مقدمه ناشر

تقدیم به

زنده‌یاد پرفسور مریم میرزاخانی

رسول محسنی‌منش

هر گوشه‌ای از شور آواز من

پیدا می‌شود قصیدهٔ تو

نور باور پرواز تا به ناکجا

تابیده شد به جام ز دیدهٔ تو

طلوع نگاه، شروع شراب

از مختصات نام توست

ایمان من در حلقهٔ هندسهٔ اندام توست! (احسان حائری)

اگر به خاطر چاپ قسمتی از شعر زیبای احسان حائری به جای مقدمهٔ ناشر، ما را گرفتند و بردند زندان، شما بیایید بگویید بابا بچه بود! نفهمید، خامی کرد، شما ببخشیدش!

و این‌گونه این کتاب باارزش و انتشارات را و من حقیر را از خطر برهانید!

البته به نظرم در اصل باید خود شاعر را دستگیر کنند که چرا اصلن به این چیزها فکر کرده! ولی به هر حال نشر این افکار هم خودش جرم بزرگی است.

ولی عیبی نداره! هندسه و خصوصن این کتاب هندسه، ارزشش را دارد که آدم برایش زندان هم برود.

خُب! راستش کتاب هندسهٔ یازدهم ظاهرن کلن سخت است. این کتاب که برایش زحمات فراوانی کشیده شده و خون دل‌های زیادی خورده شده، محصول ذوق خوش و نبوغ رسول محسنی‌منش و همکاران او است که اندکی از روح خود را در آن دمیده‌اند! امیدوارم از خواندن این کتاب به کفایت کیف کنید!

رسول جان، کیوان صارمی عزیز، خانم یگانه فلاحی گرامی از همشون مرسی به خاطر زحمت‌ها و کمک‌هاشون.

ایمان جان از تو هم خیلی ممنون، هم به خاطر این‌که در شعر بالا اسمت هست (امیدوارم تو را با من دستگیر نکنند) و هم به خاطر این‌که دستت درد نکند کلن و جزئن! از آقایان حسن غفوری، محمد یونسی و شایان شکرفروش هم به خاطر کمک‌هایشان برای بهتر کردن کتاب ممنونم.

خیلی هم خوب!

مقدمه مؤلفان

تقدیم به
همهٔ دانش‌آموزان و معلم‌های خوب ایران

به کتاب هندسه خیلی‌سبز خوش آمدید.

نحوهٔ استفاده از کتاب:

الف اگر به مدرسه یا کلاس می‌روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمتان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمهٔ محبت و موفقیت است»، با راهنمایی معلمتان در مورد ترتیب خواندن درس‌نامه‌ها و حل‌کردن تست‌ها و بررسی پاسخ‌ها، برنامه‌ریزی و اجرا کنید.

ب اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می‌کنید توصیهٔ ما این است که: ۱ اول درس‌نامه را خوب و کامل بخوانید. ۲ چیزهایی از درس‌نامه که مهم است را مشخص کنید، یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. ۳ یک بار دیگر فقط تست‌های درس‌نامه را حل کنید. ۴ بروید سراغ تست‌ها، پاسخ تست‌ها را اول از پاسخ‌نامهٔ کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ‌های تشریحی را بخوانید.

ساختار کتاب:

درس‌نامه:

۱ در درس‌نامه آیکن‌های **نکته:**، **تذکر:** و **یادآوری:** داریم:

نکته: نشان‌دهندهٔ نکته‌ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می‌شود تست را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

تذکر: نشان‌دهندهٔ یک اشارهٔ کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می‌شود مطلب را بهتر بفهمید و یا برای جلوگیری از اشتباه‌فهمیدن یک مطلب است.

یادآوری: نشان‌دهندهٔ یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس‌های قبلی یا سال‌های قبل است.

۲ در درس‌نامهٔ کتاب سعی کرده‌ایم از جدول، دسته‌بندی و هر چیزی که باعث می‌شود درس را بهتر و مؤثرتر یاد بگیرید استفاده کنیم. حواستان باشد که برای بررسی بعضی از جدول‌ها باید حسابی وقت بگذارید.

۳ تک‌تک مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اولاً کاربرد نکته‌ها و مفاهیم گفته‌شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً مفاهیم و تمارین کتاب درسی و هر آن‌چه که به فهم بیشتر مطالب کتاب درسی کمک می‌کند را دیده باشید. نمونه‌های اصلی و پرتکرار تست‌های کنکور را ببینید. باز هم توصیه می‌کنیم بعد از این‌که درس‌نامهٔ هر درس را خوب و کامل خواندید برگردید و یک بار دیگر تست‌های درس‌نامه را حل کنید.

تست‌ها:

۱ تست‌ها را با وسواس خیلی زیادی چیده‌ایم تا روند تسلط شما بر مطالب آسان‌تر شود، پس حتماً سعی کنید با همان ترتیب تست‌ها را حل کنید.

۲ تمامی تمارین و مثال‌های کتاب درسی و کنکور سال‌های اخیر را در کتاب خواهید دید، حتماً توجه ویژه‌ای به آن‌ها داشته باشید.

۳ به شدت به تغییر فضای تست‌های کنکور توجه داشته‌ایم و سعی کردیم تا حد امکان شما را با ذائقهٔ طراحان کنکور در سال‌های اخیر آشنا کنیم.

۴ در حل تست‌ها چه در درس‌نامه و چه در پاسخ‌ها نمادهای **راه اول:**، **راه دوم:** و ... را داریم که نشان‌دهندهٔ روش‌های مختلف حل یک تست است. معمولاً در **راه اول:** متداول‌ترین راه‌حل و یا سریع‌ترین آن‌ها آمده است.

۵ آیکن نشان‌دهندۀ مهم‌ترین تست‌ها است، پس اگر وقت کمی دارید، ابتدا روی این سؤال‌ها تمرکز کنید. آیکن نشان‌دهندۀ سؤال‌های دشوار است و می‌توانید حل کردن آن‌ها را بگذارید برای انتهای مطالعۀ هر درس، یعنی بعد از این‌که روی سایر تست‌های آن درس تسلط پیدا کردید.

۶ غیر از تست‌های دشوار، بقیۀ تست‌ها با آیکن مشخص شده‌اند تا خودتان بعد از حل آن‌ها مشخص کنید که برایتان سخت هستند یا آسان، مثلاً می‌توانید تست‌هایی را که به نظرتان آسان است به و تست‌هایی را که به نظرتان سخت است به تبدیل کنید!

اشارات:

۱ در انتهای هر کدام از فصل‌ها یک آزمون داریم. توصیۀ شدید و اکید داریم که تا وقتی همۀ مطالب فصل را خوب یاد نگرفته‌اید و تست‌های فصل را حل و دوره نکرده‌اید سراغ آزمون نروید.

۲ توصیۀ ما برای استفاده از پاسخنامه این است:

الف تعداد مشخصی تست برای یک نشست انتخاب و حل کنید (مثلاً ۳۰تا).

ب درستی پاسخ‌ها را از روی پاسخنامۀ کلیدی بررسی کنید.

پ برگردید و سعی کنید تست‌هایی را که جواب نداده‌اید یا غلط زده‌اید دوباره حل کنید.

ت بروید سراغ پاسخنامۀ تشریحی، اول پاسخ تست‌هایی را که جواب نداده‌اید و یا غلط زده‌اید ببینید و بعد از این‌که این‌ها را خوب فهمیدید و یاد گرفتید شروع کنید از اول نگاهی به همۀ پاسخ‌ها بیندازید. بررسی **راه اول**، **راه دوم**، **نکته**‌ها و **تذکر**ها باعث می‌شود به همۀ نکته‌ها و ریزه‌کاری‌های درس مسلط شوید.

و حرف آخر هم این‌که:

- برای این‌که این کتاب بهترین باشد کلی کار کرده‌ایم. به نظر خودمان خیلی خوب شده است و امیدواریم نظر شما هم همین باشد.
- اگر اشتباه، غلط، جابه‌جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم.

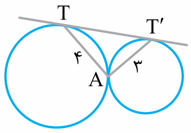
- تشکر بسیار ویژه از دکتر کمیل نصری برای تمام دلسوزی‌هایش و شرایط فوق‌العاده‌ای که در روند تألیف برایمان ایجاد کرده.
- از مهندس کیوان صارمی عزیز که در تمام مراحل کتاب با وسواس و دقت بی‌نظیرشان همراه ما بودند تشکر می‌کنیم.
- از تمامی دوستان و همکارانمان در انتشارات خیلی‌سبز، خصوصاً خانم فلاحی که زحمت پیگیری تمام امور این کتاب را داشتند، تشکر می‌کنیم.

