به نام پروردگار مهربان

ویرایش جدید

# حسابان ۲

## دوازدهم ریاضی

آموزش و مرور ویژهٔ امتحان نهایی

میثم خرّمی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

**این کتاب رو، با همهٔ وجودم به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم تا شاید بخش کوچکی (در حد میل می‌کند به صفر!) از زحماتشون رو جبران کرده باشم.**

# مقدمه

## دوستان عزیز سلام!

بالأخره رسیدیم به سال آخر. این جمله می‌تونه خبر خوشی باشه اگه به امید خدا، دوتا موفقیت باهاش همراه بشه؛ اولی در امتحان نهایی و دومی در کنکور. البته من مطمئنم شما دوستان عزیزم، در هر دو امتحان، سربلند میشید؛ پس تبریک می‌گم که رسیدین به سال آخر. از اون‌جایی که می‌دونم تمرکزتون بیشتر روی کنکوره، من به همراه دوستانم در انتشارات مهروماه تصمیم گرفتیم که امسال هم با کتاب لقمه که صرفاً با هدف امتحان نهایی نوشته شده، در خدمتتون باشیم؛ یعنی همین کتابی که الآن دستتونه! تمرکزمونم گذاشتیم روی کتاب درسی و سؤالات امتحان نهایی سال‌های گذشته با یه عالمه چاشنی‌های به درد بخور.

تأکید می‌کنم که اول جزوه‌ها و گفته‌های دبیران محترمتون رو بخونین و خوب یاد بگیرین و بعدش بیاین سراغ این لقمه.

آرزوی بهترین‌ها رو براتون دارم.

## تشکر و قدردانی

قـــدردان زحمات همهٔ عزیزانی هســـتم که در آماده‌ســازی این کتاب تلاش کرده‌اند؛

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر محترم و توانمند انتشارات
- جناب آقای محمدحسین انوشه مدیر فرهیختهٔ شورای تألیف انتشارات
- جناب آقای عباس اشرفی مدیر باتدبیر گروه ریاضی
- ســرکار خانم‌ها زهــرا انیشــه، کبری ملکــی و راحلــه فریدون‌نژاد ویراستارهای علمی
- گروه تولید خستگی‌ناپذیر انتشارات به مدیریت سرکار خانم تاجداری
- خانم الهام عربی (صفحه‌آرا)، خانم مریم صابری برون (رسام)
- گروه هنری خلاق انتشارات به مدیریت جناب آقای فرهادی
- جناب آقای تایماز کاویانی، طراح گرافیک و جناب آقای حسام طلایی طراح جلد

و همهٔ عزیزانی که در تهیهٔ این کتاب ما را همراهی کردند.

ارادتمند شما

میثم خرّمی

# فهرست

# فصل چهارم

# مشتــق

# مشتق

## درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

- یادآوری معادلهٔ خط
- خط مماس
- تعریف مشتق
- فرمول‌های مشتق
- مشتق تابع مرکب (قاعدهٔ زنجیری)
- مشتق مرتبهٔ دوم

## درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

- مشتق‌پذیری
- بررسی نقاط دستهٔ اول (ناپیوستگی‌ها)
- بررسی نقاط دستهٔ دوم (پیوسته اما مشتق‌ناپذیر)
- دامنهٔ تابع مشتق
- مشتق‌پذیری روی بازه
- خط مماس و قائم

## درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

- آهنگ تغییر

# درس ۱ آشنایی با مفهوم مشتق

وعدهٔ ۱

## یادآوری معادلهٔ خط

فرض کنید $A(x_A\ ,\ y_A)$ و $B(x_B\ ,\ y_B)$ دو نقطه از خط $L$ باشند؛ در این‌صورت:

$$\begin{cases} \text{شیب خط } L = m_L = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ \text{معادلهٔ خط } L = y - y_A = m(x - x_A) \end{cases}$$

توجه کنید که در معادلهٔ خط $L$، به جای $x_A$ و $y_A$ به‌ترتیب می‌توان $x_B$ و $y_B$ را قرار داد.

$\Delta y$ و $\Delta x$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{تغییرات عمودی خط } L = \Delta y = y_B - y_A \\ \text{تغییرات افقی خط } L = \Delta x = x_B - x_A \end{cases}$$

در این‌صورت می‌توان گفت:

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

**چاشنی:** فرض کنید دو نقطهٔ A و B روی منحنی تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشند، در این‌صورت مختصات آن‌ها را می‌توان به شکل $A(a\ ,\ f(a))$ و $B(b\ ,\ f(b))$ نمایش داد.

