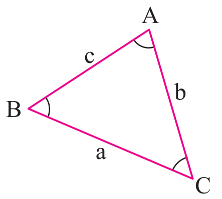
درس ۲ (قضیهٔ کسینوس‌ها)

قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها:

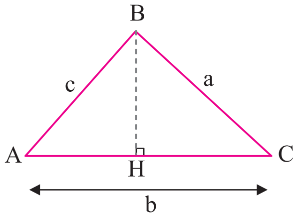


$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

اثبات: با توجه به اندازه زاویه A دو حالت پیش می‌آید:

الف) زاویه A حاده باشد $(\widehat{A} < 90^\circ)$

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH:



$$\cos A = \frac{AH}{c} \to AH = c\,.\cos A$$

$$CH = AC - AH \to CH = b - c\,.\cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \to BH = c.\sin A$$

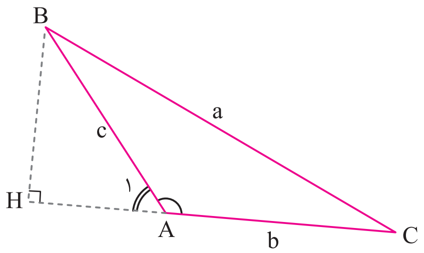
طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BHC داریم:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \to a^2 = (c.\sin A)^2 + (b - c\,.\cos A)^2 =$$

$$c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc\cos A \to a^2 = b^2 + c^2\underbrace{(\sin^2 A + \cos^2 A)}_{1} - 2bc\cos A \to a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos A$$

ب) زاویه A منفرجه باشد $(\widehat{A} > 90^\circ)$

ارتفاع BH را بیرون مثلث رسم می‌کنیم. زاویه خارجی $\widehat{A}_1$ و $\widehat{A}$ مکمل یکدیگرند:



$$\sin \widehat{A}_1 = \sin \widehat{A} \quad , \quad \cos \widehat{A}_1 = -\cos \widehat{A}$$

در مثلث‌های قائم‌الزاویه داریم:

$$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \to AH = c\,.\cos A_1 \to AH = -c\,.\cos A$$

$$CH = AC + AH = b - c\,.\cos A$$

$$\sin A_1 = \frac{BH}{c} \to BH = c.\sin A_1 \to BH = c\,.\sin A$$

طبق فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BHC داریم:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \to a^2 = (c\,.\sin A)^2 + (b - c\,.\cos A)^2 \to$$

$$a^2 = c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc\,.\cos A \to a^2 = b^2 + c^2\underbrace{(\sin^2 A + \cos^2 A)}_{1} - 2bc\,.\cos A \to a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos A$$

تذکر مهم

۱. به کمک این قضیه با داشتن دو ضلع و زاویه بین، ضلع سوم محاسبه می‌شود.

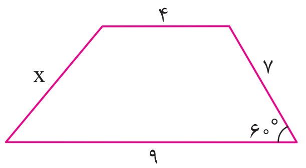
۲. به کمک این قضیه با داشتن سه ضلع، زاویه بین دو ضلع قابل محاسبه است.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

۳. اگر زاویه A قائمه باشد، این قضیه تبدیل به قضیه فیثاغورس می‌شود:

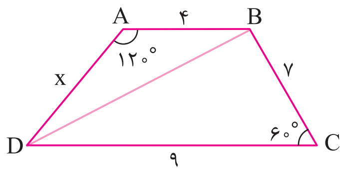
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos A \xrightarrow{\cos 90^\circ = 0} a^2 = b^2 + c^2$$

مثال ۵ *چهارضلعی مقابل، قابل محاط شدن در یک دایره است $(x+2)$ کدام است؟* *(کنکور ریاضی ۹۹)*



۱) $\sqrt{51}$ ۲) $\sqrt{55}$ ۳) $\sqrt{57}$ ۴) $\sqrt{59}$

پاسخ: در چهارضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکملند. بنابراین $\widehat{A} = 120^\circ$



