فهرست

درس دوم احتمال هم‌شانس

احتمال مقدماتی

در فضای نمونه‌ای هم‌شانس (همهٔ اعضای S شانس یکسان دارند)، احتمال (یعنی شانس) رخدادن هر پیشامد، متناسب با تعداد اعضای آن است. یعنی هر چه پیشامد A، تعداد عضو بیشتری داشته باشد، شانس بیشتری دارد، به بیان دقیق‌تر، احتمال پیشامد A از فضای نمونه‌ای S برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

تذکر از این تعریف نتیجه می‌شود که: ① $P(\varnothing)=۰$ ② $P(S)=۱$ ③ $۰<P($ پیشامدهای دیگر $)<۱$

مدل‌های مختلفی از سؤال در این قسمت هست: سکه، تاس، عددسازی، کلمه‌سازی، انتخاب، چیدن، ساختن مثلث، گروه‌ها، گوی‌ها و ...

در هر کدام از این مدل‌ها، برای محاسبهٔ احتمال، باید بلد باشیم که $n(A)$ و $n(S)$ را به سرعت به دست بیاوریم، تیپ‌های مختلف را با هم ببینیم:

۱. پرتاب تاس در پرتاب تاس دیدیم که فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ در نتیجه $n(S)=۶$ است، برای احتمال پیشامدی مانند A: «مضرب ۳ بیاید» تعداد اعضای A را به دست می‌آوریم: $A=\{۳,۶\}$ پس $n(A)=۲$ و احتمال آن برابر است با: $P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$.

تست در پرتاب یک تاس، احتمال کدام پیشامد با بقیه فرق دارد؟

۱) مضرب ۳ یا زوج بیاید.
۲) فرد یا اول بیاید.
۳) نه مضرب ۴ باشد و نه اول
۴) مضرب ۳ نیاید.

پاسخ ۳ در پرتاب یک تاس $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه‌ای است؛ پس $n(S)=۶$.

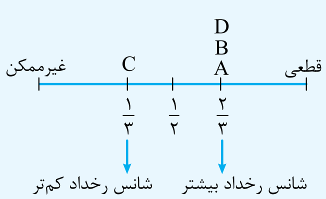
در ① می‌خواهیم مضرب ۳ یا زوج باشد. مضارب ۳ عبارت‌اند از ۳ و ۶ و اعداد زوج عبارت‌اند از ۶ و ۴ و ۲؛ پس اجتماع این‌ها می‌شود $A=\{۲,۳,۴,۶\}$ که پیشامدی ۴ عضوی است و احتمالش می‌شود $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}$.

در ② احتمال فردها یا اول‌ها را داریم؛ یعنی پیشامد $B=\{\underbrace{۱,\overbrace{۳,۵,۲}^{\text{اول}}}_{\text{فرد}}\}$ که این هم ۴ عضوی است و احتمالش $P(B)=\frac{۴}{۶}$ خواهد بود. پس می‌گوییم A و B هم‌شانس هستند.

در ③ مضرب ۴ نباشد و اول هم نباشد؛ یعنی ۴ و همچنین ۲ و ۳ و ۵ را نمی‌خواهیم، پس پیشامد مورد نظر $C=\{۱,۶\}$ است که احتمالش $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}$ می‌شود.

در ④ باید مضرب ۳ نیاید؛ یعنی $D'=\{۳,۶\}$؛ پس $D=\{۱,۲,۴,۵\}$ که احتمال این هم $\frac{۴}{۶}$ خواهد شد؛ پس ③ با بقیه متفاوت بود.

تذکر کتاب درسی در مقایسهٔ احتمال پیشامدهای مختلف، این محور را هم کشیده است:



دو تاس

پرتاب دو تاس یکی از مهم‌ترین مسئله‌های فصل احتمال است. فضای نمونه‌ای آن $۳۶ = ۶^۲$ عضو دارد که در جدول روبه‌رو آن‌ها را می‌آوریم:

در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت به وجود می‌آید که در ۶ حالت (روی قطر) اعداد دو تاس با هم برابرند، در ۱۵ خانهٔ بالاتر از قطر، عدد تاس اول بیشتر است و در ۱۵ خانهٔ پایین‌تر از قطر، عدد تاس دوم بیشتر است.

در هر خانهٔ جدول، مجموع دو تاس را نوشته‌ایم؛ همان‌طور که می‌بینید مثلاً در ۳ تا خانه از ۳۶ خانه، مجموع برابر ۴ است، پس احتمال این‌که مجموع دو تاس برابر ۴ باشد برابر است با $\frac{۳}{۳۶}$.

تاس اول

تاس دوم \ تاس اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

این یعنی تاس اول ۶ و تاس دوم ۲ است.

تاس دوم

در این شش خانه روی قطر دو تاس مساوی هم هستند.

تذکر | در پرتاب دو تاس همیشه حالت (۱,۵) با حالت (۵,۱) فرق دارد و برای این‌که اشتباه نکنید همواره فرض کنید که دو تاس متمایز هستند. یعنی همیشه بگویید: تاس اول، تاس دوم و...

بعضی‌ها دوست دارند تعداد حالت‌های مجموع دو تاس را حفظ باشند، جدول زیر به ما کمک می‌کند که با یک الگوی خوب، حالت‌ها را حفظ کنیم:

بیشترین احتمال

جمع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

یک واحد یک واحد زیاد می‌شود   یک واحد یک واحد کم می‌شود

مثلاً احتمال این‌که مجموع دو تاس ۱۱ باشد، برابر است با: $\frac{\text{تعداد حالت‌ها}}{۳۶} = \frac{۲}{۳۶}$

تست | در پرتاب دو تاس، احتمال این‌که «اختلاف تاس‌ها ۲ یا مجموع دو تاس کم‌تر از ۵ باشد» کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

پاسخ ۲ | پیشامد مطلوب از اجتماع دوتا پیشامد ساخته شده:

جمع کم‌تر از ۵ باشد = B و اختلاف تاس‌ها ۲ باشد = A

جدول را ببینید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	B	B	AB			
۲	B	B		A		
۳	AB				A	
۴		A				A
۵			A			
۶				A		

A دارای ۸ عضو و B شامل ۶ عضو است و ۲ تا عضو هم که مشترک است، پس ۱۲تا از ۳۶ تا خانهٔ جدول، مطلوب هستند، پس احتمال برابر است با: $\frac{۱}{۳} = \frac{۱۲}{۳۶}$.

۲. پرتاب سکه ـ جنسیت فرزندان یک خانواده

وقتی یک سکه را پرتاب می‌کنیم، احتمال «رو» برابر احتمال «پشت» و هر کدام برابر $\frac{۱}{۲}$ هستند، دقیقاً مثل این‌که وقتی بچه‌ای به دنیا می‌آید، احتمال دختر (یا پسر) بودنش، $\frac{۱}{۲}$ است، پس آزمایش پرتاب سکه دقیقاً مثل جنسیت فرزندان یک خانواده است. با یک نکتهٔ راحت می‌توانیم تمام تست‌های این قسمت را مثل آب خوردن حل کنیم:

نکته

(۱) در یک خانواده با n فرزند، احتمال این‌که خانواده k فرزند پسر (یا دختر) داشته باشد، برابر است با: $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$

(۲) در n بار پرتاب یک سکه (پرتاب n تا سکه)، احتمال این‌که سکه k بار «رو» بیاید برابر است با: $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$

مثلاً اگر ۵ سکه را با هم پرتاب کنیم، احتمال این که ۳تا سکه رو بیاید برابر است با: $\frac{\binom{۵}{۳}}{۲^۵} = \frac{۱۰}{۳۲}$

تست | در یک خانواده با ۶ فرزند، احتمال این‌که تعداد پسرها دو برابر تعداد دخترها باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $(\frac{۱۵}{۶۴})^۲$

پاسخ ۱ | باید تعداد پسرها ۴ تا و تعداد دخترها ۲ تا باشد! پس احتمال این را می‌خواهیم که ۴ تا پسر داشته باشیم:

$$P(\text{۴ تا پسر}) = P(\text{۲ تا دختر}) = \frac{\binom{۶}{۴}}{۲^۶} = \frac{۱۵}{۶۴}$$

یادآوری $\binom{۶}{۴} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$

۳. کیسه و مهره‌های رنگی

رسیدیم به معروف‌ترین و مهم‌ترین تست‌های احتمال! تست می‌گوید که یک کیسه داریم و درون آن n تا مهرهٔ سفید و m تا مهرهٔ سیاه وجود دارد، مثلاً ۳ تا مهره برمی‌داریم و چه‌قدر احتمال دارد که ۲ تا سفید باشد؟ در این تست‌ها فضای نمونه‌ای برابر است با: $\binom{\text{کل}}{\text{تعداد انتخاب‌ها}}$ و برای محاسبهٔ تعداد اعضای پیشامد مطلوب، از بین رنگ‌ها انتخاب می‌کنیم. در مثالی که زدیم باید ۲ تا از سفیدها و یکی از سیاه‌ها را انتخاب کنیم: $\dfrac{\binom{n}{۲}\times\binom{m}{۱}}{\binom{m+n}{۳}}$.

تذکر | دقت کنید که مجموع انتخاب‌ها در صورت و مجموع انتخاب‌ها در مخرج کسر، باید برابر ۳ باشد.

تست | در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ سبز، ۳ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز داریم. اگر ۳ مهره با هم بیرون بیاوریم، شانس کدام اتفاق کم‌تر از بقیه است؟

۱) سه رنگ متفاوت خارج شود.
۲) مهره‌های خارج‌شده فقط از دو رنگ باشند.
۳) در بین مهره‌های خارج‌شده، فقط یک آبی باشد.
۴) در بین مهره‌ها، فقط دو قرمز باشد.

پاسخ | ۱ برای همهٔ پیشامدها یکسان و برابر است با $n(S)=\binom{۱۲}{۳}=\dfrac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱}=۲۲۰$. پس برویم دنبال تعداد عضو پیشامدها:

در ۱ برای سه رنگ متفاوت داریم:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک آبی}}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک سبز}}\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یک قرمز}}=۳\times۴\times۵=۶۰$$

در ۲ برای این‌که مهره‌ها فقط از دو رنگ باشند، باید دوتا از مهره‌ها هم‌رنگ و سومی متفاوت باشد؛ یعنی:

$$n(B)=\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو آبی}}\times\underbrace{\binom{۹}{۱}}_{\text{یکی دیگر}}+\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو سبز}}\times\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{یکی دیگر}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دو قرمز}}\times\underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{یکی دیگر}}=۳\times۹+۶\times۸+۱۰\times۷=۲۷+۴۸+۷۰=۱۴۵$$

در ۳ فقط یک آبی و بنابراین دوتا از بین سبز و قرمز می‌خواهیم:

$$n(C)=\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک آبی}}\times\underbrace{\binom{۹}{۲}}_{\text{دوتا دیگر}}=۳\times۳۶=۱۰۸$$

در ۴ دو قرمز و یکی دیگر می‌خواهیم:

$$n(D)=\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دو قرمز}}\times\underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{یکی دیگر}}=۷۰$$

پس شانس ۱ از همه کم‌تر است؛ چون تعداد اعضای پیشامدش از همه کم‌تر است.

