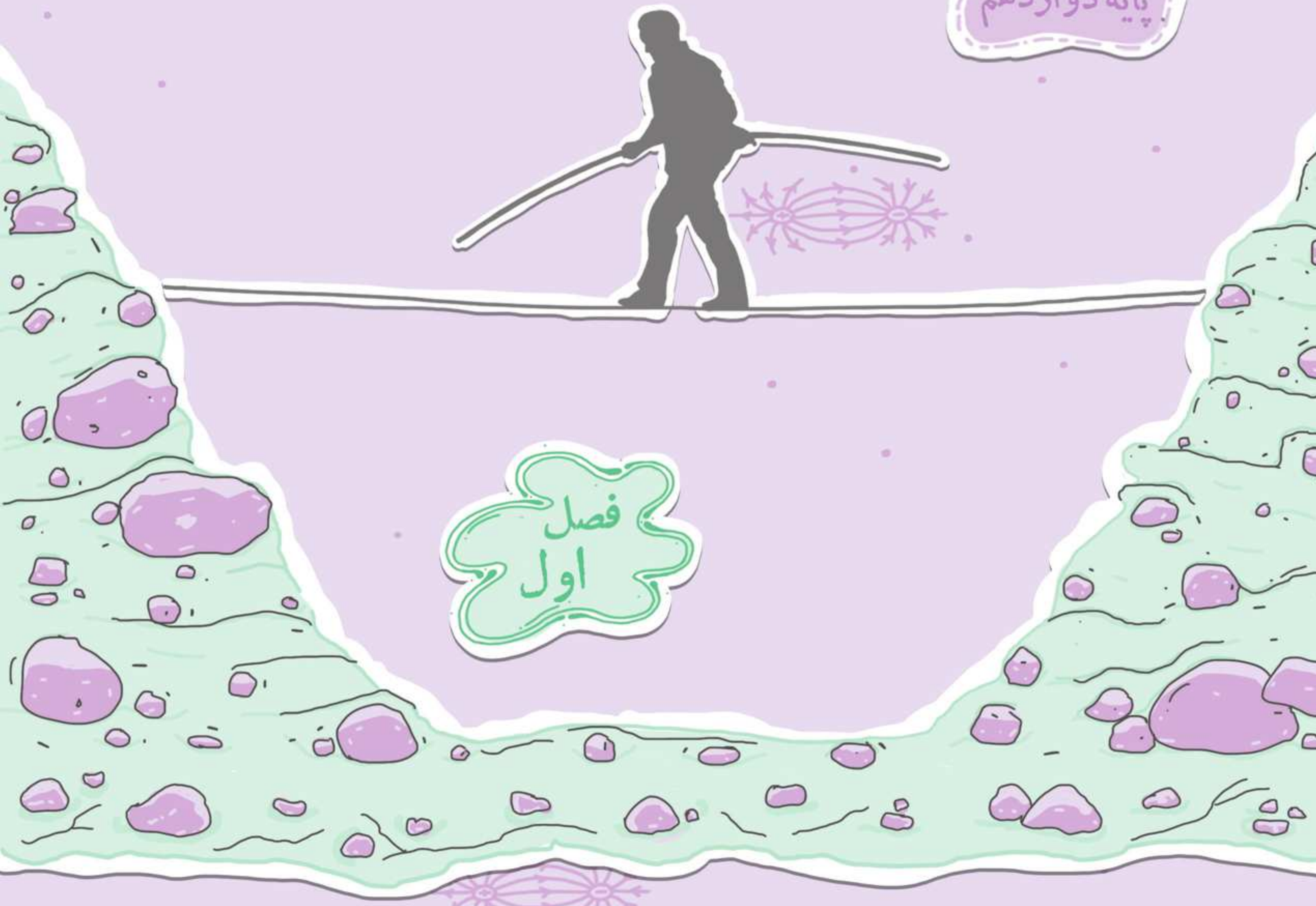
پایه دوازدهم



فصل اول

حرکت بر خط راست

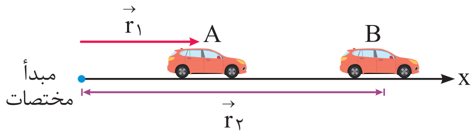
قسمت اول: نگاهی بر مفاهیم حرکت

ایستگاه ۱ مفاهیم بردار مکان، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده

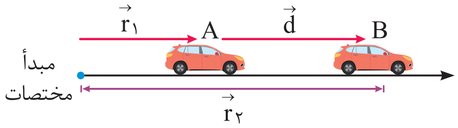
تو اولین ایستگاه ورودتون به فیزیک دوازدهم، بریم ببینیم پارامترهای بردار مکان و جابه‌جایی چی هستن؟ ایشالا که تا آخر کتاب خیلی خوش بگذره.

۱. بردار مکان و جابه‌جایی

بردار مکان: در شکل زیر اتومبیلی بر روی محور x در حال حرکت است. **بردار مکان** در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل می‌شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده‌شده است.



بردار تغییر مکان (جابه‌جایی): متحرک نشان داده‌شده در شکل زیر، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 از نقطهٔ A تا نقطهٔ B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازهٔ زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازهٔ زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازهٔ زمانی متصل می‌کند.



تذکر همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ معادل با تفاضل بردارهای مکان در نقاط A و B است.

$$\vec{d} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

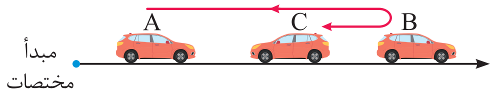
انتهای $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$

خوب یادتون باشه که بردار $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$، از انتهای $\vec{r}_1$ به انتهای $\vec{r}_2$ وصل میشه.

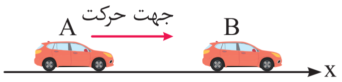
۲. مسافت طی‌شده

فرض کنید مطابق شکل، اتومبیلی از نقطهٔ A به B رفته و سپس از نقطهٔ B به نقطهٔ C بازگردد. به طول مسیر طی‌شده توسط اتومبیل، مسافت پیموده‌شده یا به اختصار مسافت می‌گویند.



تذکر همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی‌شدهٔ ABC از طول پاره‌خط AC (اندازهٔ جابه‌جایی) بزرگ‌تر است. در مجموع می‌توان گفت «**مسافت طی‌شده توسط یک متحرک، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است.**»

تذکر در شکل زیر یک اتومبیل در جهت محور x مستقیماً از A به B منتقل شده است. در این حالت خاص طول بردار جابه‌جایی و مسافت طی‌شده با یک‌دیگر برابر بوده و هم‌اندازه با طول پاره‌خط AB است.



مسافت طی‌شده

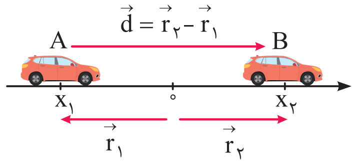
$$l = |\vec{d}| = AB$$

اندازهٔ بردار جابه‌جایی

نتیجه هنگامی که متحرک در مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر مسافت طی شده است.

نکات مهم و کاربردی

۱) فرض کنید متحرکی مطابق شکل زیر از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کند. بدین‌ترتیب بردار مکان متحرک در نقاط A و B و بردار جابه‌جایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i}\ ,\ \ \vec{r}_2 = x_2\vec{i} \Rightarrow \vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2\vec{i} - x_1\vec{i} = (x_2 - x_1)\vec{i} = \Delta x\,\vec{i}$$

۲) اگر متحرک در سمت راست مبدأ باشد (B)، بردار مکان در جهت محور x قرار دارد و اگر متحرک در سمت چپ مبدأ باشد (A)، بردار مکان در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.

۳) در هنگام عبور متحرک از مبدأ، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، این موضوع از نکات تست‌خیز این ایستگاه نکات محسوب می‌شود.

۴) اگر $\Delta x > 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در جهت محور x و اگر $\Delta x < 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در خلاف جهت محور x است.

۵) مسافت طی‌شده کمیتی نرده‌ای بوده و جابه‌جایی کمیتی برداری است.

۶) در جدول زیر، دو کمیت جابه‌جایی و مسافت مقایسه شده‌اند.

کمیت	جابه‌جایی	مسافت
تعریف	برداری است که نقطهٔ شروع حرکت را مستقیماً به نقطهٔ پایان حرکت وصل می‌کند.	طول مسیر طی‌شده توسط متحرک است.
نوع	برداری	نرده‌ای
یکای SI	m	m
مقایسهٔ اندازه	اندازهٔ جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی‌شده است.	

۷) جابه‌جایی کل متحرک در چند بازهٔ زمانی متوالی، برابر مجموع برداری جابه‌جایی‌های متحرک در هر یک از این بازه‌هاست. مثلاً اگر متحرکی در t_1 ثانیهٔ اول حرکت جابه‌جایی $\vec{d}_1 = 5\vec{i}$، در t_1 ثانیهٔ دوم حرکت جابه‌جایی $\vec{d}_2 = -7\vec{i}$ و در t_1 ثانیهٔ سوم حرکتش جابه‌جایی $\vec{d}_3 = 8\vec{i}$ را انجام داده باشد، جابه‌جایی آن در کل حرکت برابر است با:

$$\vec{d}_{\text{کل}} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = 5\vec{i} + (-7\vec{i}) + (8\vec{i}) = 6\vec{i} \xrightarrow{\text{به‌طور ساده‌تر}} \Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 5 - 7 + 8 = 6\,m$$

حالا بریم با یه تمرین دُرُستُ حسابی، مطالب این ایستگاه رو جمع‌بندی کنیم ...

تمرین ۱) در شکل زیر، اتومبیل نشان داده‌شده برروی محور x از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و به نقطهٔ B می‌رود و سپس از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ C باز می‌گردد. کدام عبارت در مورد حرکت این اتومبیل از A تا C نادرست است؟

۱) بردار مکان متحرک در نقطهٔ C، برابر $-\vec{i}$ در SI می‌باشد.

۲) ۸ متر از مسافت طی‌شده، در خلاف جهت محور x است.

۳) این متحرک از A تا C، مسافت $10\,m$ را طی کرده است.

۴) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C، برابر $6\vec{i}$ در SI می‌باشد.

پاسخ برای تحلیل این سؤال آموزشی، به موارد زیر توجه کنید:

۱) بردار مکان متحرک در نقاط A، B و C به‌صورت زیر است:

$$\vec{r}_A = 5\vec{i} \qquad \vec{r}_B = -3\vec{i} \qquad \vec{r}_C = -1\vec{i}$$

۲) این متحرک از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، $8\,m$ در خلاف جهت محور x و از نقطهٔ B تا نقطهٔ C، $2\,m$ در جهت محور x حرکت کرده است و در مجموع مسافتی به اندازهٔ $10\,m$ را طی کرده است.

۳) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C نیز به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$\vec{d} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -1\vec{i} - 5\vec{i} = -6\vec{i}$$

بنابراین تنها عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۴) نادرست است.

بررسی ویژگی‌های معادلهٔ مکان – زمان

تو ادامهٔ کار درک مفهوم سادهٔ معادلهٔ یه پارامتر (مثل مکان) برحسب زمان، تو این فصل خیلی برامون مهمه. بریم ببینیم چه جوری میشه با این مفهوم یه ارتباط خوبی برقرار کرد.

معادلهٔ مکان - زمان یک متحرک، معادله‌ای است که مکان متحرک را در هر لحظه مشخص می‌کند. فرض کنید متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است و معادلهٔ مکان - زمان آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید: $x = t^۳ + ۲t + ۵$

این معادله، معادله‌ای است که اگر زمان را در آن قرار دهیم، بلافاصله موقعیت متحرک را به ما می‌دهد. مثلاً داریم:

$$x = t^۳ + ۲t + ۵ \Rightarrow \begin{cases} t_۰ = ۰ \rightarrow x_۰ = ۰^۳ + ۲\times ۰ + ۵ = ۵\,m & \text{(در } t_۰ = ۰ \text{ (شروع حرکت)، } x_۰ = ۵\,m \text{ است.)} \\ t_۱ = ۱s \rightarrow x_۱ = ۱^۳ + ۲\times ۱ + ۵ = ۸\,m & \text{(در } t_۱ = ۱s\text{، } x_۱ = ۸\,m \text{ است.)} \\ t_۲ = ۲s \rightarrow x_۲ = ۲^۳ + ۲\times ۲ + ۵ = ۱۷\,m & \text{(در } t_۲ = ۲s\text{، } x_۲ = ۱۷\,m \text{ است.)} \end{cases}$$

تذکر اگر از ما بخواهند جابه‌جایی متحرک را در یک بازهٔ زمانی مانند $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$ از روی معادلهٔ مکان - زمان به‌دست آوریم، کافی است مقادیر $t_۱$ و $t_۲$ را در معادلهٔ مکان قرار داده و حاصل $x_۱$ و $x_۲$ را به‌دست آوریم. $x_۲ - x_۱$، معادل با جابه‌جایی متحرک است.

$$\begin{cases} t_۲ = ۲s \rightarrow x_۲ = ۱۷\,m \\ t_۱ = ۱s \rightarrow x_۱ = ۸\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۱۷ - ۸ = ۹\,m$$

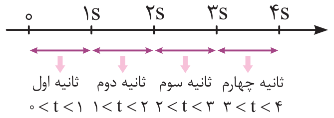
نکات مهم و کاربردی

۱) مکان اولیهٔ متحرک، یعنی مکان آن در لحظهٔ $t = ۰$. بنابراین برای پیدا کردن مکان اولیهٔ یک متحرک، کافی است در معادلهٔ مکان - زمان آن، پارامتر t را برابر صفر قرار دهیم.

۲) متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است، این متحرک هنگامی از مبدأ عبور می‌کند که $x = ۰$ شود. به‌عبارتی برای پیدا کردن لحظات عبور یک متحرک از مبدأ، کافی است برای آن $x = ۰$ قرار داده شود.

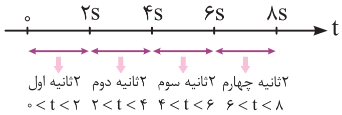
مثال: $x = ۴t - ۸ \xrightarrow[\text{عبور از مبدأ}]{\text{پیدا کردن لحظهٔ}} x = ۴t - ۸ = ۰ \rightarrow t = ۲s$

۳) ثانیهٔ اول حرکت، یک بازهٔ زمانی است که طول آن برابر یک ثانیه بوده و از $t = ۰$ شروع می‌شود یعنی $۰ < t < ۱s$، ثانیهٔ دوم حرکت یعنی $۱s < t < ۲s$ و به همین صورت می‌توان گفت:



$\Rightarrow n - ۱ < t < n$:ثانیهٔ nام

۴) دو ثانیهٔ اول حرکت یک بازهٔ زمانی است که طول آن برابر دو ثانیه و از $t = ۰$ شروع می‌شود، یعنی $۰ < t < ۲s$. دو ثانیهٔ دوم یعنی $۲s < t < ۴s$ * و به همین صورت دو ثانیه‌های بعدی نیز نوشته می‌شود.



در ادامه با حل چند تمرین نسبتاً ساده، مفاهیم ارائه‌شده را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین ۲ **دو ثانیهٔ هشتم از یک حرکت، معادل با چه بازهٔ زمانی است؟**

پاسخ دو ثانیهٔ هشتم یک حرکت، یعنی ۸ بازهٔ زمانی ۲ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای این بازهٔ زمانی $۱۶s = ۲ \times ۸$ است، از طرفی طول هر بازهٔ زمانی $۲s$ است یعنی: $\boxed{۱۴s} < t < ۱۶s$ ← ۲ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

تمرین ۳ **نه ثانیهٔ پنجم از یک حرکت، معادل با چه بازهٔ زمانی است؟**

پاسخ نه ثانیهٔ پنجم یک حرکت، یعنی ۵ بازهٔ زمانی ۹ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای بازهٔ زمانی $۴۵s = ۹ \times ۵$ است، از طرفی طول هر بازهٔ زمانی $۹s$ است یعنی $\boxed{۳۶s} < t < ۴۵s$ ← ۹ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

* اگر بخواهیم بازه‌های زمانی را دقیق‌تر بنویسیم، ۲ ثانیهٔ اول معادل با $۰ \le t < ۲s$، ۲ ثانیهٔ دوم معادل با $۲s \le t < ۴s$ و ... می‌باشد که البته این موضوع از اهمیت چندانی برخوردار نیست و معمولاً در کتاب‌های کنکور رعایت نمی‌شود.

تمرین ۴ **معادلهٔ حرکت متحرکی برروی محور x، در SI از رابطهٔ $x = t^{۲} - ۴t$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت و در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر است؟**

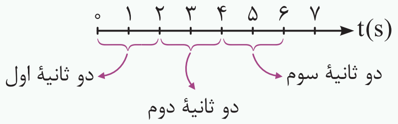
۱) ۱۲, − ۴　　۲) ۱۰, − ۶　　۳) ۸, − ۴　　۴) ۱۰, − ۴

پاسخ برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت $(۰ < t < ۲s)$:

$$x = t^{۲} - ۴t \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۰ \rightarrow x_۱ = ۰ \\ t_۲ = ۲s \rightarrow x_۲ = ۲^{۲} - ۴ \times ۲ = -۴m \end{cases} \Rightarrow \text{جابه‌جایی در دو ثانیهٔ اول}: \Delta x = x_۲ - x_۱ = -۴m$$

گام دوم: محاسبهٔ جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت $(۴s < t < ۶s)$:



$$x = t^{۲} - ۴t \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۴s \rightarrow x_۱ = ۴^{۲} - ۴ \times ۴ = ۰ \\ t_۲ = ۶s \rightarrow x_۲ = ۶^{۲} - ۴ \times ۶ = ۱۲m \end{cases} \Rightarrow \text{جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم}: \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۱۲ - ۰ = ۱۲m$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲. شرط به هم رسیدن دو متحرک

فرض کنید معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک A و B که همزمان شروع به حرکت کرده‌اند، به صورت $x_A = ۴t + ۲$ و $x_B = -۵t + ۲۰$ است. شرط به هم رسیدن دو متحرک آن است که مکان دو متحرک یکسان شود و این یعنی داریم: $x_A = x_B \Rightarrow ۴t + ۲ = -۵t + ۲۰ \Rightarrow t = ۲s$

از سوی دیگر ممکن است پرسیده شود که این دو متحرک در چه مکانی به هم می‌رسند؟ برای محاسبهٔ این موضوع داریم:

$$t = ۲s \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{در یکی از xها}} x_A = ۴t + ۲ = ۴ \times ۲ + ۲ = \boxed{۱۰m}$$

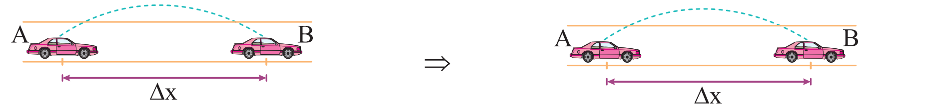
در مکان $x = +۱۰m$ دو متحرک به هم می‌رسند.

