

درسنامه + آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

موج آزمون ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

علیرضا علی‌پور



انتگرالگو

پیش‌گفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور سراسری است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاست، و البته دشواریش بیشتر به دلیل کوتاه بودن زمان پاسخ‌گویی است تا دشواری سؤال‌ها. از این‌رو، رویکرد آموزشی بسیاری از معلمان، به ویژه در سال‌های پایانی دوره متوسطه، تدریس مطالب درسی بر پایه پرسش‌های چهارگزینه‌ای است. با این همه، هر چند که بعید است شما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از آن نیست!

نشر الگو، برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، **کتاب سه‌بعدی** شامل درسنامه مفصل، تمرین‌های تشریحی و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و **کتاب تست** شامل درسنامه خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشر کرده است. معلوم است که تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای کتاب‌های تست، نسبت به کتاب‌های سه‌بعدی بسیار بیشتر است.

کتاب‌های **موج‌آزمون** ویژه آمادگی برای کنکور سراسری است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های ریاضیات گسسته پایه دوازدهم، آمار و احتمال پایه یازدهم و مبحث ترکیبیات ریاضی (۱) پایه دهم است. در این کتاب همه مباحث این درس‌ها را در هشت فصل تنظیم کرده‌ایم.

در ابتدای هر فصل، همه مطالبی را که برای حل کردن پرسش‌های آن فصل باید بدانید آورده‌ایم. پس از آن، نوبت آزمون‌هاست. در هر آزمون، پانزده پرسش مربوط به همان مبحث را آورده‌ایم. توجه کنید که ممکن است تعداد آزمون‌های یک مبحث، بیش از یکی باشد. در انتهای هر فصل، یک یا چند آزمون جامع مربوط به مباحث همان فصل را آورده‌ایم. در فصل (۸) هم شش آزمون جامع از همه مباحث آورده‌ایم که هر کدام پانزده پرسش دارد. چون تلاش کرده‌ایم که تمام نکات مهم مباحث کتاب‌های درسی را در آزمون‌ها بگنجانیم، توصیه می‌کنیم که تمام آزمون‌ها را پاسخ دهید. وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مهدیه جمشیدی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم نسیم نوریان برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حرف‌چینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

فهرست

● فصل اول: منطق و استدلال ریاضی

- درسنامه ۲
آزمون ۱: منطق ریاضی (۱) ۴
آزمون ۲: منطق ریاضی (۲) ۵
آزمون ۳: استدلال ریاضی ۶
آزمون ۴: جامع منطق و استدلال ریاضی ۷

● فصل دوم: مجموعه‌ها

- درسنامه ۱۰
آزمون ۵: مجموعه‌ها (۱) ۱۲
آزمون ۶: مجموعه‌ها (۲) ۱۳
آزمون ۷: مجموعه‌ها (۳) ۱۴
آزمون ۸: مجموعه‌ها (۴) ۱۵

● فصل سوم: احتمال

- درسنامه ۱۸
آزمون ۹: پیشامدهای تصادفی ۲۰
آزمون ۱۰: احتمال هم‌شانس ۲۱
آزمون ۱۱: اصول احتمال ۲۲
آزمون ۱۲: احتمال غیرهم‌شانس ۲۴
آزمون ۱۳: احتمال شرطی ۲۵
آزمون ۱۴: قانون ضرب احتمال ۲۷
آزمون ۱۵: قانون احتمال کل ۲۸
آزمون ۱۶: قانون بیز ۳۰
آزمون ۱۷: پیشامدهای مستقل و وابسته ۳۲
آزمون ۱۸: جامع احتمال (۱) ۳۳
آزمون ۱۹: جامع احتمال (۲) ۳۵

● فصل چهارم: آمار

- درسنامه ۳۸
آزمون ۲۰: مقدمه‌ای بر علم آمار ۴۱
آزمون ۲۱: توصیف و نمایش داده‌ها ۴۲
آزمون ۲۲: معیارهای گرایش به مرکز ۴۳
آزمون ۲۳: معیارهای پراکندگی ۴۴
آزمون ۲۴: آمار استنباطی ۴۵
آزمون ۲۵: جامع آمار (۱) ۴۶
آزمون ۲۶: جامع آمار (۲) ۴۷

● فصل پنجم: نظریهٔ اعداد

- درسنامه ۵۰
آزمون ۲۷: بخش‌پذیری ۵۴
آزمون ۲۸: اعداد اول ۵۵
آزمون ۲۹: ب.م.م. ۵۶
آزمون ۳۰: ب.م.م. و ک.م.م. ۵۷
آزمون ۳۱: قضیهٔ تقسیم و کاربردها ۵۸
آزمون ۳۲: بخش‌پذیری، اعداد اول، ب.م.م.، ک.م.م. و تقسیم ۵۹
آزمون ۳۳: هم‌نهستی (۱) ۶۰
آزمون ۳۴: هم‌نهستی (۲) ۶۱
آزمون ۳۵: محک‌های بخش‌پذیری ۶۲
آزمون ۳۶: معادلهٔ هم‌نهستی ۶۳
آزمون ۳۷: معادلهٔ سیالهٔ خطی ۶۴
آزمون ۳۸: هم‌نهستی و معادلات هم‌نهستی ۶۵
آزمون ۳۹: جامع نظریهٔ اعداد (۱) ۶۶
آزمون ۴۰: جامع نظریهٔ اعداد (۲) ۶۷

● فصل ششم: نظریهٔ گراف

- درسنامه ۷۰
- آزمون ۴۱: معرفی گراف ۷۳
- آزمون ۴۲: درجهٔ رأس‌ها در گراف ۷۴
- آزمون ۴۳: گراف‌های منتظم ۷۵
- آزمون ۴۴: مکمل گراف و زیرگراف ۷۶
- آزمون ۴۵: گراف کامل ۷۸
- آزمون ۴۶: مسیر در گراف ۷۹
- آزمون ۴۷: دور در گراف ۸۰
- آزمون ۴۸: گراف‌های C_n و P_n ۸۲
- آزمون ۴۹: گراف‌های همبند ۸۳
- آزمون ۵۰: جامع مفاهیم اولیهٔ گراف ۸۵
- آزمون ۵۱: احاطه‌گری در گراف (۱) ۸۶
- آزمون ۵۲: احاطه‌گری در گراف (۲) ۸۸
- آزمون ۵۳: جامع نظریهٔ گراف ۹۰

