آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

موج آزمون ریاضی

ویراست چهارم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

رشته تجربی

نشر الگو

مجموعه کتاب‌های موج‌آزمون ویژهٔ رشتهٔ تجربی نشر الگو:

- موج آزمون شیمی پایه
- موج آزمون ریاضی (رشتهٔ تجربی)
- موج آزمون شیمی دوازدهم + آزمون‌های جامع
- موج آزمون جامع فیزیک (رشتهٔ تجربی)
- موج آزمون جامع زیست‌شناسی (نسل جدید)
- الگوی کنکور دروس اختصاصی (رشتهٔ تجربی)

- ۲۲۷ آزمون مبحثی و جامع از کتاب‌های ریاضی۱ ، ریاضی۲ و ریاضی۳
- آزمون‌های جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همهٔ آزمون‌ها
- کتابی کامل و جامع برای مرور مطالب ریاضی
- در کل شامل ۲۶۵۰ تست با پاسخ تشریحی

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi (رشتهٔ ریاضی)

https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi (رشتهٔ تجربی)

نشر الگو
www.olgoobooks.ir

پیشگفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاست. از این‌رو، رویکرد آموزشی بسیاری از معلمان، به‌ویژه در سال‌های پایانی دورهٔ متوسطه، تدریس مطالب درسی بر پایهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای است. به همین دلیل، هر چند بعید است شما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از مواجهه با پرسش‌های چهارگزینه‌ای نیست!

کتاب‌های **موج‌آزمون** ویژهٔ آمادگی برای کنکور است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های ریاضی ۱ سال دهم، ریاضی ۲ سال یازدهم و ریاضی ۳ سال دوازدهم است. این کتاب پنج بخش دارد. عنوان بخش اول «آزمون‌های دست‌گرمی» است. آزمون‌های این بخش برای اینکه از میزان آمادگی خودتان آگاه شوید، مناسب‌اند. طبیعتاً پرسش‌های این بخش ساده‌ترند. اگر فکر می‌کنید آمادگی لازم را دارید، می‌توانید از حل پرسش‌های این بخش صرف‌نظر کنید و به سراغ بخش دوم بروید.

عنوان بخش دوم «آزمون‌های موضوعی» است، که شامل آزمون‌های متنوع برای هر مبحث است. عمدهٔ تغییرات این ویراست نسبت به ویراست قبلی در همین بخش است. آزمون‌های این بخش را متناسب با کنکورها و آزمون‌های آزمایشی سال‌های اخیر تنظیم کرده‌ایم، پس طبیعی است که در این بخش با پرسش‌های جدیدتر و دشوارتری مواجه شوید. مهم‌ترین بخش برای یادگیری، پیشرفت و کسب مهارت لازم در مسیر موفقیت شما این بخش است. از این بخش می‌توانید در طول سال تحصیلی استفاده کنید.

عنوان بخش سوم «آزمون‌های فصلی» است که آزمون‌های آن برای جمع‌بندی و تثبیت یادگیری مهم‌اند. این بخش مناسب دوران جمع‌بندی است. در بخش چهارم که «آزمون‌های جامع تألیفی» نام دارد، آزمون‌هایی جامع و تألیفی آورده‌ایم که کنکورهای سراسری را شبیه‌سازی می‌کنند. در بخش پنجم «آزمون‌های کنکور» سال‌های اخیر را آورده‌ایم. از دو بخش اخیر می‌توانید برای جمع‌بندی استفاده کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم عاطفه ربیعی، دکتر ابوالفضل علی‌بمانی و دکتر آریس آقانیانس برای ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب، آقای سامان شاهین‌پور و خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

بخش اول: آزمون‌های دست‌گرمی

آزمون ۱: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی ۲
آزمون ۲: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم ۳
آزمون ۳: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۱) ۴
آزمون ۴: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۲) ۵
آزمون ۵: قدرمطلق و جزء صحیح (۱) ۶
آزمون ۶: قدرمطلق و جزء صحیح (۲) ۷
آزمون ۷: توابع نمایی و لگاریتمی (۱) ۸
آزمون ۸: توابع نمایی و لگاریتمی (۲) ۹
آزمون ۹: تابع (۱) ۱۰
آزمون ۱۰: تابع (۲) ۱۱
آزمون ۱۱: تابع (۳) ۱۲
آزمون ۱۲: مثلثات (۱) ۱۳
آزمون ۱۳: مثلثات (۲) ۱۴
آزمون ۱۴: حد و پیوستگی (۱) ۱۵
آزمون ۱۵: حد و پیوستگی (۲) ۱۶
آزمون ۱۶: حد و پیوستگی (۳) ۱۷
آزمون ۱۷: مشتق (۱) ۱۹
آزمون ۱۸: مشتق (۲) ۲۰
آزمون ۱۹: کاربردهای مشتق (۱) ۲۱
آزمون ۲۰: کاربردهای مشتق (۲) ۲۲
آزمون ۲۱: هندسهٔ تحلیلی (۱) ۲۳
آزمون ۲۲: هندسهٔ تحلیلی (۲) ۲۴
آزمون ۲۳: استدلال و هندسه ۲۵
آزمون ۲۴: آمار و احتمال (۱) ۲۷
آزمون ۲۵: آمار و احتمال (۲) ۲۸
آزمون ۲۶: آمار و احتمال (۳) ۲۹

بخش دوم: آزمون‌های موضوعی

بازه و مجموعه

آزمون ۲۷: بازه ۳۲
آزمون ۲۸: مجموعه ۳۳

الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی

آزمون ۲۹: الگو و دنباله ۳۴
آزمون ۳۰: دنبالهٔ حسابی (۱) ۳۵
آزمون ۳۱: دنبالهٔ حسابی (۲) ۳۶
آزمون ۳۲: دنبالهٔ هندسی (۱) ۳۷
آزمون ۳۳: دنبالهٔ هندسی (۲) ۳۸
آزمون ۳۴: دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی ۳۹

توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

آزمون ۳۵: توان و ریشه ۴۰
آزمون ۳۶: اتحاد (۱) ۴۱
آزمون ۳۷: اتحاد (۲) ۴۲
آزمون ۳۸: تجزیه (۱) ۴۳
آزمون ۳۹: تجزیه (۲) ۴۴
آزمون ۴۰: گویا کردن مخرج‌های گنگ ۴۵
آزمون ۴۱: بخش‌پذیری و تقسیم ۴۶

معادله، تعیین علامت و نامعادله

آزمون ۴۲: حل معادلهٔ درجهٔ دوم ۴۷
آزمون ۴۳: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) ۴۸
آزمون ۴۴: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۲) ۴۹
آزمون ۴۵: رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم ۵۰
آزمون ۴۶: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص ۵۱
آزمون ۴۷: معادله‌های گویا (۱) ۵۲
آزمون ۴۸: معادله‌های گویا (۲) ۵۳

آزمون ۴۹: تعیین علامت و نامعادله (۱) ۵۴
آزمون ۵۰: تعیین علامت و نامعادله (۲) ۵۵
آزمون ۵۱: معادله‌های رادیکالی (۱) ۵۶
آزمون ۵۲: معادله‌های رادیکالی (۲) ۵۷

قدرمطلق و جزء صحیح

آزمون ۵۳: معادلات قدرمطلقی ۵۸
آزمون ۵۴: نامعادلات قدرمطلقی ۵۹
آزمون ۵۵: توابع شامل قدرمطلق ۶۰
آزمون ۵۶: جزء صحیح و ویژگی‌های آن ۶۱
آزمون ۵۷: توابع شامل جزء صحیح ۶۲

توابع نمایی و لگاریتمی

آزمون ۵۸: تابع نمایی (۱) ۶۳
آزمون ۵۹: تابع نمایی (۲) ۶۵
آزمون ۶۰: معادلات نمایی ۶۶
آزمون ۶۱: نامعادلات نمایی ۶۷
آزمون ۶۲: لگاریتم (۱) ۶۸
آزمون ۶۳: لگاریتم (۲) ۶۹
آزمون ۶۴: تابع لگاریتمی (۱) ۷۰
آزمون ۶۵: تابع لگاریتمی (۲) ۷۱
آزمون ۶۶: معادلات لگاریتمی ۷۲
آزمون ۶۷: نامعادلات لگاریتمی ۷۳

تابع

آزمون ۶۸: مفاهیم اولیهٔ تابع ۷۴
آزمون ۶۹: توابع معروف ۷۵
آزمون ۷۰: سهمی و تابع درجهٔ دوم (۱) ۷۶
آزمون ۷۱: سهمی و تابع درجهٔ دوم (۲) ۷۷
آزمون ۷۲: دامنه و برد تابع و تساوی توابع ۷۸
آزمون ۷۳: مدل‌سازی با توابع ۷۹
آزمون ۷۴: جبر توابع ۸۱
آزمون ۷۵: ترکیب توابع (۱) ۸۲
آزمون ۷۶: ترکیب توابع (۲) ۸۳
آزمون ۷۷: ترکیب توابع (۳) ۸۴
آزمون ۷۸: تبدیل نمودار توابع (۱) ۸۵
آزمون ۷۹: تبدیل نمودار توابع (۲) ۸۷
آزمون ۸۰: توابع یک‌به‌یک ۸۸
آزمون ۸۱: توابع یکنوا (۱) ۸۹
آزمون ۸۲: توابع یکنوا (۲) ۹۰
آزمون ۸۳: تابع وارون (۱) ۹۱
آزمون ۸۴: تابع وارون (۲) ۹۲

مثلثات

آزمون ۸۵: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ۹۳
آزمون ۸۶: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی ۹۵
آزمون ۸۷: اتحادهای مثلثاتی (۱) ۹۶
آزمون ۸۸: اتحادهای مثلثاتی (۲) ۹۷
آزمون ۸۹: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۹۸
آزمون ۹۰: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۱) ۹۹
آزمون ۹۱: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۲) ۱۰۰
آزمون ۹۲: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۱) ۱۰۱
آزمون ۹۳: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۲) ۱۰۲
آزمون ۹۴: توابع مثلثاتی (۱) ۱۰۳
آزمون ۹۵: توابع مثلثاتی (۲) ۱۰۴
آزمون ۹۶: معادلات مثلثاتی (۱) ۱۰۶
آزمون ۹۷: معادلات مثلثاتی (۲) ۱۰۷
آزمون ۹۸: معادلات مثلثاتی (۳) ۱۰۸

حد و پیوستگی

آزمون ۹۹: مفهوم حد و قضایای حد (۱) ۱۰۹
آزمون ۱۰۰: مفهوم حد و قضایای حد (۲) ۱۱۰
آزمون ۱۰۱: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ در توابع گویا ۱۱۱
آزمون ۱۰۲: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ در توابع رادیکالی ۱۱۲
آزمون ۱۰۳: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ مثلثاتی (خارج از کتاب درسی) ۱۱۳
آزمون ۱۰۴: پیوستگی ۱۱۴

آزمون ۱۰۵: حد بی‌نهایت (۱) ۱۱۵
آزمون ۱۰۶: حد بی‌نهایت (۲) ۱۱۶
آزمون ۱۰۷: حد در بی‌نهایت (۱) ۱۱۷
آزمون ۱۰۸: حد در بی‌نهایت (۲) ۱۱۸
آزمون ۱۰۹: حالت‌های مبهم $\infty-\infty$ و $0\times\infty$ (خارج از کتاب درسی) ۱۱۹

مشتق

آزمون ۱۱۰: مفهوم مشتق (۱) ۱۲۰
آزمون ۱۱۱: مفهوم مشتق (۲) ۱۲۱
آزمون ۱۱۲: قواعد مشتق‌گیری (۱) ۱۲۲
آزمون ۱۱۳: قواعد مشتق‌گیری (۲) ۱۲۳
آزمون ۱۱۴: مشتق تابع مرکب (۱) ۱۲۴
آزمون ۱۱۵: مشتق تابع مرکب (۲) ۱۲۵
آزمون ۱۱۶: مشتق‌پذیری ۱۲۶
آزمون ۱۱۷: خط مماس بر نمودار تابع ۱۲۷
آزمون ۱۱۸: آهنگ تغییر ۱۲۸
آزمون ۱۱۹: مشتق دوم ۱۲۹
آزمون ۱۲۰: قاعدهٔ هوپیتال ۱۳۰

کاربردهای مشتق

آزمون ۱۲۱: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۱) ۱۳۱
آزمون ۱۲۲: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۲) ۱۳۲
آزمون ۱۲۳: نقاط بحرانی ۱۳۳
آزمون ۱۲۴: اکسترمم‌های نسبی (۱) ۱۳۴
آزمون ۱۲۵: اکسترمم‌های نسبی (۲) ۱۳۵
آزمون ۱۲۶: اکسترمم‌های مطلق (۱) ۱۳۶
آزمون ۱۲۷: اکسترمم‌های مطلق (۲) ۱۳۷
آزمون ۱۲۸: بهینه‌سازی (۱) ۱۳۸
آزمون ۱۲۹: بهینه‌سازی (۲) ۱۳۹