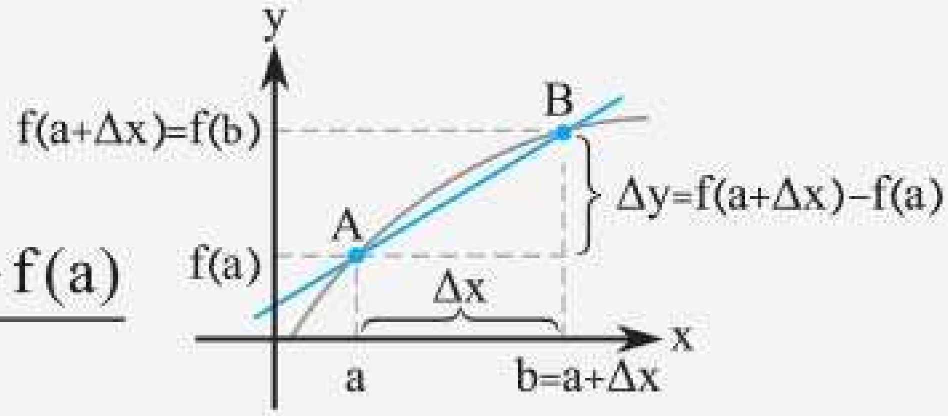
با توجه به تعریف $\Delta x$ می‌توان گفت:

$$\Delta x = b - a \Rightarrow b = a + \Delta x$$

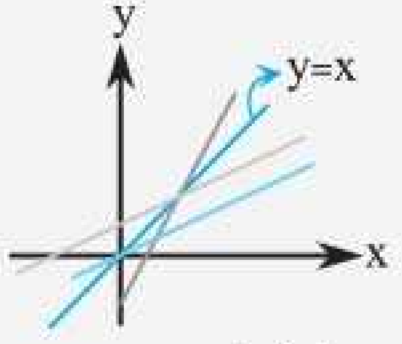
مشتق

بنابرایـــــن مختصـــــات $A$ و $B$ به‌صـــورت $A(a\,, f(a))$ و $B(a+\Delta x\,, f(a+\Delta x))$ خواهـــد بـــود؛ در این‌صـــورت شـــیب خط گذرنده (قاطع) از این دو نقطه برابر است با:

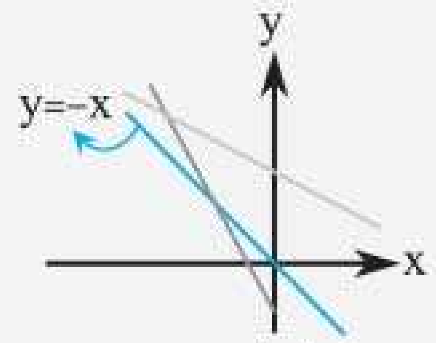
$$m = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$




◂ بهتر است نمودار دو خط $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) با شیب ۱ (مثبت) و $y=-x$ (نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم) با شیب ۱− (منفی) را به‌خاطر بسپارید. در این‌صورت هر خط که شبیه $y=x$ باشد، **شیب مثبت** و هر خط که شبیه $y=-x$ باشد، **شیب منفی** دارد.

