\frac{5}{3}$$

معلوم است که $V = 15 \text{ km/h}$ صحیح است.

معادلات رادیکالی (گنگ)

معادلات شامل عبارت‌های رادیکالی را معادلات گنگ یا رادیکالی می‌نامیم. برای حل معادلات گنگ:

(۱) سعی می‌کنیم با جداسازی عبارت‌ها از همدیگر به معادله‌ای مشابه $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ برسیم.

(۲) طرفین را به توان دو می‌رسانیم تا رادیکال‌ها حذف شوند: $P(x) = (Q(x))^2$

(۳) چک می‌کنیم جواب‌های به دست آمده در معادله اولیه صدق کنند.

مرحله سوم را این‌طور هم می‌توان بیان کرد که:

در حالت کلی معادلات به فرم $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ باید دارای دو شرط، $Q(x) \geq 0, P(x) \geq 0$ باشند، ولی اینکه جواب‌ها را به دست بیاورید و سپس چک کنید که در معادله اولیه صدق می‌کنند یا نه، معمولاً کار ساده‌تری است.

== تست ۱۱ ==

معادله $3x - 2 + \sqrt{4x - 3} = 0$ از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟

(۱) یک جواب دارد. (۲) دو جواب هم علامت دارد. (۳) دو جواب با علامت مختلف دارد. (۴) جواب ندارد.

پاسخ: گزینه ۴؛ $\sqrt{4x-3} = 2-3x \rightarrow 4x-3 = 4+9x^2-12x \rightarrow 9x^2-16x+7=0 \rightarrow \Delta = 256-4(9)(7) = 4 \rightarrow x = \frac{16 \pm 2}{18} = 1, \frac{7}{9}$

هر دو مقدار $\frac{7}{9}$ و ۱ عبارت $2-3x$ را منفی می‌کنند. پس هیچ یک مورد قبول نیستند.

== تست ۱۲ ==

معادله $\sqrt{3x+1} + x - 9 = 0$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲؛ $\sqrt{3x+1} = 9-x \rightarrow 3x+1 = 81+x^2-18x \rightarrow x^2-21x+80=0 \rightarrow (x-5)(x-16)=0 \rightarrow x = 5, 16$

مقدار $x = 16$ ، عبارت $9-x$ را منفی می‌کند، پس قابل قبول نیست.

تست ۱۳

اگر $1 = \sqrt{3a+16} + 2a$ باشد، عدد $4a+9$ ، کدام است؟

(تجربی قارج ۹۸)

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

پاسخ: گزینه ۱.

$$\sqrt{3a+16} = 1 - 2a \rightarrow 3a + 16 = 4a^2 - 4a + 1 \rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 4(4)(-15) = 289 \rightarrow a = \frac{7 \pm 17}{8} = 3, -\frac{5}{4}$$

دقت کنید که به ازای $a = 3$ عبارت $(1-2a)$ منفی است، پس $a = -\frac{5}{4}$ صحیح است: $4a+9 = -5+9 = 4$

تست ۱۴

فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

(تجربی داخل ۱۴۰۰)

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{15}$

پاسخ: گزینه ۴.

معادله دوم را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^2 = y + 3 + y - 3 - 2\sqrt{y^2 - 9} \xrightarrow{x^2 = 2y} 2y = 2y - 2\sqrt{y^2 - 9} \rightarrow 2\sqrt{y^2 - 9} = 0 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$$

دقت کنید که $y = -3$ عبارت $(y-3)$ را منفی می‌کند و زیر رادیکال منفی خواهد شد. پس $y = 3$ صحیح است:

$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \xrightarrow{y=3} x = \sqrt{6} \xrightarrow{\text{نقطه تقاطع}} A(\sqrt{6}, 3) \xrightarrow{\text{فاصله از مبدأ}} \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

تست ۱۵

اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

(تجربی داخل ۸۷)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب دیگر ندارد.

پاسخ: گزینه ۴.

ابتدا $x = 4$ را در معادله قرار می‌دهیم، تا مقدار a به دست آید:

حل مقدار $a = -2$ را در معادله قرار داده و همه جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 81 - 4(2)(4) = 49 \rightarrow x = \frac{9 \pm 7}{4} = 4, \frac{1}{2}$$

چون $x = \frac{1}{2}$ عبارت $(x-2)$ را منفی می‌کند، پس قابل قبول نیست. بنابراین معادله ریشه دیگری ندارد.

نکته

اگر مجموع چند عبارت نامنفی برابر صفر باشد، همگی عبارت‌ها برابر صفر هستند.

تست ۱۶

معادله $\sqrt{x^2 - 4} + x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$ چند ریشه متمایز دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲.

با یک تغییر در عبارت $x^4 - 4x^3 + 4x^2$ داریم:

$$x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x-2)^2 \geq 0$$

پس مجموع دو عبارت نامنفی صفر شده است. یعنی هر دو صفر هستند.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2(x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 0, 2 \end{cases}$$

چون باید هر دو عبارت صفر باشند، بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم پس $x = 2$ تنها جواب است.

نکته

اگر درجه عبارات بالا باشد، ممکن است تغییر متغیر راهگشا باشد.

تست ۱۷

حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

(ریاضی دافل ۹۴)

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲؛ عبارت $x^2 + 4x + 3$ را در t در نظر می‌گیریم: $t = \sqrt{t+2} (*) \rightarrow t^2 = t+2 \rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \rightarrow t = 2, -1$ چون $t = -1$ سمت چپ معادله $(*)$ را منفی می‌کند، قابل قبول نیست. پس $t = 2$ صحیح است.

$$x^2 + 4x + 3 = 2 \rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{حاصلضرب ریشهها}} p = \frac{c}{a} = 1$$

نکته

در عبارات پیچیده حواستان به دامنه باشد، اگر دامنه عبارت تهی باشد، معادله ریشه ندارد.

تست ۱۸

تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$ کدام است؟ (ریاضی قارچ ۱۱۴۰۰)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳؛ عبارات زیر رادیکال باید نامنفی باشند:

$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \rightarrow -(x^2 - 6x + 8) \geq 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین دوریشه}} 2 \leq x \leq 4 \text{ (I)}$$

$$x^2 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \rightarrow x^2(-x+4) + 25(x-4) \geq 0$$

$$\rightarrow (x-4)(25-x^2) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c} -5 \quad 4 \quad 5 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \quad | \quad - \\ \hline \end{array} \rightarrow x \leq -5 \text{ یا } 4 \leq x \leq 5 \text{ (II)}$$

اشتراک موارد I و II فقط $x = 4$ است. پس $x = 4$ را امتحان می‌کنیم که در معادله صدق می‌کند ($6 = 6$)، پس $x = 4$ تنها ریشه معادله است.

تست ۱۹

اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

(تجربی دافل ۹۸)

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲/۵ (۳) ۳/۵ (۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۴.

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \rightarrow 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a \rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 256 - 4(7)(4) = 144 \rightarrow a = \frac{16 \pm 12}{14} = 2, \frac{2}{7}$$

دقت کنید که به ازای $a = 2$ عبارت $(2 - 3a)$ منفی است، پس $a = \frac{2}{7}$ صحیح است:

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{7}{2} = 4\frac{1}{2}$$

تست ۲۰

دایره‌ای به مرکز $O(2, \alpha)$ بر خط $x - y = 4$ مماس است و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. در این صورت

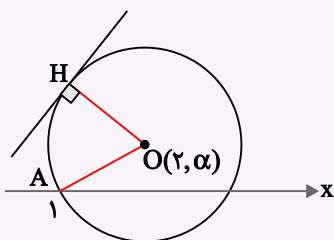
α کدام است؟

- (۱) $1 \pm \sqrt{6}$ (۲) $2 \pm \sqrt{6}$ (۳) $3 \pm \sqrt{6}$ (۴) $4 \pm \sqrt{6}$

پاسخ: گزینه ۲.

می‌دانیم فاصله مرکز دایره از هر خطی که به آن مماس است، برابر شعاع دایره است. همچنین فاصله مرکز

دایره از هر نقطه روی محیط آن برابر شعاع دایره است. پس $OH = OA$:



$$OA = \sqrt{(2-1)^2 + (\alpha-0)^2}$$

$$OH = \frac{|2 - \alpha - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-\alpha - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$OA = OH \rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 1} = \frac{|-\alpha - 2|}{\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 + 1} = |-\alpha - 2| \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$2(\alpha^2 + 1) = \alpha^2 + 4\alpha + 4 \rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 24 \rightarrow \alpha = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

تست ۲۱

اگر ریشه معادله $\sqrt{x} + \sqrt{5-x} + 4 = 3$ برابر a باشد ($a < 5$)، حاصلضرب ریشه‌های معادله $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{a}{24}$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) -۶

پاسخ: گزینه ۴.