هندسهٔ تحلیلی

آزمون ۱۳۰: خط راست (۱) ۱۴۱
آزمون ۱۳۱: خط راست (۲) ۱۴۲
آزمون ۱۳۲: تفکر تجسمی ۱۴۳
آزمون ۱۳۳: بیضی (۱) ۱۴۴
آزمون ۱۳۴: بیضی (۲) ۱۴۶
آزمون ۱۳۵: دایره (۱) ۱۴۸
آزمون ۱۳۶: دایره (۲) ۱۴۹

استدلال و هندسه

آزمون ۱۳۷: استدلال، عمودمنصف و نیمساز ۱۵۰
آزمون ۱۳۸: نسبت و تناسب ۱۵۱
آزمون ۱۳۹: قضیهٔ تالس (۱) ۱۵۲
آزمون ۱۴۰: قضیهٔ تالس (۲) ۱۵۴
آزمون ۱۴۱: تشابه (۱) ۱۵۶
آزمون ۱۴۲: تشابه (۲) ۱۵۸
آزمون ۱۴۳: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه (۱) ۱۶۰
آزمون ۱۴۴: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه (۲) ۱۶۲

آمار و احتمال

آزمون ۱۴۵: اصل جمع و اصل ضرب (۱) ۱۶۴
آزمون ۱۴۶: اصل جمع و اصل ضرب (۲) ۱۶۵
آزمون ۱۴۷: جایگشت (۱) ۱۶۶
آزمون ۱۴۸: جایگشت (۲) ۱۶۷
آزمون ۱۴۹: ترکیب (۱) ۱۶۸
آزمون ۱۵۰: ترکیب (۲) ۱۶۹
آزمون ۱۵۱: احتمال مقدماتی (۱) ۱۷۰
آزمون ۱۵۲: احتمال مقدماتی (۲) ۱۷۱
آزمون ۱۵۳: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل (۱) ۱۷۲
آزمون ۱۵۴: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل (۲) ۱۷۳
آزمون ۱۵۵: قانون احتمال کل (۱) ۱۷۴
آزمون ۱۵۶: قانون احتمال کل (۲) ۱۷۵
آزمون ۱۵۷: آمار ۱۷۶

بخش سوم: آزمون‌های فصلی

آزمون ۱۵۸: بازه و مجموعه ۱۷۸
آزمون ۱۵۹: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۱) ۱۷۹
آزمون ۱۶۰: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۲) ۱۸۰
آزمون ۱۶۱: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۳) ۱۸۱
آزمون ۱۶۲: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۴) ۱۸۲
آزمون ۱۶۳: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۱) ۱۸۳
آزمون ۱۶۴: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۲) ۱۸۴
آزمون ۱۶۵: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۳) ۱۸۵
آزمون ۱۶۶: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۴) ۱۸۶
آزمون ۱۶۷: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۵) ۱۸۷
آزمون ۱۶۸: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۱) ۱۸۸
آزمون ۱۶۹: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۲) ۱۸۹
آزمون ۱۷۰: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۳) ۱۹۰
آزمون ۱۷۱: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۴) ۱۹۱
آزمون ۱۷۲: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۵) ۱۹۲
آزمون ۱۷۳: قدرمطلق و جزء صحیح (۱) ۱۹۳
آزمون ۱۷۴: قدرمطلق و جزء صحیح (۲) ۱۹۴
آزمون ۱۷۵: قدرمطلق و جزء صحیح (۳) ۱۹۵
آزمون ۱۷۶: قدرمطلق و جزء صحیح (۴) ۱۹۶
آزمون ۱۷۷: توابع نمایی و لگاریتمی (۱) ۱۹۷
آزمون ۱۷۸: توابع نمایی و لگاریتمی (۲) ۱۹۸
آزمون ۱۷۹: توابع نمایی و لگاریتمی (۳) ۱۹۹
آزمون ۱۸۰: توابع نمایی و لگاریتمی (۴) ۲۰۰
آزمون ۱۸۱: توابع نمایی و لگاریتمی (۵) ۲۰۱
آزمون ۱۸۲: تابع (۱) ۲۰۲
آزمون ۱۸۳: تابع (۲) ۲۰۳
آزمون ۱۸۴: تابع (۳) ۲۰۵
آزمون ۱۸۵: تابع (۴) ۲۰۶
آزمون ۱۸۶: تابع (۵) ۲۰۷
آزمون ۱۸۷: تابع (۶) ۲۰۸
آزمون ۱۸۸: تابع (۷) ۲۰۹
آزمون ۱۸۹: مثلثات (۱) ۲۱۰
آزمون ۱۹۰: مثلثات (۲) ۲۱۱
آزمون ۱۹۱: مثلثات (۳) ۲۱۲
آزمون ۱۹۲: مثلثات (۴) ۲۱۳
آزمون ۱۹۳: مثلثات (۵) ۲۱۴
آزمون ۱۹۴: مثلثات (۶) ۲۱۵
آزمون ۱۹۵: مثلثات (۷) ۲۱۶
آزمون ۱۹۶: حد و پیوستگی (۱) ۲۱۷
آزمون ۱۹۷: حد و پیوستگی (۲) ۲۱۸
آزمون ۱۹۸: حد و پیوستگی (۳) ۲۱۹
آزمون ۱۹۹: حد و پیوستگی (۴) ۲۲۰
آزمون ۲۰۰: حد و پیوستگی (۵) ۲۲۱
آزمون ۲۰۱: حد و پیوستگی (۶) ۲۲۲
آزمون ۲۰۲: حد و پیوستگی (۷) ۲۲۳
آزمون ۲۰۳: مشتق (۱) ۲۲۴
آزمون ۲۰۴: مشتق (۲) ۲۲۵
آزمون ۲۰۵: مشتق (۳) ۲۲۶
آزمون ۲۰۶: مشتق (۴) ۲۲۷
آزمون ۲۰۷: مشتق (۵) ۲۲۸
آزمون ۲۰۸: مشتق (۶) ۲۲۹
آزمون ۲۰۹: مشتق (۷) ۲۳۰
آزمون ۲۱۰: مشتق (۸) ۲۳۱
آزمون ۲۱۱: کاربردهای مشتق (۱) ۲۳۲
آزمون ۲۱۲: کاربردهای مشتق (۲) ۲۳۳
آزمون ۲۱۳: کاربردهای مشتق (۳) ۲۳۴
آزمون ۲۱۴: کاربردهای مشتق (۴) ۲۳۵
آزمون ۲۱۵: کاربردهای مشتق (۵) ۲۳۶
آزمون ۲۱۶: کاربردهای مشتق (۶) ۲۳۷
آزمون ۲۱۷: کاربردهای مشتق (۷) ۲۳۸
آزمون ۲۱۸: هندسهٔ تحلیلی (۱) ۲۳۹

آزمون ۲۱۹: هندسهٔ تحلیلی (۲) ۲۴۰
آزمون ۲۲۰: هندسهٔ تحلیلی (۳) ۲۴۱
آزمون ۲۲۱: هندسهٔ تحلیلی (۴) ۲۴۲
آزمون ۲۲۲: هندسهٔ تحلیلی (۵) ۲۴۳
آزمون ۲۲۳: استدلال و هندسه (۱) ۲۴۴
آزمون ۲۲۴: استدلال و هندسه (۲) ۲۴۵
آزمون ۲۲۵: استدلال و هندسه (۳) ۲۴۶
آزمون ۲۲۶: استدلال و هندسه (۴) ۲۴۸
آزمون ۲۲۷: آمار و احتمال (۱) ۲۴۹
آزمون ۲۲۸: آمار و احتمال (۲) ۲۵۰
آزمون ۲۲۹: آمار و احتمال (۳) ۲۵۱
آزمون ۲۳۰: آمار و احتمال (۴) ۲۵۲
آزمون ۲۳۱: آمار و احتمال (۵) ۲۵۳
آزمون ۲۳۲: آمار و احتمال (۶) ۲۵۴
آزمون ۲۳۳: آمار و احتمال (۷) ۲۵۵

بخش چهارم: آزمون‌های جامع تألیفی

آزمون ۲۳۴: جامع (۱) ۲۵۸
آزمون ۲۳۵: جامع (۲) ۲۶۱
آزمون ۲۳۶: جامع (۳) ۲۶۴
آزمون ۲۳۷: جامع (۴) ۲۶۷
آزمون ۲۳۸: جامع (۵) ۲۷۰
آزمون ۲۳۹: جامع (۶) ۲۷۳
آزمون ۲۴۰: جامع (۷) ۲۷۶
آزمون ۲۴۱: جامع (۸) ۲۷۹
آزمون ۲۴۲: جامع (۹) ۲۸۲
آزمون ۲۴۳: جامع (۱۰) ۲۸۵

بخش پنجم: آزمون‌های کنکور

آزمون ۲۴۴: کنکور تجربی سال ۱۳۹۹ - داخل کشور ۲۹۰
آزمون ۲۴۵: کنکور تجربی سال ۱۳۹۹ - خارج از کشور ۲۹۳
آزمون ۲۴۶: کنکور تجربی سال ۱۴۰۰ - داخل کشور ۲۹۶
آزمون ۲۴۷: کنکور تجربی سال ۱۴۰۰ - خارج از کشور ۲۹۹
آزمون ۲۴۸: کنکور تجربی سال ۱۴۰۱ - داخل کشور ۳۰۲
آزمون ۲۴۹: کنکور تجربی سال ۱۴۰۱ - خارج از کشور ۳۰۵
آزمون ۲۵۰: کنکور تجربی سال ۱۴۰۲ (نوبت اول) ۳۰۸
آزمون ۲۵۱: کنکور تجربی سال ۱۴۰۲ (نوبت دوم) - داخل کشور ۳۱۱
آزمون ۲۵۲: کنکور تجربی سال ۱۴۰۲ (نوبت دوم) - خارج از کشور ۳۱۴

بخش ششم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تشریحی ۳۱۸

بخش هفتم: پاسخنامهٔ کلیدی

پاسخنامهٔ کلیدی ۵۹۶

محل انجام محاسبات

آزمون ۱ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی

۱- کدام‌یک می‌تواند جملهٔ عمومی دنبالهٔ $۲, ۳, ۱۰, ۱۵, \ldots$ باشد؟

۱) $a_n = n+۱$ ۲) $a_n = n^۲ - (-۱)^n$ ۳) $a_n = ۳n^۲ - ۸n + ۷$ ۴) $a_n = ۲n^۲ - ۵n + ۵$

۲- مجموع بیست جملهٔ اول دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n = [\frac{۴}{n}] + [-\frac{۵}{n}]$ کدام است؟

۱) -۲۰ ۲) -۱۹ ۳) -۱۶ ۴) -۱۵

۳- جملهٔ kام دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n = (-۱)^n \frac{n-۴}{۷-n}$ برابر $\frac{۵}{۴}$ است. مقدار $a_{k-۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۴- در یک دنبالهٔ اعداد، $a_۱ = ۳$ و برای هر $n \geq ۲$، $a_n = ۲a_{n-۱} - ۲$. مقدار $a_۸ - a_۷$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۵

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۵- سه زاویهٔ مثلثی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه‌های این مثلث کدام است؟

۱) ۴۵° ۲) ۶۰° ۳) ۷۵° ۴) ۹۰°

۶- جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به‌صورت $a_n = \frac{۵-۲n}{۳}$ است. قدرنسبت دنباله چقدر از جملهٔ اول کمتر است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۷- جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $a, ۲a-۱, ۱-۳a, \ldots$ کدام است؟

۱) $a_n = ۱ - \frac{n}{۲}$ ۲) $a_n = n - \frac{۱}{۲}$ ۳) $a_n = \frac{۱}{۲} - n$ ۴) $a_n = \frac{n}{۲} + ۱$

۸- اگر $\sqrt{a}, \sqrt[۴]{۲}, \sqrt[۳]{۲}$ سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی باشند، جملهٔ سیزدهم این دنباله کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۶]{۲}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $۴\sqrt[۶]{۲}$

۹- در یک دنبالهٔ هندسی می‌دانیم $\frac{a_۸}{a_۶} = \sqrt{۲}$. مقدار $\frac{a_۷}{a_۳}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۸}$

۱۰- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ تجربی ۹۲

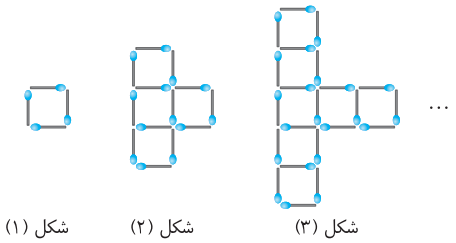
۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

محل انجام محاسبات

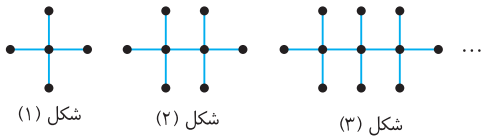
آزمون ۲۹ — الگو و دنباله

۲۸۱- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل چهاردهم در الگوی مقابل چندتا است؟



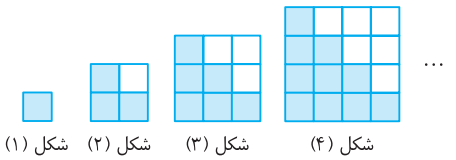
۱) ۱۰۳ ۲) ۱۱۲
۳) ۱۲۱ ۴) ۱۳۰

۲۸۲- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟



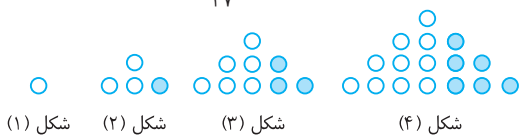
۱) ۶۰ ۲) ۶۱
۳) ۶۲ ۴) ۶۴

۲۸۳- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده در شکل سی‌اُم چندتاست؟