● فصل هفتم: ترکیبیات

- درسنامه ۹۴
- آزمون ۵۴: اصول شمارش ۹۶
- آزمون ۵۵: جایگشت ۹۷
- آزمون ۵۶: ترکیب ۹۸
- آزمون ۵۷: اصول شمارش، جایگشت و ترکیب ۹۹
- آزمون ۵۸: جایگشت با تکرار ۱۰۰
- آزمون ۵۹: معادلات خطی با ضرایب واحد ۱۰۱
- آزمون ۶۰: اصل شمول و عدم شمول ۱۰۲
- آزمون ۶۱: شمارش توابع ۱۰۳
- آزمون ۶۲: اصل لانه کبوتری ۱۰۴
- آزمون ۶۳: مربع لاتین ۱۰۵
- آزمون ۶۴: جامع ترکیبیات (۱) (کتاب دوازدهم) ۱۰۷
- آزمون ۶۵: جامع ترکیبیات (۲) ۱۰۸
- آزمون ۶۶: جامع ترکیبیات (۳) ۱۰۹

● فصل هشتم: آزمون‌های جامع

- آزمون ۶۷: جامع (۱) ۱۱۲
- آزمون ۶۸: جامع (۲) ۱۱۳
- آزمون ۶۹: جامع (۳) ۱۱۴
- آزمون ۷۰: جامع (۴) ۱۱۵
- آزمون ۷۱: جامع (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۱۶
- آزمون ۷۲: جامع (۶) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۱۷