تذکر | گاهی اوقات به جای الفاظ کیسه و مهره، تست می‌گوید: چند نوع جاندار یا دانش‌آموزان تجربی و ریاضی و ... ولی داستان همان داستان است!

تست | از بین ۴ ببر و ۶ تا شیر و ۲ تا زرافه، ۲ تا را انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی حیوانات انتخاب‌شده از یک نوع نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ | ۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S)=\binom{۱۲}{۲}=\dfrac{۱۲\times۱۱}{۲}=۶۶$، $n(A)$ را با اصل جمع باید به دست بیاوریم:

$$n(A)=\overbrace{\underbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۶}{۱}}_{۴\times۶}}^{\text{ببر و شیر}}+\overbrace{\underbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۲}{۱}}_{۴\times۲}}^{\text{ببر و زرافه}}+\overbrace{\underbrace{\binom{۶}{۱}\times\binom{۲}{۱}}_{۶\times۲}}^{\text{شیر و زرافه}}=۲۴+۸+۱۲=۴۴$$

پس احتمال برابر است با:

$$P(A)=\frac{۴۴}{۶۶}=\frac{۲}{۳}$$

۴. کیسه و مهره‌های شماره‌دار

در بعضی از تست‌ها مهره‌های درون کیسه، شماره‌دار هستند و باید تعدادی از آن مهره‌ها را خارج کنیم و احتمال اتفاق خاص را بررسی کنیم، در این سؤال‌ها دقت کنید که

۱) $n(S)$ باز هم برابر $\binom{\text{کل}}{\text{تعداد انتخاب‌ها}}$ است.

۲) ترتیب شماره‌های خارج‌شده اهمیت ندارد یعنی در این مسائل برخلاف پرتاب دو تاس (۱,۲) و (۲,۱) با هم فرقی ندارند.

۳) وقتی که شماره‌های ۱ تا n را در کیسه داریم و ۲ تا مهره خارج می‌کنیم، امکان ندارد که مثلاً ۲ و ۲ خارج شده باشند (چون یه‌دونه «۲» داریم!)

تست | از میان ۶ گوی با شماره‌های ۱ تا ۶، سه گوی با هم خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های خارج‌شده زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ ۲ ابتدا $n(S)$ را به دست می‌آوریم:
$n(S) =$ تعداد انتخاب‌های ۳ گوی از ۶ گوی $= \binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} = 20$

مجموع سه عدد وقتی زوج می‌شود که یا «هر سه عدد زوج باشند» و یا «دوتا از اعداد فرد و دیگری زوج باشد»، پس:

در اعداد ۱ تا ۶، ۳ تا عدد فرد داریم. ۳ تا عدد زوج داریم: $\{6,4,2\}$

$$n(A) = \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{انتخاب ۳ تا زوج}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{انتخاب ۲ تا فرد}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب ۱ زوج}} = 1 + 3\times3 = 10$$

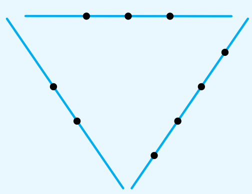
پس احتمال می‌شود: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

احتمال به کمک آنالیز ترکیبی

در خیلی از تست‌ها، برای محاسبهٔ $n(S)$ و $n(A)$ برمی‌گردیم به فصل آنالیز ترکیبی و از مطالبی که آن‌جا یاد گرفتیم، استفاده می‌کنیم، خب! طبیعتاً تنوع این تست‌ها خیلی زیاد است! در جدول زیر نمونه‌های اصلی را مرور می‌کنیم:

	بیان آزمایش	$n(S)$	خواستهٔ سؤال	شمارش پیشامد A و رسیدن به $n(A)$	$P(A)$
مدل چیدمان	۵ نفر کنار هم در صف می‌ایستند.	$5! = 120$	علی نفر اول باشد و رضا آخر نباشد.	$\underset{\text{فقط علی}}{1} \quad \underbrace{\_\ \_\ \_}_{3!} \quad \underset{\text{به‌جز علی و رضا}}{3}$ $n(A) = 3\times6 = 18$	$\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$
مدل عددسازی	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶ عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز می‌سازیم.	$5\times4\times3 = 60$	کم‌تر از ۳۰۰ باشد.	$\underset{\text{۱ یا ۲}}{2} \times 4\times3 = 24$	$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$
مدل کلمه‌سازی	با حروف کلمهٔ SPACET کلمه‌ای ۳حرفی می‌سازیم.	$6\times5\times4 = 120$	در کلمهٔ جدید، P و S کنار هم باشند.	$\boxed{}$ SP $\underset{\text{حرف دیگر}}{4} \times \underset{\text{بستهٔ S و P}}{2!} \times \underset{\text{صف دوتایی}}{2} = 16$	$\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

تست ؟ از نقاط شکل، ۳ تا را انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال مثلث با رئوس نقاط انتخابی وجود دارد؟



۱) $\frac{27}{28}$
۲) $\frac{20}{21}$
۳) $\frac{79}{84}$
۴) $\frac{13}{14}$

پاسخ ۳ برای انتخاب ۳ تا از نقاط به تعداد $n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$ حالت داریم. برای ساخته‌شدن مثلث باید نقاط از یک خط نباشند. پس با استفاده از متمم می‌گوییم:

$$n(A) = n(S) - n(A') = \binom{9}{3} - \underbrace{\left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{2}{3}\right)}_{\text{سه نقطه روی یک خط}} = 84 - (1+4+0) = 79$$

دقت کردید؟ یا هر سه نقطه روی خط بالایی‌اند یا هر سه روی خط سمت راست یا هر سه روی خط سمت چپ (که امکان ندارد چون فقط دوتا نقطه روی این خط است). پس احتمال می‌شود: $P(A) = \frac{79}{84}$

تذکر *جایگشت‌های خاص، یکی‌درمیان‌ها، بسته‌بندی اشیا و ... در تست‌های احتمال خیلی محبوب هستند.*

تست ؟ ۷ کارت با شماره‌های ۱ تا ۷ را کنار هم می‌چینیم، چه‌قدر احتمال دارد که ارقام زوج و فرد یکی در میان قرار بگیرند؟

۱) $\frac{3}{70}$
۲) $\frac{2}{35}$
۳) $\frac{1}{70}$
۴) $\frac{1}{35}$

پاسخ ۴ از چینش اعداد ۱ تا ۷ به تعداد !۷ صف ایجاد می‌شود. پس $n(S) = 7!$.

برای یکی در میان شدن باید فرم کلی این‌جوری باشد: فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد، پس حتماً صف با یک عدد فرد شروع شود! پس جایگاه اعداد فرد مشخص است و !۴ جایگشت دارند و جایگاه اعداد زوج نیز مشخص است و !۳ جایگشت دارند، پس: $n(A) = 3!\times4!$، حالا احتمال را حساب می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{3!\times4!}{7!} = \frac{3!}{5\times6\times7} = \frac{1}{35}$$

حرف آخر

همیشه قرار نیست شمارش تعداد اعضای $n(A)$ با استفاده از اصل ضرب و جمع و ترکیب و این‌ها باشد. بعضی اوقات، به‌خصوص در مسائل عددها و برای بررسی بخش‌پذیری یا اول‌بودن، نوشتن اعضای S و پیداکردن اعضای A تنها راه است.

تست زیر را ببینید:

تست **با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ عددی دورقمی می‌سازیم (تکرار ارقام مجاز است). با کدام احتمال اول است؟**

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ ۳ اعداد دورقمی با این ارقام عبارت‌اند از:

$n(S) = ۴ \times ۴ = ۱۶$

$S = \{۱۱,۱۲,۱۴,۱۵,۲۱,۲۲,۲۴,۲۵,۴۱,۴۲,۴۴,۴۵,۵۱,۵۲,۵۴,۵۵\}$

که در بین آن‌ها فقط ۱۱ و ۴۱ اول‌اند. پس $n(A) = ۲$ و احتمال می‌شود $\frac{۲}{۱۶}$ یا $\frac{۱}{۸}$.

درس دوم: احتمال هم‌شانس

پرتاب تاس

۲۵۶- تاسی را به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد زوج یا بزرگ‌تر از ۳ رخ دهد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۵۷- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی حداقل یکی از اعداد روشده مضرب ۳ نیست؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

۲۵۸- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع ۵ بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

۲۵۹- در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که مجموع اعداد دو تاس کم‌تر از ۷ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۲۶۰- احتمال این‌که در پرتاب دو تاس، اعداد روشده برابر بوده یا مجموع آن‌ها ۱۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۲۶۱- دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد روشده، یک عدد اول است؟ (سراسری ۹۳)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۲۶۲- دو تاس همگن را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد روشده برابر ۷ است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۶۳- در پرتاب ۲ تاس، احتمال آن‌که اختلاف اعداد ظاهرشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۸}$

۲۶۴- یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد پرتاب اول، زوج و کوچک‌تر از عدد پرتاب دوم باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۲۶۵- شخص A یک تاس و شخص B دو تاس پرتاب می‌کنند. احتمال آن‌که مجموع دو تاسی که B پرتاب می‌کند برابر با تاس A باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۱۰}{۲۱۶}$

۲۶۶- ۱۱ تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع اعداد روشده زوج باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۱۱}$ ۴) $\frac{۸}{۱۱}$

۲۶۷- در پرتاب سه تاس، چه‌قدر احتمال دارد مجموع سه تاس برابر با ۱۷ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱}{۷۲}$

۲۶۸- در پرتاب سه تاس، احتمال آن‌که مجموع سه تاس برابر با ۶ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۲۶۹- تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال اعداد روشده متوالی‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۲۷۰- در پرتاب ۳ تاس با هم چه‌قدر احتمال دارد جمع ارقام روشده ۱۵ باشد یا حداقل یک تاس فرد بیاید؟

۱) $\frac{۱۸۷}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۲۷۱- در پرتاب سه تاس، احتمال آن‌که فقط دو تاس از سه تاس مساوی باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

پرتاب سکه ـ جنسیت فرزندان یک خانواده

۲۷۲- در پرتاب ۶ سکه، چه‌قدر احتمال دارد ۴تا رو بیاید؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶۴}$ ۳) $\frac{۴}{۶۴}$ ۴) $\frac{۱۵}{۶۴}$

۲۷۳- در پرتاب ۵ سکه، چه‌قدر احتمال دارد ۲ رو یا ۴ رو بیاید؟

۱) $\frac{۵}{۳۲}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۲}$

۲۷۴- در خانواده‌ای با ۴ فرزند، چه‌قدر احتمال دارد حداقل ۲ فرزند، پسر باشند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۲۷۵- شش پرسش دوگزینه‌ای را شانسی می‌زنیم. اگر همهٔ تست‌ها را زده باشیم، با کدام احتمال حداقل ۲تا درست می‌زنیم؟

۱) $\frac{۴۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۵۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۵۳}{۶۴}$ ۴) $\frac{۵۹}{۶۴}$

۲۷۶- تاس سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال این‌که ۶ بار برآمد تاس، عددی بزرگ‌تر از ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۶۳}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۷۵}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۷۵}{۵۱۲}$ ۴) $\frac{۱۰۵}{۵۱۲}$