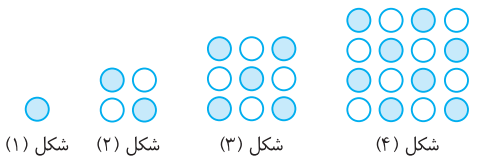
۱) ۱۵ ۲) ۲۰
۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۲۸۴- در الگوی زیر، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با $\frac{۸}{۱۷}$ است؟



۱) ۱۸ ۲) ۱۷
۳) ۱۶ ۴) ۱۵

۲۸۵- در الگوی مقابل، در شکل چندم تعداد گوی‌های رنگی برابر با ۱۱۳ است؟



۱) ۱۷ ۲) ۱۵
۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۲۸۶- همهٔ جمله‌های دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{۲n-k}{۵n+۳}$ با هم برابرند. مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $-\frac{۶}{۵}$ ۴) $-\frac{۷}{۵}$

۲۸۷- در یک دنباله با جملهٔ عمومی a_n، $a_۱=۱$ و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطهٔ $a_{n+۱}=\frac{n}{n+۱}a_n$ برقرار است. مقدار $a_{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰۲}$

۲۸۸- اگر بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=-۳n^۲+۱۲n+c$ برابر ۸ باشد، مقدار c کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۸ ۳) ۲۰ ۴) -۴

۲۸۹- چند جمله از ابتدای دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\log_۲\frac{n}{n+۱}$ را جمع کنیم تا حاصل برابر -۳ شود؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۹۰- مجموع سی جملهٔ اول دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=[\frac{۸n}{n+۱}]$ کدام است؟

۱) ۲۰۱ ۲) ۲۰۲ ۳) ۲۰۳ ۴) ۲۰۴

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۳۰ دنبالهٔ حسابی (۱)

محل انجام محاسبات

۲۹۱- در یک دنباله، $a_1=3$ و برای هر $n\geq 1$، $a_n-a_{n+1}=2$. در این دنباله مقدار $\frac{a_{100}}{a_{50}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{39}{19}$ ۴) $\frac{49}{39}$

۲۹۲- اگر در دنباله‌ای حسابی $3a_4+4a_5-7a_9=124$، مقدار $5a_5+7a_7-12a_{12}$ کدام است؟

۱) ۲۶۰ ۲) ۲۸۰ ۳) ۲۸۵ ۴) ۲۹۰

۲۹۳- در دنبالهٔ حسابی $3x-1, x^2-9, 4x-2, \ldots$ مجموع مقادیر ممکن برای قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۹۴- چندمین جمله از دنبالهٔ حسابی $-1, 2, 5, \ldots$ برابر ۲۱۸ است؟

۱) هفتاد و یکم ۲) هفتاد و چهارم ۳) هفتاد و پنجم ۴) هفتاد و هشتم

۲۹۵- در دنبالهٔ حسابی $2, 6, 10, \ldots$ چند جملهٔ کوچک‌تر از ۵۰۰ وجود دارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۲۸

۲۹۶- در دنباله‌ای حسابی $a_1+a_3=16$ و $a_2+a_5+a_8=51$. جملهٔ نهم این دنباله کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۹ ۳) ۳۲ ۴) ۴۳

۲۹۷- زاویه‌های یک پنج‌ضلعی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. اگر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه برابر 86° باشد، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه کدام است؟

۱) 110° ۲) 115° ۳) 120° ۴) 130°

۲۹۸- در جدول زیر، بین دو عدد $\sqrt{3}-5$ و $\sqrt{3}+5$، چهار واسطهٔ حسابی می‌نویسیم. کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم کدام است؟

$\sqrt{3}+5$					$\sqrt{3}-5$

۱) $\sqrt{3}-4$ ۲) $\sqrt{3}-3$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}-1$

۲۹۹- مجموع سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۴۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

۳۰۰- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر قدرنسبت این دنباله است و حاصل‌ضرب نُه جملهٔ نخست این دنباله برابر $10^8\times 10!$ است. جملهٔ دهم این دنباله کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۰۰ ۴) ۱۰۰۰

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

محل انجام محاسبات

آزمون ۳۱ دنبالهٔ حسابی (۲)

۳۰۱- دو دنبالهٔ حسابی یکی با جملهٔ عمومی a_n و دیگری با جملهٔ عمومی b_n داریم. اگر $a_1+b_1=7$ و $a_3+b_3=21$، مقدار a_5+b_5 کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

۳۰۲- اگر $a+b, a+c, b+c$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، کدام گزینه دنباله‌ای حسابی را نشان می‌دهد؟

۱) b, a, c ۲) b, c, a ۳) a, c, b ۴) a, b, c

۳۰۳- در دنبالهٔ حسابی $196, 192, 188, \ldots$ نخستین جملهٔ کوچک‌تر از ۱۰ چندمین جمله است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

۳۰۴- در دنباله‌ای حسابی، جملهٔ دهم ۳۲ واحد کمتر از دومین جمله است. اگر جملهٔ چهارم دنباله برابر ۱۵ باشد، چند جمله از دنباله مثبت هستند؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۳۰۵- اگر جواب‌های معادلهٔ $(x-a)(x^2-8x+12)=0$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، a چند مقدار مختلف ممکن است باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۰۶- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی عددی مثبت است و در این دنباله $3a_8=5a_{13}$. اگر S_n مجموع n جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی باشد، کدام گزینه از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) S_{10} ۲) S_{20} ۳) S_{30} ۴) S_{40}

۳۰۷- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. نسبت طول ضلع بلندتر زاویهٔ قائمه به طول ضلع کوتاه‌تر زاویهٔ قائمهٔ این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۰۸- مجموع چهار جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۸۰ است. حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۲۷- ۳) ۳۶- ۴) ۴۵-

۳۰۹- بین دو عدد m^2+3m+4 و m^2+4، تعداد $m-1$ عدد را طوری درج می‌کنیم که اعداد حاصل، یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند. قدرنسبت دنبالهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۱۰- جملات دنبالهٔ حسابی $2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که در هر دسته به تعداد شمارهٔ آن دسته عدد وجود داشته باشد. میانگین اعداد واقع در دستهٔ بیستم کدام است؟

$$\{2\}, \{7, 12\}, \{17, 22, 27\}, \ldots$$

۱) ۱۰۰۱ ۲) ۹۹۹/۵ ۳) ۱۰۰۲ ۴) ۱۰۰۴

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۳۲ دنبالهٔ هندسی (۱)

محل انجام محاسبات

۳۱۱- در دنباله‌ای با جملهٔ عمومی a_n می‌دانیم $2a_{n+1}=3a_n$. اگر $a_3=3$، مقدار $a_{20}-a_{17}$ کدام است؟

۱) $\frac{19}{6}(\frac{3}{2})^{16}$ ۲) $\frac{19}{3}(\frac{3}{2})^{16}$ ۳) $\frac{3^{29}}{2^{28}}$ ۴) $\frac{3^{30}}{2^{29}}$

۳۱۲- اگر $2^{x-4}, 4^{3x}, 8^{2-3x}, \ldots$ دنباله‌ای هندسی باشد، جملهٔ یازدهم این دنباله چند برابر $\sqrt[10]{2}$ است؟

۱) 2^{39} ۲) 2^{40} ۳) 2^{41} ۴) 2^{42}

۳۱۳- واسطهٔ حسابی جواب‌های معادله‌ای درجهٔ دوم ۴/۵ و واسطهٔ هندسی جواب‌های آن ۱/۵ است. در این معادله نسبت جواب بزرگ‌تر به جواب کوچک‌تر کدام است؟

۱) $17+12\sqrt{2}$ ۲) $12+11\sqrt{2}$ ۳) $6+4\sqrt{2}$ ۴) $4+6\sqrt{2}$

۳۱۴- در دنباله‌ای هندسی با جملات مثبت می‌دانیم $a_1a_6=27$ و $a_2a_4=9$. مقدار a_5 کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۳۱۵- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $-\frac{1}{2}$، مجموع جملات پنجم و هشتم چند برابر مجموع جملات هفتم و هشتم است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳۱۶- حاصل‌ضرب پنج جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی برابر ۱۰۲۴ است. جملهٔ وسط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۳۱۷- بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $16\sqrt{2}$ هفت واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم (جملهٔ اول $\sqrt{2}$ است). جملهٔ سوم دنبالهٔ حاصل کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) $32\sqrt{2}$ ۴) $64\sqrt{2}$

۳۱۸- اگر جملهٔ هفتم دنبالهٔ هندسی $\log_4 a, \log_{16} a, \ldots$ برابر $\frac{1}{32}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۳۱۹- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱، $a_5-a_1=130$ و $a_4-a_2=25$. مقدار a_2 کدام است؟

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{15}{24}$ ۴) $\frac{25}{24}$

۳۲۰- در دنباله‌ای هندسی با جملهٔ عمومی a_n و قدرنسبت مخالف ۱ می‌دانیم $\frac{a_4-a_1}{a_3-a_2}=-1$. مقدار عبارت $\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۳۳ دنبالهٔ هندسی (۲)

محل انجام محاسبات

۳۲۱- اگر a_n جملهٔ عمومی دنباله‌ای هندسی باشد، $a_4=2$ و $a_5=5$، مجموع $\log a_1$، $\log a_2$، ... و $\log a_8$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۳۲۲- بین اعداد مثبت a و b پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم (جملهٔ اول a است). اگر چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کردیم، قدرنسبت دو برابر حالت قبل می‌شد. قدرنسبت دنباله در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۳۲۳- در دنباله‌ای هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۶۴ است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۲۴- مجموع جمله‌های اول و چهارم دنباله‌ای هندسی برابر $\frac{28}{9}$ و حاصل‌ضرب جمله‌های دوم و سوم این دنبالهٔ هندسی برابر $\frac{1}{3}$ است. بیشترین مقدار ممکن جملهٔ پنجم این دنباله کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳۲۵- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ۳) $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$ ۴) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}}$

۳۲۶- اگر $a+\log_2 3$، $a+\log_4 3$ و $a+\log_8 3$ به ترتیب جمله‌های اول، دوم و سوم دنباله‌ای هندسی باشند، قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۳۲۷- هفت عدد مثبت دنباله‌ای هندسی تشکیل داده‌اند که مجموع پنج جملهٔ نخست آن برابر $\frac{62}{7\sqrt{2}-6}$ و مجموع پنج جملهٔ آخر آن برابر $12+14\sqrt{2}$ است. حاصل‌ضرب این هفت عدد کدام است؟

۱) 2^{56} ۲) 2^{28} ۳) 2^{22} ۴) 2^{14}

۳۲۸- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت مثبت، $a_4=64$. اگر S_n مجموع n جملهٔ نخست این دنباله باشد، می‌دانیم $S_6>S_5+\frac{1}{25}$ و $S_7<S_6+\frac{1}{8}$. اگر قدرنسبت این دنباله برابر $\frac{1}{m}$ باشد، کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند مقدار m باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۹ ۴) ۴۰

۳۲۹- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۲ می‌دانیم $a_1a_2a_3\dots a_{30}=2^{30}$. مقدار $a_3a_6a_9\dots a_{30}$ کدام است؟

۱) 2^{10} ۲) 2^{20} ۳) $\frac{1}{2^{10}}$ ۴) $\frac{1}{2^{20}}$

۳۳۰- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت منفی، $a_1+a_2+a_3=1$. مجموعهٔ مقادیر $a_1a_2a_3$ کدام است؟

۱) $[-2,-1]$ ۲) $(-2,-1)$ ۳) $[-1,0)$ ۴) $(-1,0)$

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۳۴ دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی

محل انجام محاسبات

۳۳۱- جملهٔ هشتاد و نهم دنبالهٔ حسابی $\ldots, -\frac{۹۵}{۸}, -۱۲$ با جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی $۲۴۳, \ldots$ برابر است. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۳۲- اگر اعداد $x+۴$، $۲x+y$ و $۲y+x$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی و سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار $x+۲y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۳۳۳- اگر a, b, c دنباله‌ای هندسی و $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ دنباله‌ای حسابی باشد، مقدار عبارت $\frac{a^۲+b^۲}{c^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۳۴- جملات دنباله‌ای حسابی را سه برابر می‌کنیم، سپس آن‌ها را با ۵ جمع می‌کنیم. اگر دنبالهٔ حاصل دنباله‌ای هندسی باشد، نسبت جملهٔ سوم به جملهٔ اول دنبالهٔ اولیه کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۳۵- a، ۸ و b سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، اعداد جدید دنباله‌ای هندسی می‌سازند. مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۳۳۶- جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله‌ای حسابی، سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۳۷- جملات سوم، پنجم و ششم دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = a - n$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. جملهٔ دهم دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۳۳۸- در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، جملات سوم، پنجم و هشتم به‌ترتیب جملات اول تا سوم یک دنبالهٔ هندسی‌اند. نسبت جملهٔ چهارم دنبالهٔ هندسی به جملهٔ دوازدهم دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۲۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۶}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲۶}$ ۴) $\frac{۲۹}{۲۶}$