هرگونه سؤالی که دربارۀ تست‌ها داشتید را می‌توانید از طریق کانال @riazikheilisabz از ما بپرسید

@mathmohsenimanesh

فهرست

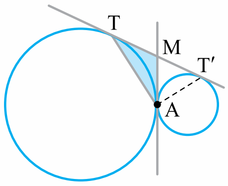
۱۹۵- در شکل زیر، مساحت مثلث TAT' کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۹

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۹۶- در شکل مقابل، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر $\sqrt{۸}$ و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر $\sqrt{۲}$ است. اگر $AT=\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$ باشد، مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده کدام است؟



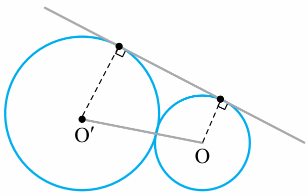
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$

۱۹۷- دو دایرهٔ نامساوی به مرکزهای O و O' مماس‌خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO'، با مماس‌مشترک خارجی این دو دایره کدام وضعیت را دارد؟

۱) متقاطع ۲) مماس ۳) متخارج ۴) نامشخص (ریاضی ۹۴)

۱۹۸- دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس بر هم‌اند. دایرهٔ به قطر OO' با مماس‌مشترک خارجی در نقطهٔ M مشترک‌اند. فاصلهٔ M از نقطهٔ تماس دو دایره، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)



۱) ۶

۲) ۶/۵

۳) ۷

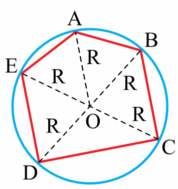
۴) ۷/۵

درس ۳: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

معرفی چندضلعی‌های محیطی و محاطی

شکل‌های روبه‌رو را نگاه کنید! در شکل (۱) یک دایره از تمام رأس‌های یک شکل گذشته است، به پنج‌ضلعی ABCDE **یک چندضلعی محاطی** و به دایره هم، **دایرهٔ محیطی** چندضلعی گفته می‌شود. معلوم است که اگر O مرکز دایرهٔ محیطی باشد، داریم:

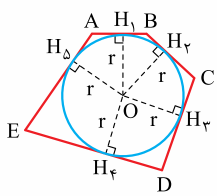
$$OA=OB=OC=\cdots$$



(شکل ۱)

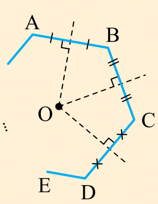
در شکل (۲) یک دایره درون یک چندضلعی قرار دارد و بر تمام ضلع‌ها مماس شده است، به این‌جور **چندضلعی‌ها، محیطی** گفته می‌شود. دایره هم، **دایرهٔ محاطی** نامیده می‌شود. در این‌جا فاصلهٔ مرکز دایره از همهٔ ضلع‌ها برابر است؛ یعنی:

$$OH_۱=OH_۲=\cdots$$



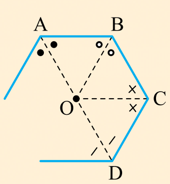
(شکل ۲)

نکته: برای این‌که یک چندضلعی محاطی باشد، یعنی بتوانیم دایره‌ای رسم کنیم که از تمام رئوسش عبور کند، باید عمودمنصف‌های اضلاعش در یک نقطه همرس باشند، این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی است. مثلاً مثلث همیشه محاطی است، چون سال قبل خواندیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلثی، همرس‌اند.



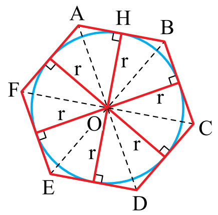
توجه: در یک nضلعی اگر $(n-۱)$ تا از عمودمنصف‌ها همرس باشند، عمودمنصف nاُم از نقطهٔ همرسی آن‌ها می‌گذرد و می‌توانیم نتیجه بگیریم nضلعی محاطی است.

نکته: برای محیطی‌بودن یک چندضلعی هم، باید همهٔ نیمسازهای زاویه‌ها در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی است که درون چندضلعی قرار می‌گیرد، مثلاً مثلث همیشه محیطی است، چون سال قبل خواندیم که نیمسازهای زاویه‌های هر مثلثی همرس‌اند.



توجه: اگر $(n-۱)$ تا از نیمسازهای داخلی یک nضلعی همرس باشند، نیمساز nاُم هم از نقطهٔ همرسی آن‌ها می‌گذرد و می‌توانیم نتیجه بگیریم nضلعی محیطی است.

مثال: اگر دایره‌ای به شعاع r در یک شش‌ضلعی به مساحت S و محیط ۲P ، محاط شده باشد، ثابت کنید: $r=\frac{S}{P}$.



پاسخ: شکل را ببینید! اگر از مرکز دایره به رأس‌های شش‌ضلعی وصل کنیم، ۶ مثلث به وجود می‌آید که در همهٔ آن‌ها، ارتفاع برابر r است. حالا می‌توانیم بگوییم که اگر مساحت ۶ مثلث را با هم جمع کنیم باید به مساحت کل شش‌ضلعی برسیم:

$$S=S_{\overset{\Delta}{AOB}}+S_{\overset{\Delta}{BOC}}+\cdots+S_{\overset{\Delta}{AOF}} \Rightarrow S=\frac{r\times AB}{۲}+\frac{r\times BC}{۲}+\cdots+\frac{r\times AF}{۲}$$

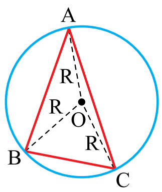
$$\Rightarrow S=\frac{r}{۲}\underbrace{(AB+BC+\cdots+AF)}_{۲P} \Rightarrow S=rP \Rightarrow r=\frac{S}{P}$$

مثال قبل در مورد شش‌ضلعی محیطی بود، اما نتیجهٔ آن برای همهٔ چندضلعی‌های محیطی معتبر است؛ یعنی:

نکته: اگر شعاع دایرهٔ محاطی یک چندضلعی محیطی r باشد، همواره داریم:

$$r=\frac{S}{P}\quad \begin{matrix} S \rightarrow \text{مساحت چندضلعی} \\ P \rightarrow \text{نصف محیط چندضلعی} \end{matrix}$$

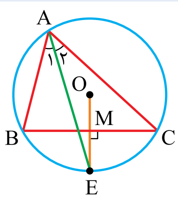
دایره‌های محیطی و محاطی مثلث



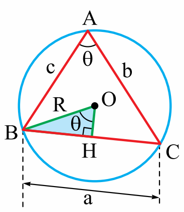
دایرهٔ محیطی مثلث عمودمنصف‌های هر مثلثی همرس‌اند. این نقطه از سه رأس به یک فاصله است. اگر این فاصله را R بنامیم و مرکز پرگار را روی این نقطه قرار دهیم و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ R باز کنیم، دایره‌ای رسم می‌شود که از سه رأس عبور می‌کند، به این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث گفته می‌شود.

مثال بعد، یکی از تمرین‌های کتاب درسی است که از آن تست کنکور هم داشته‌ایم.

مثال: نشان دهید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه و عمودمنصف ضلع نظیر آن زاویه بر روی دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند.



پاسخ: چون $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ است، پس $\widehat{BE}=\widehat{CE}$ ، یعنی E وسط کمان BC است. از طرفی عمودمنصف وتر BC از وسط کمان BC می‌گذرد، پس E که نقطه‌ای بر روی دایرهٔ محیطی مثلث است، محل تلاقی نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC است.



محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث دلخواه برای محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی هر مثلث ABC، بسته به اطلاعاتی که سؤال به شما می‌دهد، می‌توانید از هر کدام از رابطه‌های زیر استفاده کنید.

۱) $R=\frac{a}{۲\sin\theta}$ (شعاع دایرهٔ محیطی برابر است با نسبت طول یک ضلع به دو برابر سینوس زاویهٔ روبه‌روی آن)

۲) $R=\frac{abc}{۴S}$ (شعاع دایرهٔ محیطی برابر است با حاصل‌ضرب سه ضلع تقسیم بر چهار برابر مساحت)

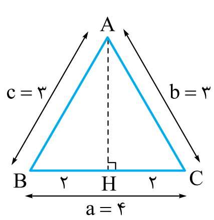
نکته: اگر از O به ضلع BC عمود کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، داریم $\hat{O}=\theta$؛ پس:

$$\cos\theta=\frac{OH}{R} \Rightarrow OH=R.\cos\theta \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} \boxed{OH=R.|\cos\hat{A}|}$$

دقت کنید قدرمطلق را برای آن می‌گذاریم که ممکن است زاویهٔ A منفرجه باشد که در این صورت کسینوس آن منفی است.

تست: شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی به طول اضلاع ۳، ۳ و ۴، چند برابر $\sqrt{۵}$ است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸



پاسخ: ۱ راه اول: مثلث متساوی‌الساقین است، اگر ارتفاع وارد بر قاعده را رسم کنیم، طول آن با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABH به دست می‌آید:

$$AH=\sqrt{۳^۲-۲^۲}=\sqrt{۵}$$

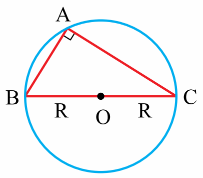
داریم $S=\frac{۱}{۲}AH.BC=۲\sqrt{۵}$؛ پس:

$$R=\frac{abc}{۴S}=\frac{۴\times۳\times۳}{۴\times۲\sqrt{۵}}=\frac{۹}{۲\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۹}{۱۰}\sqrt{۵}$$

راه دوم: پس از آن‌که طول AH را حساب کردیم، می‌توانیم بگوییم:

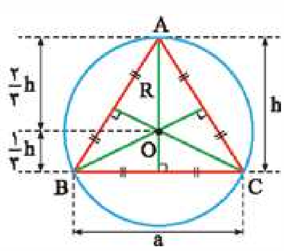
$$\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{۵}}{۳} \Rightarrow R=\frac{b}{۲\sin\hat{B}}=\frac{۳}{\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}}=\frac{۹}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۹}{۱۰}\sqrt{۵}$$

در تست‌ها کم‌تر با محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث دلخواه مواجه می‌شویم، بلکه دو حالت خاص مهم داریم که در تست‌ها بیشتر با آن‌ها مواجه می‌شویم و می‌خواهیم جداگانه به آن‌ها بپردازیم.