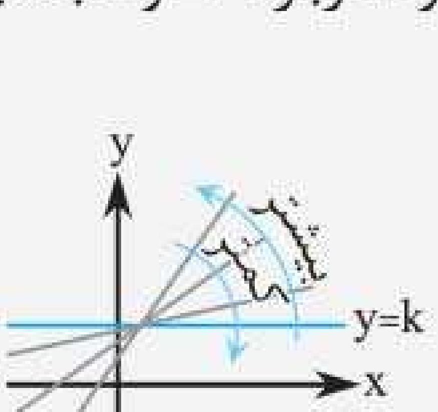



خطوط با شیب مثبت

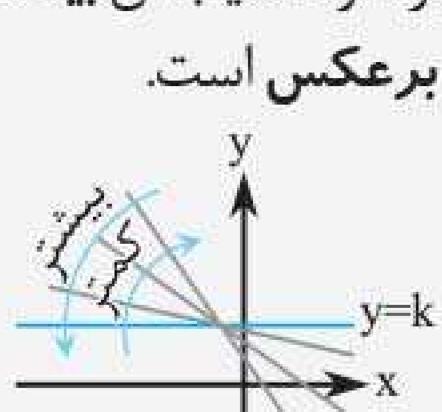



خطوط با شیب منفی

◂ در نمودار هندسی خطوط با شیب **مثبت**، هرچه نمودار به خط افقی ($y=k$ با شیب صفر) نزدیک‌تر شود، شیب آن **کمتر** و هرچه از خط افقی دورتر شود، شیب آن **بیشتر** می‌شود. دربارهٔ خطوط با شیب **منفی**، این نکته **برعکس** است.




خطوط با شیب مثبت




خطوط با شیب منفی

وعدهٔ ۱۰

## دامنهٔ تابع مشتق

فرض کنید $f(x)$ تابعی با دامنهٔ $D_f$ باشد. تابع مشتق $f(x)$، یعنی $f'(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

این همان تعریف اول مشتق است که به جای نقطهٔ مشخص $a$، $x$ قرار گرفته است. طبق فرمول‌های گفته‌شده برای مشتق، تابع مشتق برخی توابع را فراگرفتیم. مثلاً می‌دانیم تابع مشتق برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ به‌صورت $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ است. برای اثبات آن‌که تابع مشتق $f(x)=\sqrt{x}$ به‌صورت $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ است از تعریف بالا کمک می‌گیریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

دامنهٔ تابع مشتق را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$D_{f'}=\{x\in D_f\ ;$ موجود باشد $f'(x)\}$

**تذکر:** توابع چندجمله‌ای، در همهٔ نقاط حقیقی، پیوسته و مشتق‌پذیر (حتی دو بار مشتق‌پذیر) هستند؛ یعنی برای توابع چندجمله‌ای داریم: $D_{f'}=\mathbb{R}$

مشتق

**چاشنی:** برای راحتی تشخیص نقاط مشتق‌ناپذیری، برخی از این نقاط را به‌خاطر بسپارید که حتماً در صورت مشاهدهٔ آن‌ها باید بررسی شوند.

۱ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$

۲ نقاطی مانند $x=a$ که به‌صورت $|(x-a)^{۱}|$ ظاهر می‌شوند، مشکوک به نقاط گوشه‌ای هستند.

۳ نقاطی مانند $x=a$ که به‌صورت $\sqrt[۳]{(x-a)^{۲}}$ ظاهر می‌شوند، مشکوک به نقاط بازگشتی هستند.

۴ نقاطی مانند $x=a$ که به‌صورت $\sqrt[۳]{x-a}$ ظاهر می‌شوند، مشکوک به نقاط عطف قائم هستند.

۵ نقاط مرزی توابع چندضابطه‌ای

۶ نقاطی که زیر رادیکال فرجهٔ زوج را صفر می‌کنند.

**مثال: دامنهٔ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را بیابید.**

پاسخ $D_f=[۰,+\infty)$ است. با توجه به تابع مشتق یعنی $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ به‌نظر می‌رسد تنها نقطه‌ای که $f(x)$ در آن مشتق‌پذیر نیست، $x=۰$ است (زیرا مخرج را صفر می‌کند) و در بقیهٔ نقاطِ بازهٔ $[۰,+\infty)$ مقدار $\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ تعریف شده و مشخص است. همچنین توجه کنید که چون $f(x)$ در $۰^-$ تعریف نشده است، اصلاً در $x=۰$ پیوسته نیست و بنابراین $f'(۰)$ موجود نیست؛ پس: $D_{f'}=[۰,+\infty)-\{۰\}=(۰,+\infty)$

**مثال: دامنهٔ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^{۲}-۴|$ را بیابید.**

پاسخ تابع به‌صورت $f(x)=|(x-۲)^{۱}(x+۲)^{۱}|$ است. با توجه به چاشنی گفته‌شده $x=۲$ و $x=-۲$ مشکوک به گوشه‌ای بودن هستند.