۲۷۷- سه وجه مکعبی سفید و سه وجه دیگر آن سیاه است. این مکعب را چهار بار پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که دو بار سفید یا یک بار سیاه بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

کیسه و مهره‌های رنگی

۲۷۸- در یک کیسه، ۵ مهرهٔ سفید و ۷ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که دو مهره هم‌رنگ نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱۹}{۳۳}$ ۳) $\frac{۳۵}{۶۶}$ ۴) $\frac{۳۷}{۶۶}$

۲۷۹- ۵ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه را در ظرفی ریخته‌ایم. به تصادف دو مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره هم‌رنگ‌اند؟ (خارج ۹۲)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲۸۰- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است، دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل یک مهرهٔ سفید انتخاب شود، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۷}{۱۱}$

۲۸۱- جعبه‌ای شامل ۸ مهرهٔ سیاه و سفید است. دو مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم. مهره‌های سفید چه تعداد باشد تا احتمال هم‌رنگ‌بودن مهره‌ها مینیمم شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۷

۲۸۲- در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴۰}$

۲۸۳- در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز، ۵ مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه داریم. چه تعداد مهرهٔ سفید به این کیسه اضافه کنیم تا احتمال خارج‌شدن مهرهٔ سفید از این کیسه به $\frac{۳}{۴}$ برسد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۸۴- در ظرفی ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۴ مهرهٔ خارج‌شده، هم‌رنگ هستند؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۲۴

۲۸۵- در ظرفی ۵ مهرهٔ سیاه، ۳ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ سبز وجود دارد. ۳ مهره به ترتیب و با جای‌گذاری از ظرف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که از سه رنگ مختلف باشند، کدام است؟

۱) ۰/۱۸ ۲) ۰/۲۰ ۳) ۰/۳۰ ۴) ۰/۲۴

۲۸۶- در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. ۱۱ مهره به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم، با چه احتمالی مهره‌های باقی‌مانده در ظرف هر دو قرمز هستند؟

۱) $\frac{۶}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲۵}$ ۳) $\frac{۵}{۱۳}$ ۴) $\frac{۵}{۲۶}$

۲۸۷- در یک کلاس، ۲۰ دانش‌آموز در ۵ ردیف ۴ نفره نشسته‌اند. دو نفر از این دانش‌آموزان را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این دو نفر از یک ردیف باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۱۹}$ ۳) $\frac{۳}{۲۰}$ ۴) $\frac{۳}{۲۱}$

۲۸۸- از هر چهار گروه آزمایشی، به ترتیب ۳، ۳، ۲ و ۱ نفر داوطلب شرکت در آزمون هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنان معرفی شوند، با کدام احتمال از هر گروه ۱ نفر معرفی شده‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۲}{۲۱}$

۲۸۹- در آزمایشگاهی، ۷ موش نگه‌داری می‌شوند که بر روی ۳ موش، آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان به طور تصادفی انتخاب شوند، با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

۲۹۰- برای انجام مسابقه‌ای، ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه، متفاوت است؟

۱) $\frac{5}{14}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{5}{7}$

کیسه و مهره‌های شماره‌دار

۲۹۱- شش مهره با شماره‌های ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ در ظرفی قرار دارند. دو مهره را با هم بیرون می‌آوریم و بدون جای‌گذاری، دو مهرهٔ دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهرهٔ شمارهٔ ۳ خارج شده است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۹۲- در کیسه‌ای ۱۰ کارت وجود دارد که روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۱۰ نوشته شده است. ۶ کارت با هم و به تصادف از این کیسه بیرون می‌کشیم. احتمال آن‌که اعداد ۷ و ۶ در بین شماره‌های این کارت‌ها باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۲۹۳- در ظرفی شش مهره با شماره‌های ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ ریخته شده‌اند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم با کدام احتمال شماره‌های این دو مهره اعداد متوالی‌اند؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۹۴- جعبه‌ای محتوی ۱۰ مهره با شماره‌های ۱ تا ۱۰ می‌باشد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه انتخاب کنیم، احتمال این‌که شماره‌های این ۳ مهره پشت سر هم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{1}{90}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{72}$

۲۹۵- اعداد ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ بر روی ۶ مهرهٔ یکسان نوشته شده‌اند. اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم، با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ می‌باشد؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۲۹۶- اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته‌اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۲۹۷- در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره عدد فرد است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۲۹۸- از میان ۷ گوی با شماره‌های ۱ تا ۷، سه گوی با هم خارج می‌کنیم. اگر A پیشامد زوج‌بودن مجموع شماره‌های انتخابی بوده و در پیشامد B بزرگ‌ترین عدد انتخابی ۵ باشد، احتمال کدام بیشتر است؟

۱) B' ۲) A' ۳) B ۴) A

۲۹۹- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی، پی‌درپی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شمارهٔ فرد به صورت متوالی خارج نمی‌شوند؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲

۳۰۰- با ارقام ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ به تصادف عددی شش‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌نویسیم. احتمال آن‌که هیچ دو رقم زوج و هیچ دو رقم فردی کنار یکدیگر قرار نگیرند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{1}{20}$

۳۰۱- هر یک از اعداد ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱، بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادف، متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

۳۰۲- چهار مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۴ و هم‌چنین چهار مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱ تا ۴ را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی مجموع شماره‌های دو مهره ۴ می‌شود؟

۱) $\frac{3}{28}$ ۲) $\frac{5}{28}$ ۳) $\frac{3}{14}$ ۴) $\frac{5}{14}$

۳۰۳- شش گوی آبی با شماره‌های ۱ تا ۶ و چهار گوی قرمز با شماره‌های ۱ تا ۴ داریم. دو گوی از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو گوی ۸ است؟

۱) $\frac{1}{45}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۳۰۴- در کیسه‌ای پنج مهرهٔ آبی با شماره‌های ۱ تا ۵ و پنج مهرهٔ قرمز با شماره‌های ۱ تا ۵ ریخته شده است. اگر دو مهره به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی اعداد این دو مهره متوالی‌اند؟

۱) $\frac{16}{45}$ ۲) $\frac{8}{45}$ ۳) $\frac{8}{50}$ ۴) $\frac{6}{50}$

احتمال به کمک آنالیز ترکیبی

۳۰۵- با کدام احتمال رقم طبیعی سمت راست پلاک اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود، از ۴ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۳۰۶- اگر با ارقام ۶، ۴، ۱ و ۲، یک عدد چهاررقمی بسازیم، چه‌قدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۳۰۷- چهار رقم ۰، ۱، ۲ و ۳ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهاررقمی حاصل شود، با کدام احتمال، یک عدد چهاررقمی مضرب ۶ حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۳۰۸- یک عدد دورقمی به تصادف اختیار می‌کنیم. با کدام احتمال مضرب ۲ است، اما مضرب ۳ نیست؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳۰۹- با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و ۰ یک عدد سه‌رقمی نوشته‌ایم. احتمال این‌که عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰۰ و زوج باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{8}{25}$ ۴) $\frac{56}{180}$

۳۱۰- از بین اعداد سه‌رقمی، یک عدد به دلخواه انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این عدد دارای رقم تکراری باشد، کدام است؟

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۲۸ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۳۶

۳۱۱- با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱، یک عدد پنج‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌نویسیم. به کدام احتمال دو رقم زوج، کنار هم نمی‌باشند؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۳۱۲- اگر یک عدد سه‌رقمی با کنار هم قرارگرفتن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱ و ۰ به وجود آید، احتمال این‌که این عدد زوج باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۳۱۳- با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱ اعداد سه‌رقمی می‌سازیم. کدام اتفاق محتمل‌تر است؟ (یعنی شانس بیشتری دارد.)

۱) عدد سه‌رقمی زوج باشد. ۲) عدد سه‌رقمی شامل ۳ باشد.

۳) ترتیب ارقامش یکان > صدگان > دهگان باشد. ۴) رقم تکراری داشته باشد.

۳۱۴- دو عدد به تصادف و با جای‌گذاری از بین اعداد ۱,۲,...,۶ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو عدد فرد و جمعشان ۸ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{30}$ ۳) $\frac{1}{18}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۳۱۵- سه عدد متمایز از مجموعهٔ {۱,۲,۳,...,۹} به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حاصل‌ضرب این سه عدد برابر با ۱۸ شود، کدام است؟

۱) $\frac{1}{42}$ ۲) $\frac{1}{252}$ ۳) $\frac{1}{21}$ ۴) $\frac{1}{126}$

۳۱۶- احتمال این‌که روز تولد سه نفر در روزهای مختلف هفته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{24}{35}$ ۲) $\frac{23}{35}$ ۳) $\frac{30}{49}$ ۴) $\frac{21}{49}$

۳۱۷- از بین اعداد طبیعی سه‌رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۲۶ ۴) ۰/۲۸

۳۱۸- افراد a، b، c، d، e و f می‌خواهند دور یک میز بایستند. با چه احتمالی بین a و b دقیقاً یک نفر وجود دارد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۳۱۹- ۶ مهندس و ۳ دکتر در یک سمینار سخنرانی می‌کنند. احتمال این‌که دکترها یکی در میان سخنرانی کنند، کدام است؟

۱) $\frac{5}{84}$ ۲) $\frac{7}{84}$ ۳) $\frac{15}{84}$ ۴) $\frac{11}{84}$

۳۲۰- از بین جایگشت‌های سه‌حرفی کلمهٔ Sabz یکی را انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که در کلمهٔ منتخب، عبارت ab وجود داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۳۲۱- ۴ معلم و ۶ دانش‌آموز در یک صف به طور تصادفی می‌ایستند. احتمال این‌که هیچ دو معلمی در کنار یکدیگر نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۲۱}$ ۳) $\frac{۴}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

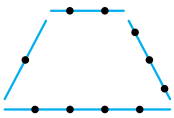
۳۲۲- حروف کلمهٔ Bagheri را به تصادف مرتب کرده‌ایم. احتمال این‌که حروف صدادار در مکان‌های زوج قرار بگیرند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{۳۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

۳۲۳- هفت نفر که a، b و c عضو آن‌ها هستند، می‌خواهند سوار هواپیما شوند. احتمال آن‌که a قبل از b و b نیز قبل از c وارد هواپیما شوند، کدام است؟

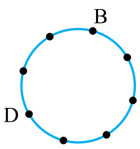
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۲۴- از میان ۱۰ نقطهٔ مقابل، ۴ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که با ۴ نقطهٔ انتخاب‌شده بتوان یک چهارضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳۵}$

۳۲۵- از میان ۸ نقطهٔ شکل مقابل، ۴ نقطه انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی BD قطر این چهارضلعی خواهد بود؟



۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$

۳) $\frac{۴}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۳۲۶- روی یک در، دو قفل مختلف وجود دارد و کلیدهای دو قفل در بین ۶ کلیدی است که در حال حاضر یکی از آن‌ها را گم کرده‌اید. احتمال آن‌که هنوز هم بتوانید در را باز کنید، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۳۲۷- از بین ۵ جفت کفش، ۲ لنگه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که دو لنگه جفت هم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