۳۳۹- جملات دوم، پنجم و دهم یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت به ترتیب جملات اول، سوم و پنجم یک دنباله‌ای هندسی‌اند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ ۲) $\pm\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ ۳) $\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۴) $\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۳۴۰- جملات اول، سوم و چهارم یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت جملات متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $۱\pm\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $-۱+\sqrt{۵}$

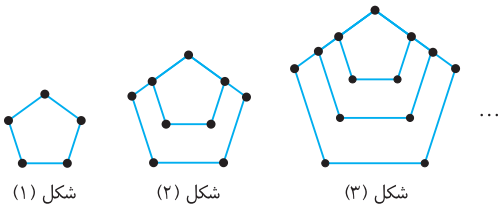
ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۱۵۹ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۱)

محل انجام محاسبات

۱۵۸۱- تعداد نقاط روی شکل چندم از الگوی مقابل برابر ۶۱ است؟

۱) چهاردهم
۲) پانزدهم
۳) شانزدهم
۴) هفدهم



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۱۵۸۲- در دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n = ۹۵n - n^۲$ چند جملهٔ مثبت وجود دارد؟

۱) ۹۵ ۲) ۹۴ ۳) ۹۰ ۴) ۸۹

۱۵۸۳- در دنباله‌ای حسابی $a_۵ = ۲a_{۱۰}$. مقدار $۱۵a_{۱۵}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۸۴- اگر $\log_۲(۱۶a)$، $\log_۲(۳a+۴)$ و $\log_۲ a$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۵۸۵- جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = ۲ - ۳n$ را ۴ واحد کاهش و قدرنسبت را ۶ واحد افزایش می‌دهیم. جملهٔ بیست‌ویکم دنبالهٔ حسابی جدید کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۲ ۳) ۵۵ ۴) ۵۷

۱۵۸۶- در یک دنبالهٔ حسابی با n جمله، مجموع سه جملهٔ اول برابر $۶ - \sqrt{۲}$ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر $۶ + \sqrt{۲}$ است. مجموع جملهٔ اول و جملهٔ آخر دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۵۸۷- حاصل‌ضرب پانزده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \ldots$ کدام است؟

۱) $۲^{۳۰}$ ۲) $۲^{۶۰}$ ۳) $۲^{۷۵}$ ۴) $۲^{۹۰}$

۱۵۸۸- اگر عددهای $۳x - ۱$، $۲x + ۳$ و $y - ۹$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی و هندسی باشند، حاصل $x + y$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۸ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۱۵۸۹- اگر x, y, z, t جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، $x + z = ۲۰$ و $y + t = ۶۰$، قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۹۰- در دنباله‌ای هندسی $a_۵ - a_۳ = ۹۶$ و $a_۸ - a_۶ = ۱۲$. جملهٔ پنجم این دنباله چقدر است؟

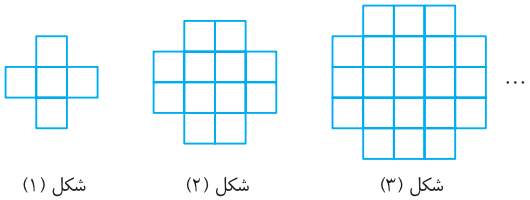
۱) -۶۴ ۲) -۱۶ ۳) -۳۲ ۴) -۸

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۱۶۰ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۲)

محل انجام محاسبات

۱۵۹۱- الگوی مقابل از مربع‌های ۱×۱ ساخته شده است. مساحت شکل هشتم کدام است؟



۱) ۶۴
۲) ۶۰
۳) ۹۶
۴) ۱۰۰

۱۵۹۲- بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=-2n^2+19n+1$ چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۷ ۴) ۴۸

۱۵۹۳- اگر جملهٔ عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n=\frac{2n-1}{n+2}$ باشد، چند جملهٔ این دنباله در بازهٔ $(\frac{9}{10},\frac{11}{10})$ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۹۴- در دنباله‌ای حسابی $a_3+a_7=0$ و $a_3^2+a_7^2=128$. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ± 3 ۲) ± 2 ۳) ± 4 ۴) ± 6

۱۵۹۵- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم، هفتم، چهاردهم و هجدهم برابر با ۱۰ شده است. مجموع جملهٔ اول و جملهٔ بیستم دنباله چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۱۵۹۶- اگر x واسطهٔ حسابی $\sin^2\alpha$ و $\cos^2\alpha$ و y واسطهٔ هندسی $\tan^2\alpha$ و $\cot^2\alpha$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟ $(y>0)$

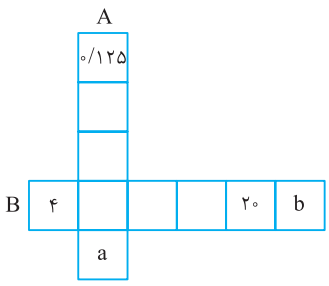
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۵۹۷- اگر عددهای جدول زیر جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟

x	$\frac{1}{2}$	y	z	۳۲

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۵۹۸- در جدول مقابل عددهای ستون A از بالا به پایین جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی هستند و عددهای سطر B از چپ به راست جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۵۶
۲) ۵۸
۳) ۶۰
۴) ۶۲

۱۵۹۹- جمله‌های اول، دوم و چهارم یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند. اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی عددی مثبت باشد، مقدار آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

۱۶۰۰- مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی a, b, c برابر ۱۵ است. اگر $a+8, b+6, c+4$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار ac کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

ارزیابی

درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۱۶۱ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۳)

محل انجام محاسبات

۱۶۰۱- اگر جملهٔ صدم دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{a\sqrt{n}+۷}{\sqrt{n}+۱}$ برابر $\frac{۵}{۲۲}$ باشد، جملهٔ شانزدهم این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۴۴}{۲۵}$ ۲) $\frac{۷}{۵}$ ۳) $\frac{۲۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

۱۶۰۲- چند جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=-(\log n)^۲+۳\log n-۲$ مثبت‌اند؟

۱) ۸۸ ۲) ۸۹ ۳) ۹۰ ۴) ۹۱

۱۶۰۳- در یک دنباله با جملهٔ عمومی a_n، $a_۱=۵$ و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطهٔ $a_{n+۱}a_n=۲$ برقرار است. حاصل‌ضرب بیست و یک جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۴۲۰۰ ۲) ۵۱۲۰ ۳) ۶۱۸۰ ۴) ۶۹۰۰

۱۶۰۴- در مورد دنبالهٔ با جملهٔ عمومی a_n می‌دانیم $a_۱=۵$ و به‌ازای هر عدد طبیعی n، $a_{n+۱}=۹-a_n$. مجموع بیست جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۸۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸۰

۱۶۰۵- مجموع بیست جملهٔ نخست دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=n-۲[\frac{n}{۲}]$ چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۶۰۶- جملات دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=n^۲-n$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که در هر دسته به تعداد دو برابر شمارهٔ آن دسته عدد وجود داشته باشد. جملهٔ اول دستهٔ بیستم کدام است؟

۱) ۱۹۰×۱۹۱ ۲) ۳۸۰×۳۸۱ ۳) ۳۸۱×۳۸۲ ۴) ۱۸۹×۱۹۰

۱۶۰۷- عددهای حقیقی و مثبت a، b و c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند و $abc=۴$. کمترین مقدار ممکن b کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۴}$ ۳) $\sqrt[۳]{۱۶}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳۲}$

۱۶۰۸- جملات دوم، پنجم و دهم یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت به‌ترتیب جملات اول، سوم و پنجم یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت‌اند. مقدار این قدرنسبت کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۱۶۰۹- $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی هستند، $a_۱>۰$ و $۹a_۱+۵a_۳>۱۴a_۲$. قدرنسبت این دنباله در کدام بازه نمی‌تواند باشد؟

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $[\frac{۵}{۹},۱]$ ۳) $[۱,\frac{۹}{۵}]$ ۴) $(-\infty,۰)$

۱۶۱۰- اگر a,b,c سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی و غیرثابت باشند و $a+b+c=kb$، کدام درست است؟

۱) $-۱\leq k<۳$ ۲) $k>۳$ یا $k\leq -۱$ ۳) $-۱\leq k<۲$ ۴) $k>۲$ یا $k\leq -۱$

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

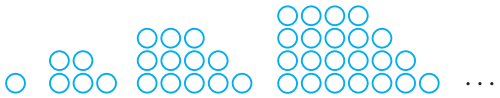
آزمون ۱۶۲ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۴)

محل انجام محاسبات

۱۶۱۱- در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1=1$ و برای هر $n\geq 2$، $a_n=2a_{n-1}+1$. جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟ تجربی ۹۵

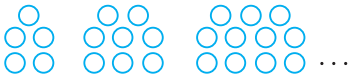
۱) ۱۲۷ ۲) ۱۵۹ ۳) ۲۴۷ ۴) ۲۵۵

۱۶۱۲- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل نهم کدام است؟ تجربی ۹۸



۱) ۱۱۷
۲) ۱۲۰
۳) ۱۲۳
۴) ۱۲۵

۱۶۱۳- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟ تجربی خارج ۹۸



۱) ۳۴
۲) ۳۶
۳) ۳۸
۴) ۴۰

۱۶۱۴- اعداد $2^b, 4\sqrt{2}, 2^a$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی‌اند. واسطهٔ حسابی a و b کدام است؟ ریاضی ۸۷

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{2}$

۱۶۱۵- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ ریاضی ۸۱

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۶۱۶- اعداد $2p+3, 3p+4, 5p-1$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ ریاضی ۸۴

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۶۱۷- در یک دنبالهٔ حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی از دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ ریاضی خارج ۸۷

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۶۱۸- در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند. چندمین جملهٔ این دنباله، صفر است؟ تجربی ۸۸

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۶۱۹- تفاضل جملهٔ دهم از جملهٔ دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۵ و مجموع جملهٔ دهم و دوازدهم برابر ۲۵ است. جملهٔ بیست و یکم این دنباله کدام است؟ ریاضی خارج ۸۴

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۸/۵

۱۶۲۰- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ متوالی برابر ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟ تجربی ۹۰

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

آزمون ۲۴۰ جامع (۷)

محل انجام محاسبات

۲۵۱۱- مجموع چهار جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت چهار برابر ریشهٔ چهارم حاصل‌ضرب این جملات است. جملهٔ اول دنباله چند برابر قدرنسبت آن است؟

۱) $\frac{\pm۳\sqrt{۱۰}-۳۰}{۲۰}$ ۲) $\frac{۳۰\pm۳\sqrt{۱۰}}{۲۰}$ ۳) $\frac{\pm۳\sqrt{۱۰}-۱۵}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱۵\pm۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$

۲۵۱۲- اگر $a^۲+b^۲=۳$ و $a^۴+b^۴=۷$، بیشترین مقدار ممکن a کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$

۲۵۱۳- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ سوم باشد و $\sin x-\cos x=\frac{۱}{۴}$، مقدار $۸\sin x$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۳۱}$ ۲) $-۱-\sqrt{۳۱}$ ۳) $-۱+\sqrt{۳۱}$ ۴) $۱+\sqrt{۳۱}$

۲۵۱۴- رأس سهمی $y=۲x^۲+۴mx-m$ به‌ازای مقادیر مختلف m روی کدام سهمی قرار دارد؟

۱) $y=-۲x^۲+x$ ۲) $y=۲x^۲-x$ ۳) $y=-۲x^۲-x$ ۴) $y=۲x^۲+x$

۲۵۱۵- چند عدد شش‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که یکان آن عددی اول و اولین رقم سمت چپ آن‌ها عددی زوج است؟

۱) $۱۵P(۸,۴)$ ۲) $۱۶P(۸,۴)$ ۳) $۱۷P(۸,۴)$ ۴) $۱۹P(۸,۴)$

۲۵۱۶- فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی خطوط $y=x-۳k$ و $y=-x+k$ از نقطهٔ تلاقی خطوط $y=۲x-k$ و $y=x+k+۱$ حداقل مقدار ممکن است. مقدار k چقدر از این فاصله کمتر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

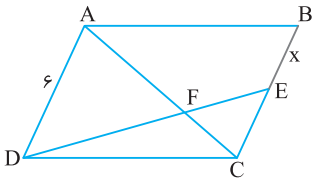
۲۵۱۷- حاصل‌ضرب کمترین مقدار و بیشترین مقدار ممکن برای مجموع مربعات جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^۲+۲x+a^۲=۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲۵۱۸- معادلهٔ $\sqrt[۳]{x^۲-۹}=x-۱$ چند جواب دارد؟

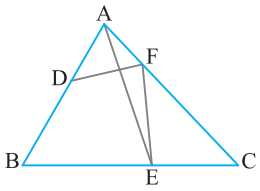
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۱۹- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و $AF=۳FC$. مقدار x کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۴/۵

۲۵۲۰- در شکل مقابل، مساحت مثلث ABC برابر ۱۰ است، $AD=۲$ و $DB=۳$. اگر مساحت مثلث ABE و مساحت چهارضلعی DBEF هر دو برابر با S باشد، مقدار S کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۲۵۲۱- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲^x-\frac{k}{۲^x}+۲k}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن k کدام است؟