● فصل نهم: پاسخ‌های تشریحی

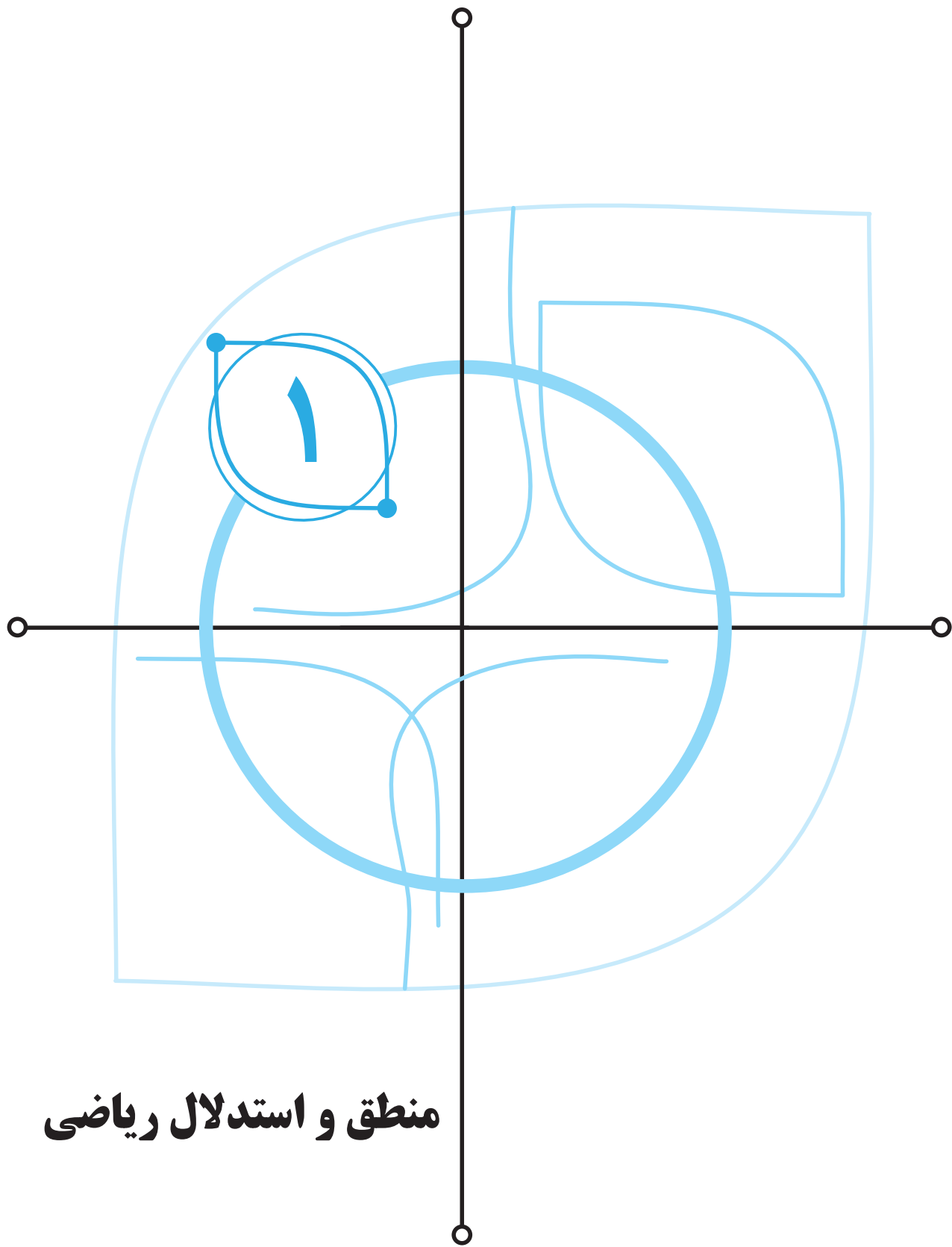
● فصل دهم: کنکور سراسری ۹۸

- آزمون ۷۳: کنکور داخل کشور ۹۸ ۱۹۳
- آزمون ۷۴: کنکور خارج از کشور ۹۸ ۱۹۴

● فصل یازدهم: پاسخنامهٔ کلیدی

● کنکورهای سراسری

- آزمون ۷۵: کنکور داخل کشور ۹۹ ۲۰۵
- آزمون ۷۶: کنکور خارج از کشور ۹۹ ۲۰۶
- آزمون ۷۷: کنکور داخل کشور ۱۴۰۰ ۲۰۸
- آزمون ۷۸: کنکور خارج از کشور ۱۴۰۰ ۲۰۹
- آزمون ۷۹: کنکور داخل کشور ۱۴۰۱ ۲۱۱
- آزمون ۸۰: کنکور خارج از کشور ۱۴۰۱ ۲۱۲
- آزمون ۸۱: کنکور داخل کشور ۱۴۰۲ (نوبت اول) ۲۱۳
- آزمون ۸۲: کنکور داخل کشور ۱۴۰۲ (نوبت دوم) ۲۱۴
- آزمون ۸۳: کنکور خارج از کشور ۱۴۰۲ (نوبت دوم) ۲۱۵



منطق و استدلال ریاضی

فصل ۱

منطق و استدلال ریاضی

آشنایی با منطق ریاضی

به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) داشته باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p ، q ، r و ... نمایش می‌دهیم. درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزاره درست با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نشان می‌دهیم. توجه کنید که یک گزاره نمی‌تواند هم درست باشد هم نادرست؛ یعنی هر گزاره فقط یک ارزش دارد. همچنین جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

(جدول ارزش گزاره‌ها) هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش درست یا نادرست را داشته باشد، پس اگر n گزاره داشته باشیم، بنابر اصل ضرب، ارزش این گزاره‌ها 2^n حالت مختلف می‌تواند داشته باشد. می‌توانیم جدولی با n ستون و 2^n سطر در نظر بگیریم که هر سطر آن متناظر با یکی از این 2^n حالت باشد. توجه کنید که در $\binom{n}{k}$ حالت از 2^n حالت، ارزش دقیقاً k تا از این گزاره‌ها درست است. جدول ارزش سه گزاره به صورت روبه‌رو است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیرها به یک گزاره تبدیل می‌شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، **یک متغیره**، **دو متغیره** و ... می‌نامیم. در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، **دامنه متغیر** گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نشان می‌دهیم. در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به‌ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعه جواب** گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف S نشان می‌دهیم.

ترکیب گزاره‌ها

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. به علامت « \sim » **ناقض** می‌گوییم. ارزش $\sim p$ فقط وقتی درست است که ارزش p نادرست باشد.

فرض کنید p و q دو گزاره باشند.

- گزاره مرکب « p یا q » را که به صورت $p \vee q$ نمایش داده می‌شود، **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. به رابط منطقی « \vee » **فاصل** می‌گوییم.
- گزاره مرکب « p و q » را که به صورت $p \wedge q$ نمایش داده می‌شود، **ترکیب عطفی** دو گزاره می‌گوییم. به رابط منطقی « \wedge » **عاطف** می‌گوییم.
- گزاره مرکب «اگر p ، آن‌گاه q » را که به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش داده می‌شود، **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را **مقدم** (فرض) و q را **تالی** (حکم) می‌نامیم.
- به گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ که آن را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم، **ترکیب دو شرطی** دو گزاره می‌گوییم. گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت «اگر p ، آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q است» یا « p اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم.

جدول ارزش گزاره‌های مرکب فوق به صورت زیر است.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر ارزش p (مقدم) نادرست باشد، ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ درست است و ارزش آن به ارزش q بستگی ندارد. در این حالت می‌گوییم گزاره $p \Rightarrow q$ به **انتفای مقدم** درست است. به گزاره $q \Rightarrow p$ **عکس ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ و به گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

اگر دو گزاره p و q در همه حالت‌ها هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم « p هم‌ارز است با q » در این حالت p و q را **هم‌ارز منطقی** می‌نامیم.

هم ارزی‌های منطقی

$\sim(\sim p) \equiv p$	(۱)
$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$	(۲) قوانین جابه‌جایی
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r, \quad p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	(۳) قوانین شرکت‌پذیری
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(۴) قوانین توزیع‌پذیری
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q, \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	(۵) قوانین دمورگان
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	(۶)
$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$	(۷) قوانین جذب
$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$	(۸) هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.
$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$	(۹)

غیر از هم‌ارزی‌های فوق تعداد دیگری هم‌ارزی که در حل مسئله‌ها بسیار کارایی دارند، در جدول زیر فهرست شده است.

ترکیب دو شرطی	ترکیب شرطی	ترکیب عطفی	ترکیب فصلی
$p \leftrightarrow p \equiv T$	$p \Rightarrow p \equiv T$	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
$p \leftrightarrow \sim p \equiv F$	$p \Rightarrow F \equiv \sim p$	$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \vee \sim p \equiv T$
$p \leftrightarrow T \equiv p$	$p \Rightarrow T \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$	$p \vee F \equiv p$
$p \leftrightarrow F \equiv \sim p$	$F \Rightarrow p \equiv T$	$p \wedge T \equiv p$	$p \vee T \equiv T$
	$T \Rightarrow p \equiv p$		

به گزاره‌ای که ارزش آن در همه حالت‌ها درست باشد **گزاره همیشه درست** و به گزاره‌ای که ارزش آن همیشه نادرست باشد، **گزاره همیشه نادرست** می‌گوییم. گزاره‌های $(p \wedge q) \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow (p \vee q)$ همیشه درست‌اند.