حالا وقتشه یه سری به تستای ۱ تا ۱۴ بزنیم ...

ایستگاه ۲ آشنایی با مفهوم سرعت متوسط و تندی متوسط

درک مفهوم تندی متوسط و سرعت متوسط، یکی از خواسته‌های اصلی ما تو این فصل هست. خوب روی این موضوع تمرکز کنید ...

سرعت متوسط: در شکل زیر متحرکی با سرعت متغیر، از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان Δt ثانیه، به نقطهٔ B می‌رسد. حال می‌خواهیم ببینیم این متحرک با چه سرعت ثابتی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کند تا مجدداً در همان زمان Δt از A به B برسد.



با سرعت متغیر در مدت Δt از A تا B می‌رود.　　می‌خواهیم با سرعت ثابت v_{av} در همان زمان Δt از A تا B برود.

این پارامتر، **سرعت متوسط** نام دارد که به نوعی مقدار متوسطی برای سرعت متحرک در طی لحظات حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B محسوب می‌شود. اگر متحرک روی محور x در حال حرکت باشد، برای محاسبهٔ $\vec{v}_{av}$، کافی است جابه‌جایی $\vec{d}$ را بر زمان انجام آن جابه‌جایی، یعنی Δt تقسیم کنیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

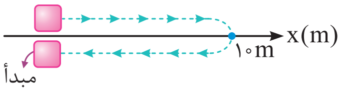
تندی متوسط: به نسبت مسافت طی‌شده (l) به زمان طی مسافت (Δt) تندی متوسط گویند. تندی متوسط را با نماد s_{av} نشان می‌دهند و برای محاسبهٔ s_{av} داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

نکات مهم و کاربردی

۱) سرعت متوسط مانند جابه‌جایی کمیتی برداری و تندی متوسط مانند مسافت، کمیتی عددی (نرده‌ای) می‌باشد.

۲) اگر جابه‌جایی متحرک در طی انجام یک حرکت صفر شود، سرعت متوسط آن نیز صفر می‌شود. به طور مثال در حرکت زیر که متحرک ابتدا $10\,m$ در جهت محور x حرکت کرده و سپس ۱۰ متر در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به محل اولیهٔ خود بازمی‌گردد، سرعت متوسط در کل زمان حرکت صفر است.



$$\begin{cases} x_{\text{شروع}} = 0 \\ x_{\text{پایان}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_{\text{پایان}} - x_{\text{شروع}} = 0$$

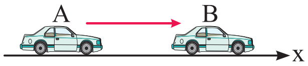
۳) اگر یک متحرک در جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن مثبت بوده و اگر در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن منفی است.

۴) تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. به عبارت دیگر تندی متوسط فقط زمانی برابر صفر می‌شود که متحرک ساکن باشد.

۵) مسافت طی‌شده همواره بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی یا برابر با آن است، بنابراین تندی متوسط هم همواره بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط یا برابر با آن است.

$$s_{av} \geq |\vec{v}_{av}|$$

۶) فرض کنید مطابق شکل مقابل متحرکی روی محور x از نقطهٔ A تا نقطهٔ B بدون تغییر جهت جابه‌جا شود. در این حالت چون مسافت طی‌شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی است، تندی متوسط برابر اندازهٔ سرعت متوسط می‌شود. $s_{av} = |\vec{v}_{av}|$



حالا بریم تو چند تا تمرین بعدی، ببینیم چه جوری از نکاتی که یاد گرفتیم میشه توی حل مسائل استفاده کرد ...

تمرین ۵) معادلهٔ حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = 0/25 + \sin \pi t$ می‌باشد. اندازهٔ سرعت متوسط آن در ۵ ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) صفر ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۱۵

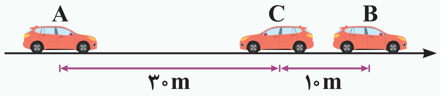
پاسخ: برای محاسبهٔ سرعت متوسط در ۵ ثانیهٔ اول حرکت، کافیست مکان متحرک در لحظات $t_1 = 0$ و $t_2 = 5s$ را به‌دست آوریم:

$$x = 0/25 + \sin \pi t \quad , \quad (0 < t < 5s) \rightarrow |\vec{v}_{av}| = ?$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0/25 + \sin(0) = 0/25\,m \\ t_2 = 5s \rightarrow x_2 = 0/25 + \sin 5\pi = 0/25\,m \end{cases} \rightarrow \text{سرعت متوسط}: \vec{v}_{av} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}\vec{i} = \frac{0/25 - 0/25}{5 - 0}\vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = 0 \text{ (گزینهٔ ۱)}$$

دقت: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هرگاه جابه‌جایی متحرک برابر صفر شود، سرعت متوسط متحرک نیز برابر صفر می‌شود.

تمرین ۶) مطابق شکل، اتومبیلی روی محور x از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و در مدت 6s به نقطهٔ B رفته و سپس در مدت 4s از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود. کدام عبارت در مورد این حرکت نادرست است؟



۱) این اتومبیل به‌طور متوسط در هر ثانیه، $5\,m$ از مسیر را پیموده است.

۲) این اتومبیل به‌طور متوسط در هر ثانیه، $3\,m$ از نقطهٔ A به مقصد نزدیک شده است.

۳) تندی متوسط این اتومبیل $5\,m/s$ است.

۴) اندازهٔ سرعت متوسط این اتومبیل $15\,m/s$ است.

پاسخ: این اتومبیل از نقطهٔ A تا B، مسافت $40\,m$ را طی کرده و سپس از نقطهٔ B تا C، به اندازهٔ مسافت $10\,m$ برگشته است. بنابراین در مجموع مسافت طی شده توسط اتومبیل $50\,m$ می‌شود و تندی متوسط به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{50}{10} = 5\,m/s$$

بنابراین تندی متوسط $5\,m/s$ می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه، به‌طور متوسط $5\,m$ از مسیر را طی کرده است.

در ادامه سرعت متوسط اتومبیل را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{30}{10}\vec{i} = 3\vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = 3\,m/s$$

بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط $3\,m/s$ می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه به‌طور متوسط $3\,m$ از نقطهٔ A به سمت مقصد، یعنی نقطهٔ C نزدیک شده است، پس گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است.

تذکر: برای تبدیل km/h به m/s، کافی است عدد موردنظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

$$1\,km/h = 1\frac{(1000\,m)}{(3600\,s)} \Rightarrow 1\,km/h = \frac{1}{3/6}\,m/s$$

و برای تبدیل m/s به km/h، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می‌کنیم:

$$1\,m/s = 3/6\,km/h$$

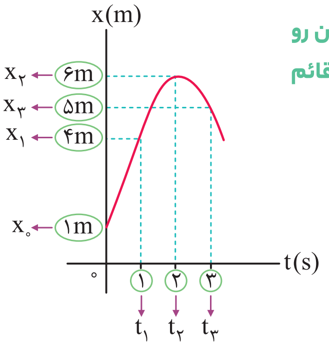
حالا وقتشه یه سری به تستای ۱۵ تا ۳۸ بزنیم ...

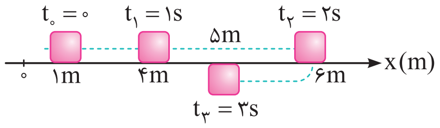
ایستگاه ۳ تحلیل نمودار مکان - زمان و محاسبهٔ $|\vec{v}_{av}|$ و s_{av} از روی آن

۱. تحلیل مفهومی نمودار مکان – زمان

فرض کنید مکان متحرکی مطابق شکل، در لحظات t_0، t_1، t_2، t_3 و ... داده‌شده است. اگر این مکان‌ها و زمان‌ها را در یک نمودار ترسیم کنیم، از لحاظ مفهومی نمودار مکان - زمان حرکت متحرک به‌دست می‌آید.

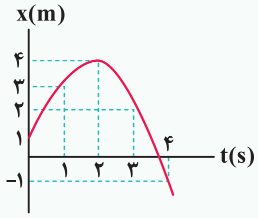
به زبون خودمونی، نمودار مکان – زمان نموداریه که اگه زمان رو از روی محور افقی داشته باشی، خیلی راحت مکان رو روی محور قائم بهت میده.



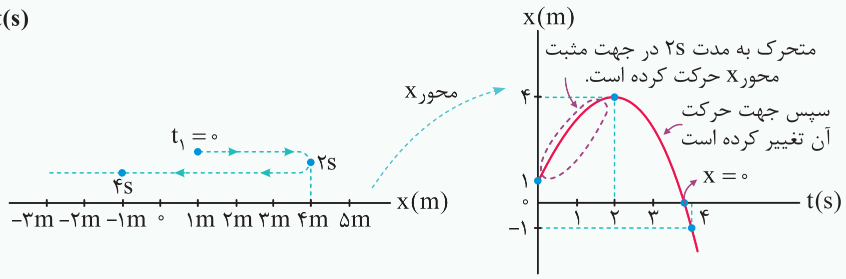


تذکر یک دانش‌آموز خلاق، از روی نمودار مکان - زمان مسیر حرکت متحرک را در ذهن خود تجسم می‌کند. این موضوع یعنی با خود تصور می‌کند که از $t=0$ تا $t_2 = 2s$، متحرک در جهت محور x حرکت کرده و از مکان ۱m به مکان ۶m منتقل می‌شود. در ادامه از $t_2 = 2s$ تا $t_3 = 3s$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده و از مکان ۶m به مکان ۵m رفته است.

تمرین ۷ **نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت مقابل است. جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط این متحرک تا پایان ثانیهٔ چهارم، برابر چند متر است؟**



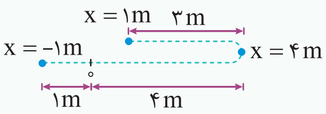
پاسخ با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، مسیر حرکت این متحرک به صورت زیر است و می‌توان نوشت:



جابه‌جایی این متحرک به صورت زیر است:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1m \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = -1m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -1 - (1) = -2m$$

حال به محاسبهٔ مسافت طی شده می‌پردازیم. متحرک ابتدا از $x = 1m$ شروع به حرکت کرده و تا $x = 4m$ رفته است (۳m مسافت طی‌کرده است.). در ادامه از $x = 4m$ شروع به حرکت کرده و به $x = 0$ رفته است (۴m مسافت طی‌کرده است.)، در پایان نیز از $x = 0$ به $x = -1m$ رفته است (۱m مسافت طی‌کرده است.) و مجموع مسافت طی شده توسط متحرک برابر $3 + 4 + 1 = 8m$ است.



تذکر جابه‌جایی متحرک هیچ ربطی به چگونگی مسیر حرکت آن ندارد و برای محاسبهٔ آن، کافی است مکان متحرک را در ابتدا و انتهای حرکت بدانیم، ولی برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده، باید حتماً چگونگی مسیر حرکت را بدانیم.

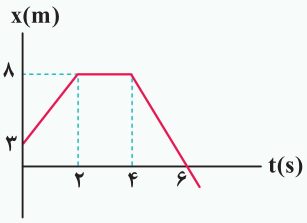
تمرین ۸ **نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.**

الف) در کدام بازهٔ زمانی، متحرک متوقف بوده است؟

ب) بردار مکان متحرک چند ثانیه در جهت محور x بوده است؟

ج) در بازه‌ای که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، اندازهٔ جابه‌جایی آن چند متر است؟

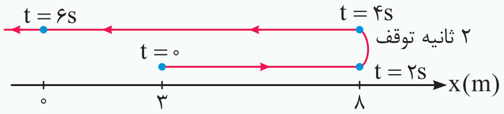
د) مسافت طی‌شده در ۶ ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟



پاسخ الف) در بازهٔ زمانی $2s < t < 4s$ ، نمودار افقی است، یعنی مکان متحرک تغییر نمی‌کند و متحرک متوقف بوده است.

ب) در ۶ ثانیهٔ اول حرکت، $x > 0$ است، یعنی بردار مکان متحرک در جهت محور x است. پس از لحظهٔ $t = 6s$ ، بردار مکان در خلاف جهت محور x می‌شود.

ج) با توجه به نمودار، مسیر حرکت متحرک به‌صورت شکل مقابل است:

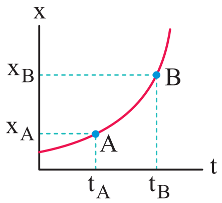


همان‌طور که می‌بینید، در ۲ ثانیهٔ اول، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و به اندازهٔ $5m$ جابه‌جا می‌شود.

د) در ۶ ثانیهٔ اول، متحرک ابتدا $5m$ در جهت محور x جابه‌جا می‌شود و پس از ۲ ثانیه توقف، $8m$ در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی‌شده برابر $l = 5 + 8 = 13m$ است.

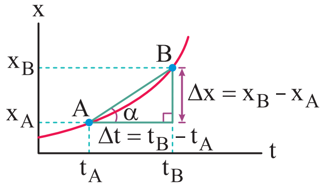
۲. محاسبهٔ سرعت متوسط از روی نمودار مکان – زمان

فرض کنید نمودار مکان - زمان را برای یک متحرک در اختیار داریم و سرعت متوسط آن بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبهٔ سرعت متوسط، از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:



روش اول (**نمودارخوانی**): در این روش ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص کرده و مکان متحرک در نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم. در نهایت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{سرعت متوسط بین A و B}: |\vec{v}_{av}|_{A,B} = \frac{\Delta x_{A,B}}{\Delta t_{A,B}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$



روش دوم (**شیب بین دو نقطه از نمودار**): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و سپس خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت است.

$$\text{شیب خط AB} = |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \tan\alpha$$

این روش در مسائلی که می‌خواهند سرعت متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنند، بسیار کاربرد دارد.

۳. محاسبهٔ تندی متوسط از روی نمودار مکان – زمان

فرض کنید نمودار مکان - زمان برای یک متحرک را در اختیار داریم و تندی متوسط بین دو لحظهٔ t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. برای محاسبهٔ تندی متوسط، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

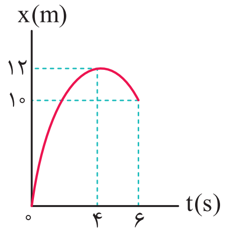
گام اول: ابتدا مسافت طی‌شده بین دو لحظهٔ t_A و t_B را با توجه به نکات ارائه‌شده محاسبه می‌کنیم:

گام دوم: به کمک رابطهٔ مقابل، تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\underbrace{\boxed{\Delta t}}_{t_B - t_A}}$$

۴. بررسی یک مفهوم بسیار پرکاربرد

برای به‌دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان، فقط باید به مکان ابتدا و انتهای حرکت توجه کنیم. اما برای به‌دست آوردن تندی متوسط باید کل مسیر طی‌شده توسط متحرک را به‌دست آوریم. به‌طور مثال فرض کنید نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت شکل مقابل باشد. این متحرک از مبدأ مختصات در جهت محور x حرکت کرده و در نقطهٔ $x = 12m$ تغییر جهت داده و سپس در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به نقطهٔ $x = 10m$ می‌رسد.



برای به‌دست آوردن اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{6} = \frac{5}{3} m/s$$

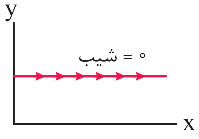
اما برای به‌دست آوردن تندی متوسط حرکت باید مسافت طی‌شده را به‌دست آوریم. این متحرک $12m$ در جهت محور x و $2m$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده است، بنابراین در مجموع مسافت $14m$ را طی کرده است و داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} m/s$$

۵. سه یادآوری مهم و بسیار کاربردی از ریاضی

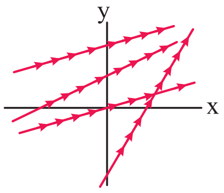
الان می‌خوایم یه چند تا نکتهٔ ریاضی براتون بیاریم که تو کل فیزیک دوازدهم، خیلی به کارتون میاد ...

۱) خطوط افقی دارای شیب صفر هستند.

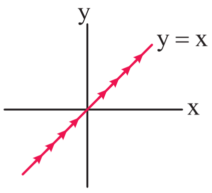


(با افزایش x، y ثابت است.)

۲) خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) هستند، شیب مثبت دارند.



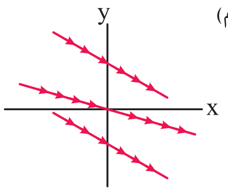
(خطوط دارای شیب مثبت)



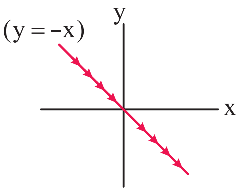
(با افزایش x، پیشروی نمودار به سمت بالا است.)

ساده بگیم خطوطی که سمت راستشون بالاتر از سمت چپشونه، شیبشون مثبته و بالعکس ...

۳) خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) هستند، شیب منفی دارند.



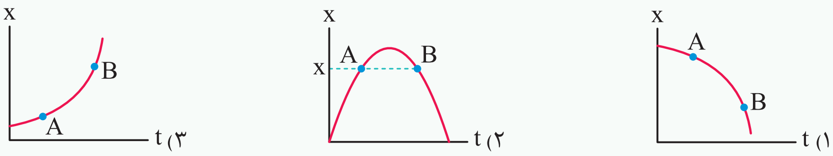
(خطوط دارای شیب منفی)



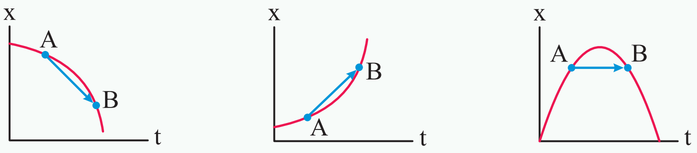
(با افزایش x، پیشروی نمودار به سمت پایین است.)

حالا بریم با حل چند تا تمرین، این ایستگاه رو بترکونیم ...

تمرین ۹ **در هریک از نمودارهای مکان - زمان زیر، علامت سرعت متوسط متحرک از A تا B را مشخص کنید.**



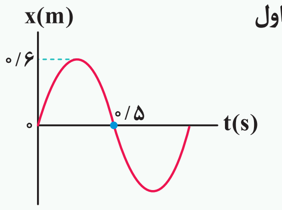
پاسخ با توجه به این‌که نمودار مکان - زمان برای هر سه متحرک داده شده است، سرعت متوسط برابر شیب خط واصل بین نقاط A و B از نمودار است:



شیب AB صفر است ($v_{av} = 0$)　　شیب AB مثبت است ($v_{av} > 0$)　　شیب AB منفی است ($v_{av} < 0$)

دقت شود که قرار دادن فلش بر روی خط‌های واصل بین دو نقطه، فقط به منظور درک بیشتر شما عزیزان از علامت شیب نمودار است.