۱. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویه در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که مطابق شکل زاویهٔ A قائمه است، کمان روبه‌روی آن $۲\times۹۰^\circ=۱۸۰^\circ$ است؛ پس BC (وتر مثلث) قطر دایره است، نتیجه این‌که:

در مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محیطی، نصف طول وتر است.



۲. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع در مثلث متساوی‌الاضلاع، مرکز دایرهٔ محیطی، همان نقطهٔ همرسی میانه‌هاست. با توجه به خاصیت نقطهٔ همرسی میانه‌ها در شکل روبه‌رو داریم:

$$R=\frac{۲}{۳}h \xrightarrow{h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a} R=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

توجه: دو فرمولی که در مورد «محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی دلخواه» گفتیم، یعنی $R=\frac{a}{۲\sin\hat{A}}=\frac{abc}{۴S}$، در مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الاضلاع هم برقرار است، اما دانستن فرمول‌هایی که به طور خاص در مورد این دو نوع مثلث گفتیم سرعت عمل ما را در حل سؤال‌ها بیشتر می‌کند.

تست: شعاع دایرهٔ محیطی کدام مثلث کوچک‌تر است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$
۲) مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر $\sqrt{۵}$
۳) مثلثی با طول اضلاع ۱/۵، ۲ و ۲/۵
۴) مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ارتفاع $\sqrt{۲}$

پاسخ۴: در هر گزینه، شعاع دایرهٔ محیطی را محاسبه می‌کنیم:

۱ $a=\sqrt{۳} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳}=۱$

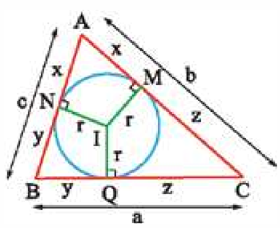
۲ $R=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\simeq\frac{۲/۲}{۲}=۱/۱$ (نصف طول وتر)

۳ $R=\frac{۲/۵}{۲}=۱/۲۵$ (دقت کنید که مثلث به طول اضلاع $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۴}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$ قائم‌الزاویه است.)

۴ $h=\sqrt{۲} \Rightarrow R=\frac{۲}{۳}h=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\simeq\frac{۲\times۱/۴}{۳}=\frac{۲/۸}{۳}<۱$

دایره‌های محاطی مثلث

۱. دایرهٔ محاطی داخلی می‌دانیم که نیمسازهای هر مثلثی همرس‌اند، پس دایره‌ای وجود دارد که در داخل مثلث بر هر سه ضلع آن مماس شود. به این دایره، دایرهٔ محاطی داخلی گفته می‌شود که شعاع آن را با r و مرکزش را با I نشان می‌دهیم. دربارهٔ این دایره نکات زیر را باید بلد باشیم:



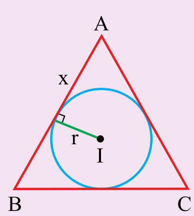
۱ I محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است.

۲ مانند هر چندضلعی محیطی، در مثلث هم داریم: $r=\frac{S}{P}$ (که S مساحت مثلث و P نصف محیط است.)

۳ طول دو مماس رسم‌شده از هر رأس مثلث بر دایرهٔ محاطی آن با هم برابر است و داریم:

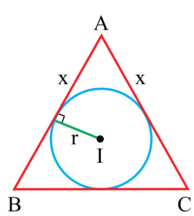
$$x=P-a \text{ و } y=P-b \text{ و } z=P-c$$

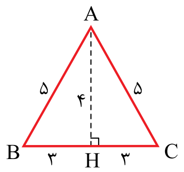
تست: مطابق شکل، I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است. اگر $AB=AC=۵$ و $BC=۶$، اختلاف مقادیر x و r کدام است؟



۱) صفر
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۵
۴) ۰/۷۵

پاسخ۳: محیط مثلث برابر است با $۲P=۵+۵+۶$، پس $P=۸$ و داریم $x=P-a=x-۶=۲$.



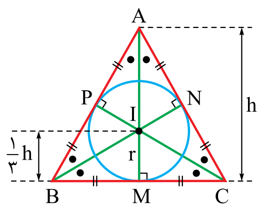


برای محاسبهٔ r از فرمول $r=\frac{S}{P}$ ، ابتدا باید مساحت را حساب کنیم، با رسم ارتفاع AH، طول آن با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABH به دست می‌آید $AH=۴$ ، پس $S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=۱۲$ و داریم $r=\frac{S}{P}=\frac{۱۲}{۸}=۱/۵$.
بنابراین $|x-r|=۲-۱/۵=۰/۵$.

فرمول‌های محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع برحسب طول ارتفاع و طول ضلع آن را باید حفظ باشید، در مثال بعد، این فرمول‌ها را به دست می‌آوریم.

مثال: طول ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع a و طول ارتفاع آن h است. بدون استفاده از فرمول $r=\frac{S}{P}$ ، شعاع دایرهٔ محاطی را برحسب h و r محاسبه کنید.

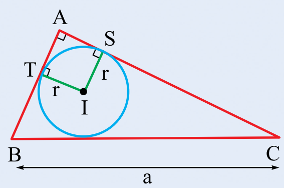
پاسخ: در مثلث متساوی‌الاضلاع، نیمسازهای داخلی، همان میانه‌ها هستند؛ پس نقطهٔ همرسی میانه‌ها، مرکز دایرهٔ محاطی است. با توجه به خاصیت نقطهٔ همرسی میانه‌ها مطابق شکل داریم:



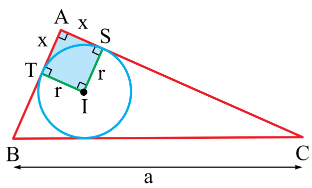
$$IM=\frac{۱}{۳}h \Rightarrow r=\frac{۱}{۳}h \xrightarrow{h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a} r=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

در مثلث قائم‌الزاویه هم بدون استفاده از فرمول $r=\frac{S}{P}$ می‌توانید شعاع دایرهٔ محاطی را حساب کنید. در مثال بعد هم روش این کار را می‌گوییم، هم یکی از نتایج حاصل از آن را.

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر a، محیط ۲P و مساحت S، نشان دهید $S=P(P-a)$.



پاسخ: مطابق شکل از مرکز دایرهٔ محاطی به نقاط تماس آن با اضلاع AB و AC وصل می‌کنیم، چهارضلعی ATIS سه زاویهٔ قائمه دارد، پس مستطیل است و دو ضلع مجاور آن با هم برابرند $IT=IS=r$ ، پس مربع است. از طرفی گفته بودیم که $x=P-a$ ، پس داریم: $r=x=P-a$

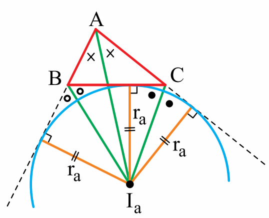


با استفاده از فرمول هم داریم: $r=\frac{S}{P} \Rightarrow P-a=\frac{S}{P} \Rightarrow S=P(P-a)$

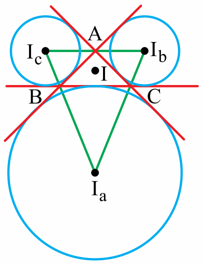
قبل از این‌که به سراغ دایره‌های محاطی خارجی مثلث برویم، یک قضیه را بگوییم:

قضیه: در هر مثلث نیمسازهای هر دو زاویهٔ خارجی، با نیمساز داخلی زاویهٔ سوم همرس‌اند.

مثلاً در شکل روبه‌رو نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C و نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC در نقطهٔ I_a همرس‌اند. خاصیت نقطهٔ I_a این است که از ضلع BC و امتداد دو ضلع AB و AC به یک فاصله است، پس دایره‌ای به مرکز I_a و شعاع r_a بر ضلع BC و امتداد دو ضلع AB و AC مماس است.



۲. دایره‌های محاطی خارجی مثلث هر مثلث ۳تا دایره دارد که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس هستند. به این دایره‌ها محاطی خارجی گفته می‌شود. مراکز این دایره‌ها با I_a ، I_b و I_c نمایش داده می‌شوند.



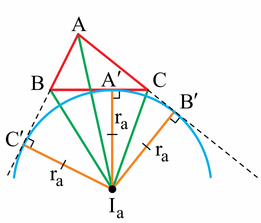
یکی از این دایره‌ها (دایرهٔ محاطی خارج نظیر ضلع BC) را به نمایندگی از بقیه بررسی می‌کنیم:

۱ مرکز این دایره محل برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ A و نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C است.

۲ چون دایره بر ضلع مقابل رأس A مماس است، اسم مرکزش I_a شده است.

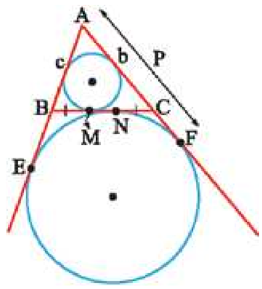
۳ شعاعش را با r_a نشان می‌دهیم که برابر است با: $r_a=\frac{S}{P-a}$

۴ $AB'=AC'=P$ (P نصف محیط مثلث است.)



