

## ۱ فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

۶	درس اول: آشنایی با منطق ریاضی
۱۴	درس دوم: جبر مجموعه‌ها
۲۲	پاسخ‌های تشریحی

## ۲ فصل دوم: احتمال

۴۸	درس اول: مبانی احتمال
۵۹	درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس
۶۱	درس سوم: احتمال شرطی
۶۹	درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته
۷۲	پاسخ‌های تشریحی

## ۳ فصل سوم: آمار توصیفی

۱۰۲	درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها
۱۰۷	درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
۱۱۳	درس سوم: معیارهای پراکندگی
۱۲۱	پاسخ‌های تشریحی

## ۴ فصل چهارم: آمار استنباطی

۱۴۷	درس اول: گردآوری داده‌ها
۱۵۱	درس دوم: برآورد
۱۵۸	پاسخ‌های تشریحی

## ۵ فصل پنجم پایه دهم: شمارش بدون شمردن

۱۷۲	درس اول: شمارش
۱۷۴	درس دوم: جایگشت
۱۷۷	درس سوم: ترکیب
۱۸۳	پاسخ‌های تشریحی

(خارج ۱۴۰۱)

۳۹ ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$  در کدام حالت زیر درست است؟

- (۱) p درست، q نادرست، r درست  
 (۲) p نادرست، q نادرست، r نادرست  
 (۳) p درست، q درست، r نادرست  
 (۴) p نادرست، q درست، r نادرست

۴۰ گزاره  $((\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow p$  در کدام حالت نادرست است؟

- (۱) p و q درست  
 (۲)  $\sim p$  و  $\sim q$  نادرست  
 (۳) p و  $\sim q$  درست  
 (۴) p و q  $\sim$  نادرست

ترکیب دو شرطی به صورت  $(p \Leftrightarrow q)$  نوشته می‌شود؛ این گزاره زمانی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.

۴۱ اگر گزاره  $p \Leftrightarrow q$  دارای ارزش درست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره  $\sim p \Leftrightarrow q$  کدام است؟

- (۱) درست  
 (۲) نادرست  
 (۳) هم‌ارز با گزاره p  
 (۴) هم‌ارز با گزاره  $\sim p$

۴۲ در جدول ارزش گزاره زیر، A، B و C به ترتیب کدام است؟

p	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow (p \wedge q)$
A	B	ن	C

- (۱) د - ن - د  
 (۲) ن - د - د  
 (۳) ن - د - ن  
 (۴) د - د - ن

۴۳ می‌دانیم گزاره  $(p \vee q) \Leftrightarrow r$  حتماً ارزش درست دارد. کدام گزینه در مورد گزاره‌ها نمی‌تواند درست باشد؟

- (۱) p و r هر دو درست و q نادرست  
 (۲) p و r هر دو نادرست و q درست  
 (۳) p و q و r هر سه نادرست  
 (۴) p و q و r هر سه درست

۴۴ اگر گزاره‌های  $p \Leftrightarrow q$  و  $p$  هر دو نادرست باشند، آن‌گاه ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱)  $p \Leftrightarrow (p \wedge q)$   
 (۲)  $\sim p \Leftrightarrow (\sim q \vee p)$   
 (۳)  $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$   
 (۴)  $q \Leftrightarrow (p \vee q)$

۴۵ کدام گزینه پیشنهاد مناسبی برای آن است که ارزش گزاره  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$  نادرست شود؟

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	ن
ن	ن	ن

۴۶ اگر گزاره درست، q نادرست و r دلخواه باشد، ارزش گزاره  $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$  برابر ارزش کدام گزاره است؟

- (۱) r  
 (۲) همیشه درست  
 (۳)  $\sim r$   
 (۴) همیشه نادرست

۴۷ اگر گزاره‌ای درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

- (۱)  $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee r$   
 (۲)  $\sim (p \wedge \sim q) \wedge r$   
 (۳)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$   
 (۴)  $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

چند تا سؤال جدید هم از ترکیب این بخش با فصل‌های دیگه ریاضی نوشتیم که میتونه توی کنکورهای آینده بیاد، به اونها توجه کنید.