سورها

عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی» به **سور** معروف‌اند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند. برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \forall استفاده می‌کنیم. نماد \exists **سور عمومی** و نماد \exists **سور وجودی** نامیده می‌شود. گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند؛ به عبارت دیگر مثال نقض نداشته باشد و گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن ناتهی باشد. در مورد نقیض گزاره‌های سوری دو رابطه مهم زیر برقرارند:

$$\sim(\exists x : p(x)) \equiv \forall x : \sim p(x) \quad \bullet \quad \sim(\forall x : p(x)) \equiv \exists x : \sim p(x) \quad \bullet$$

استدلال ریاضی

دو روش اولیه استدلال و اثبات در ریاضی، استدلال به روش **اثبات مستقیم** و استدلال به کمک **مثال نقض** است. در روش اثبات مستقیم به کمک فرض و حقایق که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، حکم را نتیجه می‌گیریم و مثال نقض، مثالی است که نشان می‌دهد یک حکم در حالت کلی درست نیست. گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است که همه حالت‌های ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. هم‌ارزی منطقی

$$(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q) \equiv (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q$$

بیانگر درستی این روش است. در واقع گزاره‌های p_1, p_2, \dots, p_n همه حالت‌های ممکن مسئله است و برای اثبات گزاره q باید نشان دهیم هر یک از p_i ‌ها، q را نتیجه می‌دهد.

گاهی برای اثبات درستی یک حکم، نشان می‌دهیم نادرست بودن حکم به تناقض می‌انجامد (یعنی نتیجه‌ای به دست می‌آید که می‌دانیم درست نیست). به این روش، **اثبات غیر مستقیم** یا **اثبات به روش برهان خلف** گفته می‌شود.

دو حکم را **معادل** یا **هم‌ارز** می‌گوییم، هر گاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت. گاهی برای اثبات یک حکم، آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که معادل با حکم اولیه باشد و این کار را **آنقدر ادامه** می‌دهیم تا به حکمی برسیم که درستی آن معلوم است. به این ترتیب بازگشت از حکم آخر درستی حکم اولیه را نتیجه می‌دهد. به این روش اثبات، **اثبات بازگشتی** گفته می‌شود.

منطق ریاضی (۱)

زمن

پاسخ: ۱۲۰

محاسبات

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟
 (۱) چه درخت زیبایی!
 (۲) زمستان سردی را پیش رو داریم.
 (۳) این توپ را به احمد بدهید.
 (۴) آیا رنگ این کتاب آبی است؟
- ۲- ارزش کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $2+7 \geq 3$
 (۲) دو عدد اول وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۹ است.
 (۳) 17 عددی اول است.
 (۴) در مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ پنج عدد زوج وجود دارد.
- ۳- جدول ارزش‌های تعدادی گزاره 128 حالت دارد. در چند تا از این 128 حالت، ارزش دقیقاً پنج گزاره درست است؟
 (۱) ۶ (۲) ۱۵ (۳) ۲۱ (۴) ۵۶
- ۴- مجموعه جواب گزاره‌نمای «مجموع ارقام x برابر ۷ است» با دامنه $D = \{1, 2, \dots, 100\}$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۵- فرض کنید p گزاره «هر سال دوازده ماه دارد» و q گزاره «کشورهای ایران و چین همسایه‌اند» باشد. در این صورت ارزش گزاره $p \wedge \sim q$... و ارزش گزاره $\sim p \vee q$... است؟
 (۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست
- ۶- ارزش کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) اگر $1=1$ ، آن‌گاه $5 > 4$.
 (۲) اگر $1 \neq 1$ ، آن‌گاه $5 > 4$.
 (۳) اگر $1=1$ ، آن‌گاه $5 < 4$.
 (۴) اگر $1 \neq 1$ ، آن‌گاه $5 < 4$.
- ۷- در چند حالت از چهار حالت جدول ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \vee q)$ ، ارزش این گزاره درست است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۸- نقیض گزاره «اگر امروز شنبه باشد، آن‌گاه $2+2=7$ » کدام است؟
 (۱) اگر امروز شنبه باشد، آن‌گاه $2+2 \neq 7$.
 (۲) اگر $2+2 \neq 7$ ، آن‌گاه امروز شنبه نیست.
 (۳) امروز شنبه است و $2+2 \neq 7$.
 (۴) امروز شنبه نیست و $2+2=7$.
- ۹- فرض کنید گزاره‌های $p \wedge q$ و $p \Rightarrow (\sim q \vee r)$ درست باشند. کدام گزاره درست است؟
 (۱) $p \wedge \sim r$ (۲) $p \Rightarrow r$ (۳) $\sim q \Leftrightarrow r$ (۴) $q \Rightarrow (p \wedge \sim r)$
- ۱۰- نقیض گزاره $(\sim p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$ هم‌ارز کدام است؟
 (۱) $p \wedge \sim q$ (۲) $p \vee \sim q$ (۳) $\sim p \wedge q$ (۴) $\sim p \vee q$
- ۱۱- کدام هم‌ارزی درست است؟
 (۱) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$ (۲) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv T$ (۳) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv T$ (۴) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q) \equiv T$
- ۱۲- نمایش گزاره «هر عدد زوج عددی غیر اول است» با استفاده از نمادهای ریاضی به کدام صورت است؟ (E مجموعه اعداد زوج و P مجموعه اعداد اول است).
 (۱) $\exists x \in E: x \notin P$ (۲) $\forall x \in E: x \notin P$ (۳) $\exists x \in E: x \in P$ (۴) $\forall x \in E: x \in P$
- ۱۳- کدام گزاره درست است؟
 (۱) عددی دو رقمی وجود دارد که مجموع رقم‌های آن برابر ۱۹ است.
 (۲) عددی دو رقمی وجود دارد که حاصل ضرب رقم‌های آن برابر ۷۸ است.
 (۳) عددی دو رقمی مانند x وجود دارد به طوری که برای هر عدد دو رقمی مانند y ، $|x-y| \leq 40$.
 (۴) برای هر عدد دو رقمی مانند x ، عددی دو رقمی مانند y وجود دارد به طوری که $|x-y| \leq 10$.
- ۱۴- کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 5 > 0$ (۲) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = \sqrt{3}$ (۳) $\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 \neq 3$ (۴) $\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 = 8$
- ۱۵- کدام گزاره درست است؟
 (۱) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$ (۲) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$
 (۳) $\sim(\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0$ (۴) $\sim(\exists x \in \mathbb{R}: x^2 > x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}: x^2 < x$

منطق ریاضی (۲)