۱) $(-\frac{۴}{۳},۰]$ ۲) $[-۱,۰]$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۳})$ ۴) $(-\frac{۴}{۳},\frac{۱}{۳})$

محل انجام محاسبات

۲۵۲۲- اگر $f(x)=\sqrt{۴|x|-x^۲}+۳x$ **و** $g(x)=\sqrt{۴|x|-x^۲}-۳x$، **برد تابع** $f\times g$ **کدام است؟**

۱) $(-\infty,\frac{۲}{۵}]$ ۲) $[-۱۴۴,+\infty)$ ۳) $[-۱۴۴,\frac{۲}{۵}]$ ۴) $[-۸۱,\frac{۱}{۵}]$

۲۵۲۳- اگر $\tan\frac{\pi}{۱۰}=۰/۳۲$، **مقدار عبارت** $\dfrac{\sin\frac{۱۱\pi}{۱۰}+۲\cos\frac{۳۱\pi}{۱۰}}{\sin\frac{۲\pi}{۵}}$ **کدام است؟**

۱) $-۲/۳۲$ ۲) $-۱/۶۸$ ۳) $۲/۳۲$ ۴) $۱/۶۸$

۲۵۲۴- اگر a **جواب معادلهٔ** $۳^{x-\frac{۱}{۲}}-۳^{x+\frac{۱}{۲}}=۴^x-۲^{۲x-۱}$ **باشد، مقدار** $a^۲-a$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۵۲۵- اگر $\log_y x+\log_x y=\frac{۵}{۲}$ **و** $xy=۲۷$، **مقدار** $x+y$ **کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۵۲۶- اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\in\mathbb{Z}\\ [x] & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ **و** $g(x)=\begin{cases}۳x+۱ & x\in\mathbb{Z}\\ -x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، **مقدار** $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}(gof)(x)$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۲۵۲۷- از ۹ دادهٔ آماری با میانگین ۸ و انحراف معیار ۲ داده‌ای با مقدار ۸ حذف کرده‌ایم. واریانس کل ۸ داده برابر کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۲ ۴) ۴/۴

۲۵۲۸- نمودار تابع $f(x)=x-۳[\frac{x}{۳}]$ **را** k **واحد در امتداد محور طول‌ها منتقل می‌کنیم. اگر نمودار به‌دست آمده بر نمودار تابع** f **منطبق باشد،** k **کدام عدد نمی‌تواند باشد؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) -۳

۲۵۲۹- اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$ **و** $fog=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۳)\}$، **تابع** g **کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$ ۲) $\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$

۳) $\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$ ۴) $\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۳)\}$

۲۵۳۰- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=\dfrac{-۴x}{\sqrt{۲+x^۲}}$ **نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطه‌ای قطع می‌کند. طول این نقطه کدام است؟**

۱) $-\sqrt{۱۳}$ ۲) $-\sqrt{۱۴}$ ۳) $-\sqrt{۱۷}$ ۴) $-\sqrt{۱۸}$

۲۵۳۱- اگر $\frac{\cos ۲\alpha}{\cos\alpha}=۲$، **مقدار** $\cos ۲\alpha\cos\alpha$ **کدام است؟**

۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$

۲۵۳۲- معادلهٔ مثلثاتی $\tan x-\sin ۲x-\cos ۲x+۴\cos x-\frac{۲}{\cos x}=۰$ **در بازهٔ** $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ **چند جواب دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۵۳۳- اگر $f(x)=\dfrac{x|x|+۱}{x^۲-۲x}$، **مقدار** $\lim\limits_{x\to۲^-}(fof)(x)$ **کدام است؟**

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۵۳۴- اگر $f(۲)=۲$، $g(x)=\dfrac{x^۲}{f(x)}$ **و** $g'(۲)=-۱$، **مقدار** $f'(۲)$ **کدام است؟**

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۲۵۳۵- فـرض کنید $f(x)=۴x^{m}+۵x^{-n}$ که در اینجا m و n عددهایی طبیعی‌اند. اگر $x^{۲}f''(x)+۲xf'(x)=۶f(x)$، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۵۳۶- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^{۲}|x+۳|+x^{۳}$ روی آن نزولی است، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۵۳۷- طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^{۳}-x}{۱۱x^{۳}-۱۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۳\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳\sqrt{۵}+۱}{۱۱}$ ۴) ۴

۲۵۳۸- از بین همهٔ خطوط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$ فاصلهٔ دو خط با کمترین شیب از یکدیگر چند برابر $\sqrt{\frac{۳}{۶۵}}$ است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۵۳۹- دو قطر از دایره‌ای به مساحت ۴π روی خط‌های $۲x-y=۳$ و $x+y+۶=۰$ قرار دارند. معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $x^{۲}+y^{۲}+۲x+۱۰y+۲۲=۰$ ۲) $x^{۲}+y^{۲}+۴x=۰$

۳) $x^{۲}+y^{۲}+۶y+۵=۰$ ۴) $x^{۲}+y^{۲}+۲x-y-\frac{۱۱}{۴}=۰$

۲۵۴۰- ۵۵٪ جمعیت کشوری را مردان و بقیه را زنان تشکیل می‌دهند و ۲۰٪ مردان این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند. با فردی در این کشور برخورد می‌کنیم. اگر احتمال داشتن تحصیلات دانشگاهی این فرد ۲۴/۵٪ باشد، چند درصد از زنان این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

ارزیابی

درست	نادرست	نزده	درصد

۱ **(۲)** چند جملهٔ اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینهٔ (۱) ۲,۳,۴,۵,... گزینهٔ (۲) ۲,۳,۱۰,۱۵,...

گزینهٔ (۳) ۲,۳,۱۰,۲۳,... گزینهٔ (۴) ۲,۳,۸,۱۷,...

بنابراین فقط $a_n=n^۲-(-۱)^n$ می‌تواند جملهٔ عمومی دنباله باشد.

۲ **(۱)** توجه کنید که اگر $n\geq ۵$، آن‌گاه $\frac{۴}{n}<۱$، پس $[\frac{۴}{n}]=۰$. از طرف دیگر، اگر $n\geq ۵$، آن‌گاه $-\frac{۵}{n}<۰$ و $-۱\leq -\frac{۵}{n}$، پس $[-\frac{۵}{n}]=-۱$. در نتیجه $a_۵=a_۶=\cdots=a_{۲۰}=-۱$.

از طرف دیگر،

$$a_۱=[\frac{۴}{۱}]+[-\frac{۵}{۱}]=۴-۵=-۱,\quad a_۲=[\frac{۴}{۲}]+[-\frac{۵}{۲}]=۲-۳=-۱$$

$$a_۳=[\frac{۴}{۳}]+[-\frac{۵}{۳}]=۱-۲=-۱,\quad a_۴=[\frac{۴}{۴}]+[-\frac{۵}{۴}]=۱-۲=-۱$$

بنابراین مجموع بیست جملهٔ اول برابر -۲۰ است.

۳ **(۳)** می‌خواهیم عدد طبیعی k را طوری پیدا کنیم که $(-۱)^k\frac{k-۴}{۷-k}=\frac{۵}{۴}$.

دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت (۱): k فرد است. در این صورت $(-۱)^k=-۱$، پس

$$(-۱)\frac{k-۴}{۷-k}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\frac{k-۴}{k-۷}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow ۴(k-۴)=۵(k-۷)$$

$$۴k-۱۶=۵k-۳۵\Rightarrow k=۳۵-۱۶=۱۹$$

حالت (۲): k زوج باشد. در این صورت $(-۱)^k=۱$، پس

$$\frac{k-۴}{۷-k}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow ۴(k-۴)=۵(۷-k)\Rightarrow ۴k-۱۶=۳۵-۵k\Rightarrow ۹k=۴۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین $k=۱۹$. پس $a_{k-۳}=a_{۱۶}=(-۱)^{۱۶}\frac{۱۶-۴}{۷-۱۶}=\frac{۱۲}{-۹}=-\frac{۴}{۳}$

۴ **(۴)** در این دنباله، هر جمله از دو برابر جملهٔ قبل، دو واحد کمتر است، پس هشت جملهٔ اول برابر است با

$$a_۱=۳,\quad a_۲=۲\times ۳-۲=۴,\quad a_۳=۲\times ۴-۲=۶$$

$$a_۴=۲\times ۶-۲=۱۰,\quad a_۵=۲\times ۱۰-۲=۱۸,\quad a_۶=۲\times ۱۸-۲=۳۴$$

$$a_۷=۲\times ۳۴-۲=۶۶,\quad a_۸=۲\times ۶۶-۲=۱۳۰$$

بنابراین $a_۸-a_۷=۱۳۰-۶۶=۶۴$.

۵ **(۲)** اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به‌صورت $a-d,a,a+d$ در نظر می‌گیریم.

مجموع اندازهٔ زاویه‌های مثلث برابر ۱۸۰° است. پس

$$a-d+a+a+d=۱۸۰^\circ\Rightarrow a=۶۰^\circ$$

میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث همان a است که برابر ۶۰° است.

۶ **(۴)** **راه‌حل اول** با قرار دادن $n=۱$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۱=۱$. با قرار دادن $n=۲$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۲=\frac{۱}{۳}$. بنابراین $d=a_۲-a_۱=-\frac{۲}{۳}$. پس $a_۱-d=۱+\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۳}$.

راه‌حل دوم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول $a_۱$ به‌صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ است. بنابراین $a_n=dn+(a_۱-d)=-\frac{۲}{۳}n+\frac{۵}{۳}$. پس

$$a_۱-d=\frac{۵}{۳}$$

۷ **(۱)** چون دنباله حسابی است، پس $۲a-۱=\frac{a+۱-۳a}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$

بنابراین $d=(۲a-۱)-a=a-۱=-\frac{۱}{۲}$. پس جملهٔ عمومی دنباله به شکل زیر است:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(n-۱)=۱-\frac{n}{۲}$$

۸ **(۲)** ابتدا توجه کنید که $\sqrt[۴]{۲}$ واسطهٔ هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ است، پس

$$(\sqrt[۴]{۲})^۲=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}}$، در نتیجه

$$a_{۱۳}=a_۱r^{۱۲}=\sqrt{a}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}})^{۱۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۲^۴}{۲^۳})=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}\times ۲=\frac{\sqrt[۶]{۲^۳}}{\sqrt[۶]{۲^۲}}(۲)=۲\sqrt[۶]{۲}$$

۹ **(۲)** چون $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt{۲}$، پس $\frac{a_۱r^۷}{a_۱r^۵}=\sqrt{۲}$. در نتیجه $r^۲=\sqrt{۲}$. بنابراین

$$\frac{a_۷}{a_۳}=\frac{a_۱r^۶}{a_۱r^۲}=r^۴=(r^۲)^۲=\sqrt{۲}^۲=۲$$

۱۰ **(۴)** جملات را به‌صورت $a,a+۳d,a+۱۰d$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(a+۳d)^۲=a(a+۱۰d)\Rightarrow a^۲+۹d^۲+۶ad=a^۲+۱۰ad\Rightarrow ۹d^۲=۴ad\Rightarrow d=\frac{۴}{۹}a$$

بنابراین جملات دنبالهٔ هندسی $a,\frac{۷}{۳}a,\frac{۴۹}{۹}a$ هستند و قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\frac{۷}{۳}a}{a}=\frac{۷}{۳}$.

۱۱ **(۴)** **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$x(\sqrt[۷]{\frac{۱}{x^۸}-\frac{۱}{x^۷}})=\sqrt[۷]{x^۷(\frac{۱}{x^۸}-\frac{۱}{x^۷})}=\sqrt[۷]{\frac{x^۷}{x^۸}-\frac{x^۷}{x^۷}}=\sqrt[۷]{\frac{۱}{x}-۱}$$

در نتیجه $\sqrt[۷]{\frac{۱}{x}-۱}=\frac{۱}{۲}$، پس

$$\frac{۱}{x}-۱=\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱۲۹}{۱۲۸}\Rightarrow x=\frac{۱۲۸}{۱۲۹}$$

راه‌حل دوم از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$x\sqrt[۷]{\frac{۱}{x^۷}(\frac{۱}{x}-۱)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x(\frac{۱}{x})\sqrt[۷]{\frac{۱}{x}-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{x}-۱=(\frac{۱}{۲})^۷=\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱۲۹}{۱۲۸}\Rightarrow x=\frac{۱۲۸}{۱۲۹}$$

۱۲ **(۳)** ابتدا توجه کنید که x مثبت است. می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{۳}}=\sqrt[۳]{۳\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt[۴]{۳}=\sqrt[۳]{\sqrt{۹x}}=\sqrt[۶]{۹x}\Rightarrow(\sqrt[۴]{۳})^{۱۲}=(\sqrt[۶]{۹x})^{۱۲}$$

$$۳^۳=(۹x)^۲\Rightarrow ۳\sqrt{۳}=۹x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۳ **(۴)** می‌توان نوشت

$$\frac{a^۴+b^۴}{a^۲b^۲}=\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}=(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})^۲+۲\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=۸^۲+۲=۶۶$$

۱۴ **(۳)** طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳})(\underbrace{(\sqrt[۳]{۵})^۲-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۳})^۲}_{a})=(\sqrt[۳]{۵})^۳+(\sqrt[۳]{۳})^۳=۵+۳=۸$$

بنابراین $\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳}=\frac{۸}{a}$.