۴۸ اگر ارزش گزاره  $(q \wedge r) \Rightarrow p$  نادرست باشد، به جای A، B و C باید کدام رابط‌های منطقی را قرار دهیم تا ارزش گزاره‌های  $p \Rightarrow \sim r$  و  $p \Rightarrow \sim q$  درست باشد؟

- (۱)  $\Rightarrow, \vee, \Rightarrow$   
 (۲)  $\wedge, \Leftrightarrow, \vee$   
 (۳)  $\vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow$   
 (۴)  $\Rightarrow, \wedge, \Leftrightarrow$

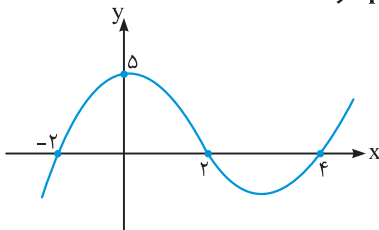
۴۹ گزاره‌های  $p: a^c > 0$  و  $q: b^c < 0$  و  $r: c > 0$  مفروض‌اند. اگر ارزش گزاره  $r \wedge (p \wedge q)$  درست باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $b + c > 0$   
 (۲)  $a + c < 0$   
 (۳)  $a \times c < 0$   
 (۴)  $b \times c < 0$

۵۰ نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل است. با توجه به گزاره‌های  $p: f(1)f(3) < 0$  و  $q: f(0) + f(5) > 0$

ارزش کدام گزاره زیر درست است؟

- (۱)  $p \Rightarrow r$   
 (۲)  $r \wedge q$   
 (۳)  $q \Leftrightarrow r$   
 (۴)  $p \vee r$



۵۱ دو گزاره p و q به صورت  $p: x + y = 0$  و  $q: 2x + 3y = -2$  هستند. اگر ارزش گزاره  $(\sim p \vee q) \Rightarrow \sim p$  نادرست باشد، مقدار  $x - 2y$  کدام است؟

- (۱) ۲  
 (۲) ۴  
 (۳) ۶  
 (۴) ۸

گزاره‌های  $p$ ،  $q$  و  $r$  به صورت زیر تعریف شده‌اند، کدام گزاره زیر ارزش نادرست دارد؟ **۵۲**

$$p: \sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8} \quad , \quad q: \sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{2} \quad , \quad r: \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \quad (۴) \quad p \Leftrightarrow (r \wedge q) \quad (۳) \quad r \Rightarrow (p \wedge q) \quad (۲) \quad q \Rightarrow (p \wedge r) \quad (۱)$$

### هم‌ارزی‌ها

به گزاره‌هایی که ارزش یکسان دارند، هم‌ارز می‌گوین. برای پیدا کردن هم‌ارزی‌ها باید قوانین بین اونها رو بلد باشین.

نقیض گزاره «عدد  $x$  اول است و رقم یکانش برابر با ۳ است.» کدام است؟ **۵۳**

- (۱) عدد  $x$  مرکب است و رقم یکانش برابر با ۳ نیست.  
 (۲) عدد  $x$  اول نیست یا رقم یکانش برابر با ۳ نیست.  
 (۳) عدد  $x$  اول نیست و رقم یکانش برابر با ۳ نیست.  
 (۴) عدد  $x$  مرکب است یا رقم یکانش برابر با ۳ نیست.

گزاره شرطی «اگر تو گریه کنی، من گریه خواهم کرد.» هم‌ارز کدام گزاره زیر است؟ **۵۴**

- (۱) تو گریه نمی‌کنی و من گریه می‌کنم.  
 (۲) تو گریه می‌کنی و من گریه می‌کنم.  
 (۳) تو گریه نمی‌کنی یا من گریه می‌کنم.  
 (۴) تو گریه می‌کنی یا من گریه می‌کنم.

در سؤالات زیر هم‌ارزی‌های مربوط به ترکیب‌های فصلی و عطفی رو بررسی می‌کنیم. در این سؤالات به قانون‌های دمورگان، جذب و توزیع‌پذیری

توجه ویژه‌ای کنید.