تست: در مثلث ABC، $b = ۸$ و $c = ۶$ است. اگر M و N محل تماس دایره‌های محاطی داخلی و خارجی با ضلع BC باشند، اندازهٔ MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



پاسخ ۱: برای به دست آوردن MN می‌خواهیم CM و CN را پیدا کنیم و از هم کمشان کنیم. CM که می‌دانیم برابر است با: $CM = P - c$.
CN با CF برابر است چراکه دو مماسی هستند که از نقطهٔ C بر دایرهٔ محاطی خارجی رسم شده‌اند. کل AF برابر P و تکهٔ AC از آن هم که همان b است، پس $CF = AF - AC = P - b$. در نتیجه CN هم برابر است با: $P - b$.

خُب حالا نوبت MN است: $MN = CM - CN = (P-c) - (P-b) = b - c$

$b - c$ هم که می‌شود: $۸ - ۶ = ۲$

مثال بعد، یکی از تمرین‌های کتاب درسی است که رابطهٔ مهمی را بیان می‌کند.

مثال: اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و r_a، r_b و r_c شعاع‌های دوایر محاطی خارجی یک مثلث باشند، ثابت کنید: $\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$

پاسخ: می‌دانیم که $r = \frac{S}{P}$، $r_a = \frac{S}{P-a}$، $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-c}$. حالا از سمت چپ تساوی شروع می‌کنیم:

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{\frac{S}{P-a}} + \frac{۱}{\frac{S}{P-b}} + \frac{۱}{\frac{S}{P-c}} = \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{۳P - \overbrace{(a+b+c)}^{۲P}}{S} = \frac{P}{S} = \frac{۱}{r}$$

در مثال بعد، باز می‌خواهیم برویم سراغ مثلث متساوی‌الاضلاع.

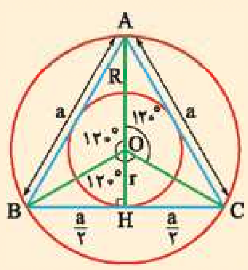
مثال: شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاعی که طول ضلع آن a و طول ارتفاع آن h است را برحسب a و h به دست آورید.

پاسخ: محیط مثلث می‌شود $۲P = ۳a$، پس $P = \frac{۳}{۲}a$ ضمن آن‌که مساحت آن $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است، پس:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a - a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۱}{۲}a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow \boxed{r_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a} \text{ یا } \boxed{r_a = h}$$

حالا در قالب یک نکتهٔ مهم، روابط شعاع‌های دایره‌های محیطی و محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع را جمع‌بندی می‌کنیم.

نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a و ارتفاع h، داریم: (R: شعاع دایرهٔ محیطی، r: شعاع دایره‌های محاطی داخلی، r_a: شعاع دایرهٔ محاطی خارجی)



۱ $R = \frac{۲}{۳}h = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$

۲ $r = \frac{۱}{۳}h = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$

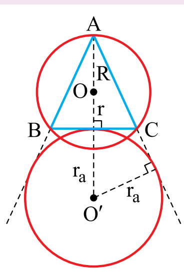
۳ $r_a = r_b = r_c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = h$

۴ $\frac{r}{۱} = \frac{R}{۲} = \frac{r_a}{۳}$

تست: در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ ۱: با توجه به شکل، طول خط‌المرکزین برابر $OO' = r + r_a$ است؛ بنابراین داریم:



$$OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۶}(\sqrt{۳}) + \frac{\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۳}) = \frac{۳}{۶} + \frac{۳}{۲} = ۲$$

۲۱۵- در مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

۲۱۶- مثلث متساوی‌الاضلاعی در دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ محاط است. مساحت این مثلث کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

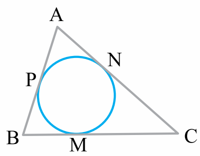
۱) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۱۷- نقاطی از دایرهٔ $C(O,R)$ که از خط Δ به فاصلهٔ یک هستند، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. طول وتری که خط Δ از دایرهٔ C جدا می‌کند، کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۱ ۲) $\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

دایره‌های محاطی مثلث

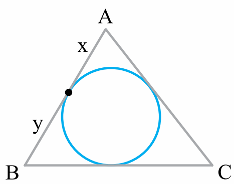
در این قسمت ابتدا سؤال‌های محاسبهٔ طول مماس‌های رسم‌شده از رأس‌های مثلث بر دایرهٔ محاطی داخلی را بررسی می‌کنیم.



۲۱۸- در شکل روبه‌رو، اگر $BM = ۳$ ، $AB = ۵$ و $BC = ۷$ باشد، محیط مثلث کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰

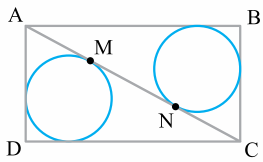
۳) ۱۸ ۴) ۱۷



۲۱۹- دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳، ۹ و ۸ در نقطهٔ تماس، کوچک‌ترین ضلع را به دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$



۲۲۰- چهارضلعی ABCD مستطیل است. مطابق شکل، قطر AC و دایره‌های محاطی دو مثلث ایجادشده را رسم کرده‌ایم. اگر اضلاع مستطیل ۵ و ۳ باشند، طول MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۲۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویهٔ ۳۰° دارد، دایرهٔ محاطی داخلی در نقطهٔ T بر ضلع متوسط مماس است. اگر L وسط این ضلع باشد، طول TL برابر با کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) نصف طول ارتفاع وارد بر وتر ۲) ثلث طول ضلع کوچک‌تر ۳) نصف طول میانهٔ وارد بر وتر ۴) ثلث طول ضلع متوسط

حالا می‌خواهیم سؤال‌هایی در مورد محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی حل کنیم.

۲۲۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت دایرهٔ محیطی، چند برابر مساحت دایرهٔ محاطی داخلی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۲۳- طول مماس رسم‌شده از هر رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر دایرهٔ محاطی آن برابر با $\sqrt{۳}$ است. شعاع دایرهٔ محاطی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۱/۵$ ۴) $۰/۵$

۲۲۴- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، r شعاع دایرهٔ محاطی و محیط برابر با 2P است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $r = \frac{S}{P}$ ۲) $۲r = b + c - a$ ۳) $r = \frac{ab}{P}$ ۴) $۲r = \frac{bc}{P}$

۲۲۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. فاصلهٔ دورترین رأس این مثلث از نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۲۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول یک ضلع قائم ۸ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ۳ واحد است. اندازهٔ وتر این مثلث کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۲۲۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اندازهٔ شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABH و ACH به ترتیب $r_۱$ و $r_۲$ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است. اگر $r_۱ = ۶$ و $r_۲ = ۸$ باشد، r کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۲۲۸- در مثلث ABC، ارتفاع وارد بر ضلع a، ۳ برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی است. مجموع دو ضلع دیگر این مثلث کدام است؟

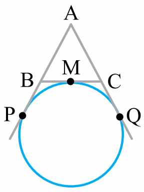
۱) $\frac{۳}{۲}a$ ۲) $۲a$ ۳) $\sqrt{۳}a$ ۴) $۳a$

۲۲۹- در مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ۳ واحد است. طول قاعدهٔ این مثلث، کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

دایره‌های محاطی خارجی مثلث

از سؤال بعد، سؤال‌های «دایره‌های محاطی خارجی مثلث» شروع می‌شود. ابتدا به بررسی طول مماس‌های رسم‌شده از رأس‌های مثلث بر دایره‌های محاطی خارجی می‌پردازیم.



۲۳۰- در شکل مقابل، محیط مثلث ABC برابر ۲۰ است. اندازهٔ AP کدام است؟

۱) ۲۰
۲) ۱۵
۳) ۱۲
۴) ۱۰

۲۳۱- در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و ۳ واحد، دایرهٔ محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطهٔ تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۲۳۲- در مثلث ABC، طول مماس‌مشترک خارجی دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر $BC = a$ و امتدادهای $AB = c$ و $AC = b$ کدام است؟ (محیط $\overset{\Delta}{ABC} = ۲P$) (برگرفته از کتاب درسی)

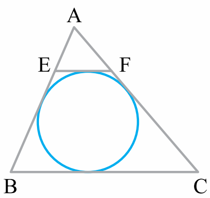
۱) a ۲) $P - ۲a$ ۳) $|b - c|$ ۴) $\frac{۱}{۲}(b + c)$

۲۳۳- در مثلث ABC، طول مماس‌مشترک داخلی دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع $BC = a$ و امتدادهای اضلاع به طول b و c کدام است؟ (محیط $\overset{\Delta}{ABC} = ۲P$) (برگرفته از کتاب درسی)

۱) a ۲) $P - ۲a$ ۳) $|b - c|$ ۴) $\frac{۱}{۲}(b + c)$

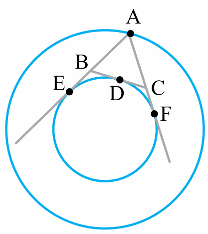
۲۳۴- در مثلث ABC با اضلاع $AB = ۵$ و $AC = ۷$ و $BC = ۸$ واحد، نیمساز داخلی زاویهٔ A، نیمسازهای زاویهٔ داخلی و خارجی B را در O و O′ قطع می‌کند. اندازهٔ تصویر قائم OO′، بر روی BC کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵



۲۳۵- در شکل داده‌شده، EF با BC موازی و بر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC به اضلاع $AB = ۲$، $BC = ۳$ و $AC = ۴$ مماس است. طول EF کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۱/۷۵
۲) ۱
۳) ۱/۲۵
۴) ۰/۷۵



۲۳۶- در دو دایرهٔ هم‌مرکز، از نقطهٔ A روی دایرهٔ بزرگ دو مماس AE و AF و از نقطهٔ D روی کمان کوچک‌تر EF، مماس دیگری بر دایرهٔ محاطی داخلی رسم شده است. با تغییر مکان A و D کدام بیان در مثلث ABC درست است؟ (ریاضی خارج ۹۷)

۱) محیط ثابت ـ مساحت متغیر
۲) محیط متغیر ـ مساحت ثابت
۳) محیط ثابت ـ مساحت ثابت
۴) محیط متغیر ـ مساحت متغیر

از سؤال بعد، سؤال‌هایی در مورد شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث داریم.