۳۲۸- از بین ۵ جفت کفش، ۴ لنگه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که هیچ جفت کفشی انتخاب نشده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۸}{۲۱}$ ۳) $\frac{۹}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۰}{۲۱}$

۳۲۹- از مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,...,۹\}$ یک زیرمجموعه به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این زیرمجموعه ۵عضوی و شامل عدد ۳ است؟

۱) $\frac{۳۵}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۳۵}{۵۱۲}$ ۳) $\frac{۶۳}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۶۳}{۵۱۲}$

۳۳۰- حروف کلمهٔ ATAXIA را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۳۱- در بین تمام کلمات ۸حرفی با حروف کلمهٔ football با چه احتمالی حروف مشابه مجاور هستند؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۳۳۲- ۴ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ زرد را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. احتمال آن‌که مهرهٔ اول و آخر زرد باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

۳۳۳- فرض کنید یک حرف از کلمهٔ RESERVE و یک حرف از کلمهٔ VERTICAL را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال این‌که حرف انتخاب‌شده از دو کلمه یکسان باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۶}{۵۶}$ ۲) $\frac{۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵۶}$ ۴) $\frac{۵}{۵۶}$

۳۳۴- هر کدام از ارقام عدد ۱۱۱۳۴ را روی یک کارت نوشته و ۵ کارت حاصل را درون کیسه‌ای می‌اندازیم. از این کیسه سه کارت به تصادف خارج می‌کنیم و در یک ردیف کنار هم می‌چینیم. احتمال این‌که عدد حاصل فقط دو رقم تکراری داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۶}{۱۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۳۵- هر یک از اعداد ۱ تا ۲۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس دو کارت به تصادف و به ترتیب از کیسه خارج کرده و کنار یکدیگر قرار می‌دهیم تا عدد جدیدی حاصل شود. اعداد تشکیل‌شده از همهٔ حالت‌های ممکن را در مجموعهٔ A قرار می‌دهیم، یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۶ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱۳}{۸۴}$ ۲) $\frac{۶۵}{۴۱۷}$ ۳) $\frac{۱۱}{۷۰}$ ۴) $\frac{۶۷}{۴۱۷}$

۳۳۶- روی هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ را نوشته و سپس در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس به دلخواه یک کارت از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر عدد زوج باشد، یک عدد دیگر از کیسه بیرون می‌آوریم و در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. اگر عدد فرد باشد یک تاس پرتاب کرده و عدد روشده را در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم، سپس از اعداد ساخته‌شده، در همهٔ حالت‌های ممکن، مجموعهٔ A را تشکیل می‌دهیم. یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۹}{۳۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۳۳۷- اگر ۳ آمریکایی، ۴ ایتالیایی و ۳ مکزیکی دور میز گردی به تصادف بنشینند، احتمال این‌که افراد هم‌وطن پهلوی هم قرار گیرند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۴۲۰}$ ۴) $\frac{۱}{۳۰۰}$

۳۳۸- رئیس، منشی و چهار کارمند دور میز گرد می‌نشینند. با کدام احتمال منشی مقابل رئیس قرار می‌گیرد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۳۹- یک رئیس، یک معاون و ۶ کارمند می‌خواهند دور یک میز بنشینند. احتمال این‌که بین رئیس و معاون دقیقاً یک صندلی فاصله باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۵۶. گزینه ۲ $n(S)=۶$ است و عدد زوج یا بزرگ‌تر از ۳ می‌خواهیم:

$$A=\{\underbrace{۲,۴,۶}_{\text{زوج}},\ \underbrace{۴,۵,۶}_{\text{بزرگ‌تر از ۳}}\}=\{۲,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(A)=۴$$

بنابراین:
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

۲۵۷. گزینه ۲ تعداد کل حالات $n(S)=۶\times۶=۳۶$ است. برای این‌که «حداقل یکی از اعداد روشده مضرب ۳ نباشد» از شمارش مکمل می‌رویم:

$$n(A)=\text{تعداد کل}-\left(\begin{array}{c}\text{هر دو عدد}\\\text{مضرب ۳ باشند}\end{array}\right)=۳۶-\left(\begin{array}{c}\text{هر دو تاس ۳ یا ۶}\\\text{(هر تاس ۲ حالت)}\end{array}\right)$$
$$=۳۶-۲\times۲=۳۶-۴=۳۲$$

پس داریم:
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۲}{۳۶}=\frac{۸}{۹}$$

۲۵۸. گزینه ۱ دو تاس با هم $۳۶=۶\times۶$ حالت دارند. در ۴ حالت مجموع ارقام ۵ است:
$$A=\{(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

پس داریم:
$$P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

> **تذکر** باز هم تکرار می‌کنیم که تاس‌ها همیشه متمایزند و (۱,۴) با (۴,۱) فرق دارد و باید هر دو را بنویسید.

۲۵۹. گزینه ۴ دو تاس کلاً ۳۶ حالت دارند:

مجموع‌های کم‌تر از ۷ عبارت‌اند از: ۲,۳,۴,۵,۶

مجموع ۲، یک حالت دارد: (۱,۱)

مجموع ۳، دو حالت دارد: (۱,۲),(۲,۱)

مجموع ۴، سه حالت دارد: (۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)

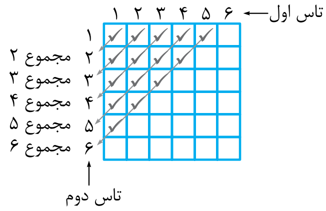
مجموع ۵، چهار حالت دارد: $(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲)$

مجموع ۶ نیز ۵ حالت دارد: $(۱,۵),(۵,۱),(۳,۳),(۲,۴),(۴,۲)$

پس روی هم $۱۵ = ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱$ حالت داریم؛ بنابراین:

$$P(A)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

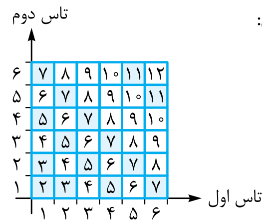
این را هم ببینید:



۲۶۰. گزینه ۲ دو تاس کلاً $۳۶ = ۶^۲$ حالت داشت. مجموع ۱۱ دو حالت $(۶,۵)$ و $(۵,۶)$ دارد. اعداد برابر هم ۶ حالت، $(۱,۱),(۲,۲),\dots,(۶,۶)$ دارد؛ پس روی هم $n(A)=۸$ و داریم:

$$P(A)=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

۲۶۱. گزینه ۱ با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۲۶۲. گزینه ۲ مجموع ۷ در حالت‌های $\underset{۶,۱}{۱,۶}$، $\underset{۴,۳}{۳,۴}$، $\underset{۵,۲}{۲,۵}$ رخ می‌دهد که حالت‌های $(۲,۵)$ و $(۵,۲)$ را نمی‌خواهیم. پس ۴تا از ۳۶ حالت مورد نظر است:

$$P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

۲۶۳. گزینه ۱ اختلاف ۲ در حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

$(۳,۱),(۴,۲),(۵,۳),(۶,۴),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۵),(۴,۶)$

پس ۸ حالت از ۳۶ حالت مورد نظر است:

$$P(A)=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

۲۶۴. گزینه ۲ باید تاس اول ۴ یا ۶ یا ۲ و تاس دوم، از آن بیشتر باشد (بیشتر از ۶ که نداریم)، حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

$$\left(۲,\begin{matrix}۳\\۴\\۵\\۶\end{matrix}\right)\quad \left(۴,\begin{matrix}۵\\۶\end{matrix}\right)$$

پس $n(A)=۶$ و بنابراین:

$$P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

۲۶۵. گزینه ۱ تاس A را اول و تاس‌های B را دوم می‌نویسیم. کلاً ۳ تاس داریم؛ پس $n(S)=۶^۳=۲۱۶$. حالت‌های مورد قبول عبارت‌اند از:

$(۲,۱۱)$
$(۳,۱۲),(۳,۲۱)$
$(۴,۱۳),(۴,۲۲),(۴,۳۱)$
$(۵,۱۴),(۵,۲۳),(۵,۳۲),(۵,۴۱)$
$(۶,۱۵),(۶,۲۴),(۶,۳۳),(۶,۴۲),(۶,۵۱)$

پس روی هم $۱۵=۱+۲+۳+۴+۵$ حالت داریم:

$$P(A)=\frac{۱۵}{۲۱۶}$$

۲۶۶. گزینه ۱ راه I به طور کلی همیشه در پرتاب n تاس، احتمال این‌که مجموع ارقام روشده زوج باشد برابر $\frac{۱}{۲}$ و احتمال این‌که مجموع ارقام روشده فرد باشد نیز $\frac{۱}{۲}$ است.

راه II در ۱۰ پرتاب اول نتایج هر چه باشند دو حالت کلی وجود دارد:

۱) مجموع ۱۰ پرتاب عدد زوج باشد، در این صورت پرتاب یازدهم باید یکی از اعداد ۲، ۴ و ۶ شود.

۲) مجموع ۱۰ پرتاب عدد فرد باشد، در این صورت پرتاب یازدهم باید یکی از اعداد ۱، ۳ و ۵ شود.

پس پرتاب یازدهم به هر ترتیب ۳ حالت مختلف دارد و پرتاب‌های اول تا دهم هر کدام ۶ حالت دارند، لذا داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳\times ۶^{۱۰}}{۶^{۱۱}}=\frac{۱}{۲}$$

۲۶۷. گزینه ۴ اگر هر سه تاس ۶ بیایند مجموع می‌شود ۱۸، برای مجموع ۱۷ باید یکی از تاس‌ها ۵ شود یعنی ۶,۶,۵ یا ۶,۵,۶ یا ۵,۶,۶ شود، پس $n(A)=۳$ و $n(S)=۲۱۶$ و بنابراین:

$$P(A)=\frac{۳}{۲۱۶}=\frac{۱}{۷۲}$$

سه تاس کلاً $۶^۳=۲۱۶$ حالت دارند.

یک بار حالت‌های مجموع ۳ تاس را ببینید:

جدول مهم احتمال جمع سه تاس

مجموع	۱۰ یا ۱۱	۹ یا ۱۲	۸ یا ۱۳	۷ یا ۱۴	۶ یا ۱۵	۵ یا ۱۶	۴ یا ۱۷	۳ یا ۱۸
احتمال	$\frac{۲۷}{۲۱۶}$	$\frac{۲۵}{۲۱۶}$	$\frac{۲۱}{۲۱۶}$	$\frac{۱۵}{۲۱۶}$	$\frac{۱۰}{۲۱۶}$	$\frac{۶}{۲۱۶}$	$\frac{۳}{۲۱۶}$	$\frac{۱}{۲۱۶}$

پس احتمال مجموع ۱۰ یا ۱۱ از همه بیشتر است.

و احتمال این‌که مجموع x باشد با احتمال مجموع $۲۱-x$ برابر است.