بررسی $x = ۲$:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{|(x-۲)(x+۲)|-۰}{x-۲}\begin{cases}\xrightarrow{x\to ۲^+} f'_+(۲)=۴\\ \xrightarrow{x\to ۲^-} f'_-(۲)=-۴\end{cases}$$

بررسی $x = -۲$:

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{|(x-۲)(x+۲)|-۰}{x+۲}$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{x\to (-۲)^+} f'_+(-۲)=-۴\\ \xrightarrow{x\to (-۲)^-} f'_-(-۲)=+۴\end{cases}$$

پس هر دو نقطهٔ $x = ۲$ و $x = -۲$ گوشه هستند، بنابراین $f(x)$ در این نقاط مشتق‌پذیر نیست؛ پس:

$$D_{f'} = D_f - \{۲ , -۲\} = \mathbb{R} - \{۲ , -۲\}$$

**تذکر:** در مسئلهٔ بالا، در تابع $f(x)$ بقیهٔ نقاط مشتق‌پذیر است، زیرا علامت داخل قدرمطلق این تابع با توجه به جدول تعیین علامت در بقیهٔ نقاط، در اطراف آن نقاط ثابت است؛ بنابراین قدرمطلق از بین می‌رود و تابع به چندجمله‌ای تبدیل می‌شود که در همهٔ نقاط به‌جز ۲ و ۲− مشتق‌پذیر است.

وعدهٔ ۱۱

## مشتق‌پذیری روی بازه

**الف** تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(a , b)$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

**ب** تابع $f(x)$ روی بازهٔ $[a , b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در بازهٔ $(a , b)$ مشتق‌پذیر بوده و در $x = a$ مشتق راست و در $x = b$ مشتق چپ داشته باشد.

**پ** تابع $f(x)$ روی بازهٔ $[a,b)$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در بازهٔ $(a,b)$ مشتق‌پذیر بوده و در $x=a$ مشتق راست داشته باشد (به مشتق چپ در $x=b$ نیاز نیست).

**ت** تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در بازهٔ $(a,b)$ مشتق‌پذیر بوده و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد (به مشتق راست در $x=a$ نیاز نیست).

**مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را روی بازهٔ $[۱,۹]$ بررسی کنید.**

**پاسخ** می‌دانیم $\sqrt{x}$ در $x=۰$ مشتق ندارد و $D_{f'}=(۰,+\infty)$؛ بنابراین در همهٔ نقاط بازهٔ $(۱,۹)$ مشتق‌پذیر است. هم‌چنین در $x=۱$ و $x=۹$ که ابتدا و انتهای بازه هستند نیز از هر دو طرف مشتق‌پذیر است، بنابراین مشتق راست عدد ۱ و مشتق چپ عدد ۹ نیز موجود است؛ پس تابع $f(x)$ روی این بازه مشتق‌پذیر است.

**مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=[x]$ را روی بازهٔ $[۱,۲)$ بررسی کنید.**

**پاسخ** توابع شامل براکت، در نقاطی مشکوک به مشتق‌ناپذیری هستند که داخل براکت عدد صحیح شود. در بازهٔ $(۱,۲)$ هیچ نقطه‌ای داخل $[x]$ را عدد صحیح نمی‌کند، پس فقط باید مشتق راست تابع $f(x)$ را در $x=۱$ بررسی کنیم:

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{[x]-[۱]}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{[۱^+]-[۱]}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۰}{x-۱}=۰$$

از آن‌جایی‌که $f'_+(۱)$ عدد مشخصی شده است، پس $f'_+(۱)$ موجود است؛ بنابراین $f(x)$ روی بازهٔ $[۱,۲)$ مشتق‌پذیر است.

پیوست ۱

# فرمول‌نامه

ویژهٔ امتحان نهایی

# تابع

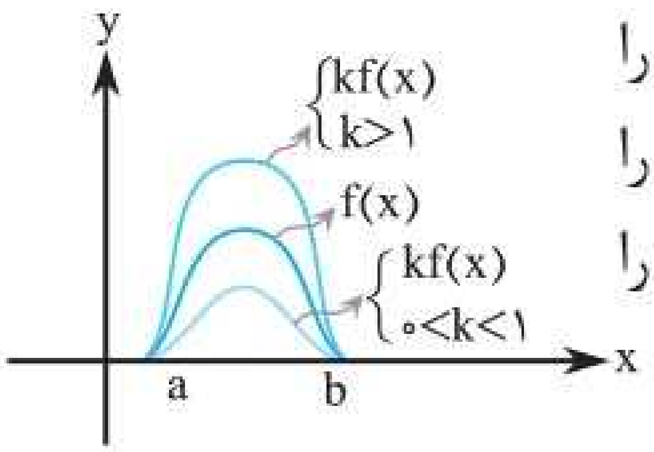
**۱** انقباض و انبساط عمودی $(y = kf(x))$:

برای رسم نمودار $y = kf(x)$ کافی است عرض نقاط تابع $f(x)$ را $k$ برابر کنیم.