۲۳۷- اضلاع مثلثی ۱۳، ۱۴ و ۱۵ و مساحت آن ۸۴ است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع متوسط کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۳۸- در مثلث ABC که $AB > AC > BC$، کدام صحیح است؟

۱) $r_a > r_b > r_c$ ۲) $r_a > r_c > r_b$ ۳) $r_c > r_b > r_a$ ۴) $r_b > r_c > r_a$

۲۳۹- در مثلث با اضلاع $a = ۵$، $b = ۱۲$ و $c = ۱۳$، شعاع بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۳

۲۴۰- در مثلث ABC، دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC را در نظر بگیرید. اگر نسبت شعاع‌های این دو دایره ۱/۵ و خط‌المرکزین آن‌ها بر BC عمود باشد، طول ضلع بزرگ‌تر مثلث چند برابر طول ضلع کوچک‌تر آن است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

۲۴۱- در مثلث ABC، طول ارتفاع وارد بر ضلع a را با h_a و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر a را با r_a نشان می‌دهیم. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشد، کدام رابطه درست نیست؟

۱) $\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$ ۲) $\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$ ۳) $\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} - \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r_c}$ ۴) هر سه درست هستند.

۲۴۲- در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم ۵ و ۱۲، نیمساز خارجی زاویهٔ قائمه و نیمساز داخلی زاویهٔ کوچک‌تر در نقطهٔ O متقاطع‌اند. فاصلهٔ O از ضلع کوچک‌تر کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۴۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول وتر a و طول اضلاع قائم b و c است. مجموع طول شعاع دایره‌های محاطی خارجی مماس بر اضلاع a و b کدام است؟

۱) $a+b$ ۲) c ۳) $۲c$ ۴) $\frac{a+b}{۲}$

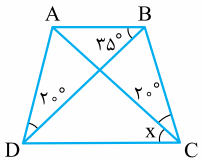
۲۴۴- در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۵ و ۶، طول خط‌المرکزین دایرهٔ محاطی داخلی و کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۸ ۳) ۵/۵ ۴) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$

چهارضلعی محاطی

۲۴۵- دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است، قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر کدام است؟

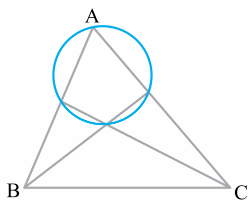
۱) ۲۰° ۲) ۴۰° ۳) ۵۰° ۴) ۳۰°



۲۴۶- در شکل مقابل، زاویهٔ x کدام است؟

۱) ۵۵° ۲) ۴۰°

۳) ۳۵° ۴) ۳۰°



۲۴۷- در شکل روبه‌رو، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایرهٔ محاطی باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۹۰ ۲) ۷۵

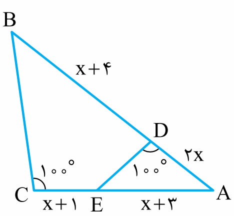
۳) ۶۰ ۴) ۴۵

۲۴۸- نیمسازهای زاویه‌های یک ذوزنقه را رسم می‌کنیم و از برخوردشان یک چهارضلعی به دست می‌آید، این چهارضلعی ....

۱) مربع است. ۲) مستطیل است. ۳) لوزی است. ۴) محاطی است.

۲۴۹- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟

۱) مستطیل ۲) لوزی ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) محاطی



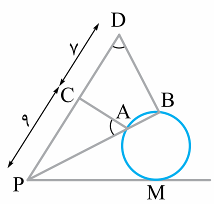
۲۵۰- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴



۲۵۱- در شکل مقابل، $P\hat{A}C = P\hat{D}B$ ، $PC = ۹$ و $CD = ۷$ ، اندازهٔ مماس PM کدام است؟

۱) ۸

۲) $۶\sqrt{۲}$

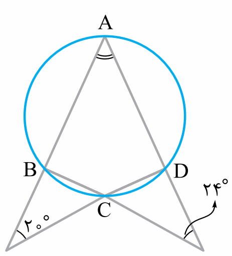
۳) ۱۰

۴) ۱۲

۲۵۲- چهارضلعی ABCD محاطی است. نیمسازهای زاویهٔ خارجی A و زاویهٔ داخلی C کجا همدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) روی محیط چهارضلعی ۲) روی دایرهٔ محیطی چهارضلعی

۳) بیرون دایرهٔ محیطی چهارضلعی ۴) هر سه حالت امکان‌پذیر است.



۲۵۳- در شکل مقابل، زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۶۸

۲) ۶۶

۳) ۶۴

۴) ۶۲

۲۵۴- در مثلث ABC دو ارتفاع BH و CK یکدیگر را در L قطع کرده‌اند. چهارضلعی با رأس‌های A، H، K و L .... و چهارضلعی با رأس‌های C، H، B و K .... است.

۱) محیطی ـ محیطی ۲) محیطی ـ محاطی ۳) محاطی ـ محیطی ۴) محاطی ـ محاطی

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCL و BHK در زاویهٔ حادهٔ KBL مشترک‌اند، پس زاویهٔ حادهٔ دیگر آن‌ها با هم برابر است؛ یعنی $\underbrace{A\hat{H}D = A\hat{C}B}_{(*)}$. داریم:

زاویهٔ محاطی: $A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BD}}{۲} = \underbrace{\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}}_{A\hat{B}D} + \underbrace{\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}}_{B\hat{A}D}$

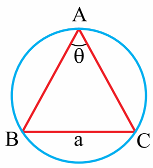
$= A\hat{B}D + B\hat{A}D \; (**)$

زاویهٔ ADH برای مثلث ABD یک زاویهٔ خارجی است، پس:

$A\hat{D}H = A\hat{B}D + B\hat{A}D \xrightarrow{(*),(**)} A\hat{D}H = A\hat{C}B = A\hat{H}D$

۲۱۲. **۲** شعاع دایرهٔ محیطی برابر است با $R=\frac{abc}{۴S}$، پس $R=\frac{۱۲۰}{۲۴}=۵$.

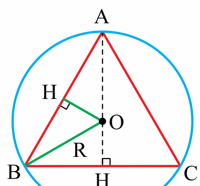
۲۱۳. **۱** با توجه به رابطهٔ $R=\frac{a}{۲\sin\theta}$، داریم:



$a=BC=۳, \hat{A}=۶۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\Rightarrow R=\frac{۳}{۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\sqrt{۳}$

۲۱۴. **۳** از این‌که $\frac{AC}{AH}=\sqrt{۳}$ نتیجه می‌گیریم:



$\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

پس: $\sin^۲\hat{C}+\cos^۲\hat{C}=۱$

$\Rightarrow \frac{۱}{۳}+\cos^۲\hat{C}=۱ \Rightarrow \cos^۲\hat{C}=\frac{۲}{۳}$

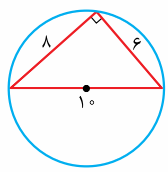
زاویهٔ روبه‌روی ساق حتماً حاده است، پس $\cos\hat{C}>۰$ و داریم:

$\cos\hat{C}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$

از طرفی در درس‌نامه گفتیم که $OH=R.|\cos\hat{C}|$؛ پس:

$\frac{R}{OH}=\frac{۱}{|\cos\hat{C}|}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۲۱۵. **۳** از اضلاع این مثلث مشخص است که قائم‌الزاویه است. $(۱۰^۲=۶^۲+۸^۲)$



در مثلث قائم‌الزاویه می‌دانیم که وتر، یکی از قطرهای دایرهٔ محیطی است و این یعنی $۲r=۱۰$؛ پس $r=۵$.