۲۶۸. گزینه ۲ حالت‌های مجموع ۶ عبارت‌اند از:

۲,۲,۲ یا ۳,۲,۱ یا ۴,۱,۱

البته هر کدام از این‌ها جابه‌جایی هم دارند. برای ۴,۱,۱ سه حالت و برای ۳,۲,۱ شش حالت داریم. ۲,۲,۲ هم جابه‌جایی ندارد و فقط یک حالت است. پس روی هم $۱۰=۱+۳+۶$ حالت وجود دارد. کل حالت‌ها هم $۲۱۶=۶^۳$ بود. بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۱۰۸}$$

> **تذکر** جایگشت با تکرار که یادتان هست:
>
> $۴,۱,۱ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ \qquad ۳,۲,۱ \Rightarrow ۳!=۶$
>
> $۲,۲,۲ \Rightarrow \frac{۳!}{۳!}=۱$

۲۶۹. گزینه ۴ کلاً $۶\times۶\times۶$ حالت داریم. حالت‌های اعداد متوالی عبارت‌اند از ۳۴۵، ۴۵۶، ۲۳۴ و ۱۲۳ که هر کدام $۳!=۶$ حالت دارند. پس $n(A)=۴\times۶=۲۴$ و داریم:

$$P(A)=\frac{۴\times۶}{۶\times۶\times۶}=\frac{۱}{۹}$$

۲۷۰. گزینه ۴ مجموع‌های ۱۵ در حالت‌های $(۶,۶,۳),(۶,۵,۴),(۵,۵,۵)$ تولید می‌شوند. اولی $\frac{۳!}{۲!}$، دومی $۳!$ و سومی $\frac{۳!}{۳!}$ حالت دارند. پس روی هم $n(A)=۱+۶+۳=۱۰$ است برای حداقل یک تاس فرد هم کل حالت‌های سه تاس را منهای حالت‌های «هر سه زوج» کنیم:

$$n(B)=(۶\times۶\times۶)-\underbrace{(۳\times۳\times۳)}_{\text{هر سه زوج}}=۲۱۶-۲۷=۱۸۹$$

به اشتراک این‌ها هم نیاز داریم. دقت کنید که تمام حالت‌های مجموع ۱۵، حداقل یک رقم فرد دارند؛ پس $A\subseteq B$ است و قسمت مشترک می‌شود خود A. پس احتمال اجتماع A و B یعنی احتمال B که برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(B)=\frac{۱۸۹}{۲۱۶}=\frac{۲۱}{۲۴}=\frac{۷}{۸}$$

۲۷۱. گزینه ۴ سه تاس کلاً $۶^۳$ حالت دارند. فقط ۲ تاس از ۳ تاس مساوی باشند، یعنی به شکل xxy باشد. xx شش حالت دارد؛ y پنج حالت دارد و کنار هم قرارگرفتن آن‌ها $\frac{۳!}{۲!}$ حالت دارد، پس $n(A)=۶\times۵\times۳$ و داریم:

$$P(A)=\frac{۶\times۵\times۳}{۶\times۶\times۶}=\frac{۵}{۶\times۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

۲۷۲. گزینه ۴ از رابطهٔ $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ استفاده می‌کنیم: $\xrightarrow[k=4]{n=6} \frac{\binom{6}{4}}{2^6}=\frac{15}{64}$

۲۷۳. گزینه ۳ «یا» یعنی اجتماع، پس باید احتمال ۲ رو و ۴ رو را حساب کرده و جمع کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow[k=2]{n=5}\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{32}\\ \xrightarrow[k=4]{n=5}\frac{\binom{5}{4}}{2^5}=\frac{5}{32}\end{array}\right\}\Rightarrow P(\text{۲ یا ۴ رو})=\frac{15}{32}$$

۲۷۴. گزینه ۳ حداقل ۲ پسر، یعنی ۲ یا ۳ یا ۴ پسر؛ پس داریم:

$$\underbrace{\frac{\binom{4}{2}}{2^4}}_{\text{دو پسر}}+\underbrace{\frac{\binom{4}{3}}{2^4}}_{\text{سه پسر}}+\underbrace{\frac{\binom{4}{4}}{2^4}}_{\text{چهار پسر}}=\frac{6+4+1}{16}=\frac{11}{16}$$

۲۷۵. گزینه ۲ حداقل ۲ درست، یعنی ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ درست بزنیم، بهتر است از روش مکمل استفاده کنیم؛ یعنی احتمال صفر درست یا ۱ درست را پیدا کنیم:

$$P(\text{صفر یا ۱ درست})=\frac{\binom{6}{0}+\binom{6}{1}}{2^6}=\frac{7}{64}$$

پس احتمال مورد نظر $1-\frac{7}{64}$، یعنی $\frac{57}{64}$ است.

۲۷۶. گزینه ۴ مهم‌ترین نکتهٔ این تست فهمیدن این موضوع است که احتمال آمدن عدد بزرگ‌تر از ۳ یعنی {۴,۵,۶} برابر $\frac{1}{2}$ است، پس از رابطهٔ $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ می‌توانیم استفاده کنیم و داریم:

$$\xrightarrow[n=10]{k=6} P=\frac{\binom{10}{6}}{2^{10}}=\frac{210}{1024}=\frac{105}{512}$$

۲۷۷. گزینه ۴ باز هم در این تست، مهم این است که احتمال سفید یا سیاه آمدن، $\frac{1}{2}$ است؛ پس باز هم باید از رابطهٔ $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ استفاده کنیم:

$$P(\text{یک بار سیاه یا دو بار سفید})=P(\text{۲ بار سفید})+P(\text{۱ بار سیاه})$$

$$=\frac{\binom{4}{2}}{2^4}+\frac{\binom{4}{1}}{2^4}=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

۲۷۸. گزینه ۳ دوتا از ۱۲ مهره برمی‌داریم، پس $n(S)=\binom{12}{2}=66$

می‌خواهیم دو مهره همرنگ نباشند پس یکی سفید و یکی سیاه است:

$$n(A)=\binom{5}{1}\binom{7}{1}=5\times7=35$$

بنابراین: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{35}{66}$

۲۷۹. گزینه ۲ دوتا از ۱۰ مهره برمی‌داریم، پس $n(S)=\binom{10}{2}=45$.

تعداد حالت‌هایی که همرنگ باشند، برابر است با: $\binom{5}{2}+\binom{5}{2}=20$

بنابراین: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$

۲۸۰. گزینه ۲ راه I حداقل یک مهرهٔ سفید یعنی ۱ یا ۲تا مهرهٔ سفید برداریم:

$$n(A)=\overbrace{\binom{5}{1}}^{\text{یک سفید}}\overbrace{\binom{6}{1}}^{\text{یک سیاه و}}+\overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{دو سفید یا}}=5\times6+10=40$$

تعداد کل حالت‌ها هم $n(S)=\binom{11}{2}=55$ است و داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{40}{55}=\frac{8}{11}$$

راه II برای شمردن حالت‌های حداقل یک مهرهٔ سفید، تعداد کل حالت‌ها را منهای تعداد حالات هیچ سفید می‌کنیم:

$$n(A)=\text{کل}-\text{(هر دو سیاه) هیچ سفید}=\binom{11}{2}-\binom{6}{2}=55-15=40$$

پس داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{40}{55}=\frac{8}{11}$

۲۸۱. گزینه ۱ تعداد کل حالت‌های انتخاب دوتا از ۸ مهره $=n(S)$

$$n(S)=\binom{8}{2}=28$$

از بین این مهره‌ها nتا سفید و $8-n$ تا سیاه هستند. پس تعداد حالاتی که دو مهره همرنگ هستند، برابر است با:

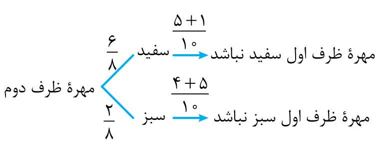
$$n(A)=\binom{n}{2}+\binom{8-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(8-n)(7-n)}{2}$$

$$=\frac{n^2-n+n^2-15n+56}{2}=\frac{2n^2-16n+56}{2}=n^2-8n+28$$

حالا واضح است که به ازای $n=4$، $n(A)$ حداقل می‌شود.

نکته: حداقل مقدار تابع $y=\underset{a>0}{ax^2}+bx+c$ به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید.

۲۸۲. گزینه ۴ مهرهٔ ظرف دوم را در نظر بگیرید:



پس جواب می‌شود: $\frac{6}{8}\times\frac{6}{10}+\frac{2}{8}\times\frac{9}{10}=\frac{54}{80}=\frac{27}{40}$

۲۸۳. گزینه ۴ کیسه به این شکل است:

احتمال خارج‌شدن مهرهٔ سفید برابر است با:

$$P(\text{سفید})=\frac{n+5}{n+5+5}$$

پس داریم $\frac{n+5}{n+10}=\frac{3}{4}$ که نتیجه می‌شود $n=10$.

۲۸۴. گزینه ۲ یا هر دو باید سفید باشند یا هر دو سیاه: (۴ سفید، ۲ سیاه) (۵ سفید، ۳ سیاه)

$$\underbrace{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}}_{\text{هر دو سفید}}+\underbrace{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}}_{\text{هر دو سیاه}}=\frac{60+3}{28\times15}=\frac{63}{28\times15}=\frac{3}{20}=0/15$$

۲۸۵. گزینه ۱ در این ظرف کلاً ۱۰ مهره داریم. پس برای خارج‌کردن ۳ مهره با جای‌گذاری به تعداد ۱۰×۱۰×۱۰ حالت داریم. حالا می‌خواهیم از ۳ رنگ مختلف باشند. تعداد حالت‌ها برابر است با: $n(A)=5\times3\times2\times\underbrace{3!}_{\text{ترتیب}}=180$

پس احتمال برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{180}{1000}=0/18$

۲۸۶. گزینه ۴ چون از مهره‌های خارج‌شده حرفی نزده انگار مهره‌ای خارج نشده، پس سراغ همان دو مهره می‌رویم:

$$n(S)=\binom{6+4+3}{2}=\binom{13}{2}=\frac{13(12)}{2}=78$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{دو تا از قرمزها}}=\frac{6(5)}{2}=15$$

بنابراین: $P(A)=\frac{15}{78}=\frac{5}{26}$

۲۸۷. گزینه ۲ **راه I** تعداد کل حالات $\binom{20}{2}=190$ است.
حالت‌های مورد نظر انتخاب از یک ردیف است:

$$n(A)=\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{کدام ردیف}}\times\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{کدام افراد}}=5\times6=30$$

پس داریم: $P(A)=\frac{30}{190}=\frac{3}{19}$

راه II به نفر اول انتخابی کاری نداریم، اما نفر دوم باید هم‌ردیف او باشد. به‌جز خودش ۳تا هم‌ردیف دارد و ۱۹ نفر دیگر در کلاس‌اند. پس احتمال هم‌ردیف‌بودن دو نفر $\frac{3}{19}$ است.