گزاره منطقی  $(p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim q)$  هم‌ارز با کدام گزاره زیر است؟ **۵۵**

$$p \quad (۱) \quad q \quad (۲) \quad F \quad (۳) \quad T \quad (۴)$$

کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی با گزاره  $[(\sim p \vee T) \wedge F] \vee [(p \vee T) \wedge \sim p]$  است؟ **۵۶**

$$p \quad (۱) \quad \sim p \quad (۲) \quad T \quad (۳) \quad F \quad (۴)$$

کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره  $[p \vee (p \wedge q)] \wedge [r \wedge (r \vee s)]$  است؟ **۵۷**

$$p \vee q \quad (۱) \quad p \wedge r \quad (۲) \quad \sim r \quad (۳) \quad \sim q \quad (۴)$$

گزاره  $[(p \wedge \sim r) \vee (q \wedge r)] \vee (p \vee \sim p)$  با کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟ **۵۸**

$$p \wedge q \quad (۱) \quad \sim (p \vee q) \quad (۲) \quad \text{همواره درست} \quad (۳) \quad \text{همواره نادرست} \quad (۴)$$

کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره  $[(p \wedge \sim q) \wedge p] \wedge [p \vee (p \wedge \sim q)]$  است؟ **۵۹**

$$p \wedge \sim q \quad (۱) \quad p \wedge q \quad (۲) \quad \sim p \wedge q \quad (۳) \quad \sim p \wedge \sim q \quad (۴)$$

کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره  $[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee q$  است؟ **۶۰**

$$\sim p \vee q \quad (۱) \quad \sim p \wedge q \quad (۲) \quad p \wedge q \quad (۳) \quad \sim q \quad (۴) \quad \text{همواره درست} \quad (۴)$$

ساده‌شده گزاره  $\sim p \wedge [(p \vee q) \vee (p \wedge q)]$  معادل کدام گزاره زیر است؟ **۶۱**

$$\sim p \wedge \sim q \quad (۱) \quad \sim p \wedge q \quad (۲) \quad p \wedge q \quad (۳) \quad \sim q \wedge p \quad (۴)$$

کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره  $[p \wedge \sim (p \wedge \sim q)] \vee \sim (p \wedge q)$  است؟ **۶۲**

$$p \vee q \quad (۱) \quad p \wedge q \quad (۲) \quad \sim p \vee q \quad (۳) \quad \text{همواره درست} \quad (۴)$$

کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی گزاره  $(p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [\sim p \wedge (\sim q \wedge r)]$  است؟ **۶۳**

(نوبت اول ۱۴۰۲)

$$q \quad (۱) \quad r \quad (۲) \quad r \vee p \quad (۳) \quad p \vee q \quad (۴)$$

اگر بخوایم هم‌ارز یک گزاره رو پیدا کنیم، وقتی توی گزاره ترکیب شرطی داریم، معمولاً باید ترکیب شرطی رو به ترکیب فصلی تبدیل کنیم.

(داخل ۹۸)

گزاره  $\sim (p \Rightarrow q)$  با کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟ **۶۴**

$$\sim p \vee q \quad (۱) \quad p \vee \sim q \quad (۲) \quad \sim p \wedge q \quad (۳) \quad p \wedge \sim q \quad (۴)$$

گزاره  $(p \wedge q) \Rightarrow p$  هم‌ارز کدام گزاره زیر است؟ **۶۵**

$$p \quad (۱) \quad q \quad (۲) \quad \text{همواره نادرست} \quad (۳) \quad \text{همواره درست} \quad (۴)$$

گزاره منطقی  $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee p)$  هم‌ارز با کدام گزاره زیر است؟ **۶۶**

$$p \quad (۱) \quad q \quad (۲) \quad F \quad (۳) \quad T \quad (۴)$$

(خارج ۹۸)

گزاره  $(p \wedge r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$  با کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟ **۶۷**

$$p \vee (q \wedge r) \quad (۱) \quad p \wedge (q \vee r) \quad (۲) \quad r \Rightarrow (p \wedge q) \quad (۳) \quad r \Rightarrow (p \vee q) \quad (۴)$$

۱۹۵ iQ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیرتهی باشند و  $(A \times B) - (B \times A) = \emptyset$ ، کدام مجموعه، مخالف تهی است؟

- (۱)  $(A \cup B) - (B \cap A)$  (۲)  $(B \times A) - (A \times B)$  (۳)  $A \cap B$  (۴)  $B - A$