ابتدا معادله اولیه را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x} + \sqrt{5-x} + 4 = 3 \xrightarrow{\text{به توان دو}} x + \sqrt{5-x} + 4 = 9 \xrightarrow{\text{به توان دو}} \sqrt{5-x} = 5-x \xrightarrow{\text{به توان دو}} 5-x = 25+x^2-10x$$

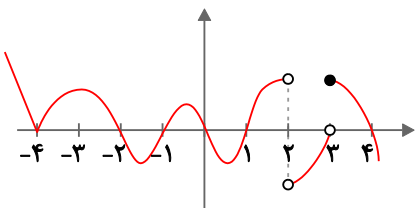
$$\rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \rightarrow (x-5)(x-4) = 0 \rightarrow x = 5, 4 \xrightarrow{a < 5} a = 4$$

حال: $a = 4$ را جایگزین و معادله بعدی را حل می‌کنیم:

$$\frac{a=4}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}} \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{6} \rightarrow x^2+x=6 \rightarrow x^2+x-6=0 \xrightarrow{\text{حاصلضرب ریشه‌ها}} \frac{c}{a} = -6$$

تعیین علامت

تعیین مثبت یا منفی بودن یک عبارت جبری یا ... را تعیین علامت آن می‌گوییم. در تعیین علامت یک عبارت جبری دقیقاً نواحی‌ای را مشخص می‌کنیم که در آن‌ها علامت مثبت است (یعنی نمودار بالای محور x ها است) و یا منفی است (یعنی نمودار پایین محور x ها است).
به نمودار $y = P(x)$ که در مقابل رسم شده است توجه کنید. به راحتی می‌توانیم جدول تعیین علامت مربوط به $P(x)$ را رسم کنیم و مشخص کنیم که P کجاها مثبت، کجاها منفی و در چه نقاطی برابر صفر است.



x	$-\infty$	-4	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$P(x)$	+	○	+	○	-	○	+	○	-	+

ت.ن

تعیین علامت عبارت درجه اول

برای تعیین علامت عبارت درجه اول $P(x) = ax + b$ ، اول ریشه آن را به دست می‌آوریم که برابر $x = -\frac{b}{a}$ است. پس از آن جدول تعیین علامت آن به صورت مقابل است:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$P(x)$	مخالف علامت a	○	موافق علامت a

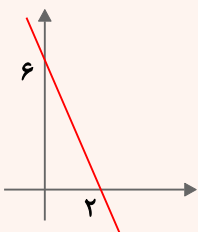
مثال ۵+

جدول تعیین علامت تابع $P(x) = -3x + 6$ را رسم کنید.

پاسخ:

$$P(x) = 0 \rightarrow -3x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$$

دقت کنید که a (همان ضریب x) منفی است. در نمودار هم می‌توانید ببینید که تابع قبل از ریشه‌اش مثبت (بالای محور x ها) و بعد از ریشه‌اش منفی (پایین محور x ها) است.



x	2
$P(x)$	+

تعیین علامت عبارت‌های حاصل از ضرب و تقسیم عبارت‌های درجه اول

برای تعیین علامت عبارت‌های کسری گویا که صورت و مخرج آن‌ها به صورت حاصلضرب چند عبارت درجه اول هستند، ابتدا هریک از عبارت‌ها را در یک سطر تعیین علامت می‌کنیم و سپس در سطر آخر همه علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. در نقاطی که مخرج کسر صفر می‌شود، عبارت مورد نظر تعریف نشده است و در نقاطی که صورت کسر صفر می‌شود، کل عبارت برابر صفر است.

مثال ۶

عبارت‌های $F(x) = \frac{3x-6}{1-x}$ و $P(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-9)}{1-x}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

$F(x) = \frac{3x-6}{1-x} \rightarrow \begin{cases} 3x-6=0 \rightarrow x=2 \\ 1-x=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$ جدول تعیین علامت

x		1	2	
$3x-6$	-	-	o	+
$1-x$	+	o	-	-
$F(x)$	-	+	o	-

$P(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-9)}{1-x} = \frac{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{1-x} \rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)=0 \rightarrow x = \pm 2, \pm 3 \\ 1-x \rightarrow x=1 \end{cases}$ جدول تعیین علامت

x		-3	-2	1	2	3	
$x-2$	-	-	-	-	o	+	+
$x+2$	-	-	o	+	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	o	+
$x+3$	-	o	+	+	+	+	+
$1-x$	+	+	+	o	-	-	-
$P(x)$	+	o	-	o	+	-	o

نکته

روش تعیین علامت سریع هموگرافیک: در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، ریشه‌های صورت و مخرج را پیدا می‌کنیم. در این صورت بین دو ریشه، مخالف علامت $\frac{a}{c}$ و خارج دو ریشه موافق علامت $\frac{a}{c}$ است:

	x_1	x_2	
	$\frac{a}{c}$ موافق	$\frac{a}{c}$ مخالف	$\frac{a}{c}$ موافق

تست ۲۲

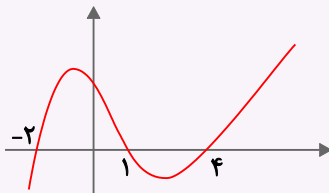
اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل مقابل باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(6-2x)f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

بی‌شمار

۳ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



$(6-2x)f(x) \geq 0$

پاسخ: گزینه ۴؛ می‌دانیم باید زیر رادیکال با فرجه زوج نامنفی باشد، پس:

برای تعیین علامت این عبارت برای $(6-2x)$ و $f(x)$ یک سطر جداگانه در نظر می‌گیریم و در پایان دو سطر را در هم ضرب می‌کنیم:

$6-2x=0 \rightarrow x=3$

$f(x)=0 \rightarrow x=-2, 1, 3, 4$

جدول تعیین علامت

x		-2	1	3	4	
$6-2x$	+	+	+	o	-	-
$f(x)$	-	o	+	o	-	-
$(6-2x)f(x)$	-	o	+	o	-	o

با توجه به جدول بازه‌های $[-2, 1] \cup [3, 4]$ مدنظر است که شامل ۶ عدد صحیح است.

تعیین علامت عبارات درجه دوم

در تعیین علامت عبارتهای درجه دوم ۳ حالت وجود دارد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد و ریشه‌های چند جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ ، x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) باشند، در این حالت $P(x)$ به صورت زیر تعیین علامت می‌گردد:

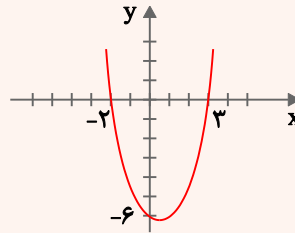
x		x_1		x_2	
$P(x)$	a	موافق علامت	a	مخالف علامت	a

+ مثال ۷ جدول تعیین علامت تابع $f(x) = x^2 - x - 6$ را رسم کنید.

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$$

پاسخ:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$x^2 - x - 6$	+	○	-	○	+



ب) اگر $\Delta = 0$ باشد در این صورت عبارت دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ دارای ریشه مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ است. جدول تعیین علامت به صورت مقابل است:

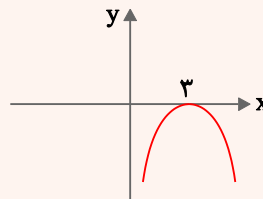
x		$-\frac{b}{2a}$	
$P(x)$	a	موافق علامت	a

+ مثال ۸ جدول تعیین علامت تابع $P(x) = -2x^2 + 12x - 18$ را رسم کنید.

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-2)} = 3$$

پاسخ:

x		3	
$-2x^2 + 12x - 18$	-	○	-



ج) اگر $\Delta < 0$ باشد، در این صورت $P(x) = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت یا همواره منفی است و ریشه ندارد.

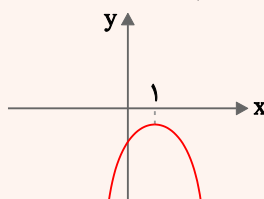
جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	موافق علامت a	

+ مثال ۹ جدول تعیین علامت تابع $P(x) = -x^2 + 2x - 2$ را رسم کنید.