۲۸۸. گزینه ۲ تعداد کل حالت‌ها انتخاب ۴تا از $3+3+2+1=9$ نفر است: $n(S)=\binom{9}{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2}=126$
حالت‌های مورد نظر، انتخاب یکی از هر گروه است:

$$n(A)=\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}=3\times3\times2\times1=18$$

پس: $P(A)=\frac{18}{126}=\frac{1}{7}$

۲۸۹. گزینه ۳

$$\underbrace{(\text{تعداد حالات مورد نظر})}_{\text{حداقل یکی از بین ۳ تا آزمایش شده باشد}}=\underbrace{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}_{\text{یکی ماهر}}+\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{دو تا ماهر}}=12+3=15$$

$$\text{تعداد کل حالات}=\left(\text{تعداد انتخاب‌های دوتا از ۷ موش}\right)=\binom{7}{2}=21$$

پس: $P(A)=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$

۲۹۰. گزینه ۳

$$n(S)=\text{تعداد کل انتخاب‌های ۴تا از ۱۰ نفر}=\binom{10}{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2}=210$$

$$n(A)=\left(\text{تعداد حالاتی که ریاضی و تجربی متفاوت‌اند}\right)=\text{کل}-\left(\text{تعداد حالت‌های ۲ ریاضی و ۲ تجربی}\right)$$

$$=\binom{10}{4}-\binom{4}{2}\binom{6}{2}=210-\underbrace{6\times15}_{90}=120$$

پس داریم: $P(A)=\frac{120}{210}=\frac{4}{7}$

۲۹۱. گزینه ۴ ۴ مهره از ظرف بیرون آورده‌ایم. پس: $n(S)=\binom{6}{4}=15$
می‌خواهیم یکی از این ۴ مهره، شمارهٔ ۳ باشد. پس ۳تای دیگر از بین ۱، ۲، ۴، ۵ و ۶ هستند. $n(A)=\binom{5}{3}=10$
و داریم: $P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

۲۹۲. گزینه ۱ کلاً $\binom{10}{6}=210$ حالت داریم. اگر ۶ و ۷ انتخاب‌شده باشند، ۴تا کارت دیگر هم از بین سایر کارت‌ها لازم است. پس: $n(A)=\binom{8}{4}=70$
بنابراین: $P(A)=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$

این را هم ببینید:
۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰
انتخابی‌ها: ○ ○ ○ ○ ۶ ۷
۴تای دیگر

۲۹۳. گزینه ۱ تعداد کل حالت‌ها $n(S)=\binom{6}{2}=15$ است. حالت‌هایی که دو شماره متوالی باشند $\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}$ است.
پس $n(A)=5$ و داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

۲۹۴. گزینه ۱ $n(S)=\text{انتخاب‌های ۳تا از ۱۰ مهره}=\binom{10}{3}=120$
$n(A)=(\text{تعداد حالت‌هایی که سه شماره پشت سر هم هستند})=8$
ببینید: $A=\{123,234,345,456,567,678,789,8910\}$
پس: $P(A)=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$

۲۹۵. گزینه ۲ دوتا از ۶ مهره برمی‌داریم؛ پس $n(S)=\binom{6}{2}=15$
حالت‌هایی که مجموع مضرب ۳ باشد، یعنی حالاتی که مجموع ۶ یا ۹ یا ۳ باشد عبارت‌اند از: $\{1,2\},\{1,5\},\{2,4\},\{6,3\},\{4,5\}$
پس $n(A)=5$ و داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

۲۹۶. گزینه ۳ مجموع دو کارت زمانی زوج است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند:

$$n(A)=\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{دوتا از ۲، ۴ و ۶}}+\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{یا دوتا از ۱، ۳ و ۵}}=6$$

پس داریم: $P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

۲۹۷. گزینه ۳ باید یک زوج و یک فرد انتخاب شود:

$$n(A)=\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یکی از فردها}}\times\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یکی از زوج‌ها}}=3\times2=6$$

کل حالت‌ها هم انتخاب ۲تا از ۵ مهره است: $n(S)=\binom{5}{2}=10$
پس: $P(A)=\frac{6}{10}=0/6$

۲۹۸. گزینه ۱ چون با مکمل‌ها سروکار داریم، تعداد اعضای S را هم می‌نویسیم:

$$n(S)=\text{تعداد انتخاب‌های ۳ گوی از ۷ گوی}=\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

برای پیشامد A می‌گوییم مجموع سه عدد وقتی زوج است که هر سه زوج یا دو فرد و یک زوج انتخاب شوند. پس: $n(A)=\text{تعداد انتخاب‌های ۳ گوی با مجموع زوج}$

$$=\underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{۳تا از بین ۲،۴،۶}}+\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{۲تا از بین ۱،۳،۵،۷}}\times\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یک زوج}}=1+6\times3=19$$

بنابراین: $n(A')=n(S)-n(A)\Rightarrow n(A')=35-19=16$
در مورد پیشامد B، وقتی بزرگ‌ترین عدد انتخابی ۵ است، حتماً گوی شمارهٔ ۵ را انتخاب کرده‌ایم و دوتا از بین ۱، ۲، ۳، ۴ نیز برداشته‌ایم. پس: $n(B)=\binom{4}{2}=6$
و در نتیجه: $n(B')=35-6=29$
خب تعداد اعضای B' از همه بیشتر است؛ پس احتمال این پیشامد بزرگ‌تر از بقیه است.

۲۹۹. گزینه ۱ ۵ مهرهٔ پی‌درپی !۵ حالت دارند: $n(S)=5!=120$
حالا ما می‌خواهیم دو مهرهٔ فرد متوالی نباشند، پس زوج‌ها در بین آن‌ها قرار می‌گیرند: ف ز ف ز ف
یعنی زوج‌ها و فردها یک در میان هستند: $n(A)=3!2!=12$
بنابراین: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{12}{120}=0/1$

نکته اگر n شیء و $(n-1)$ شیء را یک در میان بچینیم تعداد حالت‌ها $n!(n-1)!$ است.

۳۰۰. گزینه ۳ کل حالت‌ها $n(S)=۶!=۷۲۰$ است. حالت مورد نظر این است که ارقام زوج و فرد یک در میان قرار گیرند. پس داریم:

$$n(A)=۳!\times۳!\times۲=۷۲$$

بنابراین: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷۲}{۷۲۰}=\frac{۱}{۱۰}$

نکته: اگر بخواهیم nتا از یک نوع و nتا از نوع دیگر را یک در میان بچینیم تعداد حالت‌ها برابر است با: $۲\times n!\times n!$

۳۰۱. گزینه ۱ کلاً برای خروج ۶ گوی (به ترتیب) $۶!$ حالت داریم، پس: $n(S)=۶!$

حالا برای یک در میان بودن زوج‌ها (یا فردها) باید اعداد با یکی از الگوهای «زفزفزف» یا «فزفزفز» شکل بگیرند که $۲\times۳!\times۳!$ یعنی $n(A)=۷۲$ حالت داریم، پس: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷۲}{۷۲۰}=۰/۱$

۳۰۲. گزینه ۲ ۲ مهره از بین ۸ مهره خارج می‌کنیم؛ پس:

$$n(S)=\binom{۸}{۲}=۲۸$$

مجموع ۴ در حالت‌های $\{۳,۱\}$ و $\{۲,۲\}$ ایجاد می‌شود. حالت ۱ و ۳ با چهار نوع رنگ امکان دارد: $W_1W_3 , W_1B_3 , B_1W_3 , B_1B_3$

اما حالت ۲,۲ فقط یک نوع انتخاب رنگ دارد: B_2W_2؛ پس $n(A)=۵$ و داریم: $P(A)=\frac{۵}{۲۸}$

۳۰۳. گزینه ۲

دوتا از $۱۰=۶+۴$ گوی برمی‌داریم، پس $n(S)=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$. برای مجموع ۸ باید ترکیب‌های ۶+۲، ۳+۵ یا ۴+۴ را بسازیم. در مورد ۴+۴ فقط یک انتخاب داریم: ۴ قرمز و ۴ آبی خارج شوند. برای ۶+۲، می‌توانیم $۲^B۶^B$ یا $۲^R۶^B$ را برداریم. پس ۲ حالت دارد. برای ۳+۵ هم حتماً ۵ آبی است و ۳ می‌تواند قرمز یا آبی باشد. پس ۲ حالت دارد. روی هم $n(A)=۱+۲+۲=۵$

و احتمال می‌شود: $P(A)=\frac{۵}{۴۵}=\frac{۱}{۹}$

۳۰۴. گزینه ۱ کلاً دوتا از ده مهره برمی‌داریم:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵$$

شماره‌های متوالی عبارت‌اند از: ۱۲، ۲۳، ۴۵ و ۳۴ که هر کدام ۴ حالت برای رنگ دارند، مثلا ۱۲ می‌تواند به صورت‌های مقابل خارج شود: $۱^B۲^B , ۱^B۲^R , ۱^R۲^B , ۱^R۲^R$

پس $۱۶=۴\times۴$ حالت از ۴۵ حالت مورد نظر است و داریم: $P=\frac{۱۶}{۴۵}$

۳۰۵. گزینه ۳ رقم سمت راست پلاک اتومبیل ۱ یا ۲ یا ... یا ۹ است؛ پس $n(S)=۹$. ما می‌خواهیم از ۴ بیشتر نباشد، یا مضرب ۳ باشد؛ پس:

$$A=\{\underbrace{۱,۲,۳,۴}_{x\le ۴},\underbrace{۳,۶,۹}_{۳|x}\}$$

بنابراین $n(A)=۶$ و داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$

۳۰۶. گزینه ۳ فقط به رقم یکان نگاه کنیم ... یکان می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۴ یا ۶ باشد (۴ حالت) و ما می‌خواهیم ۲ یا ۴ یا ۶ باشد (۳ حالت)، پس داریم: $P(A)=\frac{۳}{۴}$

۳۰۷. گزینه ۴ با کنار هم قراردادن این اعداد، کلاً $۳\times۳\times۲\times۱=۱۸$ تا عدد چهاررقمی داریم.

جمع ارقام این عددها همیشه $۶=۰+۱+۲+۳$ است، پس حتماً مضرب ۳ هستند و برای این‌که مضرب ۶ بشوند کافی است زوج باشند. از بحث آنالیز یادتان هست که رقم صفر را جدا می‌کردیم:

$$\begin{cases}\underset{۱\text{ یا }۳}{\underline{۲}}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{\text{فقط ۲}}{\underline{۱}}=۴\\ \underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{\text{فقط صفر}}{\underline{۱}}=۶\end{cases}\xrightarrow{+}n(A)=۴+۶=۱۰$$

پس داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۸}=\frac{۵}{۹}$

۳۰۸. گزینه ۲ تعداد کل اعداد دورقمی ۹۰تا است. تعداد آن‌هایی که مضرب ۲ هستند و مضرب ۳ نیستند، برابر است با:

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=[\frac{۹۰}{۲}]-[\frac{۹۰}{۶}]=۴۵-۱۵=۳۰$$

پس احتمال برابر است با: $P(A)=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$

۳۰۹. گزینه ۱ تعداد کل این اعداد سه‌رقمی برابر $۶\times۶\times۵$ یعنی ۱۸۰تا است. می‌خواهیم رقم صدگان ۳ یا ۴ یا ۵ و یکان ۰ یا ۲ یا ۴ باشد.