تمرین ۱۰ **نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن در ۰/۵ ثانیهٔ اول حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر بر ثانیه است؟**



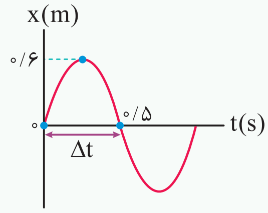
۱) ۱/۲ - صفر　　۲) صفر - ۱/۲

۳) ۲/۴ - صفر　　۴) صفر - ۲/۴

پاسخ نمودار داده‌شده نمودار مکان - زمان متحرک است و می‌خواهیم با خواندن مکان متحرک در $t_1 = 0$ و $t_2 = 0/5\,s$ از روی نمودار، سرعت متوسط در ۰/۵ ثانیهٔ اول حرکت را به‌دست آوریم:

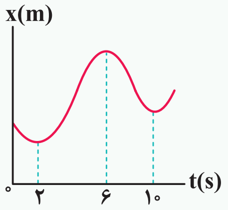
$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 0/5\,s \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{اندازهٔ سرعت متوسط}: |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 0}{0/5 - 0} = 0$$

از طرفی با توجه به نمودار، این متحرک $۰/۶\,m$ در جهت محور x حرکت کرده و سپس $۰/۶\,m$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین در مدت $۰/۵\,s$ مسافت $۱/۲\,m$ را طی کرده است و تندی متوسط آن برابر است با:



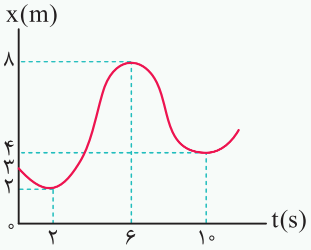
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱/۲}{۰/۵}=۲/۴\,m/s$$ (گزینهٔ ۴)

تمرین ۱۱ **نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل است. تندی متوسط در کدام‌یک از بازه‌های زمانی مشخص شده در گزینه‌ها بیشتر است؟** (تجربی داخل ۱۴۰۰)



۱) صفر تا ۲s
۲) صفر تا ۶s
۳) ۲s تا ۱۰s
۴) ۶s تا ۱۰s

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال بسیار جالب، می‌توان اعدادی مناسب و منطقی متناسب با نمودار را بر روی آن فرض کرده و تندی متوسط را در تمامی بازه‌های اشاره شده با توجه به این اعداد به‌دست آوریم. به طور مثال، می‌توان نوشت:



$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}۰<t<۲s\Rightarrow s_{av}=\frac{۱}{۲}\frac{m}{s}\\ ۰<t<۶s\Rightarrow s_{av}=\frac{۱+۶}{۶}=\frac{۷}{۶}\frac{m}{s}\\ ۲s<t<۱۰s\Rightarrow s_{av}=\frac{۶+۴}{۱۰-۲}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}\frac{m}{s}\\ ۶s<t<۱۰s\Rightarrow s_{av}=\frac{۴}{۱۰-۶}=۱\frac{m}{s}\end{cases}$$

همان طور که می‌بینید، تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۱۰s ، بیشتر از سایر گزینه‌هاست، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

حالا وقتشه یه سری به تستای ۳۹ تا ۶۵ بزنیم ...

ایستگاه ۴ تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای (محاسبهٔ آن از روی نمودار مکان - زمان و تعیین جهت حرکت با کمک آن)

حالا بریم ببینیم تندی لحظه‌ای چیه و چه اطلاعات مفیدی ازش استخراج میشه ...

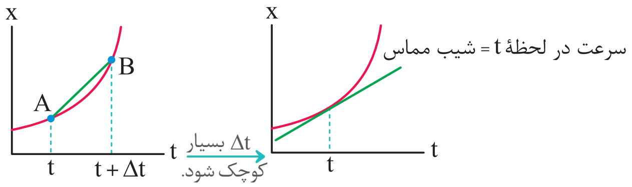
۱. مفهوم تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

تندی متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر را، **تندی لحظه‌ای** می‌نامند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، در واقع سرعت لحظه‌ای آن را بیان کرده‌ایم. برای مثال وقتی درون خودرویی به طرف شمال در حال حرکت باشید و در نقطه‌ای از مسیر، عقربهٔ تندی‌سنج خودروی شما روی $۱۰۰\,km/h$ باشد، در این صورت تندی لحظه‌ای خودرو برابر $۱۰۰\,km/h$ و سرعت لحظه‌ای آن $۱۰۰\,km/h$ به طرف شمال است.

تذکر برای سادگی و بنا به قراردادی که در کتاب‌های فیزیک به‌کار می‌رود، سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای را به‌ترتیب به‌صورت سرعت و تندی بیان می‌کنند. هم‌چنین سرعت را که کمیتی برداری است با نماد $\vec{v}$ و تندی را که برابر اندازهٔ سرعت و کمیتی نرده‌ای است با نماد v نشان می‌دهند.

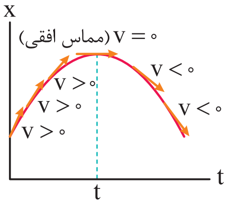
۲. محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان – زمان

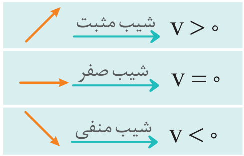
همان‌طور که می‌دانیم شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، برابر سرعت متوسط متحرک است. حال اگر بازهٔ زمانی Δt بسیار کوچک شود، عملاً A و B بر روی هم منطبق شده و شیب خط واصل بین دو نقطهٔ A و B ، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطهٔ A برابر است. این موضوع یعنی شیب مماس ترسیمی بر نمودار مکان - زمان در لحظهٔ t ، برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در این لحظه است.



نکات مهم و کاربردی

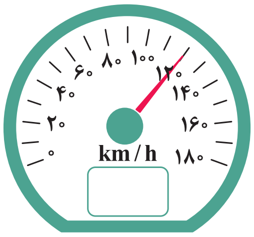
۱) با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی در شکل مقابل، سرعت متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قلهٔ نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد. بنابراین متحرک ابتدا در جهت محور x حرکت می‌کند $(v > ۰)$، سپس توقف کرده $(v = ۰)$ و سپس در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند $(v < ۰)$.





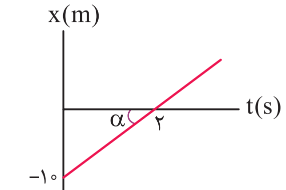
(قرار دادن فلش برای مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است و از نظر علمی برای مماس‌ها نباید جهت بگذاریم.)

۲) عقربهٔ تندی‌سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد و هیچ‌گونه اطلاعی در خصوص جهت حرکت خودرو به ما گزارش نمی‌کند. استفاده از واژهٔ سرعت‌سنج برای این وسیله نادرست است، هرچند در زندگی روزمره معمولاً به اشتباه از این واژه استفاده می‌کنیم.



$\Leftarrow$ اتومبیل با تندی $۱۲۰\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند ولی جهت حرکت آن مشخص نیست.

۳) اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به‌صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازهٔ سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازهٔ زمانی، برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است. به عنوان مثال، در نمودار مکان - زمان مقابل، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه ثابت بوده و برابر سرعت لحظه‌ای (یعنی شیب نمودار) می‌باشد.



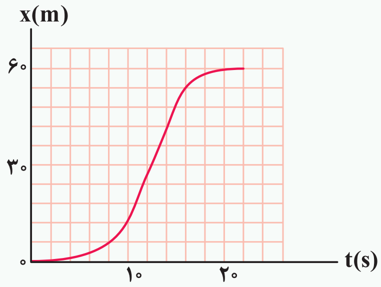
$$|\tan\alpha| = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$v = v_{av} = \tan\alpha = \boxed{+}۵\ m/s$$

شیب نمودار مثبت است.

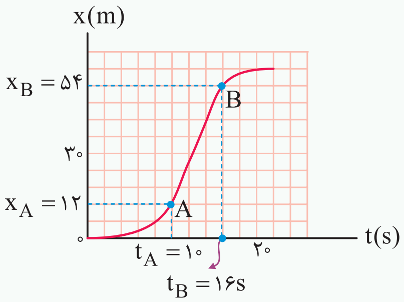
این یعنی اگه یه طراح، سرکارتون بزاره و بپرسه سرعت در هنگام عبور از مبدأ چنده، جواب همون $+۵m/s$ هستش.
یا حتی اگه بپرسه سرعت متوسط در ۰/۵ ثانیهٔ سوم چنده، باور کنید بازم جواب همون $+۵\ m/s$ هست، احتمالاً باورش سخت بود براتون ...

تمرین ۱۲ **شکل مقابل، نمودار مکان - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت کرده است. بیشینهٔ سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟** (تجربی خارج ۹۵)



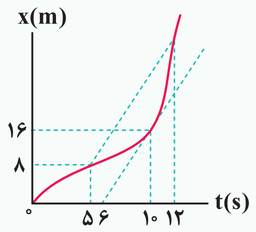
۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

پاسخ در حرکت این متحرک، از لحظهٔ $t = ۰$ تا A، سرعت متحرک در حال افزایش است (شیب مماس ترسیمی بر نمودار در حال افزایش است.)، در ادامه از A تا B، نمودار مکان - زمان خط صاف بوده و سرعت متحرک ثابت است و در نهایت از B سرعت کاهش یافته و در نهایت به صفر می‌رسد. با توجه به این موضوع، بیشترین سرعت بین A تا B است و کافیست شیب خط AB را بیابیم (هریک از خانه‌های محور قائم معادل ۶m و هریک از خانه‌های محور افقی معادل 2s است):



$$v_{AB} = v_{av_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{۵۴ - ۱۲}{۱۶ - ۱۰} \Rightarrow v_{AB} = ۷m/s$$ (گزینهٔ ۳)

تمرین۱۳ **نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰s$ برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن بین دو لحظهٔ $t_۱ = ۵s$ و $t_۲ = ۱۲s$ باشد، متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲s$ در چند متری مبدأ می‌باشد؟**



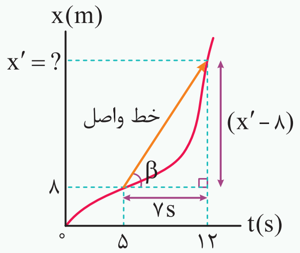
۱) ۲۸
۲) ۲۴
۳) ۳۶
۴) ۲۰

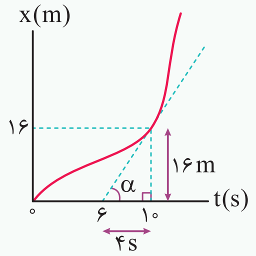
پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱ طبق صورت سؤال، تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰s$، برابر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $t_۱ = ۵s$ تا $t_۲ = ۱۲s$ است و داریم:

تندی در لحظهٔ $t=۱۰s$: $v =$ شیب مماس $= \tan\alpha = \frac{۱۶}{۴} = ۴ m/s$

۲ در صورتی که متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲s$ در مکان x' باشد، با محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط از لحظهٔ ۵s تا ۱۲s داریم:



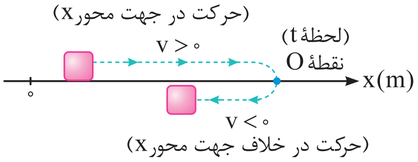


سرعت متوسط : $v_{av} = \tan\beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x' - ۸}{۷} = ۴ \Rightarrow x' = ۳۶m$ (گزینهٔ ۳)

بررسی لحظهٔ تغییر جهت یک متحرک

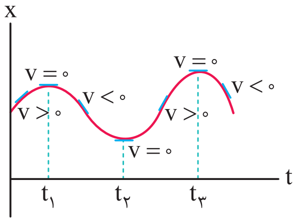
تو اینجا، می‌خوایم معنی تغییر جهت متحرک رو بفهمیم ... این موضوع تو خیلی از سؤالا به کارمون میاد.

در شکل زیر متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است. این متحرک در ابتدا در جهت محور x در حال حرکت است (این موضوع یعنی سرعت آن مثبت است.) در لحظهٔ t، متحرک به نقطهٔ O رسیده و در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (این موضوع یعنی در ادامهٔ حرکت سرعت آن منفی می‌شود.)، لحظهٔ t را در اصطلاح **لحظهٔ تغییر جهت متحرک** می‌نامیم.



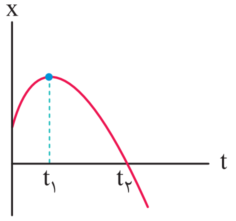
شرط تغییر جهت دادن متحرک در نقطهٔ O : برای این منظور باید سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لزوماً علامت سرعت متحرک تغییر کند.

نکته در دره‌ها و قله‌های نمودار مکان - زمان، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت (تغییر علامت) می‌دهد. این موضوع یعنی در این مکان‌ها متحرک تغییر جهت می‌دهد.



$\Rightarrow$ در لحظات $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

نکته تغییر جهت حرکت متحرک در واقع به معنی تغییر جهت بردار **سرعت** آن است. این موضوع با تغییر جهت بردار **مکان** متحرک تفاوت دارد.



$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ : \text{لحظهٔ تغییر جهت حرکت متحرک} \\ t_۲ : \text{لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک} \end{cases}$

۱ | ۱ بررسی موارد

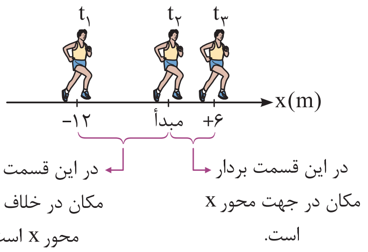
الف) برداری که مبدأ مختصات را به محل جسم متصل می‌کند، بردار مکان جسم است، بنابراین برداری که نقطهٔ O را به A متصل می‌کند، بردار مکان هواپیما در نقطهٔ A است.
ب) برداری که نقطهٔ ابتدایی و انتهایی مسیر را به هم وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی جسم است، بنابراین در جابه‌جایی هواپیما از A تا B، بردار جابه‌جایی برابر برداری است که نقطهٔ A را به B متصل می‌کند.
ج) بردار جابه‌جایی بین دو نقطه برابر تفاضل بردارهای مکان آن نقطه است، بنابراین تفاضل بردار مکان هواپیما در نقطهٔ A از بردار مکان آن در نقطهٔ B برابر بردار جابه‌جایی هواپیما است. بردار مکان A − بردار مکان B = $\vec{d}$: بردار جابه‌جایی
د) اگر هواپیما روی خط مستقیم و بدون تغییر جهت از A به B برود، مسافتی که طی می‌کند هم‌اندازهٔ بردار جابه‌جایی آن است و در غیر این صورت، مسافت بزرگ‌تر از اندازهٔ بردار جابه‌جایی است. پس با توجه به این‌که مسیر حرکت هواپیما را نمی‌دانیم، ممکن است مسافت طی‌شده هم‌اندازه یا بزرگ‌تر از بردار جابه‌جایی باشد.
بنابراین فقط عبارت (د) نادرست است.

۲ | ۲ بررسی موارد

الف) در لحظهٔ $t_۳$، مکان دونده مثبت است، یعنی بردار مکان در جهت محور x است.
ب) دونده از مکان $x_۱ = -۱۲m$ به مکان $x_۳ = ۶m$ رفته است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر است با:

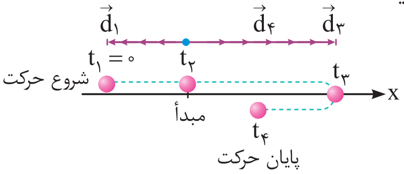
$$\Delta x = x_۳ - x_۱ = ۶ - (-۱۲) = +۱۸m \Rightarrow \vec{d} = (۱۸m)\,\vec{i}$$

ج) هنگامی که دونده از مبدأ محور عبور می‌کند، بردار مکان آن صفر است و حداقل اندازه را دارد.
د) در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ که مکان دونده منفی است (در خلاف جهت محور x است)، دونده از مکان $x_۱ = -۱۲m$ به مکان $x_۲ = ۰$ (مبدأ محور) می‌رسد و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر $۶m$ نیست.



۳ | ۳ همواره با دور شدن متحرک از مبدأ محور، اندازهٔ بردار مکان آن افزایش و با نزدیک شدن متحرک به مبدأ محور، اندازهٔ بردار مکان آن کاهش می‌یابد. با توجه به این موضوع، در این سؤال در طی حرکت از $x_۱ = -۱۲m$ تا $x_۲ = ۰$، اندازهٔ بردار مکان در حال کاهش و از $x_۲ = ۰$ تا $x_۳ = ۶m$، اندازهٔ بردار مکان در حال افزایش است.

۴ | ۲ برای پاسخ به این سؤال مفهومی، به موارد زیر توجه کنید:
۱) در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ متحرک در سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و بردار مکان آن در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.
۲) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۴$ متحرک در سمت راست مبدأ مختصات قرار می‌گیرد و بردار مکان آن در جهت محور x می‌باشد.
۳) در لحظهٔ $t_۲$، متحرک از مبدأ عبور کرده و بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. به شکل مقابل دقت کنید:



دقت
در این سؤال، در لحظهٔ $t_۳$، سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن تغییر جهت نمی‌دهد. این موضوع توسط بسیاری از دانش‌آموزان اشتباه درک می‌شود.

۵ | ۲ اتومبیل A از مکان $x_۱ = -۲۰m$ به مکان $x_۲ = ۰$ رسیده است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\Delta x_A = x_۲ - x_۱ = ۰ - (-۲۰) = +۲۰m$$

اتومبیل B از مکان $x_۱ = +۴۰m$ به مکان $x_۲ = ۰$ رسیده است و جابه‌جایی آن برابر است با:

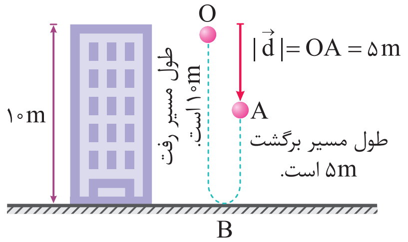
$$\Delta x_B = x_۲ - x_۱ = ۰ - ۴۰ = -۴۰m$$

بنابراین نسبت جابه‌جایی A به B به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{۲۰}{-۴۰} = -\frac{۱}{۲}$$

دقت
علامت منفی نشان‌دهندهٔ آن است که جهت جابه‌جایی دو اتومبیل در خلاف جهت هم است.

۶ | ۳ با توجه به شکل نشان داده‌شده، گلوله بعد از پرتاب ابتدا ۱۰ متر به سمت پایین رفته و پس از برخورد به زمین در نقطهٔ B، تغییر جهت داده و ۵ متر به سمت بالا می‌آید تا به نقطهٔ A برسد. بنابراین مسافت طی‌شده توسط گلوله برابر $۱۵ = ۵ + ۱۰$ متر است.
از طرفی مطابق تعریف، جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ ابتدای حرکت را مستقیماً به نقطهٔ انتهای حرکت (A) متصل کند، یعنی اندازهٔ پاره‌خط OA به طول ۵m، معادل با مقدار جابه‌جایی متحرک است.