پاسخ:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	-	



تست ۲۳ = اگر جدول تعیین علامت تابع $f(x) = (a-2)x^2 + bx - 6$ به شکل زیر باشد، حاصل $2a + b$ کدام است؟

x	-2			
f(x)	+	o	-	

پاسخ: گزینه ۱؛ حواستان باشد که جدول تعیین علامت تابع درجه دوم هیچ وقت به شکل بالا نمی‌شود. اگر تابع درجه دوم یک ریشه داشته باشد، علامت اطراف ریشه یکسان است، پس این تابع درجه دوم نیست. برای این که این تابع درجه دوم نباشد، باید $a - 2 = 0$ باشد:

$$a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

$$bx - 6 = 0 \xrightarrow{x=-2} -2b - 6 = 0 \rightarrow b = -3 \rightarrow 2a + b = 1$$

در این صورت تابع درجه اول است و $x = -2$ ریشه آن است:

تست ۲۴ = نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف های منفی سپس ۹ واحد به طرف های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار

(ریاضی قارچ ۹۸)

جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

- (۱) $(-5, 2)$ (۲) $(-5, 3)$ (۳) $(-2, 3)$ (۴) $(-2, 5)$

$$y = x^2 - x - 3 \xrightarrow{\text{واحد چپ}} (x+2)^2 - (x+2) - 3 \xrightarrow{\text{واحد پایین}} (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9 < 0$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 12 < 0 \rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \rightarrow (x+5)(x-2) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهها}} x = 2, -5 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -5 & & 2 \\ \hline & + & o & - & o & + \\ \hline \end{array} \rightarrow -5 < x < 2$$

نکته ☆ همان طور که گفتیم در حالت $\Delta < 0$ ، تابع درجه دوم همواره دارای یک علامت است. در این حالت اگر $a > 0$ باشد، تابع

همواره مثبت و اگر $a < 0$ باشد، تابع همواره منفی است:

$$a > 0 \text{ و } \Delta < 0 \rightarrow \text{همواره مثبت (بالای محور xها)}$$

$$a < 0 \text{ و } \Delta < 0 \rightarrow \text{همواره منفی (پایین محور xها)}$$

تست ۲۵ = به ازای کدام مقادیر m، سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور xها است؟ (ریاضی قارچ ۹۸)

- (۱) $1 < m < 5$ (۲) $2 < m < 5$ (۳) $2 < m < 4$ (۴) $2 < m < 6$

پاسخ: گزینه ۲؛ شرط آنکه تابع درجه دوم همواره پایین محور xها (همواره منفی) باشد، آن است که: $\Delta < 0$ و $a < 0$ ، پس:

$$\Delta < 0 \rightarrow 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \rightarrow 4(m^2 - 6m + 9 + 1 - m) < 0 \rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \xrightarrow{\text{ریشهها}} m = 2, 5 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 2 & & 5 \\ \hline & + & o & - & o & + \\ \hline \end{array} \rightarrow 2 < m < 5$$

تست ۲۶ = نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف های منفی انتقال می‌دهیم.

(ریاضی دافل ۹۸)

نمودار جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع اول است؟

- (۱) $(3, 4)$ (۲) $(2, 5)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(2, 6)$

پاسخ: گزینه ۱؛

$$y = -x^2 + 2x + 5 \xrightarrow{\text{واحد پایین}} -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 \xrightarrow{\text{واحد راست}} -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 > x$$

دقت کنید که نیمساز ناحیه اول و سوم $y = x$ است.

$$-x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 - x > 0 \rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \rightarrow (x-3)(x-4) < 0 \xrightarrow{\text{ریشهها}} x = 3, 4$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 3 & & 4 \\ \hline & + & o & - & o & + \\ \hline \end{array} \rightarrow 3 < x < 4$$

== تست ۲۷ == اگر جدول تعیین علامت تابع درجه دوم $f(x) = -x^2 + ax + 12$ مشابه شکل مقابل باشد، مقدار ab کدام است؟

x	b	۳	۲ (۲)	-۴ (۱)
$f(x)$	$-$	$+$	-۸ (۴)	۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۳؛

معلوم است که یکی از ریشه‌های تابع $x = 3$ است. پس $x = 3$ تابع را صفر می‌کند:

$$-9 + 3a + 12 = 0 \rightarrow 3a = -3 \rightarrow a = -1$$

همچنین b ریشه دیگر تابع است. با قرار دادن $a = -1$ در تابع، همه ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = -x^2 - x + 12 = 0 \rightarrow -(x-3)(x+4) = 0 \rightarrow x = 3, -4 \rightarrow b = -4$$

⚠ تذکر ⚠ دقت کنید که می‌توانستیم ریشه دیگر را از جمع یا ضرب ریشه‌های تابع درجه دوم محاسبه کنیم. مثلاً با ضرب ریشه‌ها:

$$P = \frac{c}{a} \rightarrow 3 \times b = \frac{12}{-1} \rightarrow b = -4$$

در نهایت $ab = 4$ است.

== تست ۲۸ == اگر جدول تعیین علامت تابع $f(x) = \frac{ax-6}{3x+b}$ به شکل مقابل باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

x	-۳	۲	-۸ (۲)	۱۲ (۱)
$f(x)$	$-$	$+$	-۱۲ (۴)	۱۲ یا -۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۲؛

می‌دانیم در تعیین علامت تابع هموگرافیک، یکی از اعداد در جدول تعیین علامت، ریشه صورت و دیگری ریشه مخرج است. همچنین دقت کنید که

علامت بین دو ریشه مخالف $\frac{a}{c} > 0$ است، پس $\frac{a}{3} < 0$ بوده است، یعنی $a < 0$. حال دو حالت را امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = -3 \xrightarrow{\text{ریشه صورت}} -3a - 6 = 0 \rightarrow a = -2 \\ x = 2 \xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} 6 + b = 0 \rightarrow b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \xrightarrow{\text{ریشه صورت}} 2a - 6 = 0 \rightarrow a = 3 \\ x = -3 \xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} -9 + b = 0 \rightarrow b = 9 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $a < 0$ است، حالت اول صحیح است. یعنی $a = -2, b = -6$ است، پس $a + b = -8$

تعیین علامت تک سطری

به طور کلی در تعیین علامت عبارت‌های جبری، آن‌ها به شکل حاصل ضرب یا تقسیم تعدادی عبارت درجه اول و درجه دوم هستند. البته ممکن است

بعضی از عبارات درجه اول دارای توان نیز باشند، مثل: $(ax + b)^n$. حال برای تعیین علامت تک سطری آنها، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱- عبارتهای همیشه مثبت را حذف کنید. اگر عبارتی همیشه منفی دارید از آن یک منفی فاکتور بگیرید تا همواره مثبت شود و آن را حذف کنید.

(عبارتهای همیشه مثبت با عبارت‌های درجه دوم با دلتای منفی و ضریب x^2 مثبت یا با رادیکال با فرجه زوج ساخته می‌شوند. در رادیکال‌های با

فرجه زوج حواستان به ریشه و دامنه تابع باشد.)

۲- عبارت‌های درجه دوم با دلتای مثبت را به شکل $k(x-a)(x-b)$ و با دلتای صفر را به شکل $k(x-a)^2$ در می‌آوریم.

۳- قدر مطلق‌ها مثل $|x-a|$ را می‌توانید با $(x-a)$ جایگزین کنید.

اگر بین عبارت‌ها پراتز تکراری دارید، ضرب و تقسیم را بین آن‌ها را انجام دهید. اگر پراتزی در صورت و مخرج مشترک است، آن‌ها را در هم ضرب و

در مخرج یادداشت کنید.

۴- در عبارت‌های رادیکالی به شکل $\sqrt[n]{ax+b}$ اگر n فرد بود، کاملاً رادیکال را حذف کنید. (اگر n زوج باشد هم گفتیم که همیشه مثبت است و می‌توانید

به توجه به دامنه از تعیین علامت حذفش کنید)

- ۵- حال تمام ریشه‌های پرانتزهای صورت و مخرج را در جدول تعیین علامت وارد می‌کنیم.
- ۶- در راست‌ترین ناحیه علامت عبارت جبری را تعیین می‌کنیم. (در این قسمت علامت عبارت جبری همان علامت حاصل ضرب بزرگ‌ترین درجه‌ها در صورت و مخرج است، همچنین عددگذاری هم روش خوبی است)
- ۷- حال به سمت چپ حرکت می‌کنیم. وقتی از ریشه‌های عبارتی عبور کنیم و **توان پرانتز آن فرد** باشد **علامت را عوض می‌کنیم** و اگر **توان پرانتز زوج** باشد، **علامت را عوض نمی‌کنیم**.
- ۸- در ریشه‌های صورت عبارت صفر و در ریشه‌ها مخرج عبارت تعریف نشده است. در ریشه‌های مشترک صورت و مخرج هم عبارت تعریف نشده است.