۱۹۶ iQ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متمایز غیرتهی باشند. ساده شده عبارت  $A^c \cap [(A \times B) - (A \times (B \cap A))]$  به کدام صورت زیر است؟

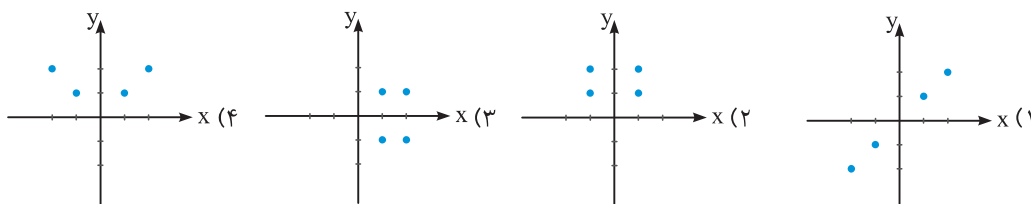
- (۱)  $A \times B$  (۲)  $(A - B) \times A$  (۳)  $\emptyset$  (۴)  $(A \cap B) \times B$

۱۹۷ iQ اگر  $A = \{1, 2\}$ ،  $B = \{3, 4\}$ ،  $C = \{2, 3, 5\}$  و  $D = \{4, 5, 6\}$ ، آنگاه  $(A \times B) \cap (C \times D)$  با کدام یک برابر است؟

- (۱)  $(B \cap C) \times (A \cap D)$  (۲)  $(A \cap B) \times (C \cap D)$  (۳)  $(A \cap C) \times (B \cap D)$  (۴)  $(A \times B) \cup (C \times D)$

نتایج حاصل ضرب دکارتی، با نمودار قابل نمایشه.

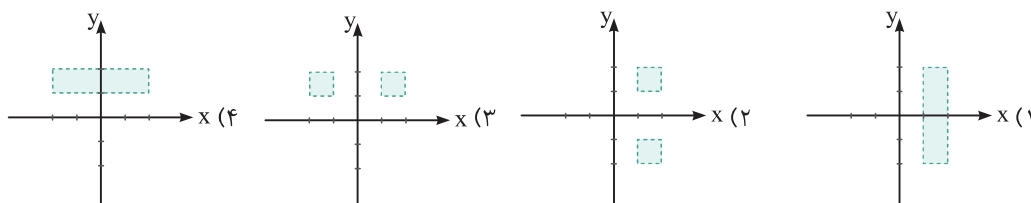
۱۹۸ اگر  $A = \{1, 2\}$  و  $B = \{-1, 1\}$  باشد، کدام نمودار زیر نمایش درستی از  $A \times B$  است؟



۱۹۹ اگر  $A = \{x \in P \mid x < 1\}$  و  $B = \{3, 4, 5\}$  باشد، چند عضو از  $A \times B$  روی نیمساز ربع اول واقع اند؟ (P مجموعه اعداد اول است.)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۰۰ نمودار  $B \times A$  با تعریف  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^2 < 4\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^3 < 8\}$  به کدام صورت زیر است؟



۲۰۱ اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$  و  $B = \{1, 3\}$  باشد، تعداد نقاط تلاقی نمودار  $A \times B$  و خط  $y - x - 5 = 0$  چه تعداد است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۲۰۲ اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 8 < 0\}$ ، مساحت ناحیه محدود به  $A \times B$  کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۲۰۳ اگر  $A = [2, 5]$  و  $B = \{3, 4\}$  باشد، مساحت ناحیه محصور به نمودار  $A \times B$  و  $B \times A$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰۴ iQ اگر  $A = \mathbb{R}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$  و  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - 5 = 0\}$ ، پس از رسم  $A \times B$  و  $A \times C$  در یک دستگاه مختصات، چند

خط افقی متمایز مشاهده می شود؟

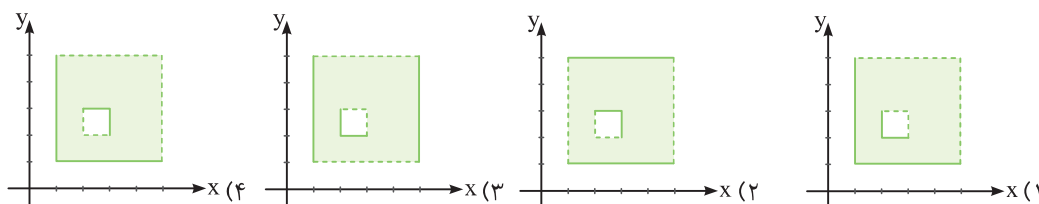
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) قابل تعیین نیست.