**الف** $k > 1$: در این‌صورت نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

**ب** $0 < k < 1$: در این‌صورت نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

**پ** $k < 0$: در این‌صورت ابتدا منفی را نادیده می‌گیریم و انبساط یا انقباض را انجام می‌دهیم؛ سپس نمودار حاصل را نسبت به **محور x ها** قرینه می‌کنیم.




**۲** انقباض و انبساط افقی $(y = f(kx))$:

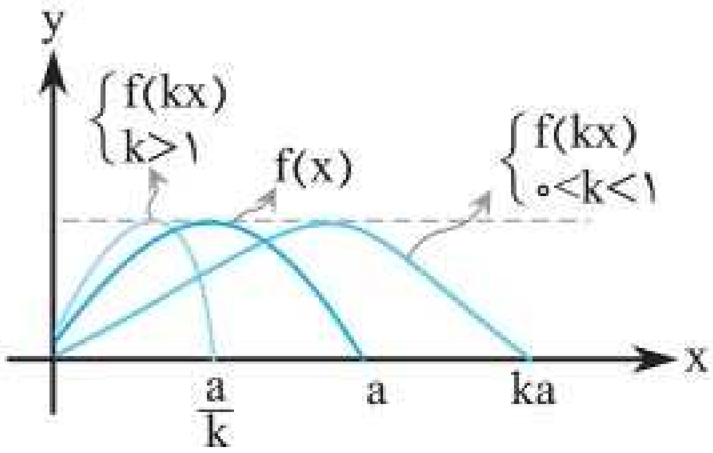
برای رسم نمودار $y = f(kx)$ کافی است طول همهٔ نقاط تابع $f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

**الف** $k > 1$: در این‌صورت نمودار $y = f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

**ب** $0 < k < 1$: در این‌صورت نمودار $y = f(kx)$ از **انبساط افقی** نمودار تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.

**پ** $k$ عددی منفی باشد:

در این‌صورت ابتدا منفی را نادیده می‌گیریم و انبساط یا انقباض را انجام می‌دهیم؛ سپس نمودار حاصل را نسبت به **محور y ها** قرینه می‌کنیم.




**۳** تابع چندجمله‌ای:

تابع $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1 \dots, a_n$ اعدادی حقیقی و $a_n \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ است، تابع چندجمله‌ای از **درجهٔ n** می‌نامیم.

**الف** $(c \neq 0)\, p(x) = c$، چندجمله‌ای از درجهٔ صفر است.

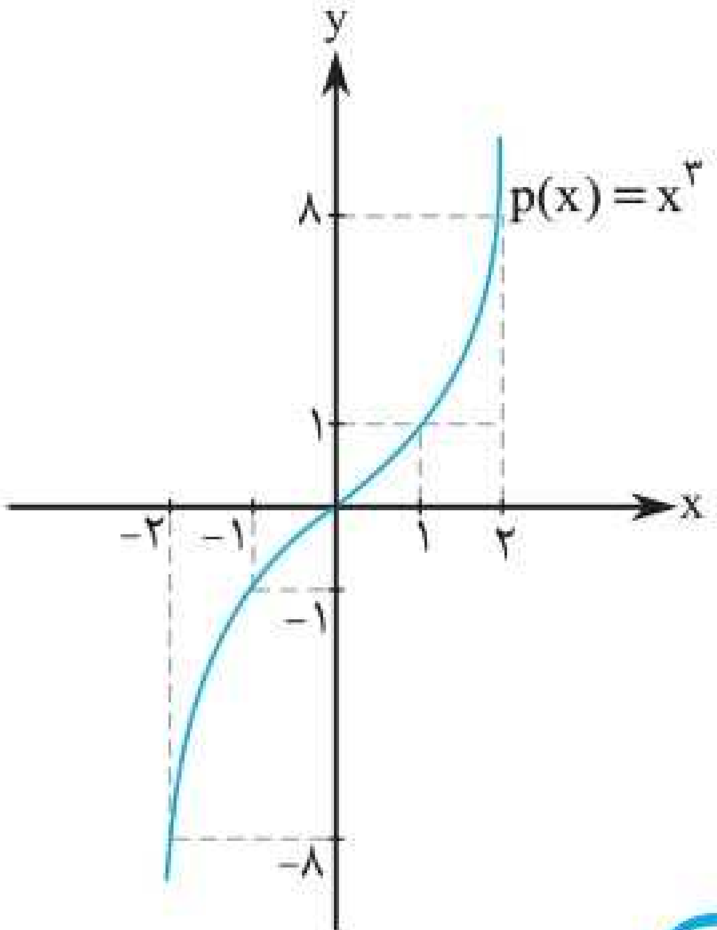
برای $p(x) = 0$، درجه تعریف نمی‌شود.