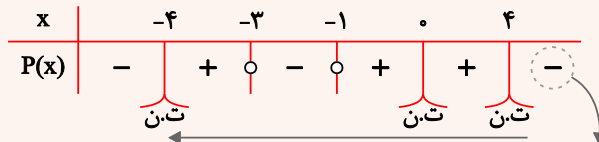
مثال ۱۰ عبارت‌های $P(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{-x^3(x^3 - 16x)}$ و $F(x) = \frac{\sqrt{x+3}(x^2-1)(x^2+5x+6)}{(x^2-x-2)|x-3|\sqrt[3]{x}}$ را به صورت تک سطری تعیین علامت کنید.

پاسخ:

$$P(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{-x^3(x(x^2-16))} = \frac{(x+1)(x+3)}{-x^4(x-4)(x+4)}$$

ریشه‌های صورت و مخرج

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x = 0 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$



برای تعیین علامت در این ناحیه می‌توانید هر عددی بزرگ‌تر از ۴ را مثال بزنید. مثلاً اگر عدد $x = 1000$ را مثال بزنیم، مشخص است که صورت مثبت و مخرج منفی خواهد شد. پس حاصل کسر منفی است. همچنین می‌توانید ضریب بزرگ‌ترین درجه صورت را به ضریب بزرگ‌ترین درجه مخرج تقسیم کنید و علامت آن را بیابید.

پس علامت راست‌ترین ناحیه منفی است.

$$\begin{cases} \text{بزرگترین درجه صورت} \rightarrow x^2 \rightarrow \frac{1}{-1} = -1 \\ \text{بزرگترین درجه مخرج} \rightarrow -x^6 \end{cases}$$

حال به سمت چپ حرکت می‌کنیم. از ریشه هر پرانتز که عبور می‌کنیم، اگر توان آن پرانتز فرد باشد، علامت را عوض می‌کنیم و اگر توان پرانتز زوج باشد، علامت را عوض نمی‌کنیم، تمام پرانتزها توان یک دارند (فرد) به جز x^4 که دارای توان ۴ (زوج) است. بنابراین وقتی از راست به چپ آمده‌ایم همیشه علامت‌ها را عوض کرده‌ایم، جز در عبور از $x=0$ که ریشه x^4 است.

نتیجه: اگر تمام پرانتزها دارای توان فرد بودند، کفایست علامت یکی از نواحی را تعیین کنید و علامت‌ها را یکی در میان عوض کنید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}(x^2-1)(x^2+5x+6)}{(x^2-x-2)|x-3|\sqrt[3]{x}} \rightarrow$$

$\sqrt{x+3}$ همواره مثبت است، حذفش می‌کنیم فقط به دامنه تابع دقت کنید: $x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$

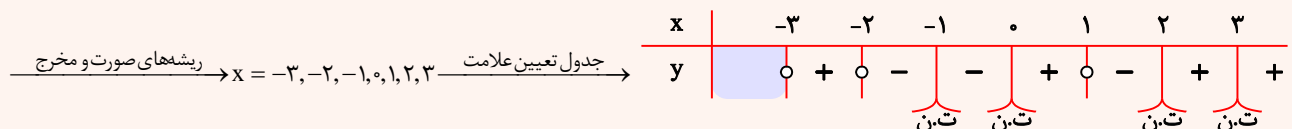
با عبارت $(x-3)^2$ جایگزین کنید. $|x-3| \rightarrow$

رادیکال را حذف می‌کنیم: پس با x جایگزین می‌شود. $\sqrt[3]{x} \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+1)(x-3)^2 \times x}$$

عبارت $(x+1)$ در صورت و مخرج مشترک است آنها را در هم ضرب می‌کنیم و در مخرج یادداشت می‌کنیم

$$y = \frac{(x-1)(x+2)(x+3)}{x(x-2)(x+1)^2(x-3)^2}$$



تذکر دقت کنید که در عبور از $x = -1$ و $x = 3$ علامت را تغییر ندادیم.

تذکر با توجه به دامنه عبارت $\sqrt{x+3}$ ، اعداد قبل از $x = -3$ را هاشور زده ایم.

تست ۲۹ اگر جدول تعیین علامت تابع $f(x) = (x+1)(x^2 + ax + 3)$ به شکل مقابل باشد، مقدار ab^2 کدام است؟

x	b	-1		
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$

(۱) ۴۸
(۲) ۳۶
(۳) -۳۹
(۴) -۴۸

پاسخ: گزینه ۲.

همان طور که می بینید، علامت تابع حوالی $x = -1$ یکسان است. پس تابع دارای عبارت $(x+1)^2$ بوده است. یعنی پرانتز دوم نیز بر $(x+1)$ بخش پذیر است، یا $x = -1$ ریشه آن است.

$$x^2 + ax + 3 \xrightarrow{x=-1} 1 - a + 3 = 0 \rightarrow a = 4$$

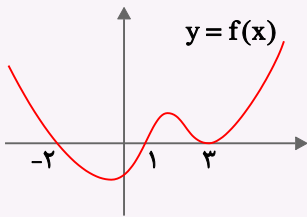
در این صورت عدد b ریشه دیگر پرانتز خواهد بود.

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3) = 0 \xrightarrow{\text{ریشهها}} x = -1, -3 \rightarrow b = -3$$

پس مقدار ab^2 برابر است با:

$$ab^2 = 4(-3)^2 = 36$$

تست ۳۰ ضابطه تابع $y = f(x)$ با نمودار روبه رو کدام گزینه می تواند باشد؟



(۱) $y = (x+3)(x-1)(x-3)$

(۲) $y = (x+2)(x-1)^2(x-3)$

(۳) $y = (x+2)^2(x-1)(x-3)$

(۴) $y = (x+2)(x-1)(x-3)^2$

پاسخ: گزینه ۴.

از روی نمودار معلوم است که تابع حوالی $x = -2$ و $x = 1$ تغییر علامت داده (از محور x عبور کرده است) ولی در $x = 3$ تغییر علامت نداده است (بر محور x مماس شده و بازگشته است) پس باید دارای پرانتزهای $(x-1), (x+2)$ با توان فرد و پرانتز $(x-3)$ با توان زوج باشد. فقط گزینه ۴ دارای این ویژگی است.

تست ۳۱ اگر جدول تعیین علامت عبارت $A(x) = \frac{x^2 + bx + 4}{x^2 - \Delta x + a}$ به صورت مقابل باشد، مقدار $abcd$ کدام می تواند باشد؟

x	c	d		
$A(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$

(۱) -۷۰
(۲) -۱۰۰
(۳) -۱۴۴
(۴) -۱۲۵

پاسخ: گزینه ۴.

در تعیین علامت تک سطری تمام ریشه های صورت و مخرج را ذکر می کنیم، پس یکی از حالت های زیر رخ داده است:

I صورت ۲ ریشه داشته و مخرج ریشه نداشته است. در این صورت مخرج دارای Δ منفی، پس همواره مثبت است. بنابراین فقط صورت را تعیین علامت می کنیم که به صورت زیر است:

پس این حالت امکان ندارد.

x				
$A(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

II صورت ریشه ندارد و مخرج ۲ ریشه دارد که با استدلال حالت I این حالت هم امکان ندارد.