$|\vec{d}| = |\overrightarrow{OA}| = ۵m$: اندازهٔ جابه‌جایی

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازهٔ جابه‌جایی}} = \frac{\text{رفت} + \text{برگشت}}{OA} = \frac{۱۰ + ۵}{۵} = ۳$$

دقت
مسافت طی‌شده همواره بزرگ‌تر و یا مساوی جابه‌جایی است و گزینهٔ (۱) هیچ‌گاه نمی‌تواند صحیح باشد.

۷ | ۲ مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ (مبدأ زمان) معادل با مکان اولیهٔ متحرک است. در این سؤال با داشتن معادله‌های مکان دو متحرک، کافی است به جای t مقدار صفر را قرار دهیم:

$$A \text{ معادلهٔ مکان متحرک}: x_A = ۳t^۳ - ۷t + ۵ \xrightarrow{t=۰} x_{۰A} = ۵m$$

$$B \text{ معادلهٔ مکان متحرک}: x_B = ۲\cos \pi t + ۱$$

$$\xrightarrow{t=۰} x_{۰B} = ۲\cos(۰) + ۱ = ۲ + ۱ = ۳m$$

تذکر

برخی از داوطلبان ممکن است در رابطهٔ $x_B = ۲\cos \pi t + ۱$، فریب خورده و به اشتباه عدد ۱ را به عنوان $x_{\circ B}$ اعلام کنند، در صورتی‌که با قرار دادن $t = ۰$ در عبارت $۲\cos \pi t + ۱$، به عدد ۳ می‌رسیم!

۸ | ۱ برای محاسبهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۱s$، کافیست ابتدا در معادلهٔ مکان - زمان، لحظهٔ $t = ۱s$ را جای‌گذاری کنیم:

معادلهٔ مکان - زمان: $x = t^۳ - t + ۲ \xrightarrow[\text{در } t=۱s]{\text{مکان متحرک}}$

$x = (۱)^۳ - ۱ + ۲ = ۲m \xrightarrow{\vec{r}_۱ = x\vec{i}} \vec{r}_۱ = ۲\vec{i}$ (در SI)

دقت

معادلهٔ حرکت یا مکان - زمان معادله‌ای است که از ما مقدار t را گرفته و بلافاصله، موقعیت متحرک نسبت به مبدأ در آن لحظه را می‌دهد.

تذکر

این تست شاید ساده به نظر برسد، اما دارای دام آموزشی است. یعنی شما به جواب $۲\vec{i}$ می‌رسید و به اشتباه گزینهٔ ۲ را در پاسخ‌نامه وارد کرده و به سادگی نمرهٔ منفی می‌گیرید! حدود ۲۰ درصد تست‌های سراسری دارای این‌گونه دام‌های آموزشی هستند.

۹ | ۲ ابتدا بردار مکان اولیهٔ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲}t) \xrightarrow{t=۰} x_۰ = ۲m$$

بردار مکان، قرینهٔ بردار مکان اولیه باشد. $\Rightarrow x = -۲m$

در ادامه مکان متحرک را در هر یک از گزینه‌ها به‌دست می‌آوریم تا ببینیم در کدام گزینه، مکان متحرک، قرینهٔ مکان اولیه نیست.

بررسی گزینه‌ها

۱) پایان ثانیهٔ دوم: $t = ۲s \Rightarrow x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۲) = -۲m$ ✗

۲) پایان ثانیهٔ چهارم: $t = ۴s \Rightarrow x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۴) = ۲m$ ✓

۳) پایان سه ثانیهٔ دوم: $t = ۶s \Rightarrow x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۶) = -۲m$ ✗

۴) پایان دو ثانیهٔ پنجم: $t = ۱۰s \Rightarrow x = ۲\cos(\frac{\pi}{۲} \times ۱۰) = -۲m$ ✗

۱۰ | ۱

تذکر

لحظه‌ای که مکان یک متحرک صفر باشد $(x = ۰)$، متحرک از مبدأ عبور می‌کند و اندازهٔ بردار مکان آن حداقل است. بنابراین برای یافتن لحظاتی که اندازهٔ بردار مکان حداقل است (متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند)، کافی است ریشه‌های معادله حرکت را به‌دست آوریم.

دقت شود با توجه به این‌که حرکت را در زمان‌های مثبت بررسی می‌کنیم، ریشه‌های منفی قابل قبول نیستند.

معادلهٔ مکان - زمان: $x = t^۲ - ۷t + ۱۲ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t-۴) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۳s \\ t_۲ = ۴s \end{cases} \Rightarrow \Delta t = ۴ - ۳ = ۱s$$

۱۱ | ۴ وقتی متحرک در فاصلهٔ یک متری از مبدأ مکان قرار دارد، باید در مکان‌های $x = ۱m$ یا $x = -۱m$ قرار داشته باشد. برای حل این سؤال، باید بررسی کنیم که متحرک چند بار از مکان‌های $x = ۱m$ یا $x = -۱m$ عبور می‌کند.

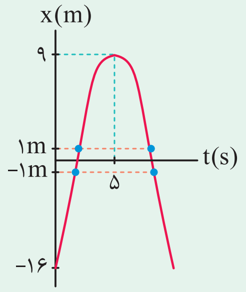
$$x = -t^۲ + ۱۰t - ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱m \Rightarrow -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ = ۱ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t + ۱۷ = ۰ \\ \Rightarrow t_{۱,۲} = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - ۴\times۱۷}}{۲} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \\ x = -۱m \Rightarrow -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ = -۱ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t + ۱۵ = ۰ \\ \Rightarrow t_{۳,۴} = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - ۴\times۱۵}}{۲} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \end{cases}$$

با توجه به چهار جواب مثبت به دست آمده، متحرک ۴ بار از فاصلهٔ یک متری مبدأ مکان عبور می‌کند.

خلاقیت حرفه‌ای‌ها

با رسم نمودار مکان - زمان این متحرک نیز به راحتی مشخص می‌شود که متحرک دو بار از مکان $x = ۱m$ و دو بار از مکان $x = -۱m$ عبور می‌کند.



$$x = -t^۲ + ۱۰t - ۱۶ \Rightarrow t_{\text{رأس}} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱۰}{۲\times(-۱)} = ۵s$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x_{\text{رأس}} = -۵^۲ + ۱۰\times۵ - ۱۶ = ۹m$$

۱۲ | ۱ با توجه به تمرین (۴) در درسنامه، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۳ | ۴ ابتدا باید توجه شود که نیم‌ثانیهٔ سوم یعنی $۱s < t < ۱/۵s$ و جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$x = ۴t^۲ - ۴t \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱s \rightarrow x_۱ = ۴ - ۴ = ۰ \\ t_۲ = ۱/۵s \rightarrow x_۲ = ۴(۱/۵)^۲ - ۴(۱/۵) = ۳m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۳m$$

تذکر

۰/۵ ثانیه‌های متوالی در حرکت یک متحرک عبارت است از:

$$\begin{cases} ۰ < t < ۰/۵s \rightarrow \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ اول} \\ ۰/۵s < t < ۱s \rightarrow \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ دوم} \\ ۱s < t < ۱/۵s \rightarrow \text{یعنی ۰/۵ ثانیهٔ سوم} \end{cases}$$

۱۴ | ۱ به عنوان یک نکتهٔ اساسی و بسیار مهم، هنگامی‌که دو متحرک به هم می‌رسند، بردار مکان آن‌ها با یک‌دیگر برابر می‌شود. بدین‌ترتیب داریم:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B \Rightarrow ۳t + ۱ = ۲t^۲ + t + ۱ \Rightarrow ۲t = ۲t^۲$$

$$\Rightarrow ۲t(t-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ \text{یا} \\ t = ۱s \end{cases}$$

در ادامه چون در صورت سؤال ذکر شده است که این دو متحرک در کدام لحظه پس از شروع حرکت به هم می‌رسند، $t = ۱s$ قابل قبول است.

۱۵ ۳ سرعت متوسط کمیتی برداری است که از رابطهٔ $\vec{v}_{av} = \dfrac{\overset{\text{بردار جابه‌جایی}}{\vec{d}}}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید و یکای آن در SI برابر $\dfrac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

تندی متوسط کمیتی نرده‌ای است که از رابطهٔ $s_{av} = \dfrac{\overset{\text{مسافت}}{l}}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید و یکای آن هم در SI برابر $\dfrac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

۱۶ ۲ برداری که نقطهٔ شروع را به نقطهٔ پایان حرکت وصل می‌کند همان بردار جابه‌جایی است. سرعت متوسط برابر نسبت بردار جابه‌جایی به زمان انجام جابه‌جایی است و هم جهت با بردار جابه‌جایی می‌باشد، از طرفی عبارت (الف) نیز تعریف تندی متوسط است و عبارت‌های (الف) و (ج) صحیح هستند.

بررسی موارد

ب) سرعت متوسط و تندی متوسط فقط در شرایطی هم‌اندازه هستند که متحرک بدون تغییر جهت روی یک خط راست حرکت کند. در غیر این صورت اندازهٔ سرعت متوسط کوچک‌تر از تندی متوسط است.

د) تندی متوسط و مسافت طی شده کمیت برداری نیستند و جهت ندارند و این عبارت از پایه نادرست است.

۱۷ ۱ اگر متحرک بر روی یک خط راست و بدون تغییر جهت جابه‌جا شود، اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن یکسان است، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۸ ۳ عبارت (الف) صحیح است. علت نادرستی عبارت‌های (ب)، (ج)، (د) و (هـ) به صورت زیر است:

ب) ممکن است متحرک پس از طی مسافتی به محل اولیه‌اش بازگردد. در این‌صورت سرعت متوسط آن صفر، اما تندی متوسط آن مخالف صفر است.

ج) در یک مسیر منحنی، مسافت طی‌شده توسط متحرک، می‌تواند بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی باشد و در نتیجه تندی متوسط نیز می‌تواند بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط شود.

د) چون مسافت طی‌شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است، تندی متوسط نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ سرعت متوسط است.

هـ) چون مسافت طی‌شده نمی‌تواند منفی باشد، تندی متوسط نیز نمی‌تواند منفی باشد.

۱۹ ۳ جابه‌جایی و سرعت متوسط خودروی A برابر است با:

$$\begin{cases} \text{A مکان اولیهٔ}: x_{\circ A} = -۵۰m \\ \text{A مکان نهایی}: x_A = -۱۰m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_A = -۱۰-(-۵۰) = +۴۰m$$

$$\Rightarrow v_{av_A} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{۴۰}{۵} = ۸ m/s$$

به همین ترتیب جابه‌جایی و سرعت متوسط خودروی B برابر است با:

$$\begin{cases} \text{B مکان اولیهٔ}: x_{\circ B} = +۲۰m \\ \text{B مکان نهایی}: x_B = -۱۰m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_B = -۱۰-۲۰ = -۳۰m$$

$$\Rightarrow v_{av_B} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{-۳۰}{۵} = -۶ m/s \Rightarrow \frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = -\frac{۴}{۳}$$

دقت

هنگامی که در یک بازهٔ زمانی معین، نسبت سرعت متوسط دو متحرک را می‌خواهیم، کافی است نسبت جابه‌جایی آن‌ها را محاسبه کنیم.

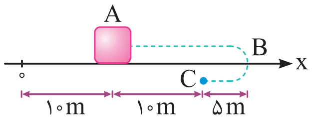
$$\begin{cases} v_{av_A} = \dfrac{\Delta x_A}{\Delta t} \\ v_{av_B} = \dfrac{\Delta x_B}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}$$

مثلاً در این سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{۴۰}{-۳۰} = -\frac{۴}{۳}$$

در واقع نیازی به دانستن طول بازهٔ زمانی نداریم.

۲۰ ۱ متحرک ابتدا به اندازهٔ $۱۵m$ از A به B رفته و سپس $۵m$ از B به C می‌رود، بنابراین کل مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر $l = ۲۰m$ می‌شود. از طرف دیگر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک از نقطهٔ A تا C، برابر فاصلهٔ AC بوده و برابر $\Delta x = ۱۰m$ می‌باشد. بنابراین داریم:

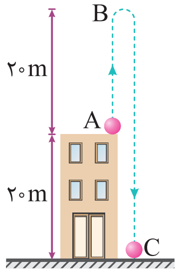


$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\dfrac{l}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{l}{\Delta x} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲$$

۲۱ ۳ به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، گلوله حداکثر تا ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین بالا می‌رود. بنابراین از لحظهٔ شروع حرکت تا نقطهٔ B، گلوله به اندازهٔ $۲۰m$ به سمت بالا می‌رود و در ادامه از نقطهٔ B تا C گلوله $۴۰m$ پایین می‌آید. بنابراین گلوله در مجموع مسافتی به اندازهٔ $۶۰m$ را طی می‌کند.

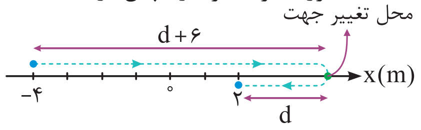
۲) اندازهٔ جابه‌جایی آن از نقطهٔ A تا C برابر $۲۰m$ می‌شود و داریم:



$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\dfrac{l}{\Delta t}}{\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right|} = \frac{l}{|\Delta y|} = \frac{۶۰}{۲۰} = ۳$$

۲۲ ۳ این تست، یک سؤال جالب می‌باشد، طبق صورت سؤال، جسم فقط یک بار تغییر جهت داده و در یک بازهٔ زمانی مشخص، تندی متوسط آن، ۴ برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن است. این موضوع یعنی مسافت طی شده توسط متحرک، ۴ برابر اندازهٔ جابه‌جایی‌اش است. این سؤال دو حالت دارد:

حالت اول: جسم ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:

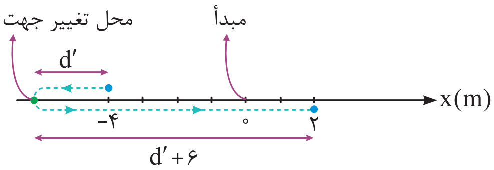


$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = (d+۶)+d = ۲d+۶ \\ \text{اندازهٔ جابه‌جایی} = ۲-(-۴) = ۶m \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲d+۶) = ۴\times(۶) \Rightarrow d = ۹m$$

$$\rightarrow \text{فاصلهٔ محل تغییر جهت دادن تا مبدأ مکان} = d+۲ = ۱۱m$$

حالت دوم: جسم ابتدا در خلاف جهت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:

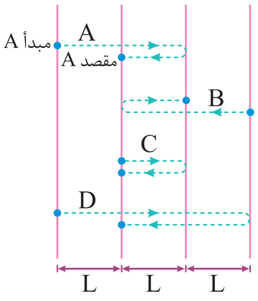


$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = d'+(d'+۶)=۲d'+۶ \\ \text{اندازهٔ جابه‌جایی} = ۶m \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲d'+۶)=۴\times(۶) \Rightarrow d'=۹m$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ محل تغییر جهت دادن متحرک تا مبدأ مکان} = d'+۴=۹+۴=۱۳m$$

۲۳ (۴) گام اول: ابتدا اندازهٔ جابه‌جایی هر متحرک را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که زمان حرکت برای هر چهار متحرک یکسان است، برای مقایسهٔ اندازهٔ سرعت متوسط آن‌ها، کافی است اندازهٔ جابه‌جایی آن‌ها (فاصلهٔ مبدأ از مقصد) را با یک‌دیگر مقایسه کنیم:



$$|\vec{d}_A|=L \ , \ |\vec{d}_B|=L \ , \ |\vec{d}_C|=۰ \ , \ |\vec{d}_D|=L$$

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان است}} v_{av_A}=v_{av_B}=v_{av_D}>v_{av_C}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند.

گام دوم: در ادامه مسافت‌های طی‌شده (که معادل با طول خط‌چین برای هر متحرک است.) توسط هر چهار متحرک را به‌دست می‌آوریم و به کمک آن‌ها تندی متوسط را مقایسه می‌کنیم:

$$l_A=۳L \ , \ l_B=۳L \ , \ l_C=۲L \ , \ l_D=۵L$$

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان است}} s_{av_D}>s_{av_A}=s_{av_B}>s_{av_C}$$

۲۴ (۱) مطابق تعریف، سرعت متوسط یک متحرک که بر روی یک خط راست (محور x) حرکت می‌کند، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{سرعت متوسط}: \ \vec{v}_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}\vec{i}$$

$$\begin{cases} t_۱=۲s \rightarrow x_۱=۸m \\ t_۲=۱۰s \rightarrow x_۲=-۱۶m \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{av}=\frac{-۱۶-۸}{۱۰-۲}\vec{i}=-۳\vec{i} \ (\text{در SI})$$

علامت منفی برای سرعت متوسط، یعنی بردار سرعت متوسط (و همچنین جابه‌جایی ($\vec{d}$)) در این بازهٔ زمانی در خلاف جهت محور x است.

۲۵ (۳) طبق صورت سؤال، متحرک در لحظهٔ $t=۰$، در مکان $x_۰=-۴۰m$ و در لحظهٔ $t_۲=۱۰s$، در مکان $x_۲=۲۰m$ قرار دارد. بنابراین سرعت متوسط این متحرک در طی ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$\begin{cases} t_۰=۰ \rightarrow x_۰=-۴۰m \\ t_۲=۱۰s \rightarrow x_۲=+۲۰m \end{cases}$$

$$\rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۰}{t_۲-t_۰}=\frac{۲۰-(-۴۰)}{۱۰-۰}=۶m/s$$

۲۶ (۲) با توجه به جدول داده‌شده، می‌توان نوشت:

	مکان آغازین	مکان پایانی	جابه‌جایی	سرعت متوسط
متحرک A	$\vec{r}_{۰A}$	$(-۲m)\vec{i}$	$(-۵m)\vec{i}$	$(\vec{v}_{av})_A$
متحرک B	$(۲m)\vec{i}$	$(۸m)\vec{i}$	$\vec{d}_B$	$(\vec{v}_{av})_B$

$$\begin{cases} A \text{ جابه‌جایی}: \vec{d}_A=-۵\vec{i}=-۲\vec{i}-\vec{r}_{۰A} \Rightarrow \vec{r}_{۰A}=۳\vec{i} \\ B \text{ جابه‌جایی}: \vec{d}_B=۸\vec{i}-۲\vec{i}=۶\vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{d}_B}{\vec{r}_{۰A}}=\frac{۶\vec{i}}{۳\vec{i}}=۲$$

از طرفی با توجه به این‌که حرکت هر دو متحرک در مدت زمان یکسان انجام شده است، نسبت سرعت متوسط دو متحرک برابر نسبت جابه‌جایی آن‌ها است.