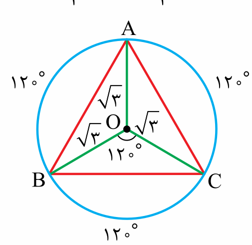
۲۱۶. **۱** **راه اول:** در درس‌نامه گفتیم که شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر است با $R=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$؛ پس داریم:

$\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a \Rightarrow a=۳$

از طرفی می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$؛ پس:

$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳)^۲=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

راه دوم: با توجه به شکل داریم:

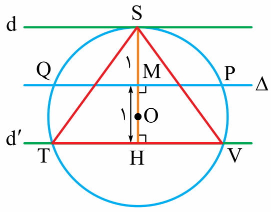


$S_{\overset{\Delta}{BOC}}=\frac{۱}{۲}OB.OC.\sin B\hat{O}C$

$=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

بنابراین: $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۳S_{\overset{\Delta}{BOC}}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۲۱۷. **۲** نقاطی که از خط Δ به فاصلهٔ یک هستند، بر دو خط موازی با Δ و به فاصلهٔ یک از آن واقع‌اند و سؤال می‌گوید که نقاط مشترک این دو خط با دایرهٔ $C(O,R)$، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. با رسم شکل متوجه می‌شوید که: ۱) یکی از دو خط d و d′ بر دایره مماس و دیگری با آن متقاطع است. ۲) دایرهٔ C، دایرهٔ محیطی مثلث STV است.

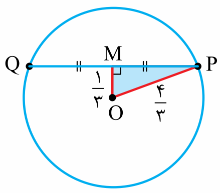


همان‌طور که در شکل می‌بینید $SH=۲$ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع STV است و با توجه به درس‌نامه داریم:

$R=\frac{۲}{۳}SH \Rightarrow R=\frac{۲}{۳}\times۲=\frac{۴}{۳}$

ضمن آن‌که: $OM+MS=R \Rightarrow OM+۱=\frac{۴}{۳} \Rightarrow OM=\frac{۱}{۳}$

برای محاسبهٔ طول وتر PQ از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OMP استفاده می‌کنیم، داریم:

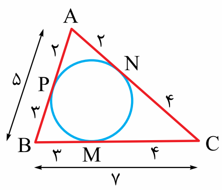


$MP=\sqrt{OP^۲-OM^۲}$

$\Rightarrow MP=\sqrt{\frac{۱۶}{۹}-\frac{۱}{۹}}=\sqrt{\frac{۱۵}{۹}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$

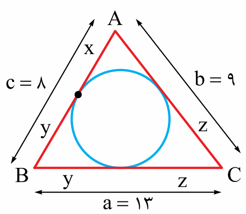
پس: $PQ=۲MP=\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۳}$

۲۱۸. **۳** $BC=۷$ و $BM=۳$ است، پس $MC=۴$. حالا به خاطر برابری مماس‌ها می‌رسیم به $BP=BM=۳$ و $CN=CM=۴$. می‌دانیم $AB=۵$ و این یعنی $AP=۲$ و در نتیجه $AN=AP=۲$.



پس محیط مثلث برابر است با: $۵+۶+۷=۱۸$

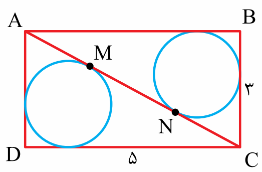
۲۱۹. **۱** محیط این مثلث برابر است با $۲P=۱۳+۹+۸=۳۰$، پس $P=۱۵$؛ از طرفی در درس‌نامه گفتیم که:



$\begin{cases} x=P-a \Rightarrow x=۱۵-۱۳=۲ \\ y=P-b \Rightarrow y=۱۵-۹=۶\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

۲۲۰. **۱** فرض کنیم محیط مثلث‌های همنهشت ABC و ADC برابر ۲P باشد. در مثلث ABC می‌توانیم بگوییم:

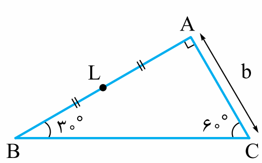


$NC=P-AB=P-۵$ و $AN=P-BC=P-۳$

به‌خاطر همنهشتی دو مثلث ABC و ADC داریم $AM=NC$ است، پس $AM=P-۵$ و این یعنی:

$MN=AN-AM=P-۳-(P-۵)=۲$

۲۲۱. **۳** با توجه به شکل، طول ضلع روبه‌روی زاویهٔ ۳۰° را b در نظر می‌گیریم، داریم:

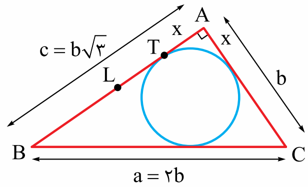


$\tan۳۰^\circ=\frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{b}{AB} \Rightarrow AB=b\sqrt{۳}$

$\Rightarrow AL=\frac{۱}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}b$

$\sin ۳۰^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{b}{BC}$

$\Rightarrow BC = ۲b$



پس: نصف محیط: $P = \frac{۱}{۲}(b + b\sqrt{۳} + ۲b) = \frac{۱}{۲}(۳b + b\sqrt{۳})$

از طرفی می‌دانیم $x = P - a$؛ پس:

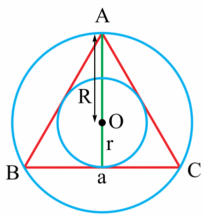
$$x = AT = \frac{۱}{۲}(۳b + b\sqrt{۳}) - ۲b \Rightarrow AT = \frac{۱}{۲}(b\sqrt{۳} - b)$$

بنابراین: $TL = AL - AT$

$$\Rightarrow TL = \frac{\sqrt{۳}}{۲}b - \frac{۱}{۲}(b\sqrt{۳} - b) \Rightarrow TL = \frac{b}{۲}$$

طول میانهٔ وارد بر وتر هم برابر با b است؛ یعنی طول TL برابر با نصف طول میانهٔ وارد بر وتر است.

۲۲۲. ۲ **راه اول:** در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مرکز دایره‌های محیطی و محاطی داخلی و نقطهٔ همرسی میانه‌ها بر هم منطبق‌اند. همچنین می‌دانیم که در هر مثلث، میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند؛ بنابراین می‌توان گفت که شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع، دو برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن است؛ لذا خواهیم داشت:

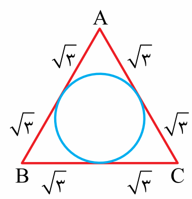


$$R = ۲r \Rightarrow \frac{S_{محیطی}}{S_{محاطی}} = \frac{\pi R^۲}{\pi r^۲} = \frac{۴r^۲}{r^۲} = ۴$$

راه دوم: اگر از فرمول‌های $R = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ و $r = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$ استفاده کنید هم به همین نتیجه می‌رسید:

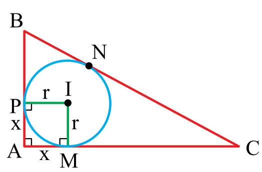
$$\frac{\pi R^۲}{\pi r^۲} = \frac{R^۲}{r^۲} = \frac{\frac{۳}{۹}}{\frac{۳}{۳۶}} = \frac{۳۶}{۹} = ۴$$

۲۲۳. ۱ مطابق شکل، یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $a = ۲\sqrt{۳}$ داریم؛ پس همان‌طور که در درسنامه گفتیم:



$$r = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a = \frac{\sqrt{۳}}{۶}(۲\sqrt{۳}) = ۱$$

۲۲۴. ۳ رابطهٔ $r = \frac{S}{P}$ برای همهٔ چندضلعی‌های محیطی برقرار است. حالا در مثلث قائم‌الزاویه $S = \frac{bc}{۲}$ و در نتیجه $r = \frac{bc}{۲P}$. این یعنی $۲r = \frac{bc}{P}$؛ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۴ درست هستند.



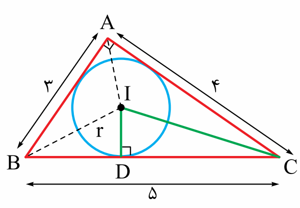
حالا به این شکل نگاه کنید. در درسنامه گفته بودیم که چهارضلعی APIM مربع است؛ پس: $r = x = P - a$

پس: $r = P - a \Rightarrow ۲r = ۲P - ۲a \Rightarrow ۲r = a + b + c - ۲a$

$= b + c - a$

این هم از درستی ۲ .

۲۲۵. ۳ نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی، همان مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است. با توجه به شکل، باید طول IC را به دست آوریم، داریم:



$$۲P = ۳ + ۴ + ۵ \Rightarrow P = ۶$$

می‌دانیم: $CD = P - AB \Rightarrow CD = ۶ - ۳ = ۳$

از طرفی $S = \frac{۱}{۲}AB \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ = ۶$ و $r = \frac{S}{P}$؛ پس:

$$r = \frac{۶}{۶} = ۱ \Rightarrow ID = ۱$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ICD قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$IC = \sqrt{ID^۲ + CD^۲} \Rightarrow IC = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$$

۲۲۶. ۳ ضلع‌های مثلث را a، b و c = ۸ در نظر می‌گیریم که a طول وتر آن است. در درسنامه گفتیم که در مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر a داریم $r = P - a$؛ پس:

$$۳ = \frac{a + b + ۸}{۲} - a \Rightarrow ۳ = \frac{b + ۸ - a}{۲} \Rightarrow a - b = ۲ \ (*)$$

از طرفی طبق قضیهٔ فیثاغورس:

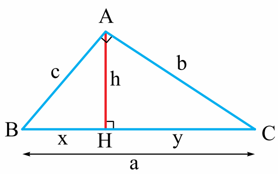
$$a^۲ = b^۲ + ۸^۲ \Rightarrow a^۲ - b^۲ = ۶۴ \Rightarrow (a - b)(a + b) = ۶۴$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲(a + b) = ۶۴ \Rightarrow a + b = ۳۲$$

$$\xrightarrow{(*)} \begin{cases} a + b = ۳۲ \\ a - b = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۷ \\ b = ۱۵ \end{cases}$$

۲۲۷. ۴ از سال قبل به یاد داریم که در مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را بکشیم، دو مثلث قائم‌الزاویه، متشابه با مثلث اصلی به دست می‌آید. حالا سه مثلث قائم‌الزاویه داریم که بین هر سه جزء متناظر در مثلث‌های ABH، ABC و ACH رابطهٔ فیثاغورس برقرار است؛ پس در این‌جا $r^۲ = r_۱^۲ + r_۲^۲$ یعنی $r = ۱۰$.