**ب** $p(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ چندجمله‌ای درجهٔ ۱ است.

**پ** $p(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ چندجمله‌ای درجهٔ ۲ است.

**ت** $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ چندجمله‌ای درجهٔ ۳ است.

ساده‌ترین تابع درجهٔ ۳، تابع $p(x) = x^3$ است که نمودار آن به‌صورت مقابل است:



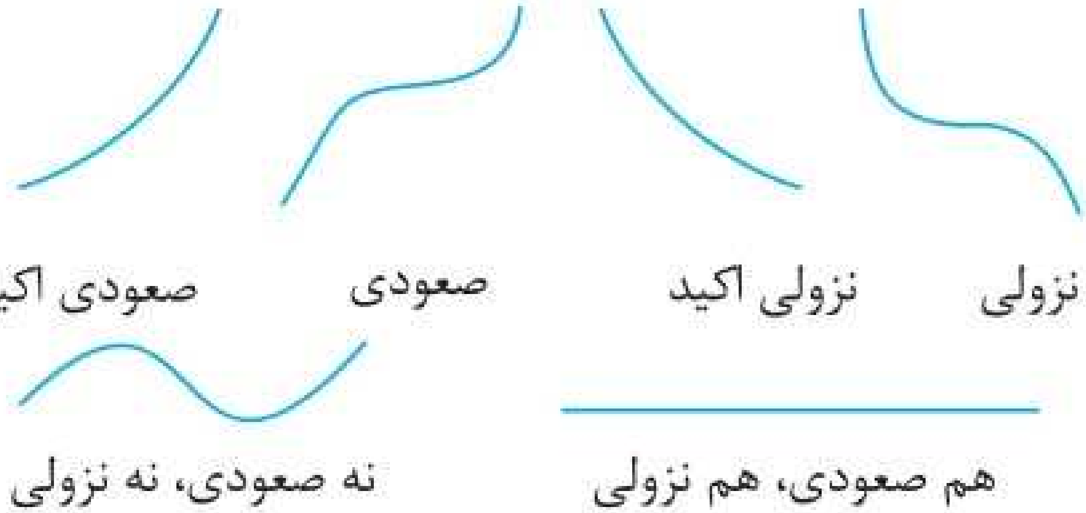
**۴** یکنوایی (صعودی ـ نزولی):

$a < b$
- $f(a) < f(b)$ (صعودی اکید)
- $f(a) \le f(b)$ (صعودی)
- $f(a) > f(b)$ (نزولی اکید)
- $f(a) \ge f(b)$ (نزولی)

تابعی را که در یک بازه، صعودی یا نزولی باشد، **یکنوا** می‌نامیم و اگر روی این بازه، صعودی یا نزولی اکید باشد، آن تابع را **یکنوای اکید** روی آن بازه می‌نامیم.

تابعی که در قسمت‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در قسمت‌هایی نزولی باشد، در دامنه‌اش **نه صعودی** است و **نه نزولی**.

تابع **ثابت** تنها تابعی است که **هم صعودی** است و **هم نزولی**.




**۵** بخش‌پذیری و قضیهٔ تقسیم:

**الف** باقی‌ماندهٔ تقسیم تابع چندجمله‌ای $p(x)$ به چندجمله‌ای درجهٔ یک $ax + b$ برابر است با:

$$r = p(-\frac{b}{a})$$

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \xrightarrow{\text{در } p(x)} r = p(-\frac{b}{a})$$

**ب** چند اتحاد مهم:

۱ $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1})$

این اتحاد برای **هر** $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

۲ $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-1})$

این اتحاد فقط برای **عدد طبیعی و فرد** $n$، برقرار است.