پاسخ: ۱۲۰ تا ۱۲۱

محاسبات

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره نیست؟
 (۱) ایران کشوری در قاره اروپا است.
 (۲) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.
 (۳) دمای هوای امروز تهران ۹ درجه است
 (۴) به امید موفقیت تیم ملی فوتبال در مسابقات آسیایی!
- ۲- ارزش کدام گزاره درست است؟
 (۱) مجموع هر دو عدد زوج عددی فرد است.
 (۲) تعداد ماه‌های سال از ده بیشتر است.
 (۳) حاصل ضرب هر سه عدد اول، عددی اول است.
 (۴) معادله $x^3 + 1 = 0$ در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد.
- ۳- در یک جمع هشت نفره هر کسی راستگو یا دروغگو است. راستگو فقط راست می‌گوید و دروغگو فقط دروغ می‌گوید. از هر یک از این هشت نفر پرسیدیم: «در جمع هشت نفره شما چند راستگو وجود دارد؟» جواب‌ها عبارت بودند از: «۱، ۰، ۲، ۱، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷». در این جمع هشت نفره چند نفر دروغگو هستند؟
 (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۷ (۴) ۸
- ۴- به‌ازای چند زیرمجموعه چهار عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 7\}$ مانند A گزاره‌نمای «مجموع اعضای A بزرگ‌تر از ۱۰ است» به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود؟
 (۱) ۲۳ (۲) ۲۷ (۳) ۲۸ (۴) ۳۴
- ۵- ارزش کدام گزاره درست است؟
 (۱) $(4 > 1) \wedge (9 > 5)$
 (۲) $(2 + 2 \neq 4) \vee (2 + 3 = 6)$
 (۳) ۵ عددی اول است و ۶ عددی فرد است.
 (۴) ۴ عددی اول است یا ۷ عددی زوج است.
- ۶- کدام هم‌ارزی درست نیست؟
 (۱) $p \vee (\sim p \vee q) \equiv T$ (۲) $\sim p \wedge (p \wedge \sim q) \equiv F$ (۳) $p \vee (p \vee q) \equiv p$ (۴) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- ۷- نقیض گزاره «امروز باران می‌بارد یا قیمت دلار کاهش می‌یابد» کدام است؟
 (۱) امروز باران نمی‌بارد و قیمت دلار کاهش نمی‌یابد.
 (۲) امروز باران نمی‌بارد یا قیمت دلار کاهش نمی‌یابد.
 (۳) امروز باران نمی‌بارد و قیمت دلار افزایش می‌یابد.
 (۴) امروز باران نمی‌بارد و قیمت دلار افزایش نمی‌یابد.
- ۸- ارزش کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $\{1, 2, 3\} \ni 1 \Leftrightarrow 2 \times 3 = 6$
 (۲) ماه آبان ۳۰ روز دارد اگر و تنها اگر ۷ عددی اول باشد.
 (۳) روز اول هفته یکشنبه است اگر و تنها اگر $2 > 3$.
 (۴) $3 \times 4 = 11 \Leftrightarrow 5 + 6 = 11$
- ۹- در چند حالت از هشت حالت جدول ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow r) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$ ، ارزش این گزاره درست است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۰- عکس نقیض ترکیب شرطی « $(2 \times 3 = 6) \Rightarrow (2 \times 4 = 8)$ » کدام است؟
 (۱) $(2 \times 3 \neq 6) \Rightarrow (2 \times 4 \neq 8)$
 (۲) $(2 \times 4 \neq 8) \Rightarrow (2 \times 3 \neq 6)$
 (۳) $(2 \times 4 \neq 8) \Rightarrow (2 \times 3 = 6)$
 (۴) $(2 \times 3 = 6) \wedge (2 \times 4 \neq 8)$
- ۱۱- کدام گزاره همواره درست است؟
 (۱) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ (۲) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ (۳) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ (۴) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
- ۱۲- نمایش گزاره «عددی زوج مانند n وجود دارد به طوری که $2n^2 + 3$ عددی اول باشد» با استفاده از نمادهای ریاضی به کدام صورت است؟ (E مجموعه اعداد زوج و P مجموعه اعداد اول است).
 (۱) $\forall n \in E: 2n^2 + 3 \in P$ (۲) $\exists n \in E: 2n^2 + 3 \in P$ (۳) $\forall n \in P: 2n^2 + 3 \in E$ (۴) $\exists n \in P: 2n^2 + 3 \in E$
- ۱۳- کدام گزاره درست است؟
 (۱) $\forall x \in \mathbb{Z}: x \geq 0$ (۲) $\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 = 10$ (۳) $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 = 9$ (۴) $\exists x \in \mathbb{N}: x \leq 1$
- ۱۴- نقیض گزاره «هر ایرانی در هفته حداقل یک لیتر شیر مصرف می‌کند.» کدام است؟
 (۱) هر ایرانی در هفته کمتر از یک لیتر شیر مصرف می‌کند.
 (۲) حداقل یک ایرانی وجود دارد که در هفته کمتر از یک لیتر شیر مصرف می‌کند.
 (۳) حداقل یک ایرانی وجود دارد که در هفته حداقل یک لیتر شیر مصرف می‌کند.
 (۴) هر ایرانی در هفته بیش از یک لیتر شیر مصرف می‌کند.