۱۵ **(۲)** **راه‌حل اول** عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$۶x^۲+۷x-۳=۶x^۲-۲x+۹x-۳=۲x(۳x-۱)+۳(۳x-۱)=(۳x-۱)(۲x+۳)$$

پس عامل $۳x-۱$ در تجزیهٔ عبارت وجود دارد.

راه‌حل دوم عبارت مورد نظر را A می‌نامیم و آن را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A=۶x^۲+۷x-۳\Rightarrow ۶A=۳۶x^۲+۴۲x-۱۸=(۶x-۲)(۶x+۹)$$

$$=۲\times ۳(۳x-۱)(۲x+۳)$$

بنابراین $A=(۳x-۱)(۲x+۳)$ و عامل $۳x-۱$ در تجزیهٔ وجود دارد.

۲۷۴ **۴** **راه‌حل اول** مجموعهٔ مرجع $\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ است، پس

$$B'=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}\ ,\ C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$$

در نتیجه $A\cap B'=\{۱,۶\}\Rightarrow(A\cap B')\cup C=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$

$n((A\cap B')\cup C)=۷$ ، بنابراین مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$ ، هفت عضو دارد.

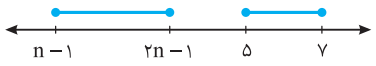
راه‌حل دوم توجه کنید که $A\cap B'=A-B=\{۱,۶\}$ ، $C=\{۲,۳,۷,۸,۹\}$

بنابراین $(A\cap B')\cup C=\{۱,۶\}\cup\{۲,۳,۷,۸,۹\}=\{۱,۲,۳,۶,۷,۸,۹\}$

پس مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$ ، هفت عضو دارد.

۲۷۵ **۴** ابتدا توجه کنید برای اینکه $[n-۱\ ,\ ۲n-۱]$ بازه باشد، باید $n>۰$. اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول



$$۲n-۱<۵\Rightarrow n<۳$$

حالت دوم

$$n-۱>۷\Rightarrow n>۸$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۲۷۶ **۱** توجه کنید که $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

پس $n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲۴$

به این ترتیب $\begin{cases}n(A)+n(B)=۲۴\\ n(A)-n(B)=۴\end{cases}\Rightarrow n(B)=۱۰$

۲۷۷ **۱** توجه کنید که $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$

طبق فرض $n(A\cup B)=۹$ ، پس $n(B)=۹$. از طرف دیگر،

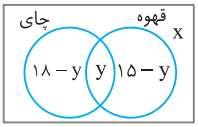
$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')\Rightarrow n(A)+۱۴=۹+۱۰\Rightarrow n(A)=۵$$

۲۷۸ **۲** فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۱۰۰-x=۸۵+۷۰-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۵۵+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=۰$ ، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۲۷۹ **۲** **راه‌حل اول** فرض کنید x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $۳۰-x$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.



$$x+۱۸-y+y+۱۵-y=۳۰\Rightarrow x=y-۳$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x\geq۰\ ,\ y\geq۰\ ,\quad ۱۵-y\geq۰\Rightarrow y\leq۱۵\Rightarrow ۰\leq y\leq۱۵$$

پس $۰\leq y-۳\leq۱۲\Rightarrow ۰\leq x\leq۱۲$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=۱۲+۱۵-n(A\cup B)=۲۷-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\geq n(B)=۱۵$ ، بنابراین

$$n(A\cap B)=۲۷-n(A\cup B)\leq۲۷-۱۵=۱۲$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$ ، این وضعیت پیش می‌آید).

۲۸۰ **۳** چون $A\subseteq B$ ، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\leq n(B)$$

اکنون توجه کنید که $۱۴=n(A)+۲n(B)\leq n(B)+۲n(B)=۳n(B)$ و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\geq۵$. بنابراین $n(A\cup B)=n(B)\geq۵$.

۲۸۱ **۳** شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم، $۹(n-۱)+۴$ یعنی $۹n-۵$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۲۸۲ **۳** **راه‌حل اول** تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	…	n
تعداد نقاط	۱+۳+۱	۲+۴+۲	۳+۵+۳	…	n+(n+۲)+n

بنابراین در شکل nاُم، $۳n+۲$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه‌حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشهٔ شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nاُم برابر $۳(n+۲)$ خواهد بود. پس در شکل nاُم، $۳(n+۲)-۴$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۲۸۳ **۳** تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل nاُم برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+n$.

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل nاُم برابر است با $۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)$. بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشدهٔ آن است. پس در شکل سی‌اُم، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰تا است.

۲۸۴ **۲** تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nاُم برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با $\frac{\frac{n(n-۱)}{۲}}{n^۲}=\frac{n-۱}{۲n}$. به این ترتیب $\frac{n-۱}{۲n}=\frac{۸}{۱۷}$. پس $n=۱۷$.

۲۸۵ **۲** با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^۲}{۲}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها $n^۲-۱$ خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس $\frac{n^۲-۱}{۲}+۱$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^۲}{۲}$ نیز عددی زوج است.

پس در شکل‌های با شمارهٔ زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شمارهٔ فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل nاُم وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^۲-۱}{۲}+۱=۱۱۳\Rightarrow n^۲-۱=۲۲۴\Rightarrow n^۲=۲۲۵\Rightarrow n=۱۵$$

۲۸۶ **۳** چون همهٔ جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_۱=a_۲\Rightarrow\frac{۲-k}{۸}=\frac{۴-k}{۱۳}\Rightarrow ۲۶-۱۳k=۳۲-۸k\Rightarrow ۵k=-۶\Rightarrow k=-\frac{۶}{۵}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{۶}{۵}$ ، آن‌گاه $a_n=\frac{۲}{۵}$.

۲۸۷ **۲** به چند جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_۲=\frac{۱}{۲}a_۱=\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۳=\frac{۲}{۳}a_۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}\ ,\quad a_۴=\frac{۳}{۴}a_۳=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n=\frac{۱}{n}$ ، پس $a_{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$.

۲۸۸ **۴** بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=-۳x^۲+۱۲x+c$ به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{-۶}=۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ مورد نظر برابر $a_۲$ است. در نتیجه $a_۲=۸\Rightarrow -۳\times۴+۱۲\times۲+c=۸\Rightarrow c=-۴$

۲۸۹ **۳** توجه کنید که

$$a_۱=\log_۲\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۲=\log_۲\frac{۲}{۳}\ ,\quad a_۳=\log_۲\frac{۳}{۴}\ ,\quad \ldots$$

بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n=\log_۲\frac{۱}{۲}+\log_۲\frac{۲}{۳}+\log_۲\frac{۳}{۴}+\cdots+\log_۲\frac{n-۱}{n}+\log_۲\frac{n}{n+۱}$$
$$=\log_۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\cdots\times\frac{n-۱}{n}\times\frac{n}{n+۱})=\log_۲\frac{۱}{n+۱}=-\log_۲(n+۱)$$

بنابراین $-\log_۲(n+۱)=-۳\Rightarrow n+۱=۲^۳=۸\Rightarrow n=۷$

۲۹۰ **۱** ابتدا توجه کنید که

$$a_n=[\frac{۸n}{n+۱}]=[\frac{۸n+۸-۸}{n+۱}]=[\frac{۸(n+۱)-۸}{n+۱}]=[۸-\frac{۸}{n+۱}]=۸+[-\frac{۸}{n+۱}]$$

برای پیدا کردن مجموع $a_۱$ تا $a_{۳۰}$ ابتدا جزء صحیح‌ها را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$[-\frac{۸}{۲}]=-۴,\quad [-\frac{۸}{۳}]=-۳$$
$$[-\frac{۸}{۴}]=[-\frac{۸}{۵}]=[-\frac{۸}{۶}]=[-\frac{۸}{۷}]=-۲$$
$$[-\frac{۸}{۸}]=[-\frac{۸}{۹}]=\cdots=[-\frac{۸}{۳۱}]=-۱$$

مجموع این جزء صحیح‌ها برابر است با $-۴-۳+۴\times(-۲)+۲۴\times(-۱)=-۳۹$

بنابراین $a_۱+\cdots+a_{۳۰}=۳۰\times۸-۳۹=۲۰۱$

۲۹۱ **۳** چون $a_{n+۱}-a_n=-۲$، پس دنبالهٔ مورد نظر دنباله‌ای حسابی است که قدرنسبت آن -۲ است. چون جملهٔ اول برابر ۳ است، پس

$$a_{۵۰}=a_۱+۴۹d=۳+۴۹(-۲)=-۹۵,\quad a_{۱۰۰}=a_۱+۹۹d=۳+۹۹(-۲)=-۱۹۵$$

بنابراین $\frac{a_{۱۰۰}}{a_{۵۰}}=\frac{-۱۹۵}{-۹۵}=\frac{۳۹}{۱۹}$.

۲۹۲ **۲** از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$۳(a_۱+۳d)+۴(a_۱+۴d)-۷(a_۱+۸d)=۱۲۴\Rightarrow -۳۱d=۱۲۴\Rightarrow d=-۴$$

بنابراین

$$۵a_۵+۷a_۷-۱۲a_{۱۲}=۵(a_۱+۴d)+۷(a_۱+۶d)-۱۲(a_۱+۱۱d)$$
$$=-۷۰d=-۷۰(-۴)=۲۸۰$$

۲۹۳ **۴** در دنبالهٔ حسابی میانگین جمله‌های اول و سوم برابر جملهٔ دوم است.

بنابراین

$$\frac{۳x-۱+۴x-۲}{۲}=x^۲-۹\Rightarrow ۲x^۲-۷x-۱۵=۰$$
$$(۲x+۳)(x-۵)=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲},\ x=۵$$

اگر قدرنسبت دنباله برابر d باشد، آن‌گاه $۲d=(۴x-۲)-(۳x-۱)=x-۱\Rightarrow d=\frac{x-۱}{۲}$

بنابراین $x=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow d=\frac{-\frac{۳}{۲}-۱}{۲}=-\frac{۵}{۴}$, $x=۵\Rightarrow d=\frac{۵-۱}{۲}=۲$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای قدرنسبت دنباله برابر است با $-\frac{۵}{۴}+۲=\frac{۳}{۴}$.

۲۹۴ **۲** چون $a_۱=-۱$ و $d=۲-(-۱)=۳$، پس $a_n=-۱+۳(n-۱)$ یعنی $a_n=۳n-۴$. بنابراین $a_k=۳k-۴=۲۱۸$، پس $k=۷۴$.

۲۹۵ **۲** چون $a_۱=۲$ و $d=۴$، پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=۲+۴(n-۱)=۴n-۲$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n<۵۰۰$ باشد. یعنی $۴n-۲<۵۰۰\Rightarrow n<\frac{۵۰۲}{۴}\Rightarrow n\le۱۲۵$

پس ۱۲۵ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۲۹۶ **۲** از $a_۱+a_۳=۱۶$ نتیجه می‌شود $a_۱+a_۱+۲d=۱۶\Rightarrow a_۱+d=۸$

چون $a_۲+a_۵+a_۸=۵۱$، پس

$$a_۱+d+a_۱+۴d+a_۱+۷d=۵۱\Rightarrow ۳a_۱+۱۲d=۵۱\Rightarrow a_۱+۴d=۱۷$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a_۱+d=۸\\ a_۱+۴d=۱۷\end{cases}$ به‌دست می‌آید $a_۱=۵$ و $d=۳$. بنابراین

$$a_۹=a_۱+۸d=۵+۸\times۳=۲۹$$

۲۹۷ **۴** زاویه‌های پنج‌ضلعی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-۲d,a-d,a,a+d,a+۲d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازهٔ زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر ۵۴۰° است، پس

$$a-۲d+a-d+a+a+d+a+۲d=۵۴۰^\circ$$

بنابراین $۵a=۵۴۰^\circ$ و در نتیجه $a=۱۰۸^\circ$. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه ۸۶° است، پس $a-۲d=۸۶^\circ$ و در نتیجه $d=۱۱^\circ$. پس اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه یعنی $a+۲d$ برابر است با $۱۰۸^\circ+۲\times۱۱^\circ=۱۳۰^\circ$.

۲۹۸ **۲** **راه‌حل اول** چون $a_۱=\sqrt{۳}-۵$ و $a_۶=\sqrt{۳}+۵$، پس

$$a_۶=a_۱+۵d\Rightarrow \sqrt{۳}+۵=\sqrt{۳}-۵+۵d\Rightarrow d=۲$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{۳}-۵+۲$ یا همان $\sqrt{۳}-۳$ است.

راه‌حل دوم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر است با

$$d=\frac{(\sqrt{۳}+۵)-(\sqrt{۳}-۵)}{۴+۱}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با $(\sqrt{۳}-۵)+۲=\sqrt{۳}-۳$

۲۹۹ **۴** سه جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-d,a,a+d$ در نظر می‌گیریم.