۳ $x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x - a^n)$

این اتحاد فقط برای **عدد طبیعی و زوج** $n$ برقرار است.

## مثلثات

**۱** تناوب و تابع تانژانت:

**الف** تابع $f$ را متناوب می‌نامیم، هرگاه عدد حقیقی مثبت $T$ طوری یافت شود که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

کوچک‌ترین عدد مثبت $T$ با این خاصیت را **دورهٔ تناوب اصلی تابع** $f(x)$ می‌نامیم.

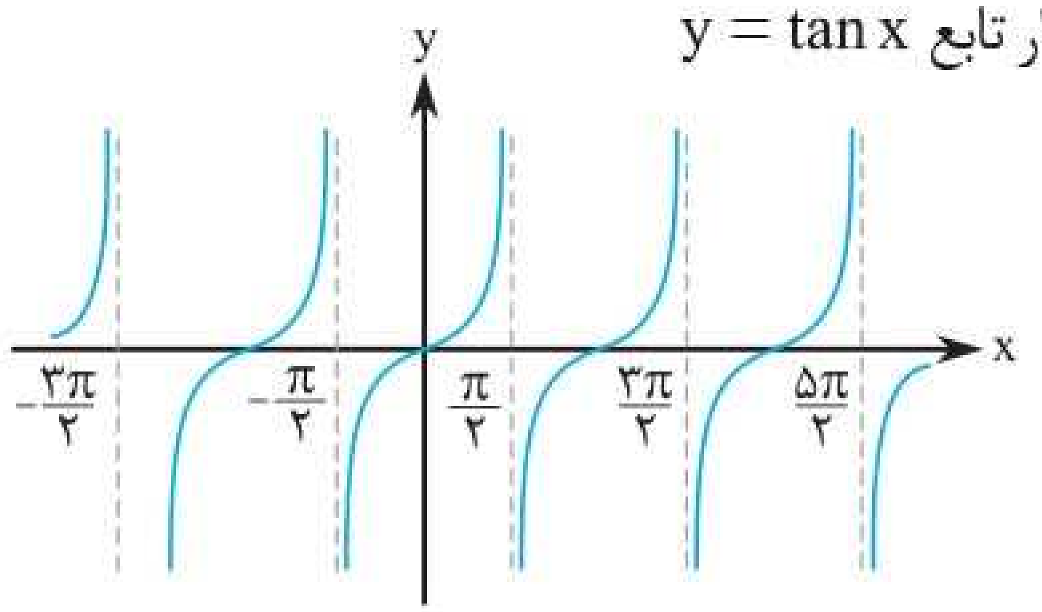
**ب** برای دو تابع $f(x) = a\sin(bx) + c$ و $f(x) = a\cos(bx) + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}\ ,\ \max = |a| + c\ ,\ \min = -|a| + c$$

**پ** اگر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب $(T)$ توابع $f(x) = a\sin(bx) + c$ و $f(x) = a\cos(bx) + c$ را داشته باشیم، می‌توانیم ضرایب $a$، $b$ و $c$ این توابع را مشخص کنیم:

$$|b| = \frac{2\pi}{T}\ ,\ |a| = \frac{|\max - \min|}{2}\ ,\ c = \frac{\max + \min}{2}$$

ت نمودار تابع $y = \tan x$




$$\begin{cases} D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k-1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases}$$

دورهٔ تناوب تابع تانژانت $T = \pi$ است. به‌طور کلی دورهٔ تناوب تابع $f(x) = a\tan(bx) + c$ برابر است با: $T = \dfrac{\pi}{|b|}$

تابع $y = \tan x$ در هر چهار ناحیه، صعودی اکید است، ولی در دامنه‌اش غیریکنواست.

۲ معادلات مثلثاتی:

الف $\mathbf{\sin x = \sin\alpha} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

ب $\mathbf{\cos x = \cos\alpha} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$

پ $\mathbf{\tan x = \tan\alpha} \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$

۳ نسبت‌های کمان $\alpha \pm \beta$:

الف $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

حالت خاص: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ب $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

حالت خاص: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$