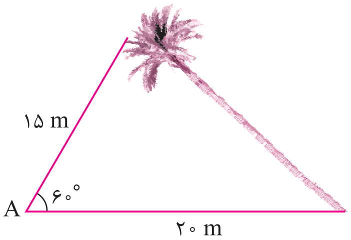
قضیه‌کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{BCD}$: $BD^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9)\cos 60^\circ = 49 + 81 - 126(\frac{1}{2}) = 67 \to BD = \sqrt{67}$

قضیه‌کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{ABD}$: $\sqrt{67}^2 = x^2 + 4^2 - 2(x)(4)\cos 120^\circ \to 67 = x^2 + 16 - 8x(\frac{-1}{2})$

$$\to x^2 + 4x - 51 = 0 \to \Delta = 4^2 - 4(1)(-51) = 16 + 204 = 220$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{220}}{2(1)} \to x = \frac{-4 + 2\sqrt{55}}{2} = -2 + \sqrt{55} \to x + 2 = \sqrt{55}$$

گزینهٔ «۲» درست است.

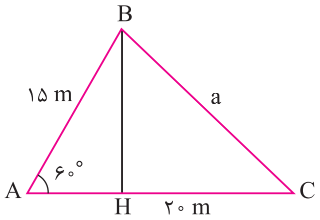


مثال ۶ *یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه ۶۰° دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:*

الف) طول درخت.

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین.



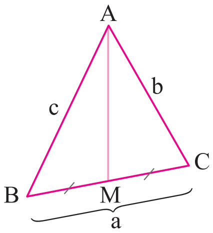
پاسخ: الف) طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC :

$$a^2 = 15^2 + 20^2 - 2(15)(20)\cos 60^\circ = 225 + 400 - 300 \to a^2 = 325 \to a = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

ب) طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC :

$$\frac{5\sqrt{13}}{\sin 60} = \frac{15}{\sin C} \to \sin C = \frac{15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \to \sin C \simeq 0/72$$

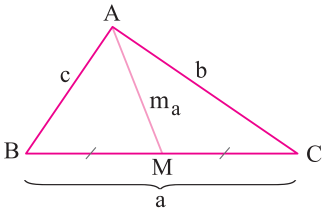
پ) $\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{15} \to BH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$



قضیه میانه‌ها: اگر a و b و c اضلاع و AM میانه مثلث باشد:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

(اثبات را در تمرین ۱۹ ملاحظه نمایید)



مثال ۷ *با استفاده از قضیه میانه‌ها نشان دهید اگر در مثلث ABC، زاویه A منفرجه باشد، آن‌گاه میانهٔ رأس A از نصف ضلع مقابل به آن، کوچک‌تر است.*

پاسخ: با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$90^\circ < A < 180^\circ \Rightarrow \cos A < 0 \Rightarrow 0 < -2bc\cos A \Rightarrow$$

$$b^2 + c^2 < b^2 + c^2 - bc\cos A \Rightarrow b^2 + c^2 < a^2 \Rightarrow 2b^2 + 2c^2 < 2a^2 \Rightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 < a^2 \Rightarrow \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} < a \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} < \frac{a}{2} \Rightarrow m_a < \frac{a}{2}$$

نکته

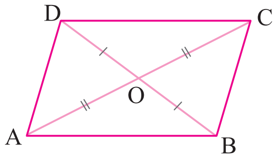
با توجه به مثال قبل؛ در هر مثلث دلخواه مانند ABC داریم:

- اگر $\widehat{A} > 90^\circ$ باشد، آن‌گاه $b^2 + c^2 < a^2$ و در نتیجه $m_a < \frac{a}{2}$ و برعکس.
- اگر $\widehat{A} = 90^\circ$ باشد، آن‌گاه $b^2 + c^2 = a^2$ و در نتیجه $m_a = \frac{a}{2}$ و برعکس.
- اگر $\widehat{A} < 90^\circ$ باشد، آن‌گاه $b^2 + c^2 > a^2$ و در نتیجه $m_a > \frac{a}{2}$ و برعکس.