۱۵- نقیض گزاره « $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1)$ » کدام است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 \neq 1) \Leftrightarrow (x \neq 1)$ (۲) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 \neq 1) \Leftrightarrow (x = 1)$
 (۳) $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 = 1) \Leftrightarrow (x \neq 1)$ (۴) $\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 \neq 1) \Leftrightarrow (x \neq 1)$

استدلال ریاضی



- ۱- کدام عدد کلیت حکم «به‌ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n - 1$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟
 (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹
- ۲- کدام حکم مثال نقض دارد؟
 (۱) اگر n فرد باشد، $n^2 - 1$ مضرب ۸ است.
 (۲) اگر n مضرب ۵ نباشد، $n^4 - 1$ مضرب ۵ است.
 (۳) اگر n^2 مضرب ۷ باشد، n هم مضرب ۷ است.
 (۴) اگر n عددی اول باشد، $2^n + 1$ نیز عددی اول است.
- ۳- در اثبات حکم $\frac{y-x}{1-xy} < 1$ با فرض $0 < x < y < 1$ به روش بازگشتی، از درستی کدام گزاره حکم را نتیجه می‌گیریم؟
 (۱) $(x+1)(1-y) < 0$ (۲) $(1-x)(y+1) < 0$ (۳) $(1+x)(y-1) < 0$ (۴) $(x-1)(y+1) < 0$
- ۴- در کدام گزینه دو حکم داده شده هم‌ارزند؟
 (۱) « $x = y$ » و « $x^2 + y^2 = 2xy$ »
 (۲) « $x > 1$ » و « $x^2 + 1 > 2x$ »
 (۳) « a و b بر ۳ بخش‌پذیرند» و « $a + b$ بر ۳ بخش‌پذیر است»
 (۴) « x بر ۹ بخش‌پذیر است» و « x بر ۳ بخش‌پذیر است»
- ۵- کدام عدد کلیت حکم «اگر a عددی گنگ باشد، $a^2 + 2a$ نیز عدد گنگ است» را نقض می‌کند؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5} + 1$ (۳) $\sqrt{5} - 1$ (۴) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$
- ۶- کدام گزاره مثال نقض ندارد؟
 (۱) اگر $a \geq b$ ، آن‌گاه $\frac{b}{a} \leq 1$.
 (۲) اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $n^2 + 8$ مربع کامل است.
 (۳) اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه $n^2 + 1$ بر ۵ بخش‌پذیر است.
 (۴) برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، $(1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{1}{3}) (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{n}$.
- ۷- کدام گزاره مثال نقض دارد؟
 (۱) مجموع هر دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است. (۲) مجموع هر سه عدد متوالی عددی زوج است.
 (۳) حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی عددی زوج است. (۴) حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی عددی زوج است.
- ۸- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی به‌صورت $2k^2 + 1$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟
 (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۷ (۴) ۲۵
- ۹- فرض کنید x و y عددهایی صحیح باشند. کدام حکم مثال نقض دارد؟
 (۱) $2(x^2 + y^2)$ برابر مجموع مربعات دو عدد صحیح است.
 (۲) $3(x^2 + y^2)$ برابر مجموع مربعات دو عدد صحیح است.
 (۳) $4(x^2 + y^2)$ برابر مجموع مربعات دو عدد صحیح است.
 (۴) $5(x^2 + y^2)$ برابر مجموع مربعات دو عدد صحیح است.

۱۰- اعداد کدام گزینه کلیت حکم «اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به طوری که $x^2 + 2x = y^2 + 2y$ ، آن گاه $x = y$ » را نقض می‌کنند؟

(۱) $x = y = 7$ (۲) $x = 5$ و $y = -7$ (۳) $x = -5$ و $y = 7$ (۴) $x = 5$ و $y = 7$

۱۱- کدام حکم مثال نقض ندارد؟

(۱) اگر $A \cup B = A \cup C$ ، آن گاه $B = C$. (۲) اگر $A - C = B - C$ ، آن گاه $A = B$.
 (۳) اگر $A - B = A - C$ ، آن گاه $B = C$. (۴) اگر $A - B = B - A$ ، آن گاه $A = B$.

۱۲- فرض کنید x عددی حقیقی باشد. کدام جفت گزاره هم‌ارز نیستند؟

(۱) « $x^4 > 0$ » و « $x^2 > 0$ » (۲) « $|x| = 1$ » و « $x \in \{-1, 1\}$ »
 (۳) « $[x] = 1$ » و « $1 < x < 2$ » (۴) « $x > 1$ » و « $x^3 > 1$ »

۱۳- فرض کنید x و y دو عدد حقیقی نامنفی باشند. در اثبات حکم « $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ » به روش بازگشتی از درستی کدام گزاره حکم را نتیجه می‌گیریم؟

(۱) $(x - y)^2(x + y) \geq 0$ (۲) $(x + y)(x^2 + y^2) \geq 0$
 (۳) $(x + y)^2(x - y) \geq 0$ (۴) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq 0$

۱۴- در اثبات حکم «اگر x عددی گویا و y عددی گنگ باشد، آن گاه $x + y$ عددی گنگ است»، به روش برهان خلف، فرض خلف کدام است؟

(۱) x عددی گنگ است. (۲) x عددی گنگ است یا y عددی گویا است.
 (۳) x عددی گنگ است و y عددی گویا است. (۴) $x + y$ عددی گویا است.

۱۵- فرض کنید n عددی صحیح باشد. کدام گزاره با گزاره « $5n + 1$ بر ۳ بخش پذیر است» هم‌ارز است؟

(۱) $2n - 1$ بر ۳ بخش پذیر است. (۲) $4n - 1$ بر ۳ بخش پذیر است.
 (۳) $n + 1$ بر ۳ بخش پذیر است. (۴) $n^2 + 2$ بر ۳ بخش پذیر است.

جامع منطق و استدلال ریاضی



۱- مفروضات یک استدلال به صورت زیر داده شده است:

بهرام روزهای شنبه و یکشنبه هر هفته به باشگاه می‌رود.

امروز بهرام به باشگاه نرفته است.

کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

(۱) امروز شنبه نیست.

(۲) بهرام طی پنج روز آینده حتماً به باشگاه می‌رود.

(۳) بهرام طی شش روز گذشته حداقل دوبار به باشگاه رفته است.

(۴) امروز دوشنبه یا جمعه است.

۲- در جمع چهار نفره بابی، تام، پیتر و الکس یک نفر دروغگوست و فقط دروغ می‌گوید و سه نفر دیگر فقط راست می‌گویند. تام گفت: «حداقل یکی از بابی و پیتر دروغگو است»، بابی گفت: «پیتر راستگو است» و الکس گفت: «من و بابی راستگوییم». شخص دروغگو کدام است؟

(۱) بابی (۲) تام (۳) پیتر (۴) الکس

۳- جدول ارزش‌های تعدادی گزاره ۱۲۸ حالت دارد. در چند تا از این ۱۲۸ حالت ارزش دقیقاً سه گزاره درست است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۵ (۴) ۵۶

آزمون ۱

۱- گزینه ۲ جملات گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) به ترتیب عاطفی، امری و پرسشی هستند، بنابراین این سه جمله گزاره نیستند. فقط جمله گزینه (۲) جمله‌ای خبری است.