III صورت و مخرج دو ریشه مشترک دارند، پس:

$$x^2 + bx + 4 = x^2 - 5x + a \rightarrow b = -5, a = 4$$

و عبارت به صورت زیر درمی آید:

$$A(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} x & & & \\ \hline A(x) & + & + & + \\ & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ & \text{ت.ن} & \text{ت.ن} & \end{array}$$

$$\rightarrow c = 1, d = 4 \rightarrow abcd = -4$$

IV صورت و مخرج هر کدام یک ریشه مضاعف دارند، که در این صورت نیز جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

$$x^2 + bx + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow b^2 - 16 = 0 \rightarrow b = \pm 4 \xrightarrow{\text{صورت}} (x \pm 2)^2 = 0$$

$$x^2 - 5x + a = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow 25 - 4a = 0 \rightarrow a = \frac{25}{4} \xrightarrow{\text{مخرج}} (x - \frac{5}{2})^2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & & \\ \hline A(x) & + & + & + \\ & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ & \text{ت.ن} & \text{ت.ن} & \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & + & + & + \\ & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ & \text{ت.ن} & \text{ت.ن} & \end{array}$$

$$\rightarrow c = \pm 2, d = \frac{5}{2} \rightarrow abcd = -125$$

قوانین نامساوی ها

$$a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$$

1) دو طرف نامساوی را می توانیم با یک عدد ثابت جمع و یا تفریق کنیم:

$$a < b, c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$$

2) دو طرف نامساوی را می توانیم در یک عدد مثبت ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم:

3) دو طرف نامساوی را می توانیم در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم کنیم، فقط جهت نامساوی عوض می شود:

$$a < b, c < 0 \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$$

4) در صورتی که a و b هم علامت باشند و دو طرف را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض می شود و در غیر این صورت جهت نامساوی عوض نمی شود:

$$ab > 0, a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$ab < 0, a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a < b, n \Rightarrow a^n < b^n \text{ و } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

5) اگر n عددی طبیعی و فرد باشد داریم:

یعنی یک نامساوی را می توان به توان یک عدد فرد رساند یا از آن رادیکال با فرجه فرد گرفت.

6) اگر n عدد طبیعی و زوج باشد داریم:

$$0 < a < b, n \Rightarrow a^n < b^n \text{ و } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

$$b < a < 0, n \Rightarrow a^n < b^n$$

یعنی یک نامساوی را می توان به توان یک عدد زوج رساند. در این صورت اگر هر دو مثبت باشند علامت عوض نمی شود و اگر هر دو منفی باشند

علامت عوض می شود. همچنین اگر دو طرف نامساوی مختلف علامت باشند، دهانه نامساوی و به سمتی خواهد بود که اندازه بزرگتری دارد.

تست ۳۲ = اگر $0 < a < b$ کدام گزینه نادرست است؟

(۴) $a^2 < b^2$

(۳) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(۲) $a^2 > b^3$

(۱) $a^3 < b^3$

پاسخ: گزینه ۱.

(نادرستی گزینه ۱) $a > b \rightarrow a^3 > b^3$

(درستی گزینه ۲) $a^2 > b^3$ پس $b^3 < 0$ است، a^2 مثبت است و

(درستی گزینه ۳) $b < a \xrightarrow{ab > 0} \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

(درستی گزینه ۴) $b < a < 0 \xrightarrow{|b| > |a|} b^2 > a^2$

نامعادلات خطی

نامعادلات خطی شامل عبارت‌های درجه اول است. این نامعادلات با استفاده از قوانین نامساوی‌ها به راحتی حل می‌شوند.

مثال ۱۱ + مجموعه جواب نامعادله $3 \leq 2x - 4 < 5$ را بیابید.

پاسخ: طرفین معادله را منهای ۴ می‌کنیم:

$$-9 < -2x \leq -1$$

حال طرفین نامعادله را بر (-۲) تقسیم می‌کنیم چون بر عددی منفی تقسیم می‌کنیم، علامت‌ها می‌چرخند:

$$\frac{9}{2} > x \geq \frac{1}{2}$$

پس مجموع جواب نامعادله $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ است.

(کتاب درسی)

تست ۳۳ = مجموعه جواب نامعادله $3 < 2x - x + 1 \leq 5$ به صورت $(a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{3}$

(۳) $\frac{5}{3}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱.

نامعادله‌های $3 < 2x + 3 < 5 - x$ و $5 - x < 2x + 3$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x + 1 \leq 5 - x \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq 2$$

$$5 - x < 2x + 3 \rightarrow 3x > 2 \rightarrow x > \frac{2}{3}$$

اشتراک موارد بالا بازه $(\frac{2}{3}, 2]$ است.

$$\rightarrow b - a = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

نامعادلات درجه دوم ساده

ساده‌ترین نامعادلات درجه دوم به یکی از دو شکل زیر هستند:

$$x^2 \leq a^2 \xrightarrow{a > 0} -a \leq x \leq a$$

$$x^2 \geq a^2 \xrightarrow{a > 0} x \geq a \vee x \leq -a$$

مثال ۱۲ مجموعه نامعادله $3 < \frac{1}{x^2} - 1 < 12$ را بیابید.

$$4 < \frac{1}{x^2} < 13$$

پاسخ: طرفین نامعادله را با ۱ جمع می‌کنیم:

چون طرفین نامساوی هم علامت هستند، با معکوس کردن طرفین علامت‌ها برمی‌گردد:

$$\rightarrow \frac{1}{4} > x^2 > \frac{1}{13} \rightarrow \begin{cases} x^2 < \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ x^2 > \frac{1}{13} \rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{13}} \text{ یا } x < -\frac{1}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

پس اشتراک موارد بالا به شکل بازه‌های $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{13}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{2})$ است.

تست ۳۵ مجموعه جواب نامعادله $x^2 < a$ شامل ۱۳ عدد صحیح است. در این صورت a چند مقدار طبیعی ممکن است داشته باشد؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳.

$$x^2 < a \rightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a} \xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} -6, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 6$$

پس \sqrt{a} باید عددی بزرگ‌تر از ۶ و کوچک‌تر یا مساوی ۷ باشد:

$$6 < \sqrt{a} \leq 7 \rightarrow 36 < a \leq 49 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} 37, 38, \dots, 49 \xrightarrow{\text{تعداد}} 49 - 37 + 1 = 13$$

نامعادلات گویا

برای حل نامعادلات گویا معمولاً تمامی عبارت‌ها را یک طرف می‌بریم و پس از ساده کرده به عبارتی به شکل $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ می‌رسیم. در این

صورت با تعیین علامت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ جواب نامعادله را به دست می‌آوریم. کلاً یادتان باشد که **نامعادله باید شما را یاد تعیین علامت بیندازد**. حواستان باشد

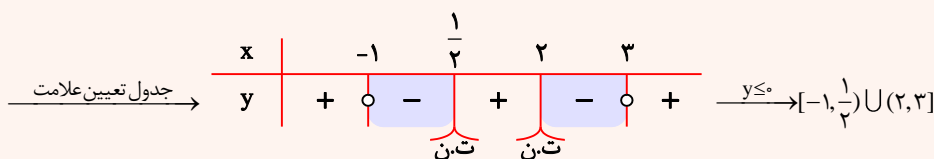
که نباید در نامعادله‌ها طرفین وسطین بکنید، مگر اینکه علامت مخرج‌ها را بدانید.

مثال ۱۳ نامعادله $\frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$ را حل کنید.

پاسخ: همه عبارت‌ها را به یک طرف نامساوی می‌بریم:

$$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{1}{x-2} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+2)(x-2) - (2x-1)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 4 - 2x + 1}{(2x-1)(x-2)} \leq 0 \rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(2x-1)(x-2)} \leq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌های صورت و مخرج}} x = -1, \frac{1}{2}, 2, 3$$



تذکر دقت کنید که چون توان همه پранترها فرد بود، علامت را یکی در میان عوض کردیم.

تست ۳۶: جواب نامعادله $\frac{x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x + 1} > x - 1$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-2, 2]$ (۲) $\mathbb{R} - (-2, 2)$ (۳) $[-2, 2]$ (۴) $(-2, 2)$

پاسخ: گزینه ۱؛ همه عبارت‌ها را به یک سمت می‌بریم:

$$\frac{x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x + 1} - (x - 1) > 0 \rightarrow \frac{x^3 + x^2 - 5 - (x - 1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} > 0$$

مخرج همواره مثبت است چون $a > 0, \Delta < 0$ $\rightarrow \frac{x^3 + x^2 - 5 - (x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1)}{x^2 + x + 1} > 0 \rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 + x + 1} > 0$

$$\rightarrow x^2 - 4 > 0 \rightarrow x^2 > 4 \rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2$$

تذکر: در این سؤال می‌توانستید طرفین وسطین هم بکنید. (چرا؟)

راه تستی: وقتی در گزینه‌ها، مجموع جواب نامعادله داده شود، عددگذاری روش بدر بخوری است:

گزینه ۳ و ۴ غلط هستند $\rightarrow -1 > -5 \rightarrow x = 0$ (غ)

گزینه ۲ غلط است $\rightarrow 1 > 1 \rightarrow x = 2$ (غ)

تجربی خارج ۹۸

تست ۳۷: مجموعه جواب نامعادله $\frac{\sqrt{x} - 8}{x^2 - x - 2} > \frac{x}{x - 2}$ به صورت بازه کدام است؟

- (۱) $(-4, 2) \cup (2, 1)$ (۲) $(2, 4)$ (۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$ (۴) $(-1, 2)$