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان}} \frac{(\vec{v}_{av})_A}{(\vec{v}_{av})_B}=\frac{\vec{d}_A}{\vec{d}_B}=\frac{-۵\vec{i}}{۶\vec{i}}=-\frac{۵}{۶}$$

۲۷ (۲) با توجه به رابطهٔ مربوط به سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$، جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ اول و ۵ ثانیهٔ سوم و ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{در ۵ ثانیهٔ اول حرکت}: -۵=\frac{\Delta x_۱}{۵} \Rightarrow \Delta x_۱=-۲۵m \\ \text{در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت}: +۳=\frac{\Delta x_۳}{۵} \Rightarrow \Delta x_۳=۱۵m \\ \text{در ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت}: +۲=\frac{\Delta x_{\text{کل}}}{۱۵} \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}}=+۳۰m \end{cases}$$

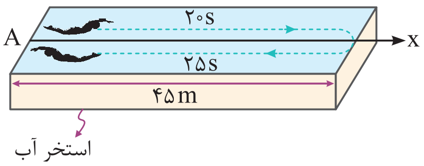
از طرفی جابه‌جایی در ۱۵ ثانیهٔ اول حرکت برابر مجموع جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ اول، ۵ ثانیهٔ دوم و ۵ ثانیهٔ سوم است، بنابراین جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ دوم حرکت برابر است با: $\Delta x_{\text{کل}}=\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳$

$$\Rightarrow +۳۰=-۲۵+\Delta x_۲+۱۵ \Rightarrow \Delta x_۲=۴۰m$$

$$\text{سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت}: v_{av}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{-۲۵+۴۰}{۱۰}=+۱/۵\frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av}=+۱/۵\vec{i}(\frac{m}{s})$$

۲۸ (۴) شناگر پس از ۴۵ ثانیه شنا کردن، به مکان اولیهٔ خود برمی‌گردد، بنابراین جابه‌جایی کل آن برابر صفر بوده و در نتیجه سرعت متوسط کل آن نیز صفر است.

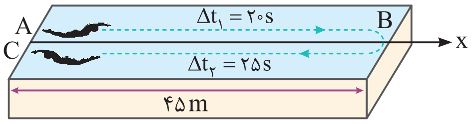


$$x_{\text{شروع}}=x_{\text{پایان}} \Rightarrow \Delta x=۰ \Rightarrow |\vec{v}_{av}|=\frac{\Delta x}{\Delta t}=۰$$

از طرف دیگر شناگر مسافت $۲\times۴۵m=۹۰m$ را شنا کرده است. بنابراین تندی متوسط آن برابر است با:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۹۰}{۲۰+۲۵}=۲m/s$$

۲۹ **۱** در صورتی که جهت مثبت محور x را به سمت راست فرض کنیم، داریم:



سرعت متوسط در مسیر رفت (AB): $\Delta x_1 = x_B - x_A = ۴۵ - ۰ = +۴۵m$

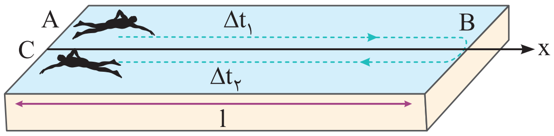
$$\Rightarrow v_{av_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{۴۵}{۲۰} = ۲/۲۵m/s$$

سرعت متوسط در مسیر برگشت (BC): $\Delta x_2 = x_C - x_B = ۰ - ۴۵ = -۴۵m$

$$\Rightarrow v_{av_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-۴۵}{۲۵} = -۱/۸m/s$$

دقت داشته باشید که در حالت برگشت، شناگر در خلاف جهت محور x حرکت کرده است و در نتیجه سرعت متوسط آن مقداری منفی است.

۳۰ **۳** برای حل این سؤال، به شکل زیر که مسیر رفت و برگشت حرکت شناگر را نشان می‌دهد، توجه کنید:



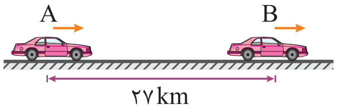
(۱) تندی متوسط در هنگام رفت: $(s_{av})_1 = s = \frac{l}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{s}$

(۲) تندی متوسط در هنگام برگشت: $(s_{av})_2 = ۲s = \frac{l}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{۲s}$

تندی متوسط در رفت و برگشت: $s_{av} = \frac{l_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{\text{مسافت کل}}{\text{زمان کل شنا کردن}}$

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{۲l}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow s_{av} = \frac{۲l}{(\frac{l}{s}) + (\frac{l}{۲s})} = \frac{۲l}{(\frac{۳}{۲}\frac{l}{s})} = \frac{۴}{۳}s$$

۳۱ **۳** روش اول: متحرک در طول نیم‌ساعت از حرکت خود، تغییر جهت نداده است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر مسافت طی‌شده، یعنی ۲۷ کیلومتر می‌باشد.



$$\begin{cases} \Delta x = ۲۷km = ۲۷۰۰۰m \\ \Delta t = ۰/۵h = ۰/۵ \times ۳۶۰۰ = ۱۸۰۰s \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۷۰۰۰}{۱۸۰۰} = ۱۵m/s = ۱۵۰۰cm/s$$

روش دوم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۷}{۰/۵} = ۵۴km/h$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{۵۴}{۳/۶} = ۱۵m/s = ۱۵۰۰cm/s$$

دقت کنید در این سؤال چون اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت یکسان است، پس اندازهٔ سرعت متوسط برابر تندی متوسط است.

تذکر

برای تبدیل km/h به m/s، کافی است عدد موردنظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

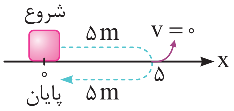
$$۱km/h = ۱\frac{(۱۰۰۰m)}{(۳۶۰۰s)} \Rightarrow ۱km/h = \frac{۱}{۳/۶}m/s$$

و برای تبدیل m/s به km/h، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می‌کنیم:

$$۱m/s = ۳/۶km/h$$

۳۲ **۴** برای به‌دست آوردن سرعت متوسط یک متحرک، مقدار جابه‌جایی آن مهم است، نه مسافت طی‌شده. بنابراین در این سؤال می‌توانیم نشان دهیم که هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

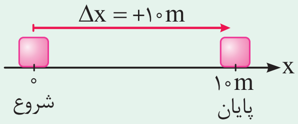
به عنوان مثال در این مسأله، متحرک می‌تواند ۵ متر به جلو رفته و سپس به جای اول خود برگردد، در این حالت مسافت طی‌شده برابر ۱۰ متربوده ولی جابه‌جایی آن صفر است (بررسی سایر حالت‌ها را به خودتان می‌سپاریم!).



$$\Delta x = ۰ \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = ۰$$

تذکر

به عنوان یک موضوع مفهومی، باید گفت که در این سؤال بیشترین مقدار سرعت متوسط متحرک، مربوط به حالتی است که متحرک بدون تغییر جهت، ۱۰m جابه‌جا شود.



$$\Delta x = ۱۰m \to |\vec{v}_{av}|_{max} = \frac{۱۰}{۲} = ۵m/s \to -۵\vec{i} \le \vec{v}_{av} \le ۵\vec{i}$$

۳۳ **۱** ۲ ثانیهٔ دوم حرکت معادل $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$ است. در ادامه با توجه به رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، به راحتی می‌توان نوشت:

$$x = t^۳ - ۴t^۲ + ۲ \Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۲s \Rightarrow x_1 = ۸ - ۱۶ + ۲ = -۶m \\ t_2 = ۴s \Rightarrow x_2 = ۶۴ - ۶۴ + ۲ = ۲m \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{۲ - (-۶)}{۴ - ۲} = ۴\frac{m}{s}$$

۳۴ **۲** برای پاسخ به این سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x = \frac{۱}{۳}t^۳ - ۲t^۲ + ۳t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۰ \Rightarrow x_1 = ۰ \\ t_2 = ۴s \Rightarrow x_2 = \frac{۱}{۳} \times ۴^۳ - ۲ \times ۴^۲ + ۳ \times ۴ = \frac{۶۴}{۳} - ۲۰ = \frac{۴}{۳} > ۰ \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[x_2 > ۰]{x_1 = ۰} v_{av} > ۰$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.

تذکر

همیشه سرعت متوسط یک متحرک در یک بازهٔ زمانی، بین بیشترین و کم‌ترین اندازهٔ سرعت لحظه‌ای متحرک در آن بازه می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) قطعاً نادرست است.

۳۵ **۳** برای آن‌که سرعت متوسط در خلاف جهت محور x باشد، کافی است جابه‌جایی، منفی باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که در دو ثانیهٔ اول $(۰ < t < ۲s)$ حرکت، چگونه جابه‌جایی می‌تواند منفی باشد.

$$x = ۲t^۳ - bt - ۱۰$$

$$\begin{cases} t_1 = ۰ \Rightarrow x_1 = -۱۰m \\ t_2 = ۲s \Rightarrow x_2 = ۶ - ۲b \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = ۱۶ - ۲b$$

$$\Delta x < ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۲b < ۰ \Rightarrow b > ۸$$

دقت

با توجه به این‌که یکای x در SI برابر متر و یکای t در SI برابر ثانیه است، یکای کمیت b برابر $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ می‌باشد.

۳۶ | ۱ با توجه به تمرین (۵) در درسنامه، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳۷ | ۴ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم.

گام اول: دو ثانیهٔ اول، یعنی از لحظهٔ $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2s$. بنابراین ابتدا مکان متحرک را در این لحظات به‌دست می‌آوریم:

$$x = kt^2 - 5t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 5m \\ t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = (4k - 5)m \end{cases}$$

گام دوم: از آن‌جایی که اندازهٔ سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول حرکت برابر صفر شده است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی نیز برابر صفر بوده و $x_1 = x_2$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 5 = 4k - 5 \Rightarrow k = 2/5$$

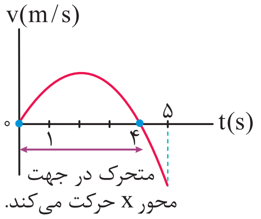
گام سوم: حال مقدار k را در معادله قرار داده و در ادامه مکان متحرک را در لحظات $t_2 = 2s$ و $t_3 = 4s$ به‌دست می‌آوریم: $x = 2/5t^2 - 5t + 5$

$$\begin{cases} t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 5m \\ t_3 = 4s \Rightarrow x_3 = 25m \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{25 - 5}{2} = 10 m/s$$

۳۸ | ۱ در حالتی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، علامت سرعت متحرک، منفی است. با توجه به نمودار سرعت - زمان رسم شده، در بازهٔ زمانی $4s \le t \le 5s$، علامت سرعت متحرک منفی است.

$$v = -t^2 + 4t = -t(t - 4) \Rightarrow \text{ریشه‌ها}: \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 4s \end{cases}$$



در نتیجه در $\frac{1}{5}$ از ۵ ثانیهٔ اول حرکت، یعنی در بازهٔ $4s < t < 5s$، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۳۹ | ۱ **بررسی موارد**

الف) در بازهٔ $t_1 < t < t_3$، نمودار زیر محور افقی است، یعنی مکان متحرک منفی است یا به عبارت دیگر، بردار مکان در خلاف جهت محور x است. ✓

ب) در لحظهٔ t_2، متحرک بیشترین فاصله از مبدأ را در جهت مخالف محور x دارد. ✓

ج) در بازهٔ $t_2 < t < t_4$، ابتدا نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود و سپس از آن دور می‌شود، پس می‌توان گفت اندازهٔ بردار مکان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. ✗

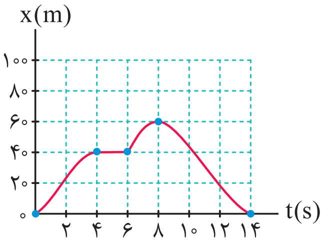
د) جابه‌جایی در بازه‌های t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 هم‌اندازه است ولی جهت حرکت در این دو بازه برعکس است و در نتیجه بردار جابه‌جایی در این دو بازه قرینهٔ یکدیگر است. ✗

۴۰ | ۲ برای آن‌که جابه‌جایی متحرک در یک بازه صفر شود، باید مکان آن در ابتدا و انتهای بازه یکسان باشد. مطابق نمودار داده شده، مکان متحرک در لحظات t_1 و t_5 مشابه است، پس جابه‌جایی در بازهٔ زمانی t_1 تا t_5 صفر است.

۴۱ | ۳ در لحظات t_1 و t_3، نمودار محور افقی را قطع می‌کند و علامت مکان (x) تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک ۲ بار تغییر جهت داده است. دقت کنید که در لحظهٔ t_5، مکان متحرک صفر می‌شود ولی علامت آن تغییر نمی‌کند.

۴۲ | ۴ با توجه به شکل زیر، حرکت این متحرک را در هر مرحله به‌صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

$0 \le t < 4s$: همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در این بازهٔ زمانی، با گذشت زمان مکان متحرک در حال افزایش بوده و از $x = 0$ به $x = 40m$ رسیده است. با توجه به این موضوع، متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.



$4s \le t < 6s$: در این بازه، متحرک در مکان $x = 40m$ ایستاده و حرکت نمی‌کند (دقت شود که با گذشت زمان، مکان متحرک عوض نمی‌شود و x ثابت است.).

$6s \le t < 8s$: در این بازه همانند بازهٔ اول، متحرک در جهت محور x در حال حرکت می‌باشد و از مکان $x = 40m$ به مکان $x = 60m$ رفته و از مبدأ دور می‌شود و در $t = 8s$ به بیشترین فاصله از مبدأ می‌رسد.

$8s \le t < 14s$: در این بازه با گذشت زمان، متحرک از مکان $x = 60m$ به سمت مبدأ $(x = 0)$ در حال حرکت بوده و در لحظهٔ $t = 14s$ به مبدأ $(x = 0)$ می‌رسد، در نتیجه متحرک در این بازه به مبدأ نزدیک می‌شود.

دقت

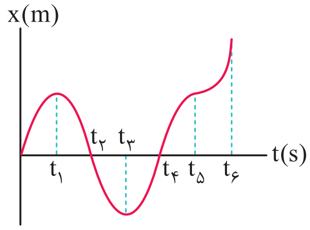
متحرک در چهار ثانیهٔ دوم حرکت $(4s \le t < 8s)$ از مکان $x = 40m$ به مکان $x = 60m$ رفته است و $20m$ جابه‌جا شده و گزینهٔ «۴» عبارت نادرستی است.

۴۳ | ۳ چون دوچرخه‌سوار از مکان $x = 0$ شروع به حرکت کرده و در نهایت به $x = 0$ بازگشته است، اندازهٔ جابه‌جایی آن صفر می‌باشد. از طرف دیگر دوچرخه‌سوار در ۸ ثانیهٔ اول حرکت از $x = 0$ به $x = 60m$ رفته و در بازهٔ زمانی $8s$ تا $14s$ از $x = 60m$ به $x = 0$ بازگشته است و در مجموع مسافت $120m$ را طی کرده است.

۴۴ | ۱ برای حل، درستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها

۱) در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و در حال **دور شدن** از مبدأ می‌باشد. بنابراین عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۱) نادرست است.



۲) در بازهٔ زمانی t_4 تا t_6، متحرک در جهت محور x از مبدأ دور می‌شود.

۳) در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4، متحرک در قسمت منفی محور x قرار دارد و در لحظهٔ t_3 بیشترین فاصله را در قسمت منفی محور x از مبدأ دارد.

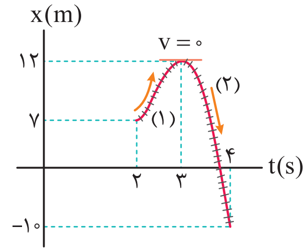
۴) هنگامی که متحرک در قسمت مثبت محور x است، بردار مکان در جهت محور x و هنگامی که متحرک در قسمت منفی محور x است، بردار مکان در خلاف جهت محور x قرار دارد.

به‌طور کلی هنگامی که متحرک از $x=0$ عبور کرده و علامت x تغییر کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. متحرک موردنظر در دو لحظهٔ t_2 و t_4 از مبدأ مکان عبور کرده است و دو بار بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. بنابراین تنها گزینهٔ (۱) عبارت نادرستی است.

۴۵ | ۱ با بررسی جهت حرکت و اندازهٔ جابه‌جایی در دو ثانیه دوم حرکت ($2s \le t < 4s$)، مسافت طی‌شده به دست می‌آید.

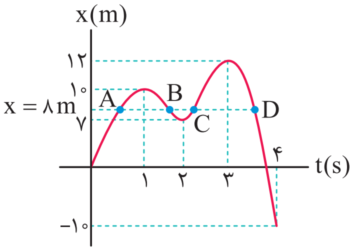
مرحلهٔ اول: از لحظهٔ $t=2s$ تا $t=3s$، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده و مسافت $l_1=12-7=5m$ را پیموده است.

مرحلهٔ دوم: از لحظهٔ $t=3s$ تا $t=4s$، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و مسافت $l_2=|-10-12|=22m$ را پیموده است.



بنابراین مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ دوم برابر $l=l_1+l_2=27m$ است.

از طرفی با توجه به نمودار داده‌شده، متحرک ۴ بار در مکان $x=+8m$ قرار گرفته است (در واقع خط افقی که از $x=8m$ رسم می‌شود، نمودار را در چهار نقطهٔ A، B، C و D قطع می‌کند.)، بنابراین ۴ بار بردار مکان متحرک برحسب متر برابر $\vec{d}=+8\vec{i}$ می‌شود.



تمرین اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در دو ثانیهٔ دوم حرکت چند متر است؟

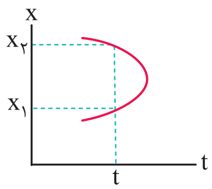
پاسخ

$$\begin{cases} t_1=2s \to x_1=7m \\ t_2=4s \to x_2=-10m \end{cases} \to |\vec{d}|=|x_2-x_1|=17m$$

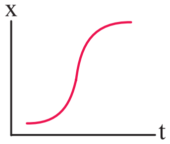
تمرین در طی حرکت، بردار مکان در کدام بازهٔ زمانی تغییر جهت می‌دهد؟

پاسخ در ثانیهٔ چهارم ($3s \le t < 4s$)، متحرک از مبدأ عبور کرده و علامت x تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک در این بازهٔ زمانی تغییر جهت می‌دهد.

۴۶ | ۲ شکل‌های رسم شده در گزینه‌های (۱) و (۴)، نمی‌توانند مربوط به نمودار مکان - زمان یک متحرک باشند، زیرا متحرک در یک لحظهٔ مشخص در بیش از یک مکان قرار دارد. این موضوع برای گزینهٔ (۱) در شکل زیر نشان داده شده است.