۲- گزینه ۴ در مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ چهار عدد زوج وجود دارد.

۳- گزینه ۳ اگر تعداد گزاره‌ها برابر n باشد، آن‌گاه $2^n = 128$ ، پس $n = 7$. در نتیجه در $\binom{7}{5} = 21$ حالت ارزش دقیقاً پنج تا از این گزاره‌ها درست است.

۴- گزینه ۳ مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $\{7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$ است.

۵- گزینه ۲ ارزش p درست و ارزش q نادرست است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee q$
د	ن	ن	د	د	ن

۶- گزینه ۳ ارزش یک گزاره شرطی فقط وقتی نادرست است که ارزش مقدم آن درست و ارزش تالی آن نادرست باشد.

۷- گزینه ۲

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن	د

۸- گزینه ۳ نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ گزاره $p \wedge \sim q$ است، زیرا $\sim(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

۹- گزینه ۲ از درستی گزاره $p \wedge q$ نتیجه می‌گیریم گزاره‌های p و q درست‌اند و از درستی گزاره‌های p و $q \vee \sim r$ نتیجه می‌گیریم گزاره $\sim r$ نیز درست است. اکنون از درستی این گزاره و درستی q نتیجه می‌گیریم گزاره r نیز درست است، بنابراین از بین چهار گزینه داده شده فقط گزاره $p \Rightarrow r$ درست است.

۱۰- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} (\sim p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q) &\equiv (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \vee q) \\ &\equiv ((\sim p \wedge q) \vee \sim p) \vee q \\ &\equiv \sim p \vee q \end{aligned}$$

(شرکت‌پذیری) (قانون جذب)

در نتیجه نقیض گزاره داده شده هم‌ارز با $\sim(\sim p \vee q)$ یا $p \wedge \sim q$ است.

۱۱- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q) \equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

همچنین توجه کنید که اگر p درست و q نادرست باشد گزاره‌های $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ و $(p \Rightarrow p) \Rightarrow q$ نادرست‌اند و اگر p نادرست و q درست باشد، گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ نادرست است. پس هم‌ارزی‌های گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست‌اند.

۱۲- گزینه ۲

۱۳- گزینه ۴ درستی گزینه (۴) واضح است. گزینه (۱) درست نیست، زیرا مجموع ارقام هر عدد دو رقمی حداکثر برابر $9+9=18$ است.

گزینه (۲) درست نیست، زیرا ۷۸ بر ۱۳ بخش‌پذیر است و حاصل ضرب ارقام هر عدد فقط بر اعداد اول ۲، ۳، ۵ و ۷ می‌تواند بخش‌پذیر باشد. گزینه (۳) نیز درست نیست، زیرا به وضوح برای هر عدد دو رقمی x عددی دو رقمی مانند y وجود دارد به طوری که $|x-y| > 40$ ، (اگر $x \leq 58$ ، y را برابر ۹۹ می‌گیریم و اگر $x \geq 59$ ، y را برابر ۱۰ می‌گیریم).

۱۴- گزینه ۴ گزینه (۴) درست نیست، زیرا مربع هیچ عدد صحیحی برابر ۸ نیست.

۱۵- گزینه ۱ گزینه (۱) درست است، زیرا

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}: \sim(x^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$$

آزمون ۲

۱- گزینه ۴ جمله گزینه (۴) جمله‌ای عاطفی است، بنابراین این جمله گزاره نیست.

۲- گزینه ۲ تعداد ماه‌های سال برابر دوازده است که از ده بیشتر است.

۳- گزینه ۳ اگر تعداد راستگوها برابر k باشد، k نفر جواب k می‌دهند و بقیه جوابی غیر از k می‌دهند. با توجه به پاسخ‌های داده شده نتیجه می‌گیریم k برابر ۱ است.

۴- گزینه ۴ از تساوی $1+2+3+4=10$ نتیجه می‌گیریم مجموع اعضای هر زیرمجموعه چهار عضوی از $\{1, 2, \dots, 7\}$ غیر از $\{1, 2, 3, 4\}$ بزرگ‌تر از ۱۰ است. بنابراین پاسخ برابر $34-1=33$ است.

۵- گزینه ۱ چون ارزش هر دو گزاره « $9 > 5$ » و « $4 > 1$ » درست است، پس ارزش ترکیب فصلی این دو گزاره نیز درست است.

۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$p \vee (p \vee q) \equiv (p \vee p) \vee q \equiv p \vee q$$

پس هم‌ارزی گزینه (۳) درست نیست. هم‌ارزی گزینه (۴) همان قانون جذب است. درستی هم‌ارزی‌های گزینه‌های (۱) و (۲) نیز به صورت زیر ثابت می‌شود:

$$\begin{cases} p \vee (\sim p \vee q) \equiv (p \vee \sim p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T \\ \sim p \wedge (p \wedge \sim q) \equiv (\sim p \wedge p) \wedge \sim q \equiv F \wedge \sim q \equiv F \end{cases}$$

۷- گزینه ۱ نقیض گزاره $p \vee q$ هم‌ارز با $\sim p \wedge \sim q$ است.

۸- گزینه ۴ گزاره $p \Leftrightarrow q$ به شرطی نادرست است که یکی از p و q درست و دیگری نادرست باشد. توجه کنید که گزاره « $5+6=11$ » درست و گزاره « $3 \times 4=11$ » نادرست است، پس گزاره « $(5+6=11) \Leftrightarrow (3 \times 4=11)$ » نادرست است.