بنابراین $a-d+a+a+d=۱۵\Rightarrow ۳a=۱۵\Rightarrow a=۵$

از طرف دیگر، $(a-d)\times a\times(a+d)=۴۵\Rightarrow a(a^۲-d^۲)=۴۵$

چون $a=۵$، پس $۵(۲۵-d^۲)=۴۵\Rightarrow d^۲=۱۶\Rightarrow d=\pm۴$

۳۰۰ **۲** فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$a_۱=d\ ,\quad a_n=a_۱+(n-۱)d=d+(n-۱)d=nd$$

به این ترتیب

$$a_۱a_۲a_۳\ldots a_۹=۱۰^۸\times۱۰!\Rightarrow d(۲d)(۳d)\cdots(۹d)=۱۰^۸\times۱۰!$$
$$d^۹\times۹!=۱۰^۹\times۹!\Rightarrow d=۱۰$$

بنابراین $a_{۱۰}=۱۰d=۱۰۰$.

۳۰۱ **۳** قدرنسبت این دنباله‌ها را به‌ترتیب با $d_۱$ و $d_۲$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که

$$a_۲+b_۳=a_۱+۲d_۱+b_۱+۲d_۲=a_۱+b_۱+۲(d_۱+d_۲)$$
$$۲۱=۷+۲(d_۱+d_۲)\Rightarrow d_۱+d_۲=۷$$

بنابراین

$$a_۵+b_۵=a_۱+۴d_۱+b_۱+۴d_۲=a_۱+b_۱+۴(d_۱+d_۲)=۷+۴\times۷=۳۵$$

۳۰۲ **۴** **راه‌حل اول** چون $a+b,a+c,b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c-(a+b)=(b+c)-(a+c)\Rightarrow c-b=b-a$$

در نتیجه a,b,c دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون $a+b,a+c,b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c=\frac{a+b+b+c}{۲}\Rightarrow ۲(a+c)=a+۲b+c\Rightarrow a+c=۲b$$

در نتیجه a,b,c دنباله‌ای حسابی است.

۳۰۳ (۳) جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=۱۹۶-۴(n-۱)=۲۰۰-۴n$ است.

بنابراین $a_{۵۰}=۰$، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -۴ است، پس

$$a_{۴۷}=۱۲,\quad a_{۴۸}=۸,\quad a_{۴۹}=۴,\quad a_{۵۰}=۰$$

۳۰۴ (۲) ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم: $d=\frac{a_{۱۰}-a_۲}{۱۰-۲}=-\frac{۳۲}{۸}=-۴$

بنابراین $a_۴=a_۱+۳d=a_۱-۱۲=۱۵$ و در نتیجه $a_۱=۲۷$. بنابراین جملهٔ عمومی دنباله می‌شود $a_n=۲۷-۴(n-۱)=۳۱-۴n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n>۰\Rightarrow ۳۱-۴n>۰\Rightarrow n\le ۷$$

بنابراین هفت جملهٔ نخست دنباله مثبت هستند.

۳۰۵ (۲) چون $x^۲-۸x+۱۲=(x-۶)(x-۲)$، پس جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۲، a و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$۶,۲,a\Rightarrow\frac{۶+a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲,\qquad ۲,۶,a\Rightarrow\frac{۲+a}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰$$

$$۶,a,۲\Rightarrow\frac{۶+۲}{۲}=a\Rightarrow a=۴,\qquad ۲,a,۶\Rightarrow\frac{۲+۶}{۲}=a\Rightarrow a=۴$$

$$a,۶,۲\Rightarrow\frac{a+۲}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰,\qquad a,۲,۶\Rightarrow\frac{a+۶}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۳۰۶ (۲) اگر قدرنسبت این دنباله برابر d باشد، آن‌گاه

$$۳a_۸=۵a_{۱۳}\Rightarrow ۳(a_۱+۷d)=۵(a_۱+۱۲d)$$

$$۳a_۱+۲۱d=۵a_۱+۶۰d\Rightarrow -۳۹d=۲a_۱\Rightarrow d=-\frac{۲a_۱}{۳۹}$$

بنابراین،

$$a_n=a_۱+(n-۱)d=a_۱-\frac{۲a_۱}{۳۹}(n-۱)=\frac{a_۱}{۳۹}(۳۹-۲(n-۱))=\frac{a_۱}{۳۹}(۴۱-۲n)$$

چون $a_۱$ مثبت است، پس $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۲۰}$ مثبت‌اند و جملات $a_{۲۱}$، $a_{۲۲}$ و ... همگی منفی هستند. به این ترتیب، در بین گزینه‌های داده شده $S_{۲۰}$ از بقیه بزرگ‌تر است.

۳۰۷ (۳) اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+d^۲-۲ad+a^۲=a^۲+d^۲+۲ad$$

$$a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{a}{a-d}=\frac{۴d}{۴d-d}=\frac{۴d}{۳d}=\frac{۴}{۳}$

۳۰۸ (۳) چهار جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-۳d, a-d, a+d, a+۳d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین $a-۳d+a-d+a+d+a+۳d=۰\Rightarrow ۴a=۰\Rightarrow a=۰$

پس دنباله به‌صورت $-۳d, -d, d, ۳d$ است و $۹d^۲+d^۲+d^۲+۹d^۲=۸۰\Rightarrow d^۲=۴$

بنابراین، حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(۳d)(-۳d)=-۹d^۲=-۳۶$$

۳۰۹ (۳) ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد. پس

$$m^۲+۴<m^۲+۳m+۴$$

اگر $m-۱$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ حاصل برابر است با

$$d=\frac{m^۲+۳m+۴-m^۲-۴}{(m-۱)+۱}=\frac{۳m}{m}=۳$$

۳۱۰ (۲) جملهٔ نخست دنباله برابر ۲ و قدرنسبت آن برابر ۵ است، پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت $a_n=۲+۵(n-۱)=۵n-۳$ است. تعداد عددهایی که در ۱۹ دستهٔ نخست آمده‌اند برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+۱۹=۱۹۰$. بنابراین جملهٔ نخست دستهٔ بیستم $a_{۱۹۱}$ و جملهٔ آخر آن $a_{۲۱۰}$ است. میانگین این عددها برابر است با

$$\frac{a_{۱۹۱}+\cdots+a_{۲۱۰}}{۲۰}=\frac{۵(۱۹۱)-۳+\cdots+۵(۲۱۰)-۳}{۲۰}$$

$$=\frac{۵(۱۹۱+\cdots+۲۱۰)-۶۰}{۲۰}=\frac{۵((۱+۱۹۰)+\cdots+(۲۰+۱۹۰))-۶۰}{۲۰}$$

$$=\frac{۵(۱+\cdots+۲۰+۲۰\times۱۹۰)-۶۰}{۲۰}=\frac{۵\times۲۱۰+۱۹۰۰۰-۶۰}{۲۰}=۹۹۹/۵$$

۳۱۱ (۱) دنبالهٔ a_n دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه

$$a_۳=a_۱r^۲\Rightarrow a_۳=a_۱(\frac{۳}{۲})^۲=۳\Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$a_{۲۰}-a_{۱۷}=a_۱r^{۱۹}-a_۱r^{۱۶}=a_۱r^{۱۶}(r^۳-۱)$$

$$=\frac{۴}{۳}(\frac{۳}{۲})^{۱۶}((\frac{۳}{۲})^۳-۱)=\frac{۴}{۳}(\frac{۳}{۲})^{۱۶}\frac{۱۹}{۸}=\frac{۱۹}{۶}(\frac{۳}{۲})^{۱۶}$$

۳۱۲ (۳) چون $۴^{۳x}$ واسطهٔ هندسی $۲^{x-۴}$ و $۸^{۲-۳x}$ است، پس

$$(۴^{۳x})^۲=۲^{x-۴}\times۸^{۲-۳x}\Rightarrow ۴^{۶x}=۲^{x-۴}\times۲^{۶-۹x}\Rightarrow ۲^{۱۲x}=۲^{۲-۸x}$$

بنابراین $۱۲x=۲-۸x$، یعنی $x=\frac{۱}{۱۰}$. بنابراین جملهٔ نخست برابر است با

$$a_۱=۲^{\frac{۱}{۱۰}-۴}=۲^{-\frac{۳۹}{۱۰}}$$

قدرنسبت دنباله هم برابر است با $r=\frac{۴^{۳x}}{۲^{x-۴}}=\frac{۲^{۶x}}{۲^{x-۴}}=۲^{۵x+۴}$

که به‌ازای $x=\frac{۱}{۱۰}$ می‌شود $۲^{\frac{۱}{۲}+۴}=۲^{\frac{۹}{۲}}$

بنابراین جملهٔ یازدهم برابر است با $a_{۱۱}=a_۱r^{۱۰}=۲^{-\frac{۳۹}{۱۰}}(۲^{\frac{۹}{۲}})^{۱۰}=۲^{\frac{۴۱۱}{۱۰}}=\sqrt[۱۰]{۲^{۴۱۱}}$

نسبت جملهٔ یازدهم به $\sqrt[۱۰]{۲}$ برابر است با $\frac{\sqrt[۱۰]{۲^{۴۱۱}}}{\sqrt[۱۰]{۲}}=\sqrt[۱۰]{۲^{۴۱۱}}=۲^{۴۱}$

۳۱۳ (۱) فرض می‌کنیم جواب‌های معادله $x_۱$ و $x_۲$ باشند. در این صورت

$$\frac{x_۱+x_۲}{۲}=۴/۵\Rightarrow x_۱+x_۲=۹,\quad \sqrt{x_۱x_۲}=۱/۵=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x_۱x_۲=\frac{۹}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل $x^۲-۹x+\frac{۹}{۴}=۰$ است و جواب‌های آن برابرند با $\frac{۹\pm\sqrt{۹^۲-۹}}{۲}=\frac{۹\pm۶\sqrt{۲}}{۲}$. نسبت جواب بزرگ‌تر به جواب کوچک‌تر برابر است با

$$\frac{۹+۶\sqrt{۲}}{۹-۶\sqrt{۲}}=\frac{۹+۶\sqrt{۲}}{۹-۶\sqrt{۲}}\times\frac{۹+۶\sqrt{۲}}{۹+۶\sqrt{۲}}=\frac{(۹+۶\sqrt{۲})^۲}{۹}=(۳+۲\sqrt{۲})^۲=۱۷+۱۲\sqrt{۲}$$

۳۱۴ (۳) از تساوی $a_۱a_۶=۲۷$ نتیجه می‌شود

$$a_۱\times a_۱r^۵=۲۷\Rightarrow a_۱^۲r^۵=۲۷$$

از تساوی $a_۲a_۴=۹$ به‌دست می‌آید $a_۱r\times a_۱r^۳=۹\Rightarrow a_۱^۲r^۴=۹$

از تقسیم طرفین دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\frac{a_۱^۲r^۵}{a_۱^۲r^۴}=\frac{۲۷}{۹}\Rightarrow r=۳$

با جای‌گذاری $r=۳$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_۱=\pm\frac{۱}{۳}$. چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_۱=\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $a_۵=a_۱r^۴=\frac{۱}{۳}\times۳^۴=۲۷$.

۳۱۵ **۲** مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_5+a_8=a_1r^4+a_1r^7=a_1r^4(1+r^3)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با $a_7+a_8=a_1r^6+a_1r^7=a_1r^6(1+r)$

بنابراین

$$\frac{a_5+a_8}{a_7+a_8}=\frac{a_1r^4(1+r^3)}{a_1r^6(1+r)}=\frac{1+r^3}{r^2(1+r)}=\frac{1-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})}=7$$

۳۱۶ **۳** ایـن جمـلات را به‌صـورت $a, ar, ar^2, \frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}$ در نظـر می‌گیریـم.

بنابراین $\frac{a}{r^2}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^2=1024\Rightarrow a^5=2^{10}=4^5$

در نتیجه جملهٔ وسط برابر ۴ است.

۳۱۷ **۱** **راه‌حل اول** این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{2},\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,16\sqrt{2}$$

پس $a_1=\sqrt{2}$ و $a_9=16\sqrt{2}$. بنابراین

$$a_1r^8=16\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}r^8=16\sqrt{2}\Rightarrow r^8=16\Rightarrow(r^2)^4=2^4\Rightarrow r^2=2$$

در نتیجه $a_3=a_1r^2=2\sqrt{2}$.

راه‌حل دوم ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{7+1}=\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow r^8=16=2^4\Rightarrow r=\pm\sqrt{2}$$

$$a_3=a_1r^2=\sqrt{2}\times(\pm\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}$$

۳۱۸ **۲** قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با

$$r=\frac{\log_{16}a}{\log_4 a}=\frac{\frac{\log a}{\log 16}}{\frac{\log a}{\log 4}}=\frac{\log 4}{\log 16}=\frac{\log 4}{2\log 4}=\frac{1}{2}$$

بنابراین $a_7=a_1r^6\Rightarrow\frac{1}{32}=\log_4 a\times\frac{1}{64}\Rightarrow\log_4 a=2\Rightarrow a=4^2=16$

۳۱۹ **۴** توجه کنید که

$$a_5-a_1=130\Rightarrow a_1r^4-a_1=130\Rightarrow a_1(r^4-1)=130$$

$$a_4-a_2=25\Rightarrow a_1r^3-a_1r=25\Rightarrow a_1r(r^2-1)=25$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{r^4-1}{r(r^2-1)}=\frac{130}{25}\Rightarrow\frac{(r^2-1)(r^2+1)}{r(r^2-1)}=\frac{26}{5}\Rightarrow\frac{r^2+1}{r}=\frac{26}{5}$$

$$5(r^2+1)=26r\Rightarrow 5r^2-26r+5=0\Rightarrow r=5\ ,\ r=\frac{1}{5}\ (\text{غ.ق.ق})$$

به این ترتیب، $a_1r(r^2-1)=25\Rightarrow a_1\times 5\times 24=25\Rightarrow a_1=\frac{5}{24}$

در نتیجه $a_2=a_1r=\frac{25}{24}$.