در گزینهٔ (۳)، در ابتدای حرکت، متحرک با گذشت زمان به مبدأ مکان ($x=0$) نزدیک می‌شود، بنابراین فقط گزینهٔ (۲) صحیح است. همان‌طور که در شکل گزینهٔ (۲) می‌بینید، مقدار x با گذشت زمان افزایش می‌یابد، بنابراین متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود.



۴۷ | ۴ **بررسی موارد**

الف) در ۳ ثانیهٔ اول، متحرک از مکان $x_1=6m$ به $x_2=9m$ رسیده است و سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{\Delta t}=\frac{9-6}{3}=1m/s \Rightarrow \vec{v}_{av}=(1m/s)\vec{i}$$

ب) مکان متحرک در لحظات $t=6s$ و $t=10s$ یکسان است، بنابراین در بازهٔ $t=6s$ تا $t=10s$، جابه‌جایی و سرعت متوسط صفر است.

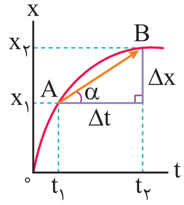
ج) در سه ثانیهٔ اول، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند (نمودار بالا می‌رود)، در حالی که در سه ثانیهٔ دوم، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (نمودار پایین می‌رود.)، پس سرعت متوسط در سه ثانیهٔ اول مثبت و در سه ثانیهٔ دوم منفی است.

سه ثانیهٔ اول: $v_{av_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{9-6}{3}=1m/s$

سه ثانیهٔ دوم: $v_{av_2}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-9}{3}=-3m/s \Rightarrow \frac{|v_{av_2}|}{|v_{av_1}|}=3$

بنابراین عبارت‌های (الف)، (ب) و (ج) صحیح هستند.

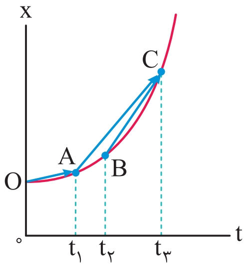
۴۸ | ۳ نمودار داده‌شده یک نمودار **مکان - زمان** است. بنابراین شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متوسط در فاصلهٔ زمانی بین آن دو لحظه (t_1 تا t_2) می‌باشد.



$$\text{شیب } AB=\tan\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=|\vec{v}_{av}|$$

۴۹ | ۳ سرعت متوسط بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار مکان - زمان مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.

همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید، شیب پاره‌خط BC از سایر پاره‌خط‌ها بیشتر است (تمایل آن به قائم شدن بیشتر است.)، بنابراین سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 بزرگ‌تر است.

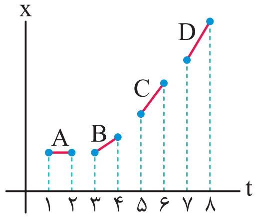


$\tan\alpha_{BC} > \tan\alpha_{AC} > \tan\alpha_{OA}$

$\Rightarrow |\vec{v}_{av}|_{BC} > |\vec{v}_{av}|_{AC} > |\vec{v}_{av}|_{OA}$

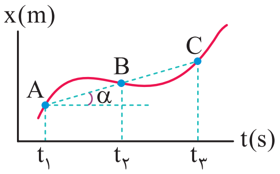
بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تمرین در شکل زیر، اندازهٔ سرعت متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟



پاسخ $|\vec{v}_{av}|_A = ۰ < |\vec{v}_{av}|_B < |\vec{v}_{av}|_C < |\vec{v}_{av}|_D$

۵۰ | **۳** شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازه است. در شکل روبه‌رو، شیب خط واصل بین نقاط A و B با شیب خط واصل بین نقاط B و C یکسان بوده و در نتیجه سرعت متوسط متحرک برای هردو بازهٔ زمانی (t_1 تا t_2) و (t_2 تا t_3) یکسان و برابر $۲m/s$ است.

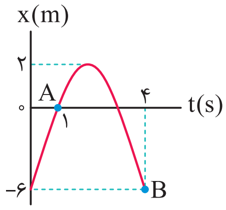


$$(\vec{v}_{av})_1 = (\vec{v}_{av})_2 = \tan\alpha = ۲m/s$$

تذکر

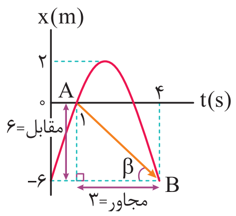
دقت کنید پاره‌خط‌های AB و BC در یک امتداد قرار دارند و شیب هر دو یکسان است.

۵۱ | **۲** روش اول (**نمودارخوانی**): با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۱s$ در مبدأ قرار داشته $(x_A = ۰)$ و در لحظهٔ $t_2 = ۴s$ در مکان $x_2 = -۶m$ $(x_B = -۶m)$ قرار دارد و داریم:



$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-۶ - ۰}{۴ - ۱} = -۲m/s$$

روش دوم (**شیب نمودار**): سرعت متوسط متحرک در یک بازه، برابر شیب خط واصل بین نقاط ابتدای بازهٔ زمانی و انتهای بازهٔ زمانی در نمودار مکان - زمان است.



$$|\vec{v}_{av}| = |\tan\beta| = \left|\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}\right| = \left|\frac{۶}{۳}\right| = ۲m/s$$

(شیب خط AB منفی است.) $v_{av} = -۲m/s$

دقت

با توجه به جهت فلش AB در این سؤال، علامت v در نمودار مکان - زمان فوق مشخص می‌شود:

→ $\Rightarrow v_{av} = ۰$	↗ $\Rightarrow v_{av} > ۰$	↘ $\Rightarrow v_{av} < ۰$

۵۲ | **۴** در ۵ ثانیهٔ اول، سرعت متوسط برابر $-۴m/s$ است، بنابراین جابه‌جایی برابر است با:

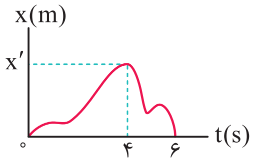
$$\Delta x_1 = v_{av_1}\Delta t_1 = -۴ \times ۵ = -۲۰m$$

در ۴ ثانیهٔ بعدی، سرعت متوسط $+۳m/s$ است و جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x_2 = v_{av_2}\Delta t_2 = ۳ \times ۴ = ۱۲m$$

بنابراین تنها چیزی که راجع به این حرکت می‌توانیم بگوییم آن است که در ۵ ثانیهٔ اول، نمودار مکان - زمان باید در مجموع $۲۰m$ پایین بیاید ودر ۴ ثانیهٔ بعد، باید $۱۲m$ بالا برود که این موضوع در هر سه گزینه رعایت شده است. دقت کنید که سرعت متوسط در مورد چگونگی حرکت به ما اطلاعی نمی‌دهد.

۵۳ | **۲** محاسبهٔ سرعت متوسط از $t_1 = ۰$ تا $t_2 = ۴s$:



$$\begin{cases} t_1 = ۰ \rightarrow x_1 = ۰ \\ t_2 = ۴s \rightarrow x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow v_{av_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x' - ۰}{۴ - ۰} = \frac{x'}{۴}$$

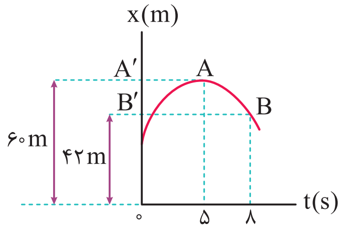
محاسبهٔ سرعت متوسط از $t_2 = ۴s$ تا $t_3 = ۶s$:

$$\begin{cases} t_2 = ۴s \rightarrow x_2 = x' \\ t_3 = ۶s \rightarrow x_3 = ۰ \end{cases} \Rightarrow v_{av_2} = \frac{۰ - x'}{۶ - ۴} = -\frac{x'}{۲}$$

و نسبت سرعت متوسط در این دو بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\frac{v_{av_1}}{v_{av_2}} = \frac{\frac{x'}{۴}}{-\frac{x'}{۲}} = -\frac{۱}{۲}$$

۵۴ | **۱** با سؤال بسیار جالب و مفهومی روبه‌رو شده‌ایم. ابتدا باید دقت کنیم که متحرک برروی محور x در حال حرکت است و بردار سرعت متوسط آن یا در جهت محور x است و یا در خلاف جهت آن و این موضوع یعنی سرعت متوسط در جهت AB نمی‌باشد و گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.

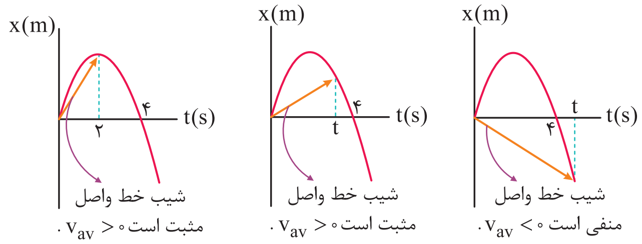


با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۵s$ در مکان $A'(x_1 = ۶۰m)$ و در لحظهٔ $t_2 = ۸s$ در مکان $B'(x_2 = ۴۲m)$ قرار دارد و داریم:

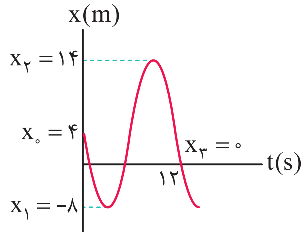
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۲ - ۶۰}{۸ - ۵} = -۶m/s$$

در ادامه از روی نمودار مشخص است که از لحظهٔ $t = ۵s$ تا $t = ۸s$ متحرک بر روی محور x از A' به طرف B' حرکت کرده و سرعت متوسط در راستای $A'B'$ (یعنی در خلاف جهت محور x) است.

۵۵ ۳ با توجه به شیب خط واصل از لحظهٔ صفر تا t، مشاهده می‌شود که نهایتاً تا لحظهٔ $t = ۴s$، شیب خط واصل مثبت و سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.

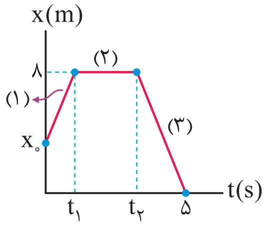


۵۶ ۴ متحرک ابتدا ۱۲m در خلاف جهت محور x حرکت کرده و از مکان $x_۰ = ۴m$ به مکان $x_۱ = -۸m$ می‌رسد. سپس تغییر جهت داده و با طی مسافت ۲۲m به مکان $x_۲ = ۱۴m$ می‌رسد و در ادامه دوباره تغییر جهت داده و پس از طی مسافت ۱۴m در لحظهٔ $t = ۱۲s$ به مبدأ $(x_۳ = ۰)$ می‌رسد. بنابراین متحرک در مجموع مسافت $۱۲ + ۲۲ + ۱۴ = ۴۸m$ را طی می‌کند و داریم:



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۴۸}{۱۲} = ۴ m/s$$

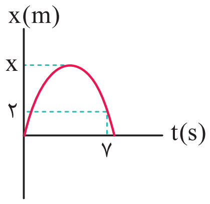
۵۷ ۴ این متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ $t_۱$ مسافت $(۸ - x_۰)$ را طی کرده است. از طرفی از لحظهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ ساکن بوده و از لحظهٔ $t_۲$ تا لحظهٔ $t = ۵s$ از مکان $x = ۸m$ به مبدأ مکان رسیده است و در نتیجه در این بازهٔ زمانی مسافت ۸m را طی کرده است.



$$\text{مجموع مسافت طی‌شده در طی ۵s} = (۸ - x_۰) + ۰ + ۸ = ۱۶ - x_۰$$

$$s_{av} = \frac{\text{کل مسافت طی‌شده}}{\text{کل زمان}} \Rightarrow ۲ = \frac{۱۶ - x_۰}{۵} \Rightarrow x_۰ = ۶m$$

۵۸ ۲ مطابق شکل، فرض می‌کنیم بیشترین فاصلهٔ ذره تا مبدأ مکان برابر x باشد، به این ترتیب داریم:



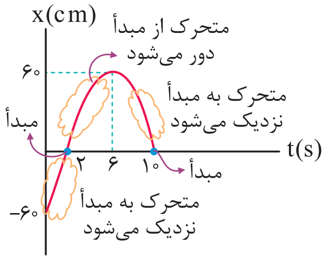
$$\text{مسافت طی شده در ۷ ثانیهٔ اول} = l = (x) + (x - ۲) = ۲x - ۲$$

$$\text{اندازهٔ جابه‌جایی در ۷ ثانیهٔ اول} = |\Delta x| = ۲m$$

$$s_{av} = ۵|v_{av}| \Rightarrow \frac{l}{\cancel{\Delta t}} = ۵\frac{|\Delta x|}{\cancel{\Delta t}} \Rightarrow (۲x - ۲) = ۵ \times (۲)$$

$$\Rightarrow ۲x = ۱۲ \Rightarrow x = ۶m$$

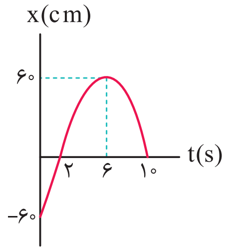
۵۹ ۲ **گام اول:** در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۲s$ متحرک از قسمت منفی محور x به سمت مبدأ حرکت کرده و به مبدأ نزدیک می‌شود، در بازهٔ زمانی $t_۲ = ۲s$ تا $t_۳ = ۶s$ متحرک از مبدأ دور شده و در نهایت در بازهٔ زمانی $t_۳ = ۶s$ تا $t_۴ = ۱۰s$ به مبدأ نزدیک می‌شود.



گام دوم: بنابراین تندی متوسط در بازهٔ زمانی $t_۲ = ۲s$ تا $t_۳ = ۶s$ که متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۶۰}{۶ - ۲} = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵ cm/s = ۰/۱۵ m/s$$

۶۰ ۳ با توجه به نمودار داده‌شده، متحرک در دو لحظهٔ $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۶s$ به ترتیب در نقاط $x_۱ = -۶۰cm$ و $x_۲ = +۶۰cm$ قرار دارد و تنها در این دو لحظه، فاصلهٔ متحرک تا مبدأ برابر ۶۰cm می‌شود. بنابراین باید تندی متوسط متحرک را در ۶ ثانیهٔ اول حرکت به‌دست آوریم:



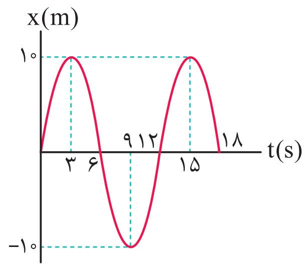
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۲۰}{۶} = ۲۰ cm/s = ۰/۲ m/s$$

۶۱ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که می‌دانید، طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$، تندی متوسط به مسافت طی‌شده توسط متحرک بستگی دارد.

۲) بعد از لحظهٔ $t = ۰$، متحرک در جهت محور x شروع به حرکت می‌کند و در ادامهٔ مسیر، مسافت‌های متفاوتی را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی‌شده توسط آن در هیچ‌یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌باشد.

۳) دقت کنید حتی زمانی‌که متحرک به مکان اولیهٔ خود باز می‌گردد، باز هم مسافت طی‌شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت صفر نمی‌شود و در این حالت جابه‌جایی و سرعت متوسط حرکت صفر می‌شود.



۴) بنابراین در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۶s$ که متحرک به محل اولیه‌اش باز می‌گردد، سرعت متوسط صفر شده و تندی متوسط در هیچ یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌شود.

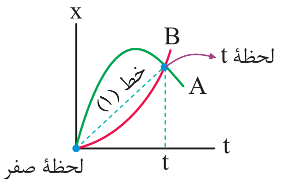
۶۲ **۲** در بازهٔ t_1 تا t_2، مکان متحرک ثابت بوده و این یعنی متحرک حرکت نکرده و مسافت طی‌شده توسط آن صفر است. بنابراین تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر صفر است.

دقت

در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است ولی تندی متوسط آن مخالف صفر است (زیرا جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی صفر شده ولی مسافت طی‌شده مخالف صفر است.).

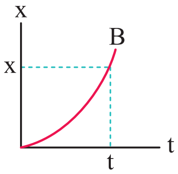
۶۳ **۳** این سؤال را در دوگام حل می‌کنیم:

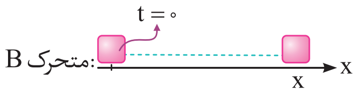
گام اول: خط واصل از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ t برای دو متحرک یکسان بوده و با توجه به این‌که شیب این خط برابر سرعت متوسط متحرک است، سرعت متوسط دو متحرک از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ t یکسان است.



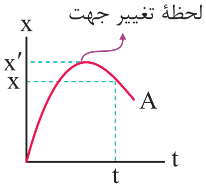
$(v_{av})_A = (v_{av})_B =$ شیب خط (۱)

گام دوم: برای مقایسهٔ تندی متوسط، باید مسافت طی شده توسط دو متحرک از لحظهٔ صفر تا t را مقایسه کنیم و با توجه به این موضوع داریم:





$l_A =$ جابه‌جایی $= x$



$l_B > x$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده توسط متحرک A به دلیل تغییر جهت دادن، از جابه‌جایی آن (یعنی x) بیشتر بوده و در مجموع تندی متوسط A از B بیشتر است.

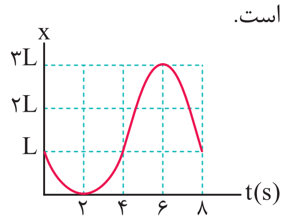
$$(s_{av}) = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{l_A > l_B} (s_{av})_A > (s_{av})_B$$

۶۴ **۳**

دقت

در هر بازهٔ زمانی که تندی متوسط متحرک بزرگ‌تر باشد، متحرک تندتر و سریع‌تر حرکت کرده است و بالعکس.

با توجه به نمودار داده شده، چون تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۴s تا ۶s بیش‌تر از سایر گزینه‌ها است، بنابراین متحرک در این بازهٔ زمانی تندتر حرکت کرده است و گزینهٔ (۳) صحیح است.



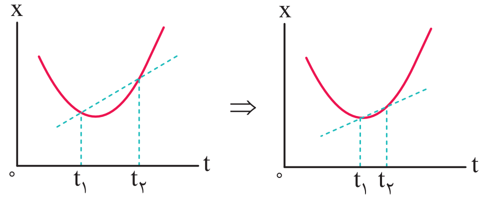
۲ ثانیهٔ اول حرکت $\rightarrow s_{av} = \frac{L}{2}$ ، ۲ ثانیهٔ دوم حرکت $\rightarrow s_{av} = \frac{L}{2}$

۲ ثانیهٔ سوم حرکت $\rightarrow s_{av} = \frac{2L}{2}$ ، ۴ ثانیهٔ اول حرکت $\rightarrow s_{av} = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}$

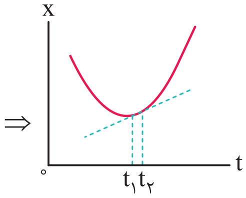
۶۵ **۳** با توجه به تمرین (۱۱) در درسنامه، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۶۶ **۳** تندی‌سنج خودرو به صورت تقریبی، تندی لحظه‌ای حرکت خودرو را نشان می‌دهد.