اگر اثباتش را می‌خواهید، دقت کنید: $r = \frac{S}{P}$



مثلث‌های ABH و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه $\frac{c}{a}$ است؛ پس:

$$S_۱ = (\frac{c}{a})^۲ S \ , \ P_۱ = (\frac{c}{a})P \Rightarrow r_۱ = (\frac{c}{a})r$$

به همین ترتیب می‌رسیم به $r_۲ = (\frac{b}{a})r$. حالا برویم سراغ رابطهٔ فیثاغورس:

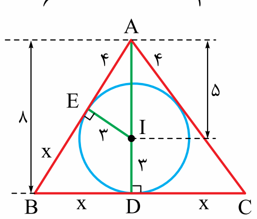
$$r_۱^۲ + r_۲^۲ = (\frac{c}{a})^۲ r^۲ + (\frac{b}{a})^۲ r^۲ = r^۲(\frac{c^۲ + b^۲}{a^۲}) = r^۲(\frac{a^۲}{a^۲}) = r^۲$$

۲۲۸. ۲ می‌دانیم $r = \frac{S}{P}$، همچنین:

$$\begin{cases} S = \frac{۱}{۲}a.h_a \\ P = \frac{۱}{۲}(a + b + c) \end{cases} \xrightarrow{r = \frac{۱}{۳}h_a} \frac{۱}{۳}h_a = \frac{\frac{۱}{۲}a.h_a}{\frac{۱}{۲}(a + b + c)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۶}(a + b + c) = \frac{۱}{۲}a \xrightarrow{\times ۶} a + b + c = ۳a \Rightarrow b + c = ۲a$$

۲۲۹. ۲ **راه اول:** با توجه به شکل، از آن‌جا که مثلث ABC متساوی‌الساقین است، طول مماس‌های رسم‌شده از دو سر قاعده بر دایرهٔ محاطی داخلی با هم برابرند که طول آن‌ها را x در نظر گرفته‌ایم.



از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEI، طول وتر ۵ و یک ضلع زاویهٔ قائمه ۳ است، پس ضلع دیگر قائمه می‌شود AE = ۴ .

حال از رابطهٔ $r = \frac{S}{P}$ استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{۱}{۲}AD.BC \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲x = ۸x$$

$$۲P = AB + AC + BC \Rightarrow P = \frac{(۴+x)+(۴+x)+۲x}{۲} = ۴+۲x$$

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow ۳ = \frac{۸x}{۴+۲x} \Rightarrow ۸x = ۱۲+۶x \Rightarrow x = ۶$$

$$\Rightarrow BC = ۲x = ۱۲$$

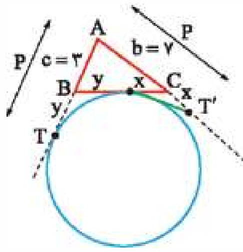
راه دوم: با توجه به شکل، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AEI و ADB در زاویهٔ حادهٔ A مشترک‌اند، پس بنا به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:

$$\overset{\Delta}{AEI} \sim \overset{\Delta}{ADB} \Rightarrow \frac{۳}{x} = \frac{۵}{۴+x} \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow BC = ۱۲$$

۲۳۰. **۴** دقت کنید که دایرهٔ رسم‌شده، برای مثلث ABC، دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع BC و امتداد دو ضلع AB و AC است و در درس‌نامه گفتیم که طول مماس‌های رسم‌شده از رأس A بر این دایره، نصف محیط مثلث است؛ پس:

$$AP = AQ = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$$

۲۳۱. **۱** با توجه به شکل و آن‌چه در درس‌نامه گفتیم، داریم $AT = AT' = P$.



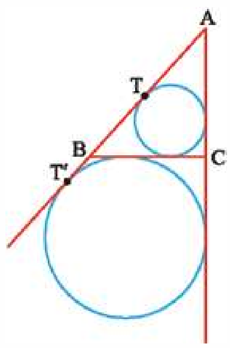
$$۲P = a+b+c$$

$$\Rightarrow ۲P = ۵+۷+۳ \Rightarrow P = ۷/۵$$

از نقطهٔ C دو مماس بر دایره رسم شده که طول آن‌ها را x و از نقطهٔ B دو مماس بر دایره رسم شده که طول آن‌ها را y در نظر گرفته‌ایم. با توجه به شکل، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = P-b = ۷/۵-۷ = ۰/۵ \\ y = P-c = ۷/۵-۳ = ۴/۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۰/۵}{۴/۵} = \frac{۱}{۹}$$

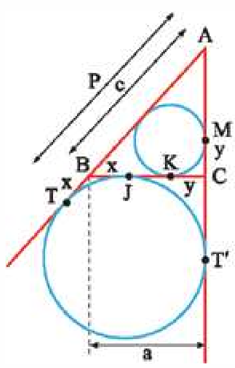
۲۳۲. **۱** مطابق شکل، TT' مماس‌مشترک خارجی دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر BC و امتدادهای AB و AC است. همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم:



$$\begin{cases} AT' = P \\ AT = P - BC \end{cases}$$

پس: $TT' = AT' - AT = P - (P - BC) = BC = a$

۲۳۳. **۳** کاملاً مشابه سؤال قبل، با این تفاوت که در سؤال قبل طول مماس‌مشترک خارجی دو دایره را می‌خواستیم و در این‌جا طول مماس‌مشترک داخلی آن‌ها را. با توجه به آن‌چه در درس‌نامه گفتیم، داریم $AT = P$، پس $x = P - c$. از طرفی y، طول مماس رسم‌شده از رأس c بر دایرهٔ محاطی داخلی است، پس طبق آن‌چه در درس‌نامهٔ دایرهٔ محاطی داخلی گفتیم $y = P - c$؛ پس:

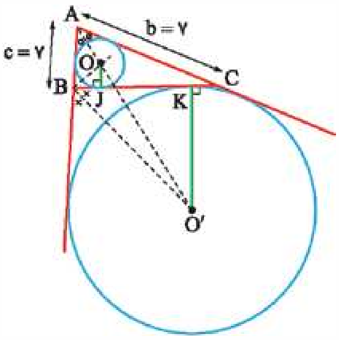


$$JK = BC - (BJ + CK) = a - (P - c + P - c)$$

$$= (a + ۲c) - ۲P = (a + ۲c) - (a + b + c) = c - b$$

چون در شکل ما $c > b$، به $JK = c - b$ رسیدیم، اما اگر شکل را طوری بکشیم که $b > c$، به $b - c$ می‌رسیم. پس در حالت کلی می‌گوییم $JK = |b - c|$.

۲۳۴. **۳** این سؤال کاملاً مشابه سؤال قبل است، اما با ادبیات پیچیده بیان شده! بنا به آن‌چه سؤال گفته و با توجه به شکل، نقطهٔ O محل همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن است؛ پس اگر J نقطهٔ تماس این دایره با ضلع BC باشد، OJ بر BC عمود است؛ یعنی J تصویر قائم O بر BC است و نقطهٔ O' محل همرسی نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C و نیمساز داخلی زاویهٔ A و مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC است؛

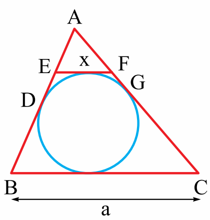


پس اگر K نقطهٔ تماس این دایره با ضلع BC باشد $O'K$ بر BC عمود است، یعنی K تصویر قائم O' بر BC است؛ پس JK تصویر قائم پاره‌خط OO' بر BC است. حالا از نتیجهٔ سؤال قبل استفاده می‌کنیم:

$$JK = |b - c| = |۷ - ۵| = ۲$$

۲۳۵. **۲** محیط مثلث AEF را $۲P'$ و محیط مثلث ABC را ۲P در نظر می‌گیریم.