پس داریم: $n(A)=\underset{۳\text{ یا }۴\text{ یا }۵}{\underline{۳}}\times\underline{۶}\times\underset{۰\text{ یا }۲\text{ یا }۴}{\underline{۳}}=۵۴$

و احتمال برابر است با: $P(A)=\frac{۵۴}{۱۸۰}=\frac{۳}{۱۰}$

۳۱۰. گزینه ۲ تعداد کل اعداد سه‌رقمی $۹۰۰=۹۹-۹۹۹$ تا است. تعداد اعداد سه‌رقمی که هیچ رقم تکراری ندارند، برابر است با:

$$\underset{\text{بجز صفر}}{\underline{۹}}\times\underset{\text{بجز صدگان}}{\underline{۹}}\times\underset{\text{بجز قبلی‌ها}}{\underline{۸}}=۶۴۸$$

پس $۲۵۲=۶۴۸-۹۰۰$ عدد سه‌رقمی حتماً رقم تکراری دارند.

بنابراین: $P(A)=\frac{۲۵۲}{۹۰۰}=\frac{۲۸}{۱۰۰}=۰/۲۸$

۳۱۱. گزینه ۳ راه I کل حالت‌ها $۵!$است. تعداد حالت‌هایی که دو رقم زوج کنار هم باشند را هم می‌شماریم: ۲۴۱۳۵

پس حالت‌های مورد نظر $۲!\times۴!-۵!$ تا هستند و داریم:

$$P(A)=\frac{۵!-۴!۲!}{۵!}=\frac{۱۲۰-۴۸}{۱۲۰}=\frac{۷۲}{۱۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

راه II رقم ۴ را جدا می‌کنیم و بقیهٔ ارقام را می‌نویسیم: ↑۱↑۳↑۲↑۵

حالا برای رقم ۴، پنج‌تا جایگاه داریم که دو طرف ۲ قابل قبول نیست. پس ۳تا از جایگاه‌ها مناسب‌اند؛ بنابراین: $P(A)=\frac{۳}{۵}$

۳۱۲. گزینه ۴ تعداد کل اعداد سه‌رقمی با این ارقام برابر است با:

$$n(S)=\underset{\text{بجز صفر}}{\underline{۴}}\times\underset{\text{بجز صدگان}}{\underline{۴}}\times\underset{\text{بجز قبلی‌ها}}{\underline{۳}}=۴۸$$

تذکر: حواستان به کلمهٔ «متمایز» در صورت سؤال هست؟!

حالا تعداد اعداد زوج را می‌خواهیم. چون صفر داریم و حوصلهٔ جداکردن آن را نداریم از مکمل می‌رویم: $n(A)=\text{تعداد کل}-\text{تعداد فردها}$

$$=۴۸-(\underset{\text{به‌جز صفر و یکان}}{\underline{۳}}\times\underline{۳}\times\underset{۱\text{ یا }۳}{\underline{۲}})=۴۸-۱۸=۳۰$$

پس: $P(A)=\frac{۳۰}{۴۸}=\frac{۵}{۸}$

۳۱۳. گزینه ۴ اول $n(S)$ را حساب کنیم: $n(S)=۵\times۵\times۵=۱۲۵$

(۱) برای عدد سه‌رقمی زوج رقم یکان باید ۲ یا ۴ باشد:

$$n(A)=۵\times۵\times\underset{۲\text{ یا }۴}{\underline{۲}}=۵۰$$

(۲) برای عدد شامل ۳ از متمم می‌رویم. $n(S)$ را منهای تعداد اعداد سه‌رقمی فاقد رقم ۳ می‌کنیم:

$$n(B)=n(S)-n(B')=(\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underline{۵})-\underbrace{(\underline{۴}\times\underline{۴}\times\underline{۴})}_{\text{رقم ۳ نباشد}}=۱۲۵-۶۴=۶۱$$

در (۳) برای ترتیب صعودی باید دقت کرد. اولاً باید رقم‌ها متفاوت باشند و ثانیاً تعداد جایگشت‌ها را بر !۳ تقسیم می‌کنیم؛ یعنی: $n(C)=5\times4\times3\times\frac{1}{3!}=10$

در واقع $n(C)$ برابر تعداد انتخاب‌های ۳تا از این ۵ رقم است (چون ترتیب آن‌ها معلوم شده): $n(C)=\binom{5}{3}=10$

در مورد (۴) هم از متمم کمک می‌گیریم:

$$n(D)=n(S)-n(D')=\underline{5}\times\underline{5}\times\underline{5}-\underbrace{\underline{5}\times\underline{4}\times\underline{3}}_{\text{فاقد تکراری}}=125-60=65$$

پس شانس این آخری از همه بیشتر است؛ چون پیشامد D دارای تعداد عضو بیشتری است.

۳۱۴. گزینه ۳ هر عدد ۶ حالت دارد، پس $n(S)=6\times6=36$، حالت‌هایی که هر دو فرد و جمعشان ۸ شود ۳,۵ و ۵,۳ هستند. پس $n(A)=2$ و داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

۳۱۵. گزینه ۱ تعداد کل حالات $\binom{9}{3}=84$ است. حالت‌هایی که ضرب ۱۸ می‌شود، عبارت‌اند از: ۹,۲,۱ یا ۶۳۱

تذکر: دقت می‌کنید که ارقام متمایزند و ۳,۲ و ۳ نمی‌تواند باشد.

پس $n(A)=2$ و داریم: $P(A)=\frac{2}{84}=\frac{1}{42}$

۳۱۶. گزینه ۳ روز تولد هر نفر ۷ حالت دارد. پس برای سه نفر ۷×۷×۷ حالت داریم. تعداد حالاتی که روزهای تولد متفاوت باشند هم ۷×۶×۵ است. پس داریم: $P(A)=\frac{7\times6\times5}{7\times7\times7}=\frac{30}{49}$

۳۱۷. گزینه ۴ تعداد کل اعداد سه‌رقمی ۹۰۰تا است. تعداد اعداد سه‌رقمی فاقد ۲ هم برابر است با: $\underbrace{8}_{\text{به‌جز صفر و ۲}}\times\underbrace{9}_{\text{به‌جز ۲}}\times\underbrace{9}_{\text{به‌جز ۲}}=648$

پس داریم: $P(A)=\frac{900-648}{900}=\frac{252}{900}=0/28$

۳۱۸. گزینه ۲ ۶ نفر دور میز کلاً $(6-1)!=5!=120$ حالت دارند. برای این‌که بین a و b دقیقاً یک نفر باشند، داریم: $\boxed{a\ ?\ b}\ \square\ \square\ \square$

نفر بین a و b، ۴ حالت دارد؛ جای خود a و b هم !۲ حالت دارد؛ این دسته در کنار سه نفر دیگر، دور میز $(4-1)!$ حالت دارد. پس: $n(A)=4\times2!\times3!=48$

بنابراین: $P(A)=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

۳۱۹. گزینه ۱ باید دو نفر مهندس بین دکترها قرار دهیم: د م د م د م م م م

ترتیب دکترها !۳، دو مهندس بین آن‌ها ۵×۶ حالت و این دسته در کنار چهار مهندس دیگر، !۵ حالت دارند؛ پس: $n(A)=6\times5\times3!\times5!$

کل حالت‌ها هم ترتیب ۹ نفر کنار هم است: $n(S)=9!$

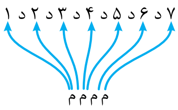
$$\Rightarrow P(A)=\frac{30\times3!\times5!}{9!}=\frac{\cancel{30}^{10}\times\cancel{6}}{\cancel{9}_{3}\times8\times7\times\cancel{6}}=\frac{5}{84}$$

۳۲۰. گزینه ۱ تعداد کل جایگشت‌های سه‌حرفی sabz برابر است با: $n(S)=\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2}=24$

تعداد کلمات دارای ab هم برابر است با: $n(A)=\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یک حرف دیگر به‌جز ab}}\times\underbrace{2!}_{\text{قرارگیری ab و آن طرف}}=4$

پس $P(A)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$.

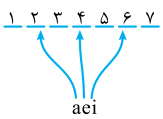
۳۲۱. گزینه ۱ کل حالت‌ها، قرارگرفتن ۱۰ نفر در کنار هم یعنی !۱۰ است. برای این‌که معلم‌ها کنار هم نباشند آن‌ها را در فضاهای اطراف و بین دانش‌آموزان قرار می‌دهیم:



!۶ حالت برای دانش‌آموزان، !۴ برای معلم‌ها و $\binom{7}{4}$ برای جای معلم‌ها در این ۷ ناحیه داریم؛ پس: $n(A)=6!4!\binom{7}{4}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6!4!\binom{7}{4}}{10!}=\frac{4\times3\times\cancel{2}\times\cancel{35}}{\cancel{10}\times9\times8\times\cancel{7}}=\frac{4\times3}{9\times8}=\frac{1}{6}$$

۳۲۲. گزینه ۲ این کلمه ۷ حرف دارد که ۳تای آن‌ها صدادار هستند و باید در محل‌های دوم، چهارم و ششم قرار گیرند:



پس !۳ حالت برای صدادارها و !۴ حالت برای ۴ حرف دیگر داریم. بنابراین: $n(A)=4!3!$

$n(S)$ هم !۷ است. پس احتمال برابر است با: $P(A)=\frac{3!4!}{7!}=\frac{1}{35}$

۳۲۳. گزینه ۴ کلاً !۷ حالت داریم. در بین a، b و c ترتیب خاصی را می‌خواهیم؛ پس: $n(A)=\frac{7!}{3!}$

و بنابراین: $P(A)=\frac{\frac{7!}{3!}}{7!}=\frac{1}{6}$

تذکر: اگر در قرارگرفتن n شیء متمایز کنار هم، بین kتا از آن‌ها ترتیب مشخصی بخواهیم، تعداد حالت‌ها $\frac{n!}{k!}$ است.

۳۲۴. گزینه ۴ $n(S)=$ تعداد انتخاب‌های ۴تا از ۱۰ نقطه $=\binom{10}{4}$

$n(A)=$ تعداد انتخاب‌های یک نقطه از هر خط $=\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}=24$

پس داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$

۳۲۵. گزینه ۳ تعداد کل حالت‌ها انتخاب ۴تا از هشت نقطه است: $n(S)=\binom{8}{4}=70$

برای این‌که BD قطر چهارضلعی بشود باید یک رأس از سمت چپ و دیگری از سمت راست BD باشد، پس: $n(A)=\underbrace{\binom{2}{1}\times\binom{4}{1}}_{\text{چپ و راست}}=8$

بنابراین: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{8}{70}=\frac{4}{35}$

۳۲۶. گزینه ۳ کافی است کلید گم‌شده از آن دو کلید نباشد؛ یعنی یکی از ۴ کلید دیگر را برای گم‌کردن انتخاب کنیم: $P(A)=\frac{\binom{4}{1}}{\binom{6}{1}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

۳۲۷. گزینه ۱ راه I کل حالات انتخاب دوتا از ۱۰ لنگه این است: $n(S)=\binom{10}{2}=45$

ما می‌خواهیم یک جفت برداریم: $n(A)=\binom{5}{1}=5$

پس: $P(A)=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$

راه II لنگهٔ اول را برمی‌داریم. حالا ۹تا لنگه مانده که یکی از آن‌ها را می‌خواهیم. احتمال می‌شود $\frac{1}{9}$.