۶۷ **۲** همان‌گونه که در شکل‌های ترسیم‌شده مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، شیب خط واصل، به‌سمت مماس رسم‌شده بر نمودار مکان - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب خط مماس رسم‌شده بر هر نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای در آن نقطه است.



(A) (B)

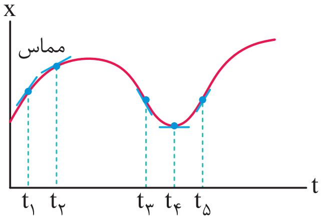


$\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$

(C)

۶۸ **۲** برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

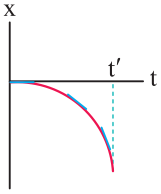
۱ اندازهٔ شیب مماس رسم شده بر نمودار در لحظهٔ t_1 بیشتر از t_2 است، پس تندی متحرک در t_1 بیشتر از t_2 است.



۲ در لحظهٔ t_4، مماس رسم شده بر نمودار افقی است و در نتیجه تندی حرکت در این لحظه صفر است.

۳ در لحظهٔ t_3، مماس بر نمودار به سمت پایین است و شیب آن منفی است، پس علامت سرعت هم منفی است و بردار سرعت در لحظهٔ t_3 در خلاف جهت محور x است.

۶۹ **۳** همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، بیانگر اندازهٔ سرعت متحرک (تندی متحرک) در آن لحظه است. باتوجه به این‌که در نمودار رسم‌شده در گزینهٔ (۳)، همواره شیب خط مماس در حال افزایش است، بنابراین در این نمودار از لحظهٔ صفر تا t'، همواره تندی متحرک افزایش می‌یابد.



۷۰ | ۱

نکته

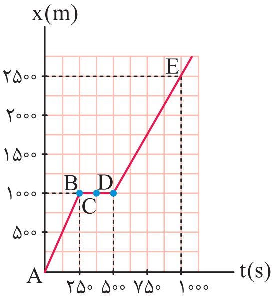
اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به‌صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازهٔ سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازهٔ زمانی برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است.

با توجه به نکتهٔ ارائه‌شده، واضح است که شیب DE مقدار ثابتی است و سرعت متحرک در این بازه نیز مقدار ثابتی است. بنابراین سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانیِ قرارگرفته در این بازه (D تا E) برابر سرعت لحظه‌ای در این بازه است. یعنی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $۶۰۰s < t < ۹۰۰s$ برابر سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t = ۵۵۰s$ (یا هر لحظهٔ دیگر که در بازهٔ زمانی ۵۰۰s تا ۱۰۰۰s قرار گرفته باشد.) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

بررسی سایر گزینه‌ها

۲) متحرک در بازهٔ A تا B در مدت $۲۵۰ - ۰ = ۲۵۰s$ به اندازهٔ $۱۰۰۰ - ۰ = ۱۰۰۰m$ جابه‌جا شده است، بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{۱۰۰۰ - ۰}{۲۵۰ - ۰} = ۴\,m/s$$



از طرفی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ D تا E برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_E - x_D}{t_E - t_D} = \frac{۲۵۰۰ - ۱۰۰۰}{۱۰۰۰ - ۵۰۰} = \frac{۱۵۰۰}{۵۰۰} = ۳\,m/s$$

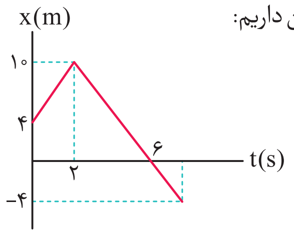
بنابراین متحرک در AB ، تندتر از DE حرکت می‌کند.

۳) برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط در کل زمان حرکت، نسبت جابه‌جایی کل متحرک را بر کل بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av\,کل} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{x_E - x_A}{t_E - t_A} = \frac{۲۵۰۰ - ۰}{۱۰۰۰ - ۰} = ۲/۵\,m/s$$

۴) با توجه به نمودار، مشاهده می‌کنیم که متحرک در تمام لحظات بین $t = ۲۵۰s$ تا $t = ۵۰۰s$ در مکان $x = ۱۰۰۰m$ قرار داشته و جابه‌جا نمی‌شود. بنابراین متحرک در این بازهٔ زمانی ساکن بوده و سرعت آن در این بازه صفر است (بنابراین سرعت در نقطهٔ C نیز صفر می‌باشد.)

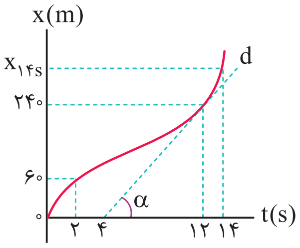
۷۱ | ۲ با توجه به نکتهٔ مطرح‌شده در سؤال قبل، می‌توانیم بگوییم که سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$ (که متحرک از مبدأ عبور می‌کند.)، برابر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۲s تا ۶s است. بنابراین داریم:



$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{۰ - ۱۰}{۶ - ۲}\vec{i} = -\frac{۱۰}{۴}\vec{i} = -۲/۵\,\vec{i}$$

۷۲ | ۳ با توجه به تمرین (۱۲) در درسنامه، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۷۳ | ۱ **گام اول:** تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲s$ ، برابر شیب خط d می‌باشد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$v_{۱۲s} = \tan\alpha = \frac{۲۴۰}{۸} = ۳۰\,\frac{m}{s}$$

گام دوم: با توجه به صورت سؤال، تندی متوسط در بازهٔ $t = ۲s$ تا $t = ۱۴s$ برابر تندی در لحظهٔ $t = ۱۲s$ می‌باشد. بنابراین مکان متحرک در $t = ۱۴s$ برابر است با:

$$s_{av} = v_{۱۲s} \Rightarrow \frac{x_{۱۴s} - ۶۰}{۱۴ - ۲} = ۳۰ \Rightarrow x_{۱۴s} = ۴۲۰m$$

دقت شود که متحرک از ۲s تا ۱۴s بدون تغییر جهت روی خط راست در حال حرکت است و تندی متوسط متحرک برابر سرعت متوسط آن است.

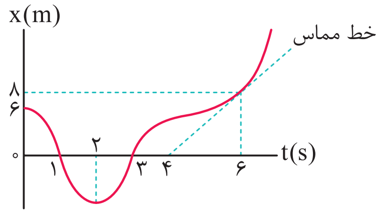
گام سوم: نسبت خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{(v_{av})_{۰\ تا\ ۲}}{(v_{av})_{۱۲\ تا\ ۱۴}} = \frac{\frac{۶۰ - ۰}{۲}}{\frac{۴۲۰ - ۲۴۰}{۲}} = \frac{۶۰}{۱۸۰} = \frac{۱}{۳}$$

۷۴ | ۳ این سؤال را در گام‌های زیر حل می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$:

$$t = ۶s : v = \text{شیب خط مماس} = \frac{۸}{۶ - ۴} = ۴\,\frac{m}{s}$$

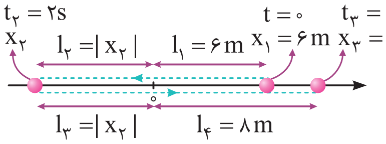


بنابراین چون تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $۰ < t < ۶s$ ، $\frac{۵}{۴}$ برابر تندی در لحظهٔ $t = ۶s$ است، تندی متوسط در $۰ < t < ۶s$ برابر $۵\,\frac{m}{s}$ است.

گام دوم: محاسبهٔ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی $۰ < t < ۶s$:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow ۵ = \frac{l}{۶} \Rightarrow l = ۳۰m$$

گام سوم: شکل نشان داده شده نحوهٔ حرکت متحرک را در ۶ ثانیهٔ اول حرکت، با توجه به نمودار مکان - زمان نشان می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان نوشت:

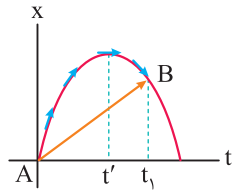


$$۳۰ = l_۱ + l_۲ + l_۳ + l_۴ \Rightarrow ۳۰ = ۶ + |x_۲| + |x_۲| + ۸ \Rightarrow |x_۲| = ۸m$$

در نهایت باید دقت شود که در $t = ۲s$ ، متحرک در خلاف جهت محور x، بیشترین فاصله از مبدأ را دارد و این فاصله همان ۸m است.

۷۵ | **۲** به موارد زیر توجه کنید:

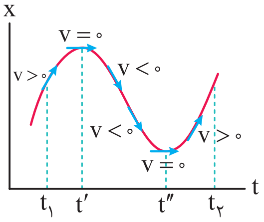
۱) همان‌طور که می‌دانیم، شیب خطِ رسم‌شده بین دو لحظهٔ $t=0$ و t_1 (خط AB) بیانگر سرعت متوسط حرکت جسم می‌باشد. چون شیب خط موردنظر مثبت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی مثبت بوده و در جهت مثبت محور x است.



۲) از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه، بیانگر سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه است. همان‌طور که می‌بینید، از شروع حرکت تا لحظهٔ t' شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای مثبت و از لحظهٔ t' تا t_1 شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای منفی می‌باشد.

بنابراین سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط ابتدا هم‌جهت و سپس در خلاف جهت هم هستند.

۷۶ | **۳** با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، **سرعت متحرک** در دو لحظهٔ t' و t'' صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (یعنی اگر سرعت مثبت بوده، منفی شده و بالعکس)، زیرا در این لحظات، علامت شیب نمودار مکان - زمان تغییر کرده است.



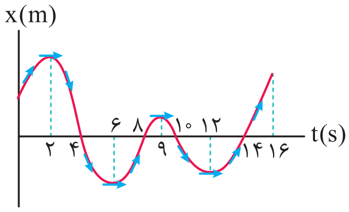
بنابراین در بازهٔ t_1 تا t_2، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

تذکر

نشان دادن فلش بر روی مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.

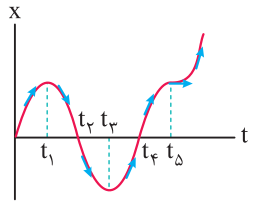
↗ (شیب مثبت)	↘ (شیب منفی)	→ (شیب صفر)

۷۷ | **۲** تندی متحرک در لحظه‌های $t_1=2s$، $t_2=6s$، $t_3=9s$ و $t_4=12s$ صفر شده و علامت سرعت بعد و قبل از این لحظات تغییر می‌کند، بنابراین متحرک در ۱۶ ثانیهٔ اول حرکت، ۴ بار تغییر جهت می‌دهد. از طرفی متحرک ۴ بار از مبدأ عبور کرده و بردار مکان حداقل اندازه را دارد.



در بازه‌های زمانی (۰ تا ۲s)، (۶s تا ۹s) و (۱۲s تا ۱۶s)، در مجموع به مدت ۹s، شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه علامت سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

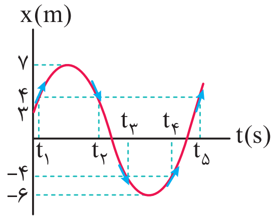
۷۸ | **۲** همان‌طور که می‌دانید، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متحرک است و در بازه‌های زمانی که شیب خط مماس منفی می‌شود، سرعت در خلاف محور x بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، تنها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 شیب خط مماس بر نمودار منفی می‌شود.



۷۹ | **۱** به موارد زیر توجه کنید:

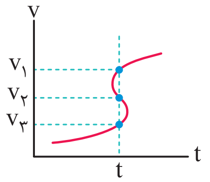
۱) هنگامی‌که متحرک در نقاط $x=4m$ یا $x=-4m$ قرار می‌گیرد، فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مکان برابر $4m$ می‌شود.

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، در لحظات t_1، t_2، t_3، t_4 و t_5 فاصلهٔ متحرک تا مبدأ برابر $4m$ می‌شود.



۲) در صورت سؤال لحظاتی مدنظر است که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین باید سرعت متحرک و شیب خط مماس بر نمودار منفی باشد، بنابراین فقط لحظات t_2 و t_3 قابل قبول هستند و گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

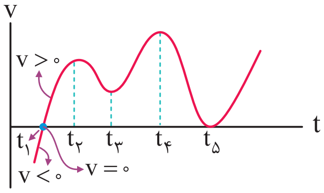
۸۰ | **۴** نمودار رسم شده در گزینهٔ (۴)، نمودار یک **تابع** v برحسب t نمی‌تواند باشد. به عبارت دیگر، اگر یک خط موازی محور v رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. این موضوع نشان‌دهندهٔ این است که متحرک در یک لحظه، چند سرعت مختلف دارد که این موضوع امکان‌پذیر نیست.



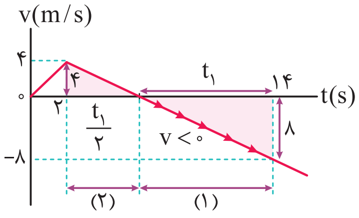
۸۱ | **۴** با توجه به نمودار سرعت - زمان داده‌شده، در لحظهٔ $t=6s$ نه سرعت متحرک صفر می‌شود و نه علامت سرعت عوض می‌شود، بنابراین متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد. درستی سایر گزینه‌ها را با توجه به مطالب مطرح‌شده در درسنامه بررسی کنید.

۸۲ | **۱** با در دست داشتن نمودار سرعت - زمان برای مشخص کردن لحظهٔ تغییر جهت متحرک، کافی است لحظه‌ای را بیابیم که نمودار محور زمان را **قطع کرده** و **تغییر علامت** دهد. بنابراین در شکل زیر، متحرک تنها در لحظهٔ t_1 تغییر جهت می‌دهد.

(در t_5 علامت سرعت عوض نشده و لحظهٔ تغییر جهت محسوب نمی‌شود.)



۸۳ ۳ همان‌طور که می‌دانیم در نمودار سرعت-زمان، در زمان‌هایی که نمودار زیر محور زمان است، سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. با توجه به تشابه دو مثلث رنگی، اگر طول قسمت (۱) که سرعت در آن منفی است را t_1 درنظربگیریم، طول قسمت (۲) برابر $\frac{t_1}{۲}$ است و می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow t_1 + \frac{t_1}{۲} = (۱۴ - ۲) = ۱۲ \Rightarrow t_1 = ۸s$$

بنابراین متحرک به مدت $t_1 = ۸s$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود.

۸۴ ۳

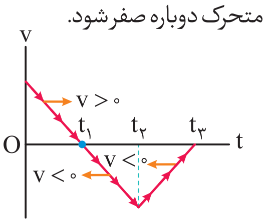
تذکر

در نمودار سرعت-زمان، هرگاه نمودار از محور زمان دور شود، تندی متحرک $|v|$ در حال افزایش است و بالعکس.

ابتدا باید دقت شود که نمودار **سرعت** - **زمان** متحرک داده‌شده است و با توجه به آن می‌توان گفت:

۱ از لحظهٔ t_1 تا t_3 نمودار سرعت-زمان زیر محور زمان (t) است و در نتیجه سرعت متحرک در این بازهٔ زمانی منفی است و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۲ از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = t_1$ سرعت متحرک مثبت و اندازهٔ آن در حال کاهش بوده تا در لحظهٔ t_1 به صفر برسد. سپس از لحظهٔ t_1 تا t_2 سرعت متحرک منفی ولی اندازهٔ آن ($|v|$) در حال افزایش است (نمودار از محور افقی دور می‌شود). از لحظهٔ t_2 تا t_3 نیز سرعت متحرک منفی است ولی اندازهٔ آن ($|v|$) در حال کاهش است (نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود.) تا در لحظهٔ t_3 سرعت متحرک دوباره صفر شود.



۸۵ ۲ به موارد زیر توجه کنید:

۱ همان‌طور که می‌دانید، اگر متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط آن با یک‌دیگر برابر می‌شود و در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان خواهد شد.

۲ ازطرف‌دیگرمی‌دانیم‌که‌دوثانیهٔ‌دوم،معادل‌بازهٔ‌زمانی $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$ است.

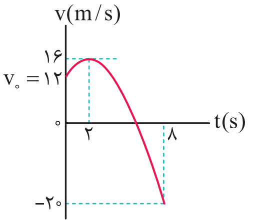
بنابراین برای پاسخ دادن به این سؤال، باید نموداری را پیدا کنیم که متحرک در این بازهٔ زمانی تغییر جهت نداده باشد. سرعت متحرک‌های C و D (نمودار گزینه‌های (۳) و (۴)) به ترتیب در لحظات ۲/۵s و ۳s صفر شده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین این دو متحرک تغییر جهت می‌دهند. متحرک A نیز در لحظهٔ $t = ۳$ تغییر جهت می‌دهد، اما متحرک B در بازهٔ زمانی $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$ تغییر جهت نمی‌دهد، بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ این سؤال است.

۸۶ ۴ با توجه به معادلهٔ سرعت-زمان داده شده، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$v = -t^۲ + ۴t + ۱۲ = -t^۲ + ۴t - ۴ + ۴ + ۱۲$$

$$\Rightarrow v = -(t^۲ - ۴t + ۴) + ۱۶ \Rightarrow v = -(t - ۲)^۲ + ۱۶$$

نقاط کمکی:
$$\begin{cases} t = ۰ \Rightarrow v_0 = ۱۲\frac{m}{s} \\ t = ۲s \Rightarrow v = ۱۶\frac{m}{s} \\ t = ۸s \Rightarrow v = -(۸)^۲ + ۴ \times ۸ + ۱۲ = -۲۰\frac{m}{s} \end{cases}$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t = ۸s$ بیشتر از سایر لحظه‌هاست و در نتیجه بیشترین تندی متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، در انتهای حرکت می‌باشد که برابر $۲۰\frac{m}{s}$ است.

۸۷ ۴ شتاب متوسط با بردار $\Delta\vec{v}$ هم‌جهت است نه بردار $\vec{v}$ و گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است. سایر گزینه‌ها، با توجه به درسنامهٔ ابتدای این قسمت، صحیح می‌باشند.

۸۸ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

۱ هنگام سقوط آزاد توپ به سمت زمین، به دلیل نیروی جاذبه، سرعت توپ به تدریج افزایش می‌یابد و این افزایش سرعت به معنی شتاب‌دار بودن حرکت است.

۲ در حرکت خودرو در یک جادهٔ مارپیچ، جهت حرکت خودرو در طول مسیر تغییر می‌کند و در نتیجه بردار سرعت عوض می‌شود، بنابراین حرکت شتاب‌دار است.

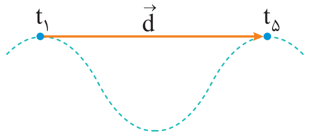
۳ هنگامی که خودرو با تندی ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، اندازه و جهت بردار سرعت ثابت است و در نتیجه حرکت شتاب ندارد.