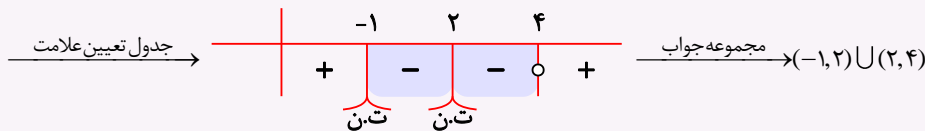
پاسخ: گزینه ۳؛ همه عبارت‌ها را به یک طرف نامساوی می‌بریم:

$$\frac{\sqrt{x} - 8}{x^2 - x - 2} - \frac{x}{x - 2} > 0 \rightarrow \frac{\sqrt{x} - 8}{(x - 2)(x + 1)} - \frac{x}{x - 2} > 0$$

مخرج مشترک $\rightarrow \frac{\sqrt{x} - 8 - x(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} > 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{(x - 2)(x + 1)} > 0$ دو طرف را قریبه می‌کنیم و علامت را برمی‌گردانیم $\rightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 2)(x + 1)} < 0$

در صورت و مخرج مشترک است پس آن‌ها را در هم ضرب و در مخرج یادداشت می‌کنیم $\rightarrow \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 2)(x + 1)} < 0$

ریشه‌های صورت و مخرج $\rightarrow x = 4, 2, -1$



راه تستی: عددگذاری:

گزینه ۲ غلط است $\rightarrow 4 > 0 \rightarrow x = 0$ (ص)

گزینه ۴ غلط است $\rightarrow \frac{13}{4} > 3 \rightarrow x = 3$ (ص)

گزینه «۱» هم که خودش غلط است!

تجربی داخل ۹۸

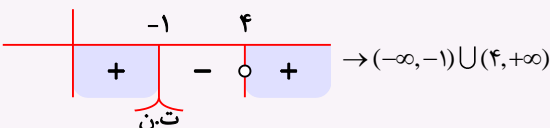
تست ۳۸: مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{2x - 3}{x + 1} < 3$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-6, 4]$ (۲) $\mathbb{R} - [-4, 6]$ (۳) $x > 4$ (۴) $x < -6$

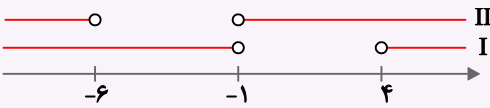
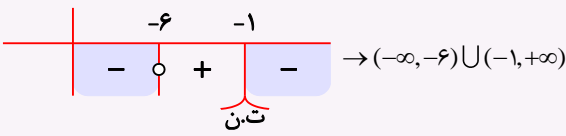
پاسخ: گزینه ۱

راه حل ۱: دو نامعادله $1 < \frac{2x - 3}{x + 1}$ و $\frac{2x - 3}{x + 1} < 3$ را جداگانه حل می‌کنیم و سپس بین مجموعه جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$1 < \frac{2x - 3}{x + 1} \rightarrow \frac{2x - 3}{x + 1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{2x - 3 - x - 1}{x + 1} > 0 \rightarrow \frac{x - 4}{x + 1} > 0$$



$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \rightarrow \frac{2x-3-3x-3}{x+1} < 0 \rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$$



$$-1 < \frac{2x-3}{x+1} - 2 < 1 \rightarrow -1 < \frac{2x-3-2x-2}{x+1} < 1 \rightarrow -1 < \frac{-5}{x+1} < 1$$

$$\frac{25}{(x+1)^2} < 1 \xrightarrow{x \neq -1} (x+1)^2 > 25$$

دقت کنید که چون $(x+1)^2$ مثبت است، می‌توانیم طرفین نامعادله را در آن ضرب کنیم.

$$\rightarrow x+1 > 5 \text{ یا } x+1 < -5 \rightarrow x > 4 \text{ یا } x < -6$$

با اشتراک بین دو مجموعه به دست آمده به $(-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$ می‌رسیم.

تذکر اشتراک دو مجموعه جواب را ببینید:

راه حل ۲ اگر از طرفین نامعادله ۲ واحد کم کنیم، داریم:

این نامعادله را می‌توانیم به شکل $1 < \left(\frac{-5}{x+1}\right)^2$ بنویسیم:

تذکر دقت کنید که چون $(x+1)^2$ مثبت است، می‌توانیم طرفین نامعادله را در آن ضرب کنیم.

دقت کنید شرط $x \neq -1$ نیز در مجموعه جواب برقرار است.

راه تستی عددگذاری:

$$x = 5 \rightarrow 1 < \frac{7}{6} < 3 \text{ (ص) } \rightarrow \text{گزینه‌های ۲ و ۴ غلط هستند}$$

$$x = -7 \rightarrow 1 < \frac{17}{6} < 3 \text{ (ص) } \rightarrow \text{گزینه‌های ۳ غلط است}$$

(تجربی دافل ۹۹)

تست ۳۹ مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ کدام است؟

(۰/۸, ۲) (۴)

(۱, ۲) (۳)

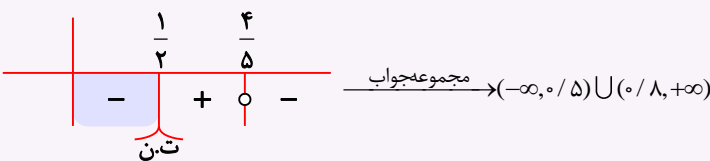
(۰/۸, ۱/۲) (۲)

(۰/۶, ۱/۵) (۱)

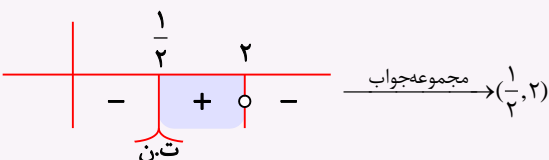
پاسخ: گزینه ۴.

هر دو نامعادله $1 < \frac{x+1}{2x-1}$ و $\frac{x+1}{2x-1} < 3$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$$



$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$$



اشتراک موارد بالا بازه (۰/۸, ۲) است.

تذکر سعی کنید این تست را مشابه راه حل دوم تست قبل هم حل کنید.

$$x = 1 \rightarrow 1 < 2 < 3 \text{ (ص) } \rightarrow \text{گزینه ۳ غلط است}$$

$$x = 1/5 \rightarrow 1 < 1/25 < 3 \text{ (ص) } \rightarrow \text{گزینه‌های ۱ و ۲ غلط هستند}$$

راه تستی عددگذاری:

تست ۴۰

اگر مجموعه جواب نامعادله $(x^3 + 8) \left(\frac{x^2 + ax + 3}{x+2} \right) \geq 0$ به شکل $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، a چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۳.

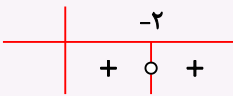
با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(x+2)(x^2-2x+4) \times \left(\frac{x^2+ax+3}{x+2} \right) \geq 0 \rightarrow \frac{(x-2x+4)(x^2+ax+3)}{(x+2)^2} \geq 0$$

عبارت (x^2-2x+4) دارای دلتای منفی و $a > 0$ است. پس همواره مثبت است و از تعیین علامت حذف می شود.

$$\rightarrow \frac{x^2+ax+3}{(x+2)^2} \geq 0$$

با توجه به صورت سؤال جدول تعیین علامت این عبارت به شکل روبه رو است:



پس صورت این عبارت ریشه ای ندارد ($\Delta < 0$) و همواره مثبت است:

$$\Delta < 0 \rightarrow a^2 - 4(1)(3) < 0 \rightarrow a^2 < 12 \rightarrow -\sqrt{12} < a < \sqrt{12} \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

تست ۴۱

فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x-3} > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ ، بازه $[2, 4]$ باشد.

(ریاضی دافل ۱۴۰۰)

مقدار m ، کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲.