۹- گزینه ۳

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow r$	$(\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow r)$
د	د	د	ن	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	د	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن	د	ن

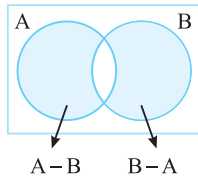
۸- گزینه ۲ عدد ۹ به صورت $2k^2 + 1$ است، زیرا $2 \times 2^2 + 1 = 9$ ، ولی ۹ عددی اول نیست.

۹- گزینه ۲ به ازای $x=y=1$ ، $3(x^2 + y^2) = 6$ و ۶ برابر مجموع مربعات دو عدد صحیح نیست. همچنین توجه کنید که

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2) &= (x+y)^2 + (x-y)^2 \\ 4(x^2 + y^2) &= (2x)^2 + (2y)^2 \\ 5(x^2 + y^2) &= (2x+y)^2 + (x-2y)^2 \end{aligned}$$

۱۰- گزینه ۲ به ازای $x=5$ و $y=-7$ رابطه $x^2 + 2x = y^2 + 2y$ برقرار است ولی $x \neq y$.

۱۱- گزینه ۴ مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هیچ عضو مشترکی ندارند، بنابراین از تساوی این دو مجموعه نتیجه می‌گیریم هر دو مجموعه باید تهی باشند، پس $A=(A-B) \cup (A \cap B) = A \cap B$ و به‌طور مشابه $B=A \cap B$. در نتیجه $A=B$.



همچنین $(A=B=\{1\}, C=\emptyset)$ مثال نقض گزینه (۱)، $(A=B=\emptyset, C=\{1\})$ مثال نقض گزینه (۲)، $(A=C=\{1\}, B=\emptyset)$ مثال نقض گزینه (۳) است.

۱۲- گزینه ۳ گزاره « $[x]=1$ » با گزاره « $1 \leq x < 2$ » هم‌ارز است.

۱۳- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2 &\Leftrightarrow x^3 - x^2y + y^3 - xy^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x-y) - y^2(x-y) &\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x+y) &\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0 \end{aligned}$$

۱۴- گزینه ۴ فرض خلف همان نقیض حکم، یعنی نقیض گزاره « $x+y$ عددی گنگ است» است.

۱۵- گزینه ۲ هم‌ارز بودن گزاره داده شده با گزاره گزینه (۲) را ثابت می‌کنیم:

$$3|5n+1| \Leftrightarrow 3|2(5n+1)| \Leftrightarrow 3|2(5n+1)| - 3|(2n+1)| \Leftrightarrow 3|4n-1|$$

آزمون ۴

۱- گزینه ۴ امروز ممکن است هر روزی غیر از شنبه یا یکشنبه باشد. بنابراین نتیجه‌گیری گزینه (۴) درست نیست.

۲- گزینه ۲ اگر بابی دروغگو باشد، پیترو نیز دروغگو است. در صورتی که می‌دانیم فقط یک نفر دروغگو وجود دارد. پس بابی راستگو است و طبق گفته او پیترو نیز راستگو است. در نتیجه تام دروغ گفته است.

۳- گزینه ۳ اگر تعداد گزاره‌ها برابر n باشد، آن‌گاه $2^n = 128$ ، پس $n=7$. بنابراین در جدول ارزش گزاره‌ها در $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35$ حالت ارزش دقیقاً سه گزاره درست است.

۱۰- گزینه ۲ عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ است.

۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که اگر گزاره $p \wedge q$ درست باشد، هر دو گزاره p و q نیز درست‌اند، پس گزاره $p \vee q$ نیز درست است. در نتیجه گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ هیچ‌گاه نادرست نیست (زیرا حالتی که $p \wedge q$ درست و $p \vee q$ نادرست باشد هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد).

همچنین توجه کنید که اگر هر دو گزاره p و q درست باشند، گزاره‌های $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ و $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ نادرست‌اند و اگر درست و q نادرست باشد، گزاره $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ نادرست است. پس فقط گزاره گزینه (۱) همواره درست است.

۱۲- گزینه ۲

۱۳- گزینه ۴

۱۴- گزینه ۲

۱۵- گزینه ۳ می‌دانیم نقیض گزاره $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز با $\sim p \Leftrightarrow q$ و همچنین $p \Leftrightarrow \sim q$ است. پس

$$\begin{aligned} \sim(\forall x \in \mathbb{R}: (x^2=1) \Leftrightarrow (x=1)) \\ \equiv \exists x \in \mathbb{R}: \sim((x^2=1) \Leftrightarrow (x=1)) \\ \equiv \exists x \in \mathbb{R}: (x^2=1) \Leftrightarrow \sim(x=1) \\ \equiv \exists x \in \mathbb{R}: (x^2=1) \Leftrightarrow (x \neq 1) \end{aligned}$$

آزمون ۳

۱- گزینه ۴ توجه کنید که $2^9 - 1 = 511 = 7 \times 73$ عددی اول نیست.

۲- گزینه ۴ به ازای $n=3$ گزاره داده شده درست نیست. زیرا ۳ عددی اول است ولی $2^3 + 1 = 9$ عددی اول نیست.

۳- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{1-xy} < 1 \Leftrightarrow y-x < 1-xy \Leftrightarrow 1-y+x-xy > 0 \\ \Leftrightarrow (1-y)+x(1-y) > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-y) > 0 \\ \Leftrightarrow (1+x)(y-1) < 0 \end{aligned}$$

۴- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} x=y \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy \end{aligned}$$

۵- گزینه ۳ توجه کنید که اگر $a = \sqrt{5} - 1$ ، آن‌گاه a عددی گنگ است ولی

$$a^2 + 2a = (a+1)^2 - 1 = (\sqrt{5})^2 - 1 = 5 - 1 = 4$$

عدد گویا است.

۶- گزینه ۴ رابطه گزینه (۴) همواره درست است، زیرا

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

در ضمن گزینه (۱) به ازای $a=-1$ و $b=-2$ درست نیست، گزینه (۲) به ازای $n=3$ درست نیست و گزینه (۳) به ازای $n=4$ درست نیست.

۷- گزینه ۲ مجموع سه عدد متوالی ۲، ۳ و ۴ عددی فرد است.