۴ در چرخش ماهواره به دور زمین، جهت حرکت ماهواره تغییر می‌کند و این به معنی تغییر بردار سرعت است، بنابراین حرکت شتاب‌دار است.

۸۹ ۴ در گزینهٔ (۴) اندازهٔ سرعت ثابت بوده و بردار سرعت تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین در این حالت، $\vec{v}_1 = \vec{v}_4$ بوده و شتاب متوسط از لحظهٔ t_1 تا t_4 برابر صفر است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_1}{\Delta t} \xrightarrow{\vec{v}_4 = \vec{v}_1} \vec{a}_{av} = ۰$$

۹۰ ۳ سرعت، یک کمیت برداری است، بنابراین زمانی سرعت‌ها در دو زمان مختلف با هم برابر هستند که هم اندازه و هم جهت سرعت‌ها یکسان باشد. در این سؤال، در لحظات t_1، t_3 و t_5 سرعت متحرک یکسان است، بنابراین شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 و t_1 تا t_5 برابر صفر است $(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t})$. از سوی دیگر سرعت متوسط در راستای بردار جابه‌جایی است و تنها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_5 جابه‌جایی متحرک، افقی و در نتیجه سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است.



۹۱ **۱** در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$، شتاب متوسط برابر است با:

$$\begin{cases}\Delta v = v_۲ - v_۱ = -۲ - ۱۰ = -۱۲\frac{m}{s}\\ \Delta t = t_۲ - t_۱ = ۵ - ۱ = ۴s\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۱۲}{۴} = -۳\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (-۳\frac{m}{s^۲})\vec{i}$$

در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ هم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\Delta v = v_۳ - v_۲ = ۴ - (-۲) = ۶\frac{m}{s}\\ \Delta t = t_۳ - t_۲ = ۷ - ۵ = ۲s\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۶}{۲} = +۳\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (+۳\frac{m}{s^۲})\vec{i}$$

۹۲ **۴** **بررسی موارد**

الف) هنگامی که متحرک در مکان‌های منفی قرار دارد، بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است و هنگامی که در مکان‌های مثبت قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور x است، بنابراین بردار مکان متحرک ابتدا در خلاف جهت محور x و سپس در جهت محور x می‌باشد و در نتیجه این عبارت نادرست است.

ب) بردار سرعت متحرک در مکان A در جهت مثبت محور x$(v_A > ۰)$ و بردار سرعت متحرک در مکان C در خلاف جهت محور x است $(v_C < ۰)$، بنابراین تغییرات سرعت متحرک منفی بوده و در نتیجه بردار شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی، در خلاف جهت محور x است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\overset{\text{منفی}}{\boxed{v_C}} - \overset{\text{مثبت}}{\boxed{v_A}}}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} < ۰$$

ج) متحرک در دو مرحله ابتدا ۲۸ متر در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، در ادامه تغییر جهت داده و ۱۲ متر در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی شده برابر ۴۰ متر است و تندی متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{۴۰}{۶ + ۴} = ۴\frac{m}{s}$$

د) متحرک در هنگام عبور از مبدأ مکان $(x = ۰)$، در حال حرکت در جهت مثبت محور x است و در نتیجه بردار سرعت آن در جهت مثبت محور x می‌باشد.

با توجه به این توضیحات، فقط عبارت «الف» نادرست است.

۹۳ **۲** ابتدا سرعت‌های متحرک که برحسب cm/s داده‌شده‌اند را برحسب m/s نوشته و با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t})$، داریم:

$$\begin{cases}v_۱ = ۱cm/s = ۰/۰۱m/s \;,\; v_۲ = -۹۹cm/s = -۰/۹۹m/s\\ \Delta t = ۰/۵s\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{\Delta t} = \frac{-۰/۹۹ - ۰/۰۱}{۰/۵} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۲}} = -۲m/s^۲$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = ۲\frac{m}{s^۲}$$

یادآوری

$۱cm/s = ۰/۰۱m/s$ یا $۱m/s = ۱۰۰cm/s$

۹۴ **۲** با توجه به تمرین (۱۸) در درسنامه، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۹۵ **۳** گام اول: ابتدا تغییر سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow -۲\vec{i} = \frac{\Delta \vec{v}}{۱۰} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{\text{صفر تا } t_۲} = -۲۰\vec{i}$$

گام دوم: سپس تغییر سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{a}'_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{۲}{۳}\vec{i} = \frac{\Delta \vec{v}}{۱۵} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{\text{صفر تا } t_۳} = ۱۰\vec{i}$$

گام سوم: شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ برابر است با:

$$(\Delta \vec{v})_{\text{صفر تا } t_۳} = (\Delta \vec{v})_{\text{صفر تا } t_۲} + (\Delta \vec{v})_{t_۲ \text{ تا } t_۳}$$

$$۱۰\vec{i} = -۲۰\vec{i} + (\Delta \vec{v})_{t_۲ \text{ تا } t_۳} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_۲ \text{ تا } t_۳} = ۳۰\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{(\Delta \vec{v})_{t_۲ \text{ تا } t_۳}}{\Delta t} = \frac{۳۰\vec{i}}{۱۵ - ۱۰} = ۶\vec{i}(\frac{m}{s^۲})$$

۹۶ **۴** با توجه به تمرین (۱۷) در درسنامه، گزینهٔ (۴) صحیح است.

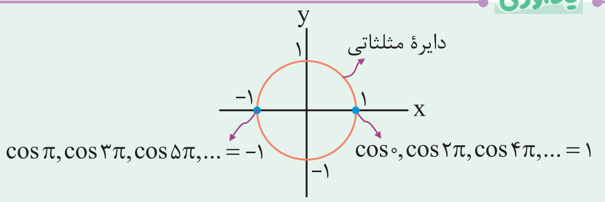
۹۷ **۳** سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی داده‌شده را به‌دست آورده و شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}t_۱ = ۲s \to v_۱ = ۰/۳\pi \overbrace{\cos(۱۰\pi)}^{۱} = ۰/۳\pi\\ t_۲ = ۵s \to v_۲ = ۰/۳\pi\cos(۲۵\pi) = ۰/۳\pi \overbrace{\cos(\pi)}^{-۱} = -۰/۳\pi\end{cases}$$

اندازهٔ شتاب متوسط: $|\vec{a}_{av}| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{t_۲ - t_۱} = \frac{|-۰/۳\pi - (۰/۳\pi)|}{۵ - ۲}$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{av}| = ۰/۲\pi m/s^۲$$

یادآوری



۹۸ **۳** در هر یک از بازه‌های زمانی، شتاب متوسط را با استفاده از رابطهٔ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم:

بررسی گزینه‌ها

۱) $\begin{cases}t_۱ = ۰ \Rightarrow v_۱ = ۴\frac{m}{s}\\ t_۲ = ۱s \Rightarrow v_۲ = ۰\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{۰ - ۴}{۱ - ۰} = -۴\frac{m}{s^۲}$

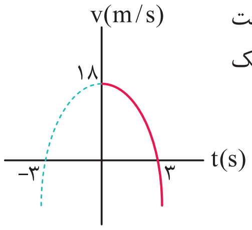
۲) $\begin{cases}t_۱ = ۰ \Rightarrow v_۱ = ۴\frac{m}{s}\\ t_۲ = ۲s \Rightarrow v_۲ = -۴\frac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{-۴ - (۴)}{۲ - ۰} = -۴\frac{m}{s^۲}$

۳) $\begin{cases}t_۱ = ۰ \Rightarrow v_۱ = ۴\frac{m}{s}\\ t_۲ = ۴s \Rightarrow v_۲ = ۴\frac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{۴ - ۴}{۴ - ۰} = ۰$

۴) $\begin{cases}t_۱ = ۴s \Rightarrow v_۱ = ۴\frac{m}{s}\\ t_۲ = ۶s \Rightarrow v_۲ = -۴\frac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{-۴ - (۴)}{۶ - ۴} = -۴\frac{m}{s^۲}$

در ۴ ثانیهٔ اول حرکت، شتاب متوسط حرکت برابر صفر است، یعنی در خلاف جهت محور x نیست.

۹۹ ۳ ابتدا ریشه‌های معادلهٔ موردنظر را به‌دست می‌آوریم و به دنبال آن نمودار سرعت - زمان را که یک سهمی است رسم می‌کنیم:



$$v=-۲t^۲+۱۸ \Rightarrow \begin{cases} -۲t^۲+۱۸=۰ \Rightarrow t=۳s \quad \text{یا} \quad t=-۳ \\ t=۰ \Rightarrow v=۱۸\,m/s \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی $t_۱=۰$ تا $t_۲=۳s$، سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$|\vec a_{av}|=\frac{|\Delta \vec v|}{\Delta t}=\frac{|۰-۱۸|}{۳}=۶\,m/s^۲$$

۱۰۰ ۱ بزرگی سرعت در لحظهٔ $t=۰$ برابر $۴\frac{m}{s}$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$v=t^۲+bt+c \xrightarrow[v=۴\frac{m}{s}]{t=۰} ۴=۰+۰+c \Rightarrow c=۴$$

شتاب متوسط متحرک در ثانیهٔ اول حرکت برابر $-۳\frac{m}{s^۲}$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_۱=۰: v_۱=۰+۰+۴=۴ \\ t_۲=۱s: v_۲=۱+b+۴=۵+b \end{cases} \Rightarrow \Delta v=۵+b-۴=۱+b$$

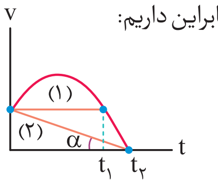
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۳=\frac{۱+b}{۱} \Rightarrow b=-۴$$

بنابراین معادلهٔ سرعت - زمان متحرک به‌صورت $v=t^۲-۴t+۴$ است.

$$v=t^۲-۴t+۴=(t-۲)^۲ \ge ۰$$

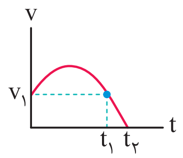
عبارت فوق همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین متحرک هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

۱۰۱ ۲ همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط رسم‌شده بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازه می‌باشد. در شکل زیر، شیب خط (۱) برابر $a_{av_۱}$ و شیب خط (۲) برابر $a_{av_۲}$ است. خط (۱) افقی است و شیبی برابر صفر دارد، اما شیب خط (۲)، عددی منفی است، بنابراین داریم:



$$a_{av_۱}=۰\ ,\ a_{av_۲}<۰$$

روش دیگر: با توجه به شکل زیر، متحرک در لحظهٔ صفر دارای سرعت $v_۱$ و در لحظهٔ $t_۱$ نیز دارای همان سرعت می‌باشد، بنابراین تغییرات سرعت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ صفر بوده و در نتیجه شتاب متوسط آن در این بازه نیز صفر است.

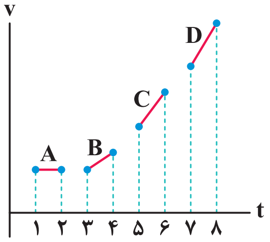


$$a_{av_۱}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v=۰} a_{av_۱}=۰$$

از سوی دیگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ برابر صفر است. بنابراین شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۲$ برابر است با:

$$a_{av_۲}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-v_۱}{t_۲-۰}<۰$$

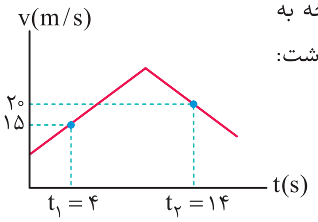
تمرین در شکل زیر شتاب متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟



پاسخ

$$a_{av_A}=۰<a_{av_B}<a_{av_C}<a_{av_D}$$

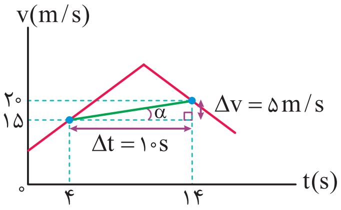
۱۰۲ ۱ **روش اول (نمودارخوانی):** با توجه به نمودار سرعت - زمان داده‌شده می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} t_۱=۴s \rightarrow v_۱=۱۵\,m/s \\ t_۲=۱۴s \rightarrow v_۲=۲۰\,m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۲۰-۱۵}{۱۴-۴}$$

$$\Rightarrow a_{av}=\frac{۱}{۲}\,m/s^۲=۰/۵\,m/s^۲ \Rightarrow \vec a_{av}=۰/۵\,\vec i$$

روش دوم (استفاده از شیب نمودار): شتاب متوسط بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.



$$|\vec a_{av}|=\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

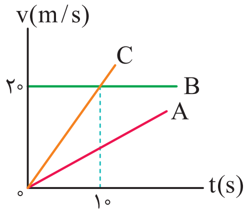
$$|\vec a_{av}|=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}\,m/s^۲=۰/۵\,m/s^۲ \Rightarrow \vec a_{av}=+۰/۵\,\vec i$$

دقت

با توجه به شیب پاره‌خط AB، $|\vec a_{av}|$ در این بازه مقداری مثبت دارد.

۱۰۳ ۲ برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) هر سه نمودار سرعت - زمان، به صورت خطی می‌باشند و شیب آن‌ها ثابت است، بنابراین شتاب هر سه متحرک در طول حرکتشان ثابت است.

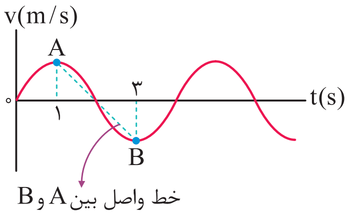


شیب C > شیب A > شیب B = ۰ ⇒ $a_C > a_A > a_B$

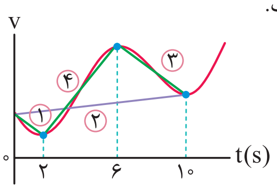
۲) با توجه به ثابت بودن شتاب، رابطهٔ فوق در هر بازهٔ زمانی دلخواه نیز در مورد شتاب متوسط سه متحرک برقرار است و در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$(a_{av})_C>(a_{av})_A>(a_{av})_B=۰$$

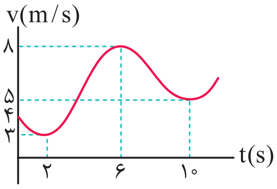
۱۰۴ **۴** شیب خط واصل بین دو نقطه از منحنی سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک می‌باشد. بین گزینه‌های داده شده، تنها در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3s$ شیب خط واصل بین دو نقطه منفی بوده و شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.



۱۰۵ **۴** روش اول: شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی است. با توجه به نمودار زیر، اندازهٔ شیب خط (۴) بیش‌تر از سه خط دیگر است، بنابراین اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $2s \le t \le 6s$ بیش‌تر از سایر گزینه‌ها است.



روش دوم: می‌توانستیم با قرار دادن عددهای مناسب روی نمودار و استفاده از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ هم شتاب متوسط را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنیم.



صفر تا ۲s: $a_{av} = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}\frac{m}{s^2}$

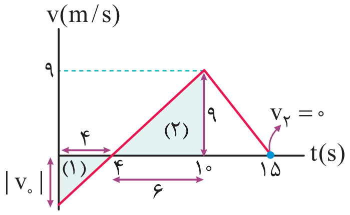
صفر تا ۱۰s: $a_{av} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10}\frac{m}{s^2}$

۶s تا ۱۰s: $a_{av} = \frac{5-8}{4} = \frac{-3}{4}\frac{m}{s^2}$

۲s تا ۶s : $a_{av} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}\frac{m}{s^2}$

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی $2s < t < 6s$ ، اندازهٔ شتاب متوسط از سایر گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

۱۰۶ **۱** برای محاسبهٔ اندازهٔ شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان، از رابطهٔ $|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ استفاده می‌کنیم. به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث‌ها، سرعت در لحظهٔ $t = 0$ را به‌دست آوریم:

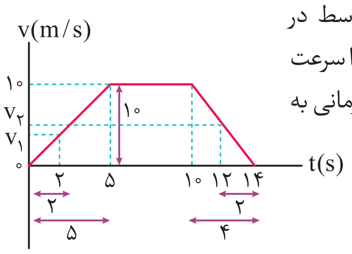


تشابه مثلث‌های (۱) و (۲): $\frac{4}{6} = \frac{|v_0|}{9} \Rightarrow |v_0| = 6m/s$

همان‌طور که از روی نمودار مشخص است، v_0 عددی منفی است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 = -6m/s \\ t_2 = 15s \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{0-(-6)}{15-0} = 0/4 m/s^2$$

۱۰۷ **۲** برای محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 12s$ ، ابتدا سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی به کمک تشابه به‌دست می‌آوریم:



$t_1 = 2s \Rightarrow \frac{10}{v_1} = \frac{5}{2} \Rightarrow v_1 = 4m/s$ (تشابه در سمت چپ شکل)

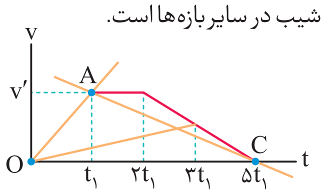
$t_2 = 12s \Rightarrow \frac{10}{v_2} = \frac{14-10}{14-12}$

$\Rightarrow v_2 = 5m/s$ (تشابه در سمت راست شکل)

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5-4}{12-2} = \frac{1}{10} m/s^2$$

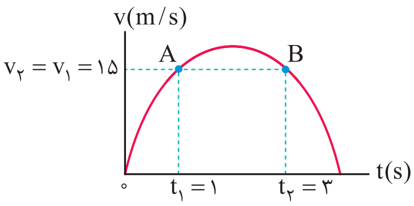
۱۰۸ **۱** می‌دانیم که در نمودار سرعت - زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار، شتاب متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی را می‌دهد. بنابراین شتاب متوسط در بازه‌ای بیش‌تر است که شیب خط واصل بین نقطهٔ ابتدا و انتهای آن بازه بیش‌تر باشد.

با توجه به شکل زیر در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 ، اندازهٔ شتاب متوسط بزرگ‌تر از سایر بازه‌هاست، زیرا شیب خط OA بزرگ‌تر از شیب در سایر بازه‌ها است.



$$\begin{cases} \text{شیب خط OA} = a_{avOA} = \frac{v'}{t_1} \\ \text{شیب خط AC} = a_{avAC} = -\frac{v'}{4t_1} \end{cases} \Rightarrow |a_{avOA}| > |a_{avAC}|$$

۱۰۹ **۱** با توجه به نمودار سرعت - زمان داده‌شده، سرعت متحرک در دو لحظهٔ t_1 و t_2 یکسان بوده و با توجه به تعریف شتاب متوسط $\left(|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ ، شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی صفر است.



$$|\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$\xrightarrow{v_2 = v_1 = 15m/s} |\vec{a}_{av}| = \frac{15-15}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1} = 0$$