.۳۲۸ گزینه ۲ — ۵ جفت کفش یعنی ۱۰ لنگه و ما ۴تا را انتخاب می‌کنیم:

$$n(S)=\binom{10}{4}=210$$

۴تا از ۵ جفت برمی‌داریم:

$$n(A)=\binom{5}{4}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=5\times16=80$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{80}{210}=\frac{8}{21}$$

.۳۲۹ گزینه ۱ — تعداد کل زیرمجموعه‌های این مجموعه $n(S)=2^9=512$ است. حالا ما زیرمجموعهٔ ۵عضوی شامل ۳ می‌خواهیم: $1,2,3,4,5,6,7,8,9$

$$\{3\ \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\}$$

پس باید ۴تا عضو دیگر از بین ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ برداریم:

$$n(A)=\binom{8}{4}=70$$

پس داریم:

$$P(A)=\frac{70}{512}=\frac{35}{256}$$

.۳۳۰ گزینه ۲ — شش حرف داریم که سه‌تای آن‌ها A است. پس $\frac{6!}{3!}=120$ حالت داریم. برای این‌که ۳ حرف A کنار هم بمانند آن‌ها را یکی می‌گیریم؛ پس با TXIAAA، !۴ حالت داریم. بنابراین احتمال می‌شود:

$$\frac{4!}{\frac{6!}{3!}}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

.۳۳۱ گزینه ۲ — کلاً $\frac{8!}{\underset{\text{lها}}{2!}\,\underset{\text{oها}}{2!}}$ حالت داریم. اگر حروف مشابه کنار هم باشند. با football فقط !۶ حالت داریم، پس احتمال برابر است با:

$$\frac{6!}{\frac{8!}{2!2!}}=\frac{\cancel{6!}\,2!2!}{\cancel{6!}\,8\times7}=\frac{1}{14}$$

.۳۳۲ گزینه ۳ — ۴ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ زرد کلاً $\frac{6!}{4!2!}=15$ حالت برای قرارگرفتن دارند. اگر اولی و آخری زرد باشند، ۴ مهرهٔ سبز دیگر فقط ۱ حالت دارند، چون همرنگ‌اند. پس:

$$P=\frac{1}{15}$$

.۳۳۳ گزینه ۱ — تعداد کل حالت‌ها برابر است با: (RESERVE هفت‌حرفی و VERTICAL هشت‌حرفی است.)

$$n(S)=8\times7=56$$

می‌خواهیم حروف انتخابی، (V,V) یا (R,R) یا (E,E) باشند. اما دقت کنید در RESERVE سه‌تا حرف E و دوتا حرف R هست. پس در واقع ۶ حالت داریم:

$$(E,E_1),(E,E_2),(E,E_3),(R,R_1),(R,R_2),(V,V)$$

پس $n(A)=6$ و در نتیجه:

$$P(A)=\frac{6}{56}$$

.۳۳۴ گزینه ۴ — کل حالت‌ها انتخاب ۳تا از ۵ کارت برابر است با:

$$n(S)=\binom{5}{3}=10$$

حالا باید عددی به شکل ۱۱۳ یا ۱۱۴ ساخته شود. پس باید حتماً ۲تا از یک‌ها و یک رقم دیگر از بین ۳ و ۴ بیرون بیاید:

$$n(A)=\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{۲تا از یک‌ها}}\times\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یکی از بین ۳ و ۴}}=6$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{6}{10}$$

.۳۳۵ گزینه ؟ — دو کارت از ۲۱ کارت را به تصادف خارج می‌کنیم، دو کارت را به دو حالت می‌توانیم کنار هم قرار دهیم. (برای مثال اگر شماره‌های کارت‌ها ۵ و ۱۲ باشند، دو عدد ۱۲۵ و ۵۱۲ به دست می‌آید.) بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{21}{2}\times2!=420$$

اما دقت کنید که در حالت‌های زیر عددها تکراری می‌شوند.

الف) ترکیب دو دسته کارت $(\boxed{x},\boxed{21})$ و $(\boxed{1x},\boxed{2})$ هر دو عدد $21x$ را تولید می‌کند. (به ازای $x=1,2,\dots,9$) یعنی ۹ حالت.

ت) ترکیب دو دسته کارت $(\boxed{1x},\boxed{1})$ و $(\boxed{x},\boxed{11})$ هر دو عدد $11x$ را تولید می‌کنند. (به ازای $x=1,2,\dots,9$) یعنی ۹ حالت.

پ) ترکیب دو دسته کارت $(\boxed{1},\boxed{12})$ و $(\boxed{21},\boxed{1})$ عدد ۱۲۱ را تولید می‌کند؛

بنابراین در ۱۹ حالت عددهای تکراری داریم، در نتیجه تعداد کل اعضای مجموعهٔ A برابر است با: $420-19=401$

حالا اگر بخواهیم عدد مضرب ۶ باشد، باید یکان آن زوج و مجموع ارقام آن مضرب ۳ باشد. در عددهایی که یکان‌ها زوج‌اند اما مضرب ۳ نیستند، (یعنی حالت‌های $2,4,8,10,14,16,20$) برای هر کدام ۷ حالت قابل قبول وجود دارد. برای درک بهتر همهٔ حالت‌هایی که یکان عدد ۲ است و حالت‌های مطلوب را ببینید:

۱۲✓	۳۲	۴۲✓	۵۲	۶۲	۷۲✓	۸۲
۹۲	۱۰۲✓	۱۱۲	۱۲۲	۱۳۲✓	۱۴۲	۱۵۲
۱۶۲✓	۱۷۲	۱۸۲	۱۹۲✓	۲۰۲	۲۱۲	-

اما در مورد عددهایی که یکان آن‌ها مضرب ۶ است؛ یعنی ۶، ۱۲ و ۱۸ شش حالت مطلوب وجود دارد. برای درک بهتر همهٔ حالت‌های یکان ۶ و حالت‌های مطلوب را ببینید:

۱۶	۲۶	۳۶✓	۴۶	۵۶	۷۶	۸۶
۹۶✓	۱۰۶	۱۱۶	۱۲۶✓	۱۳۶	۱۴۶	۱۵۶✓
۱۶۶	۱۷۶	۱۸۶✓	۱۹۶	۲۰۶	۲۱۶✓	-

بنابراین تعداد کل حالت‌های مطلوب برابر است با: $7\times7+3\times6=67$

ولی این هنوز همهٔ ماجرا نیست. صورت نیز حالت‌های تکراری دارد. دو عدد ۱۱۴ و ۲۱۶ هر کدام به دو صورت قابل نوشتن و تکراری‌اند.

$$\left.\begin{matrix}\boxed{11},\boxed{4}\\ \boxed{1},\boxed{14}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 114 \qquad \left.\begin{matrix}\boxed{2},\boxed{16}\\ \boxed{21},\boxed{6}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 216$$

بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با: $67-2=65$

و در نتیجه احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با: $\frac{65}{401}$

همان‌طور که می‌بینید پاسخ درست در گزینه‌ها نیست و البته این سؤال هم بیشتر سؤال المپیاد ریاضی است تا کنکور!

.۳۳۶ گزینه ۱ — برای انتخاب کارت اول ۱۲ انتخاب داریم. در حالت‌هایی که عدد زوج باشد (یعنی ۶ حالت $2,4,6,8,10,12$) یک کارت دیگر انتخاب می‌کنیم که به ۱۱ روش می‌توان این کار را انجام داد. اما اگر عدد فرد باشد، یک تاس پرتاب می‌کنیم که ۶ حالت دارد.

بنابراین تعداد حالت‌ها یا عددهای به وجودآمده به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccccccc}
11 & 21 & 31 & 41 & \dots & 111 & 121\\
12 & 23 & 32 & 42 & & 112 & 122\\
\vdots & \vdots & \vdots & 43 & & 113 & \vdots\\
\underbrace{16}_{\text{۶حالت}} & 210 & \underbrace{36}_{\text{۶حالت}} & 45 & & \vdots & \underbrace{1211}_{\text{۱۱حالت}}\\
 & 211 & & \vdots & & \underbrace{116}_{\text{۶حالت}} & \\
 & \underbrace{212}_{\text{۱۱حالت}} & & \underbrace{412}_{\text{۱۱حالت}} & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow n(S)=6\times6+6\times11=102$$

حالا بررسی می‌کنیم چندتا از این عددها مضرب ۴ است. می‌دانیم اگر عددی بخواهد مضرب ۴ باشد، باید دو رقم سمت راست آن مضرب ۴ باشد. در حالت‌هایی که عدد اول فرد آمده و تاس انداخته‌ایم، عددهای دوم و آخر مضرب ۴ هستند (یعنی ۱۲، ۱۶، ۳۲، ۳۶، ... ۱۱۲ و ۱۱۶) که تعداد آن‌ها برابر است با: $6\times2=12$

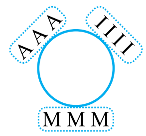
بقیهٔ حالت‌های مطلوب را بنویسیم کارمان راحت‌تر است:

۱۲۴	۱۰۴	۸۴	۶۴	۴۸	۲۴
۱۲۸	۱۰۸	-	۶۸	۴۱۲	۲۸
-	۱۰۱۲	۸۱۲	۶۱۲	-	۲۱۲

۱۵ عدد هم این‌جا داریم، بنابراین تعداد کل حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$n(S) = ۱۲ + ۱۵ = ۲۷ \Rightarrow P(A) = \frac{۲۷}{۱۰۲} = \frac{۹}{۳۴}$$

۳۳۷. گزینه ۲ تعداد کل حالت‌ها، نشستن ۱۰ نفر دور میز است: $n(S) = (n-۱)! = ۹!$



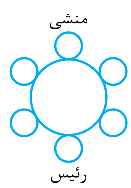
برای این‌که هم‌وطن‌ها پهلوی هم باشند آن‌ها را یکی می‌گیریم:

پس ۳ جسم داریم که دور میز $۲ = (۳-۱)!$ حالت ایجاد می‌کنند و درون آن‌ها هم $۳!۴!۳!$ حالت داریم؛ بنابراین: $n(A) = ۲ \times ۳!۴!۳!$

و در نتیجه: $P(A) = \frac{۲ \times ۳! \times ۴! \times ۳!}{۹!} = \frac{۲ \times ۶ \times ۶}{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵} = \frac{۱}{۲۱۰}$

۳۳۸. گزینه ۳ راه I بالأخره یک نفر باید روبه‌روی رئیس باشد؛ یا منشی یا یکی از آن چهار کارمند، پس ۵ حالت دارد. ما می‌خواهیم منشی باشد (۱ حالت)، بنابراین: $P(A) = \frac{۱}{۵}$

راه II این شش نفر دور میز کلاً $۵! = (۶-۱)!$ حالت دارند.



اگر منشی و رئیس روبه‌روی هم ثابت باشند ۴ کارمند دیگر $۴!$ حالت دارند. پس: $P(A) = \frac{۴!}{۵!} = \frac{۱}{۵}$

۳۳۹. گزینه ۱ اول رئیس بنشیند:

حالا معاون ۷ تا صندلی برای نشستن دارد و باید در محل‌های ✓ قرار گیرد که با رئیس دقیقاً یک صندلی فاصله دارد، پس: $P = \frac{۲}{۷}$