مثال ۸ *ثابت کنید: مجموع مربعات اضلاع هر متوازی‌الاضلاع برابر است با مجموع مربعات قطرهای آن.*

پاسخ: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس بنا به قضیه میانه‌ها در مثلث ABD داریم:

$$AB^2 + AD^2 = 2OA^2 + \frac{BD^2}{2} \Rightarrow AB^2 + AD^2 = 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \frac{BD^2}{2} \Rightarrow 2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2$$



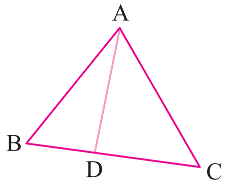
اما در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل برابرند: $AD = BC$ و $AB = CD$، پس می‌توان نوشت:

$$AB^2 + AB^2 + AD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$

قضیه استوارت: در مثلث ABC، اگر D نقطه دلخواهی روی ضلع BC باشد، آنگاه داریم:

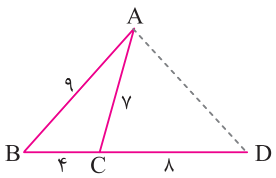
$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = AD^۲ . BC + DB . DC . BC$$

(اثبات را در تمرین ۲۰ ملاحظه نمایید)



مثال ۹ در شکل روبه‌رو، اندازه پاره‌خط AD کدام است؟ *(کنکور ریاضی ۹۹)*

۱) ۹ ‏ ۲) $۳\sqrt{۱۰}$ ‏ ۳) ۱۰ ‏ ۴) $۶\sqrt{۳}$



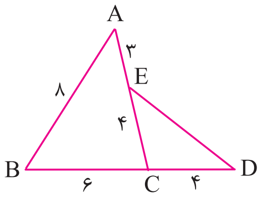
پاسخ: طبق قضیه استوارت در مثلث ABD داریم:

$$AB^۲ . CD + AD^۲ . CB = AC^۲ . BD + BC . CD . BD \to (۹)^۲(۸) + (AD^۲)(۴) = (۷)^۲(۱۲) + (۴)(۸)(۱۲) \to ۶۴۸ + ۴AD^۲ = ۵۸۸ + ۳۸۴ \to$$
$$۴AD^۲ = ۳۲۴ \to AD^۲ = ۸۱ \to AD = ۹$$

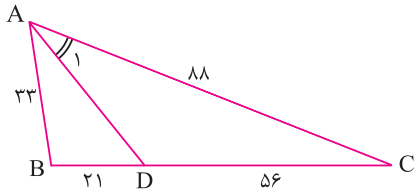
گزینهٔ «۱» درست است.

۳ سؤالات امتحانی درس دوم

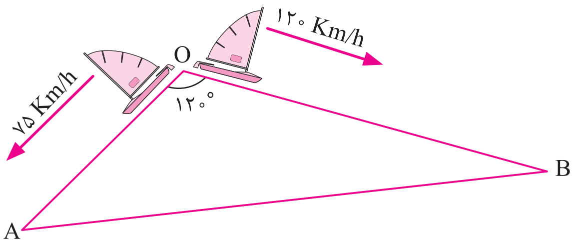
۱۱. در شکل مقابل طول DE را به دست آورید. *(نمونه دولتی ـ فرداد ۹۹)*



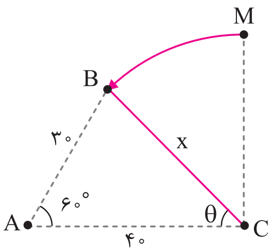
۱۲. در شکل روبه‌رو اندازه زاویه $A_۱$ چند درجه است؟



۱۳. دو قایق از نقطه‌ای در یک دریاچه با سرعت‌های ۷۵ و ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت و با زاویه ۱۲۰ درجه از هم دور می‌شوند. ۴۰ دقیقه بعد در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند؟ *(نمونه دولتی ـ فرداد ۱۴۰۱) (پرتکرار)*