اولاً دقت کنید که با شرط $x > \frac{3}{2}$ عبارت $2x-3$ در مخرج همواره مثبت خواهد بود و در تعیین علامت نقشی ندارد. پس عملاً باید نامعادله زیر را حل کنیم:

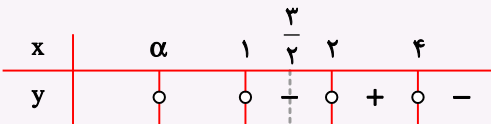
$$((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2) > 0 \rightarrow ((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) > 0 \rightarrow$$

$$\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x-1)(x-4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} > 0$$

مخرج همواره مثبت است

$$\rightarrow ((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x-1)(x-4) > 0$$

ریشه عبارت های $(x-1)$ و $(x-4)$ به ترتیب ۱ و ۴ هستند. با توجه به مجموعه جواب داده شده باید α و $x=2$ هم ریشه های عبارت دیگر باشند. در این صورت با توجه به صورت سؤال جدول تعیین علامت تابع باید به شکل مقابل باشد:



پس $x=2$ ریشه عبارت دیگر است و ریشه دیگر کوچک تر از $\frac{3}{2}$ است. همچنین ضریب بزرگترین درجه صورت منفی است. پس $m^2-1 < 0$ است. ضریب بزرگترین درجه مخرج

$$(m^2-1)x^2 - 4mx + 4 = 0 \xrightarrow{x=2} 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \rightarrow 4m^2 - 8m = 0 \rightarrow 4m(m-2) = 0 \rightarrow m = 0, 2$$

ریشه دیگر $x = -2$ است که از $\frac{3}{2}$ کوچکتر است.

$$\rightarrow \begin{cases} m=0 \rightarrow m^2-1=-1 < 0 \rightarrow -x^2+4=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow \\ m=2 \rightarrow m^2-1=3 > 0 \end{cases}$$

روش هندسی در حل معادلات و نامعادلات

در حل معادلاتی به شکل $f(x) = g(x)$ می‌توان هر دو تابع را در یک دستگاه رسم کرد و نقاط برخورد را پیدا کرد. این روش بخصوص در حالتی که تعداد جواب‌های معادله مورد سؤال قرار می‌گیرد، بسیار کاربردی است. همچنین اگر توابع دو طرف تساوی از انواع مختلفی باشد مثلاً اگر یک طرف تساوی تابع چندجمله‌ای و طرف دیگر مثلثاتی باشد.

همچنین در حل نامعادلات به شکل $f(x) \leq g(x)$ هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که در چه محدوده‌ای تابع $f(x)$ پایین‌تر (یا مساوی) تابع $g(x)$ قرار دارد.

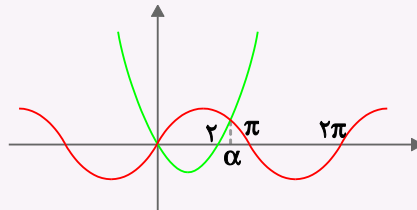
تست ۴۲ = معادله $\frac{\sin x}{x} = x - 2$ چند جواب دارد؟

- ۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳
- پاسخ: گزینه ۲.

$$\sin x = x^2 - 2x$$

با طرفین وسطین تساوی داریم:

هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



تذکره! دقت کنید که تابع $x^2 - 2x$ سهمی با ریشه‌های ۰ و ۲ و با دهانه رو به بالاست.

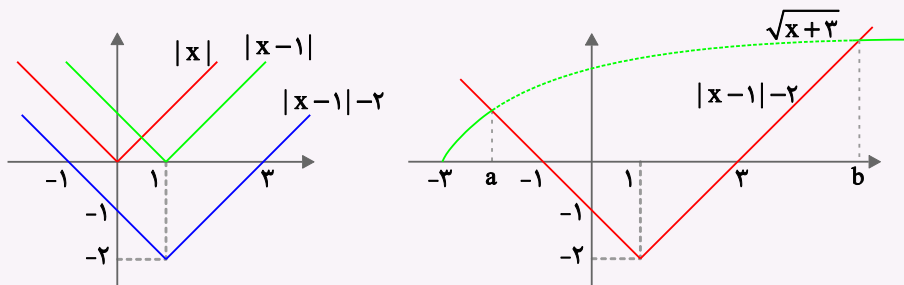
معلوم است که دو تابع در دو نقطه به طول‌های α و π متقاطع‌اند ولی $x=0$ را نمی‌پذیریم چون مخرج کسر $\frac{\sin x}{x}$ را صفر می‌کند. پس این معادله فقط یک جواب دارد.

تست ۴۳ = در بازه (a, b) نمودار تابع $y = \sqrt{x+3}$ بالای نمودار تابع $f(x) = |x-1| - 2$ قرار دارد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۴)

- ۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹
- پاسخ: گزینه ۳؛ با رسم هر دو تابع در یک دستگاه داریم:

معلوم است که تابع $\sqrt{x+3}$ در بازه (a, b) بالاتر از تابع $|x-1| - 2$ قرار دارد. پس کفایت نقاط a و b را بیابیم. ضابطه شاخه راستی تابع $|x-1| - 2$ به شکل $(x-1) - 2$ و شاخه چپ به شکل $(1-x) - 2$ است.



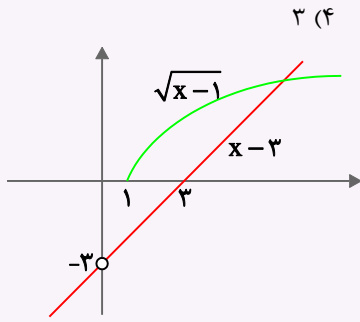
$$x - 3 = \sqrt{x+3} \rightarrow x^2 - 6x + 9 = x + 3 \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \xrightarrow{x > 1} b = 6$$

$$-x - 1 = \sqrt{x+3} \rightarrow x^2 + 2x + 1 = x + 3 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \xrightarrow{x < 1} a = -2$$

بنابراین $b - a = 8$ است.

(سه ۲ ۱۳۰۰)

معادله $x\sqrt{x-1} = x^2 - 3x$ چند ریشه دارد؟ **تست ۴۴**



- ۱ (۲) صفر (۱)
 ۲ (۳) پاسخ: گزینه ۲؛

$$\sqrt{x-1} = \frac{x^2 - 3x}{x} \rightarrow \sqrt{x-1} = x-3 \quad (x \neq 0)$$

حال هر دو تابع $\sqrt{x-1}$ و $x-3$ را رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تقاطع را می‌یابیم: معلوم است که این دو تابع یک نقطه تقاطع دارند.

(سه ۲ ۱۳۰۱)

معادله $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2 - \sqrt{x-1}$ چند جواب دارد؟ **تست ۴۵**

- ۱ (۱) پاسخ: گزینه ۱.
 ۲ (۲) تابع $y = x^2 - 2x + 5$ دارای برد $[4, +\infty)$ است، پس $\sqrt{x^2 - 2x + 5} \geq 2$
 ۳ (۳) دقت کنید که برد تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ با فرض $a > 0$ به صورت $R_f = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ است.
 ۴ (۴) همچنین:

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0 \rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \leq 2$$

پس سمت چپ تساوی کوچکتر یا مساوی ۲ است. بنابراین تساوی به شرطی برقرار است که هر دو طرف تساوی برابر با ۲ باشند:

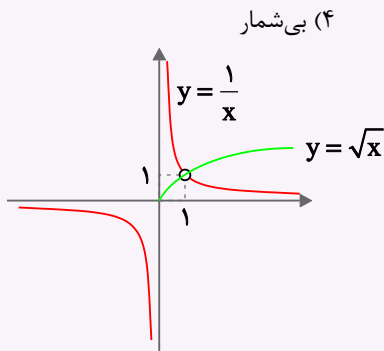
$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 5 = 4 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$2 - \sqrt{x-1} = 2 \rightarrow \sqrt{x-1} = 0 \rightarrow x = 1$$

پس $x = 1$ تنها ریشه این معادله است.

(سه ۲ ۱۳۰۲)

تعداد جواب‌های معادله $\frac{x-1}{x^2-x} = \sqrt{x}$ چندتا است؟ **تست ۴۶**

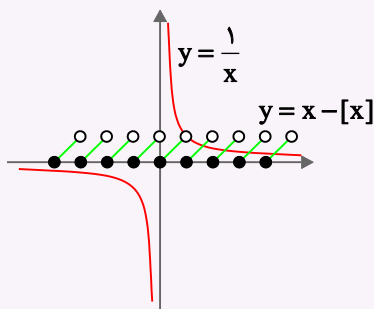


$$\frac{x-1}{x^2-x} = \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 1$$

حال هر دو تابع دو طرف تساوی را رسم می‌کنیم: همان‌طور که واضح است، توابع رسم شده نقطه تقاطعی ندارند.