در درس‌نامه گفتیم که در مثلث ABC داریم $AD = P - a$ و در مثلث AEF داریم $AD = P'$؛ پس: $P' = P - a$



به‌خاطر آن که $EF \parallel BC$، دو مثلث AEF و ABC متشابه‌اند و می‌دانیم نسبت تشابه دو مثلث متشابه، با نسبت محیط‌های آن‌ها برابر است؛ پس اگر دو طرف تساوی $P' = P - a$ را بر P تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{P'}{P} = \frac{P-a}{P} = ۱ - \frac{a}{P} = k \text{ (نسبت تشابه)}$$

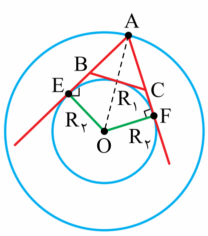
در دو مثلث متشابه AEF و ABC، نسبت EF به BC (که دو ضلع متناظرند) برابر با نسبت تشابه است:

$$\frac{EF}{BC} = k \Rightarrow \frac{x}{a} = \left|۱ - \frac{a}{P}\right| \Rightarrow x = (۱ - \frac{a}{P})a$$

داریم $a = ۳$ و $P = \frac{۲+۳+۴}{۲} = ۴/۵$؛ پس:

$$x = (۱ - \frac{۳}{۴/۵}) \times ۳ = (۱ - \frac{۶}{۹}) \times ۳ = \frac{۱}{۳} \times ۳ = ۱$$

۲۳۶. **۱** ابتدا توجه کنید که اگر شعاع دایرهٔ بزرگ $OA = R_1$ و شعاع دایرهٔ کوچک $OE = R_2$ باشد، طول مماس رسم‌شده از هر نقطه مانند A واقع بر دایرهٔ بزرگ، بر دایرهٔ کوچک، برابر با $AE = AF = \sqrt{R_1^2 - R_2^2}$ است که مقدار ثابتی است.

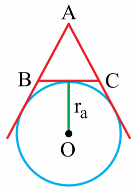


از طرفی دایرهٔ کوچک، دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC در مثلث ABC است و طبق آن‌چه در درس‌نامه گفتیم طول مماس رسم‌شده از نقطهٔ A بر آن برابر با P (نصف محیط $\overset{\Delta}{ABC}$) است، پس مقدار P ثابت است؛ بنابراین محیط مثلث، یعنی ۲P هم مقدار ثابتی است، اما مساحت مثلث ثابت نیست. مثلاً در شکل سؤال، هر چه B به E نزدیک‌تر شود، C هم به A نزدیک‌تر می‌شود و مساحت مثلث ABC به صفر نزدیک‌تر می‌شود.

۲۳۷. ۲ از فرمول محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{۱۵+۱۴+۱۳}{۲}=۲۱ \\ S=۸۴\end{array}\right\} \Rightarrow r_b=\frac{S}{P-b}=\frac{۸۴}{۲۱-۱۴}=۱۲$$

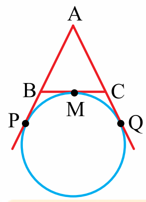
۲۳۸. ۱ می‌دانیم شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر هر ضلع مثلث ABC، با مساحت S و محیط ۲P برابر است با:



$$r_a=\frac{S}{P-a}\ ,\ r_b=\frac{S}{P-b}\ ,\ r_c=\frac{S}{P-c}$$

$$BC>AC>AB \xrightarrow{\times(-۱)} -BC<-AC<-AB$$

$$\xrightarrow{+P} P-BC<P-AC<P-AB$$



$$\Rightarrow \frac{S}{P-BC}>\frac{S}{P-AC}>\frac{S}{P-AB}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{P-a}>\frac{S}{P-b}>\frac{S}{P-c}$$

$$r_a>r_b>r_c$$

نکته: در حالت کلی در مثلث ABC، اگر $a>b>c$، آن‌گاه:

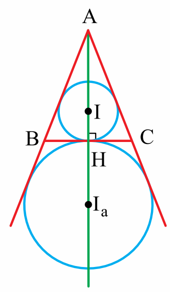
$$r_a>r_b>r_c>r$$

۲۳۹. ۱ دقت کنید که این مثلث، قائم‌الزاویه است، چون $۱۳^۲=۱۲^۲+۵^۲$؛ پس مساحت مثلث می‌شود $S=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۵=۳۰$ و در این مثلث $P=\frac{۱۳+۱۲+۵}{۲}=۱۵$.

در سؤال قبل نشان دادیم که بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی بر بزرگ‌ترین ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس است، پس ما r_c را می‌خواهیم:

$$r_c=\frac{S}{P-c}=\frac{۳۰}{۱۵-۱۳}=۱۵$$

۲۴۰. ۳ ابتدا شکل را با توجه به اطلاعات مسئله رسم می‌کنیم.



نقاط I و I_a روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارند. از طرفی چون خط‌المرکزین دو دایره یعنی II_a بر BC عمود است، پس در مثلث ABC پاره‌خط AH هم نیمساز و هم ارتفاع می‌باشد؛ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

با توجه به متساوی‌الساقین‌بودن مثلث ABC می‌توان فرض کرد $AB=AC=x$ و $BC=a$ می‌باشد؛ بنابراین از آن‌جایی که نسبت شعاع‌های دو دایره برابر ۱/۵ است، داریم:

$$\frac{r_a}{r}=۱/۵ \Rightarrow \frac{\frac{S}{P-a}}{\frac{S}{P}}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{P}{P-a}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲P=۳P-۳a \Rightarrow P=۳a \xrightarrow{P=\frac{x+x+a}{۲}} \frac{x+x+a}{۲}=۳a$$

$$\Rightarrow ۲x+a=۶a \Rightarrow ۲x=۵a \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر مثلث، ۲/۵ برابر طول ضلع کوچک‌تر مثلث است.

۲۴۱. ۴ ۱ را که در درس‌نامه ثابت کردیم درست است.

برای اثبات درستی ۲ دقت کنید که اگر مساحت مثلث S باشد، داریم $S=\frac{۱}{۲}a.h_a$ یا به بیان دیگر $h_a=\frac{۲S}{a}$، به همین ترتیب $h_b=\frac{۲S}{b}$ و $h_c=\frac{۲S}{c}$؛ پس:

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}-\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}=\frac{a+b+c}{۲S}$$

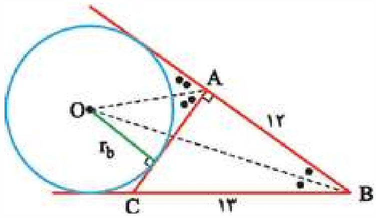
$$=\frac{۲P}{۲S}=\frac{۱}{\frac{S}{P}}=\frac{۱}{r}$$

۳ هم درست است، چون:

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}-\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}-\frac{c}{۲S}=\frac{a+b-c}{۲S}$$

$$=\frac{(a+b+c)-۲c}{۲S}=\frac{۲P-۲c}{۲S}=\frac{P-c}{S}=\frac{۱}{\frac{S}{P-c}}=\frac{۱}{r_c}$$

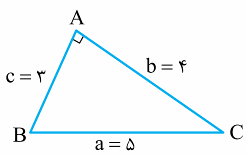
۲۴۲. ۱ اولین چیزی که از سؤال می‌فهمیم این است که طول وتر این مثلث ۱۳ است، چون $۱۳^۲=۵^۲+۱۲^۲$. مطلب دومی که می‌فهمیم این است که O مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع کوچک یعنی $b=۵$ است و مطلب سوم این است که خواستهٔ سؤال (یعنی فاصلهٔ O از ضلع کوچک‌تر) همان شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع $b=۵$ و امتدادهای دو ضلع دیگر است.



می‌دانیم $r_b=\frac{S}{P-b}$؛ پس:

$$\left\{\begin{array}{l} S=\frac{۱}{۲}AC.BC \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times۵\times۱۲=۳۰ \\ P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۱۲+۵+۱۳}{۲}=۱۵\end{array}\right. \Rightarrow r_b=\frac{۳۰}{۱۵-۵}=۳$$

۲۴۳. ۱ **راه اول:** بهترین کار این است یک مثلث قائم‌الزاویهٔ خاص را بررسی کنیم و ببینیم به کدام گزینه می‌خورد.



$$S=\frac{۱}{۲}bc=۶\ ,\ P=\frac{۳+۴+۵}{۲}=۶$$

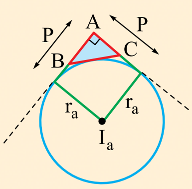
پس:

$$r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{۶}{۶-۵}=۶\ ,\ r_b=\frac{S}{P-b}=\frac{۶}{۶-۴}=۳$$

داریم $r_a+r_b=۹$ که با توجه به گزینه‌ها، برابر با $a+b$ است.

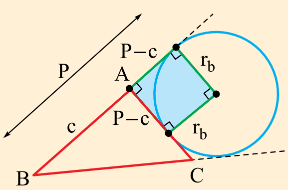
راه دوم: یک نکته در مورد دایره‌های محاطی خارجی مثلث قائم‌الزاویه بدانید:

نکته: در حالت کلی در مثلث قائم‌الزاویه، چهارضلعی رنگی در شکل مقابل مربع است؛ بنابراین:



$$\underset{\text{شعاع دایرهٔ محاطی نظیر وتر}}{\underset{\downarrow}{r_a}}=P$$

چهارضلعی رنگی در شکل مقابل مربع است؛ بنابراین:



$$\underset{\text{شعاع دایرهٔ محاطی نظیر ضلع قائمهٔ b}}{\underset{\downarrow}{r_b}}=P-c$$

پس ما اگر r_a+r_b را بخواهیم، داریم:

$$r_a+r_b=P+(P-c)=۲P-c=(a+b+c)-c=a+b$$

۲۴۴. ۴ مثلث داده‌شده متساوی‌الساقین است، پس دایرهٔ محاطی داخلی، در وسط قاعده بر آن مماس است و کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی آن، دایرهٔ