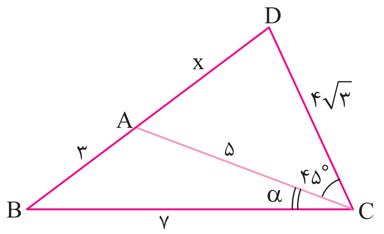


۱۴. مطابق شکل در اثر وزش طوفان، تیر چراغ برقی منحرف شده است و در وضعیت زیر قرار گرفته است. نوک تیر چراغ برق از نقطهٔ A به زاویهٔ ۶۰ درجه دیده می‌شود و فاصلهٔ نقطهٔ A از نوک تیر ۳۰ متر می‌باشد، اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا پای تیر ۴۰ متر باشد، طول تیر چراغ برق و سینوس زاویهٔ انحراف آن از راستای افقی را حساب کنید. *(نمونه دولتی ـ فرداد ۱۴۰۱) (پرتکرار)*

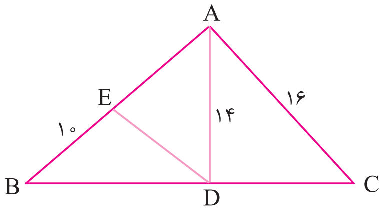


۱۵. در مثلث ABC داریم: $A = ۳۰^\circ$ ، $c = ۲$ و $b = ۱ + \sqrt{۳}$ ، زاویه B و طول ضلع سوم را بیابید. *(نمونه دولتی ـ خرداد ۱۴۰۰)*

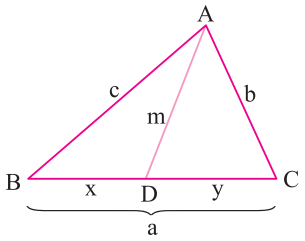
۱۶. در شکل مقابل:
الف) مقدار x را بیابید.
ب) کسینوس زاویه α را حساب کنید. *(سمپاد ـ خرداد ۱۴۰۱) (پرتکرار)*



۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۶ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۱۴ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد $(DB > DC)$ نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۱۰ واحد از B قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟
اندازه زاویهٔ DEA چند درجه است؟

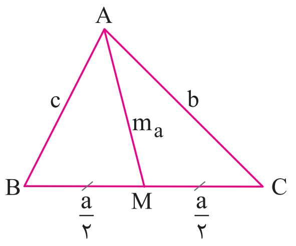


۱۸. نقطهٔ D را به دلخواه روی ضلع BC از مثلث ABC در نظر گرفته‌ایم. نشان دهید بین پاره‌خط‌های روی شکل، رابطه روبه‌رو برقرار است: *(سمپاد ـ خرداد ۱۴۰۰)*
$xb^۲ + yc^۲ = a(xy + m^۲)$



۱۹. نشان دهید: طول هر میانهٔ مثلث برحسب اندازه‌های اضلاع آن، از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند: *(نمونه دولتی ـ خرداد ۱۴۰۱) (پرتکرار)*

$$m_c = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲a^۲ + ۲b^۲ - c^۲} \qquad m_b = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲a^۲ + ۲c^۲ - b^۲} \qquad m_a = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲}$$

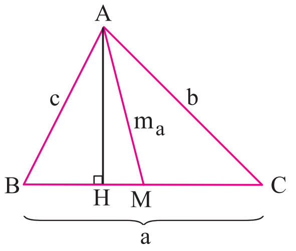


۲۰. در مثلث ABC ، نقطهٔ دلخواه D روی ضلع BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها درستی تساوی زیر را ثابت کنید: *(سمپاد ـ خرداد ۱۴۰۰)*

$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = BC . (AD^۲ + BD . DC)$$

۲۱. در مثلثی به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ طول کوچکترین میانه را به دست آورید. *(سمپاد ـ خرداد ۱۴۰۰) (پرتکرار)*