۳۲۰ **۱** از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a_4-a_1=-(a_3-a_2)=a_2-a_3$$

بنابراین

$$a_4+a_3=a_1+a_2\Rightarrow a_3r+a_3=a_1+a_1r$$

$$a_3(r+1)=a_1(1+r)\Rightarrow(r+1)(a_3-a_1)=0$$

بنابرایـن $r=-1$ یا $a_3=a_1$. توجه کنید که اگر $r=-1$، آن‌گاه $a_3=a_1(-1)^2=a_1$.

بنابرایـن در هر صورت $a_3=a_1$. اکنون توجه کنید که اگر $a_1=0$، همهٔ جمله‌های دنباله برابر صفر می‌شوند و تساوی داده شده در صورت مسئله بی‌معنی می‌شود. بنابراین $a_1\neq 0$ و

$$a_3=a_1\Rightarrow a_1r^2=a_1\xrightarrow{a_1\neq 0}r^2=1\xrightarrow{r\neq 1}r=-1$$

به این ترتیب $\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_1(-1)^3}{a_1}+\frac{a_1}{a_1(-1)}=-1-1=-2$

۳۲۱ **۳** ابتدا توجه کنید که

$$A=\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_8=\log(a_1a_2\ldots a_8)$$

از طرف دیگر، چون $a_1, a_2, \ldots$ دنباله‌ای هندسی است، پس

$$a_1a_8=a_2a_7=a_3a_6=a_4a_5=10$$

در نتیجه $A=\log(10\times10\times10\times10)=\log 10^4=4$.

۳۲۲ **۳** در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r^6=\frac{b}{a}$. در حالتی که چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r'^5=(2r)^5=\frac{b}{a}$. بنابراین

$$r^6=(2r)^5\Rightarrow r^6=32r^5\Rightarrow r=32$$

۳۲۳ **۳** این سه عدد را به‌صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم. پس

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=64\Rightarrow a^3=64\Rightarrow a=4$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r}+a+ar=14\Rightarrow a(\frac{1}{r}+1+r)=14$$

$$4(\frac{1}{r}+1+r)=14\Rightarrow 2r^2-5r+2=0\Rightarrow r=\frac{1}{2}, r=2$$

بنابراین سه جملهٔ مورد نظر به ازای $r=\frac{1}{2}$، به‌صورت $8,4,2$ و به ازای $r=2$، به‌صورت $2,4,8$ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۳۲۴ **۳** جملهٔ عمومی دنباله را a_n و قدرنسبت را r بگیرید. ابتدا توجه کنید که

$a_2a_3=a_1r\times a_3=a_1(ra_3)=a_1a_4$، زیرا $a_2a_3=a_1a_4$

بنابرایـن $a_1+a_4=\frac{28}{9}$ و $a_1a_4=\frac{1}{3}$. در نتیجـه a_1 و a_4 جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^2-\frac{28}{9}t+\frac{1}{3}=0\Rightarrow 9t^2-28t+3=0$$

$$t=\frac{28\pm\sqrt{28^2-4\times27}}{18}=\frac{28\pm26}{18}=\frac{14\pm13}{9}$$

اگر $a_1=\frac{14-13}{9}=\frac{1}{9}$، آن‌گاه $a_4=\frac{14+13}{9}=3$. بنابراین $r^3=\frac{a_4}{a_1}=27\Rightarrow r=3$

در نتیجه $a_5=a_4r=9$.

اگر $a_1=3$ و $a_4=\frac{1}{9}$، آن‌گاه $r^3=\frac{a_4}{a_1}=\frac{1}{27}\Rightarrow r=\frac{1}{3}$

در نتیجه $a_5=a_4r=\frac{1}{27}$. بنابراین بیشترین مقدار ممکن a_5 برابر ۹ است.

۳۲۵ **۲** طـول اضـلاع مثلـث را a، ar و ar^2 در نظر می‌گیریـم. طبق قضیهٔ فیثاغورس، $a^2+(ar)^2=(ar^2)^2$. بنابراین

$$a^2(1+r^2)=a^2r^4\Rightarrow r^4-r^2-1=0\Rightarrow r^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۳۲۶ **۱** اگر قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی r باشد، آن‌گاه

$$r=\frac{a+\log_4 3}{a+\log_2 3}=\frac{a+\log_8 3}{a+\log_4 3}$$

توجه کنید که اگر $k=\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$، آن‌گاه $k=\frac{x-z}{y-t}$. در نتیجه

$$r=\frac{a+\log_4 3-(a+\log_8 3)}{a+\log_2 3-(a+\log_4 3)}=\frac{\log_4 3-\log_8 3}{\log_2 3-\log_4 3}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\log_2 3-\frac{1}{3}\log_2 3}{\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 3}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

۳۲۷ **۴** فرض کنید قدرنسبت این دنباله برابر r باشد. در این صورت

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{62}{7\sqrt{2}-6} \quad (1)$$

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=12+14\sqrt{2}$$

از تساوی دوم نتیجه می‌شود

$$a_1r^2+a_2r^2+a_3r^2+a_4r^2+a_5r^2=12+14\sqrt{2}$$

$$r^2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=12+14\sqrt{2} \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$r^2=(12+14\sqrt{2})\frac{7\sqrt{2}-6}{62}=\frac{2(6+7\sqrt{2})(7\sqrt{2}-6)}{62}=\frac{(7\sqrt{2})^2-6^2}{31}=\frac{62}{31}=2$$

بنابراین $r=\sqrt{2}$. در نتیجه، از تساوی (۲) به‌دست می‌آید

$$2(a_1+\sqrt{2}a_1+2a_1+2\sqrt{2}a_1+4a_1)=12+14\sqrt{2}$$

$$(7+3\sqrt{2})a_1=6+7\sqrt{2}\Rightarrow a_1=\frac{6+7\sqrt{2}}{7+3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2}+7)}{7+3\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

بنابراین $a_1a_2\dots a_7=\sqrt{2}\sqrt{2}^2\dots\sqrt{2}^7=\sqrt{2}^{(1+2+\dots+7)}=2^{14}$

۳۲۸ **۳** چون $a_4=64$، پس $a_1(\frac{1}{m})^3=64$، یعنی $\frac{a_1}{m^3}=64$. اکنون توجه کنید که

$$S_6-S_5>\frac{1}{25}\Rightarrow a_6>\frac{1}{25}\Rightarrow\frac{a_1}{m^5}>\frac{1}{25}\Rightarrow\frac{a_1}{m^3}\times\frac{1}{m^2}>\frac{1}{25}$$

$$64\times\frac{1}{m^2}>\frac{1}{25}\Rightarrow m^2<64\times25\Rightarrow m<8\times5=40$$

همین‌طور

$$S_7-S_6<\frac{1}{8}\Rightarrow a_7<\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{a_1}{m^6}<\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{a_1}{m^3}\times\frac{1}{m^3}<\frac{1}{8}$$

$$64\times\frac{1}{m^3}<\frac{1}{8}\Rightarrow m^3>64\times8\Rightarrow m>4\times2=8$$

بنابراین $8<m<40$ و m می‌تواند ۱۹ باشد.

۳۲۹ **۲** فرض کنید $A=a_3a_6a_9\cdots a_{30}$. در این صورت

$$A=(2a_2)(2a_5)(2a_8)\cdots(2a_{29})=2^{10}(a_2a_5a_8\cdots a_{29})$$

به همین ترتیب،

$$A=(2^2a_1)(2^2a_4)(2^2a_7)\cdots(2^2a_{28})=2^{20}(a_1a_4a_7\cdots a_{28})$$

اگر این تساوی‌ها و تساوی $A=a_3a_6a_9\cdots a_{30}$ را در هم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$A^3=2^{10}\times2^{20}(a_1a_2\cdots a_{30})=2^{30}\times2^{30}=2^{60}$$

بنابراین $A=2^{20}$.

۳۳۰ **۳** فرض کنید قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی برابر r باشد. در این صورت

$$1=a_1+a_2+a_3=a_1(1+r+r^2)=a_1((r+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})$$

بنابراین $a_1>0$. چون $r<0$، پس $a_2<0$ و $a_3>0$. اکنون توجه کنید که

$$a_1+a_3=1-a_2,\quad a_1a_3=a_2^2$$

بنابراین a_1 و a_3 جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-(1-a_2)x+a_2^2=0$ هستند. چون این معادله جواب دارد، پس

$$\Delta\geq0\Rightarrow(1-a_2)^2-4a_2^2\geq0\Rightarrow3a_2^2+2a_2-1\leq0$$

$$(3a_2-1)(a_2+1)\leq0\Rightarrow-1\leq a_2\leq\frac{1}{3}$$

به این ترتیب $a_1a_2a_3=a_2^3\geq-1$

و چون a_2 منفی است، پس $a_1a_2a_3<0$. پس حدود $a_1a_2a_3$ بازهٔ $[-1,0)$ است.

۳۳۱ **۲** قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با $\frac{1}{8}=\frac{95}{8}-(-12)$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $a_n=-12+\frac{1}{8}(n-1)$ است.

در نتیجه جملهٔ هشتادونهم این دنباله برابر است با $a_{89}=-12+\frac{1}{8}\times(89-1)=-1$.

اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را با r نشان دهیم، آن‌گاه

$$\text{جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی}=243r^5=(3r)^5$$

بنابراین $(3r)^5=-1\Rightarrow3r=-1\Rightarrow r=-\frac{1}{3}$

۳۳۲ **۱** تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases}2y+x=2x+y\Rightarrow y=x\\2y+x=x+4\Rightarrow2y=4\Rightarrow y=2\end{cases}\Rightarrow x=y=2\Rightarrow x+2y=6$$

۳۳۳ **۲** چون a، b و c عددهای مثبت هستند، پس قدرنسبت دنبالهٔ هندسی a,b,c عددی مثبت مانند r است. در این صورت $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\sqrt{r}$ است. زیرا

$$b=ar\Rightarrow\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{r},\quad c=br\Rightarrow\sqrt{c}=\sqrt{b}\sqrt{r}$$

چون $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ هم دنباله‌ای حسابی است هم دنباله‌ای هندسی، پس دنباله‌ای ثابت است. یعنی $\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}$، در نتیجه $a=b=c$. بنابراین $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{2a^2}{a^2}=2$.

۳۳۴ **۱** اگر جملات دنباله‌ای حسابی را سه برابر کنیم و سپس آن‌ها را با ۵ کنیم، دنباله‌ای حسابی به‌دست می‌آید. چون طبق فرض سؤال این دنباله، هندسی هم هست، پس باید دنباله‌ای ثابت باشد. بنابراین دنبالهٔ اولیه هم دنباله‌ای ثابت بوده است. پس نسبت جملهٔ سوم به جملهٔ اول آن برابر ۱ است.

۳۳۵ **۱** چون ۸ واسطهٔ حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=16\Rightarrow b=16-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطهٔ هندسی عددهای a و $b+4$ می‌شود. بنابراین

$$64=a(b+4)=a(16-a+4)=20a-a^2$$

پس $a^2-20a+64=0$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta>0$).

۳۳۶ **۴** جملات دوم، ششم و چهاردهم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب به‌صورت $a+d$، $a+5d$ و $a+13d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس $(a+5d)^2=(a+d)(a+13d)\Rightarrow12d^2=4ad\Rightarrow a=3d$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با $r=\frac{a+5d}{a+d}=\frac{3d+5d}{3d+d}=\frac{8d}{4d}=2$.

۳۳۷ **۲** توجه کنید که $a_6=a-6$، $a_5=a-5$، $a_3=a-3$

بنابر فرض، $(a-6)(a-3)=(a-5)^2$. بنابراین

$$a^2-10a+25=a^2-9a+18\Rightarrow a=7$$

در نتیجه $a_{10}=7-10=-3$.

۳۳۸ **۳** جملات سوم، پنجم و هشتم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب $a+2d$، $a+4d$ و $a+7d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس $(a+4d)^2=(a+2d)(a+7d)\Rightarrow2d^2=ad\Rightarrow a=2d$

بنابراین دنبالهٔ هندسی به‌صورت $4d,6d,9d,\dots$ است که جملهٔ چهارم آن $\frac{27}{2}d$ است زیرا $r=\frac{3}{2}$ و $9d\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}d$. همچنین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت مقابل است: $a_n=a+(n-1)d=2d+(n-1)d=(n+1)d$

به این ترتیب $a_{12}=13d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{27}{2}d}{13d}=\frac{27}{26}$.