معادله $x - [x] = \frac{1}{x}$ در بازه $(-100, 100)$ چند جواب دارد؟ **تست ۴۷**

- ۱ (۱) پاسخ: گزینه ۱.
 ۲ (۲) توابع $y = x - [x]$ و $y = \frac{1}{x}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:
 ۳ (۳) تمام شاخه‌های بازه‌های $(1, 100)$ یعنی ۹۹ شاخه از تابع $y = x - [x]$ را قطع می‌کند.
 ۴ (۴) ۹۸



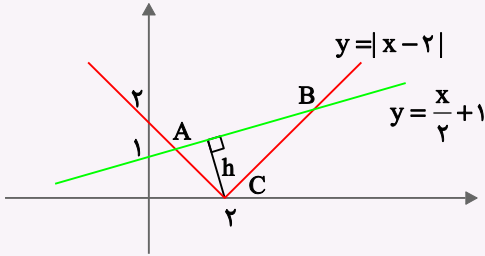
مساحت ناحیه محصور به دو تابع $f(x) = |x-2|$ و $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ کدام است؟ **تست ۴۸**

- ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$

پاسخ: گزینه ۴.

هر دو تابع $y = |x-2|$ و $y = \frac{x}{2} + 1$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

تذکر تابع $y = |x-2|$ را از انتقال ۲ واحدی تابع $y = |x|$ به سمت راست، رسم می‌کنیم.



تقاطع دو تابع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \\ y = |x-2| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 = x - 2 \rightarrow \frac{x}{2} = 3 \rightarrow x = 6 \rightarrow A(6, 4) \\ \frac{x}{2} + 1 = 2 - x \rightarrow \frac{3x}{2} = 1 \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow B(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \end{cases}$$

قاعده مثلث همان ضلع AB است:

$$AB = \sqrt{(6 - \frac{2}{3})^2 + (4 - \frac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{256}{9} + \frac{64}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{5}$$

ارتفاع مثلث همان فاصله نقطه $(2, 0)$ از خط $y = \frac{x}{2} + 1$ است:

$$2y = x + 2 \rightarrow 2y - x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{فاصله}} CH = \frac{|0 - 2 - 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \rightarrow S = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{\frac{8}{3}\sqrt{5} \times \frac{4}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{16}{3}$$

معادله $\log_{\pi} x = |\cos x|$ چند جواب دارد؟ **تست ۴۹**

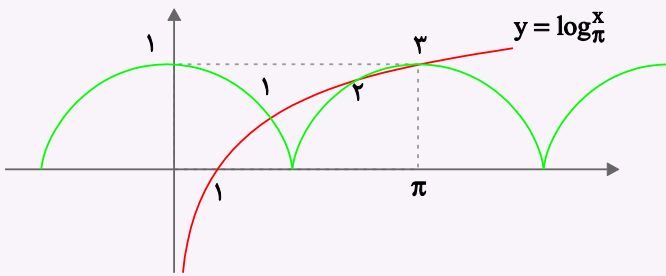
- ۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲.

هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

تذکر برای رسم تابع $y = |\cos x|$ ابتدا تابع $y = \cos x$

را رسم و سپس بخش‌هایی که پایین محور x قرار دارند را نسبت به محور x قرینه کرده‌ایم. مشخص است که توابع ۳ نقطه تقاطع دارند.



جمع‌بندی

❖ معادلات گویا

✓ معادلاتی که شامل عبارت گویا (چند جمله‌ای) باشند.

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \text{روش حل} \left\{ \begin{aligned} & g(x) \neq 0, f(x) = 0 \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ & \text{روش حل} \left\{ \begin{aligned} & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{i(x)} \end{aligned} \right. \\ & \leftarrow \text{طرفین وسطین و بررسی این‌که ریشه‌ها مخرج‌ها را صفر نکنند.} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \text{مدل کلی: } \checkmark$$

❖ مستطیل طلایی

✓ مستطیلی که رابطه $\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{\text{طول} + \text{عرض}}{\text{طول}}$ در آن برقرار باشند.

✓ (عدد طلایی) $\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

❖ مسائل کاربردی:

✓ انجام دادن کار $\left. \begin{array}{l} t_A : \text{شخص A به تنهایی} \\ t_B : \text{شخص B به تنهایی} \\ t_C : \text{A و B باهم} \end{array} \right\} \frac{1}{t_C} = \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B}$

✓ سرعت ← $\frac{\text{جا بجایی}}{\text{زمان}} = \text{سرعت}$

✓ غلظت ← $\frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} = \text{غلظت}$

❖ معادلات گنگ (رادیکالی)

✓ معادلاتی که شامل عبارات گنگ باشد.

✓ **مدل کلی:** $f(x) = \sqrt{g(x)}$ ← روش حل $f^2(x) = g(x)$ حل معادله و بررسی صدق کردن ریشه‌ها

✓ اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر باشند، همگی آنها صفر هستند.

✓ در معادلات پیچیده به دامنه‌ها دقت کنید.

❖ تعیین علامت

درجه اول: $y = ax + b$ ($a \neq 0$) همواره یک ریشه دارند و تعیین علامت آنها به صورت زیر است:

x	$\frac{-b}{a}$
y	موافق a مخالف a

x	x_1	x_2	
y	موافق a	مخالف a	موافق a

$\Delta > 0$ (۱)

x	x_1	
y	موافق a	موافق a

$\Delta = 0$ (۲)

x	
y	موافق a

$\Delta < 0$ (۳)

درجه دوم: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) شامل:

☆ نکته تابع درجه دوم:

همواره مثبت: $\Delta < 0, a > 0$

همواره منفی: $\Delta < 0, a < 0$

❖ قوانین نامساوی‌ها

✓ جمع عدد با نامساوی $a < b \rightarrow a + c < b + c$

✓ ضرب عدد در نامساوی $\left\{ \begin{array}{l} a < b \xrightarrow{c > 0} ac < bc \\ a < b \xrightarrow{c < 0} ac > bc \end{array} \right.$

تست ۵۲

مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ کدام است؟

(ریاضی دافل ۱۴۰۲ نوبت اول)

- (۱) ۱ (۲) ۱/۷۵ (۳) ۲ (۴) ۲/۲۵

پاسخ: گزینه ۳.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9} \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 + x^2}{(x^2 - x)^2} = \frac{16}{9} \rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2} = \frac{16}{9} \rightarrow \frac{2(x^2 - x) + 1}{(x^2 - x)^2} = \frac{16}{9} \rightarrow \frac{x^2 - x = t}{t^2} \rightarrow \frac{2t + 1}{t^2} = \frac{16}{9}$$

$$16 \cdot t^2 = 18t + 9 \rightarrow 16 \cdot t^2 - 18t - 9 = 0 \rightarrow \Delta = 324 - 4(16)(-9) = 6084$$

$$t = \frac{18 \pm \sqrt{6084}}{32} = -\frac{3}{16}, \frac{3}{10} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x = -\frac{3}{16} \rightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \\ x^2 - x = \frac{3}{10} \rightarrow x^2 - x - \frac{3}{10} = 0 \end{cases}$$

هر دو معادله دارای دلتای مثبت هستند. در هر دو معادله مجموع ریشه‌ها $S=1$ است، پس مجموع ریشه‌ها ۲ است.

تست ۵۳

معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

(تجربی دافل ۱۴۰۱)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲.

$$\frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{x+1}}{(3+\sqrt{x-1})(3-\sqrt{x-1})} \rightarrow \frac{-2\sqrt{x^2-1}}{9-(x-1)} = \sqrt{x-1} \xrightarrow{x \neq 1} \frac{-2\sqrt{x+1}}{10-x} = 1$$

$$x-10 = 2\sqrt{x+1} \rightarrow x^2 - 20x + 100 = 4x + 4 \rightarrow x^2 - 24x + 96 = 0 \rightarrow \Delta = 576 - 4 \times 1 \times 96 = 92 \rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{92}}{2} = 12 \pm \sqrt{23}$$

چون باید $x-10 \geq 0$ باشد، ریشه $12 - \sqrt{23}$ قابل قبول نیست، پس معادله فقط یک ریشه $12 + \sqrt{23}$ را دارد که مثبت است.

تست ۵۴

نمودار تابع $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y = 0$ و $y = -2$ واقع می‌شود؟ (ریاضی دافل ۱۴۰۲ نوبت اول)

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴.

یعنی $0 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} < -2$ است. هر دو نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} < 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} 1 < x < 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} \emptyset$$

تا همین جا هم مشخص است که گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} + 2 > 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 6x + 6}{x^2 - 3x + 2} > 0$$

صورت کسر دارای دلتای منفی و همواره مثبت است، پس کفایت منجر منفی باشد.

که در قسمت بالایی حل کردیم. پس مجموعه جواب همان (۱, ۲) است که شامل عدد صحیح نیست.