۲۲. در هر مثلث ABC ، با فرض $AC > AB$ با رسم میانه AM و ارتفاع AH مطابق شکل، ثابت کنید:
$b^۲ - c^۲ = ۲a \times MH$



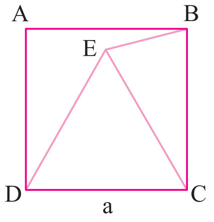
۲۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\widehat{B} + \widehat{C} = ۹۰^\circ)$ ، نشان دهید؛ بین اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر و اندازهٔ دو ضلع دیگر آن رابطه زیر برقرار است: *(سمپاد ـ خرداد ۱۴۰۰)*

$$\frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲}$$

۲۴. نشان دهید در مثلث دلخواه ABC بین اندازهٔ میانه‌ها و اندازه اضلاع، رابطهٔ $m_a^{۲}+m_b^{۲}+m_c^{۲}=\frac{۳}{۴}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})$ برقرار است. (سمپاد ـ فرداد ۹۹)

۲۵. نقطه‌ای در صفحهٔ یک مستطیل در نظر می‌گیریم، نشان دهید: مجموع مربعات فواصل آن نقطه از دو رأس مقابل مستطیل با مجموع مربعات فواصلش از دو رأس دیگر مستطیل برابر است. (سمپاد ـ فرداد ۱۴۰۰)

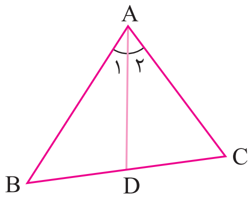
۲۶. در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مربع و مثلث DEC متساوی‌الاضلاع می‌باشد. طول پاره‌خط BE برحسب اندازهٔ ضلع مربع را به دست آورید.



۲۷. در مثلث ABC، $AB=۶$، $AC=۵$ و $BC=۴$ و نقطه D روی ضلع AB چنان قرار دارد که $AD=\frac{۳}{۲}$ و $BD=\frac{۹}{۲}$ است. طول پاره‌خط CD را محاسبه کنید. (نمونه دولتی ـ فرداد ۱۴۰۰)

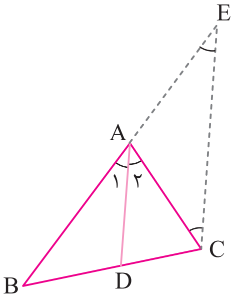
درس ۳ (قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها)

نیمساز زاویه: نیمساز پاره‌خطی است که زاویه را نصف می‌کند. $(\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲)$ بین قطعات ایجاد شده توسط نیمساز و اضلاع زاویه، تناسب وجود دارد.



قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند.

حکم: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$



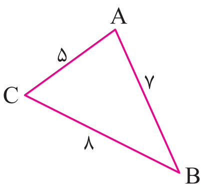
اثبات: از رأس C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه E قطع کند:

$$\left.\begin{array}{l}(\text{و مورب } AC \quad AD\parallel CE)\quad \widehat{A}_۲=\widehat{C}\\ (\text{و مورب } AE \quad AD\parallel CE)\quad \widehat{A}_۱=\widehat{E}\\ (\text{نیمساز})\quad \widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{C}=\widehat{E}\xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}}AC=AE$$

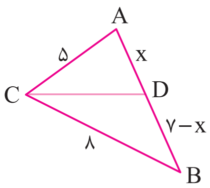
طبق قضیه تالس در مثلث BCE:

$$AD\parallel CE\Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC}\xrightarrow{AC=AE}\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

مثال ۱۰ در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول دو قطعه‌ای را به دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.



پاسخ: طبق قضیه نیمسازها:



$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow \frac{۵}{۸}=\frac{x}{۷-x}\Rightarrow ۸x=۳۵-۵x\Rightarrow ۱۳x=۳۵\Rightarrow x=\frac{۳۵}{۱۳}\Rightarrow \begin{cases}AD=\frac{۳۵}{۱۳}\\ BD=۷-\frac{۳۵}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳}\end{cases}$$