(خارج ۹۹)

۲۰۵ iQ اگر  $A = [1, 4]$  و  $B = (-1, 3]$  باشند، مساحت نمودار  $A \times A - B \times B$  در صفحه مختصات کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۶

۲۰۶ iQ اگر  $A = [1, 5]$  و  $B = (2, 3]$ ، آنگاه کدام گزینه نمودار مختصاتی  $A^c - B^c$  است؟



۲ ۴۴

گزاره دوشروطی  $p \Leftrightarrow q$  زمانی نادرست است که  $p$  و  $q$  دارای ارزش متفاوت باشند. چون  $p$  دارای ارزش نادرست است، بنابراین  $q$  دارای ارزش درست است.

**بررسی گزینه‌ها**

$$1 \quad p \Leftrightarrow (p \wedge q) \equiv F \Leftrightarrow \underbrace{(F \wedge T)}_F \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$$

$$2 \quad \sim p \Leftrightarrow (\sim q \vee p) \equiv T \Leftrightarrow \underbrace{(F \vee F)}_F \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$

$$3 \quad q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \equiv T \Leftrightarrow \underbrace{(T \vee F)}_T \equiv T \Leftrightarrow T \equiv T$$

$$4 \quad q \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv T \Leftrightarrow \underbrace{(F \vee T)}_T \equiv T \Leftrightarrow T \equiv T$$

بنابراین تنها گزینه ۲ دارای ارزش نادرست است.

۲ ۴۵

**بررسی گزینه‌ها**

$$1 \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \equiv \underbrace{(T \wedge T)}_T \Leftrightarrow \underbrace{(T \wedge T)}_T \equiv T \Leftrightarrow T \equiv T$$

$$2 \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \equiv \underbrace{(T \wedge F)}_F \Leftrightarrow \underbrace{(T \wedge T)}_T \equiv F \Leftrightarrow T \equiv F$$

$$3 \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \equiv \underbrace{(F \wedge F)}_F \Leftrightarrow \underbrace{(F \wedge F)}_F \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$$

$$4 \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \equiv \underbrace{(F \wedge T)}_F \Leftrightarrow \underbrace{(F \wedge T)}_F \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$$

بنابراین طبق داده‌های گزینه ۲، ارزش گزاره داده شده، نادرست خواهد شد.

۳ ۴۶

گزاره  $p$  درست و  $q$  نادرست و در نتیجه گزاره  $p \wedge q$  نادرست است. هم‌چنین گزاره  $p \Leftrightarrow r$  با توجه به درست بودن  $p$ ، هم‌ارز با گزاره  $r$  است. بنابراین گزاره  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$  هم‌ارز با گزاره  $r \Rightarrow F$  خواهد بود که در صورت درست بودن  $r$ ، نادرست و در صورت نادرست بودن  $r$ ، درست خواهد بود. پس با گزاره  $\sim r$  هم‌ارز می‌باشد.

$$(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv \underbrace{(r \Leftrightarrow T)}_r \Rightarrow \underbrace{(T \wedge F)}_F \equiv r \Rightarrow F \equiv \sim r$$

۱ ۴۷

**بررسی گزینه‌ها**

$$1 \quad (p \Leftrightarrow \sim q) \vee r \equiv \underbrace{(T \Leftrightarrow T)}_T \vee r \equiv T$$

$$2 \quad \sim (p \wedge \sim q) \wedge r \equiv \sim \underbrace{(T \wedge T)}_T \wedge r \equiv F \wedge r \equiv F$$

$$3 \quad (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q) \equiv \underbrace{(T \Leftrightarrow F)}_F \Leftrightarrow \underbrace{(T \Rightarrow T)}_T \equiv F \Leftrightarrow T \equiv F$$

$$4 \quad (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \equiv \underbrace{(F \vee T)}_F \Leftrightarrow \sim \underbrace{(T \vee F)}_T \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$

بنابراین گزاره اول دارای ارزش درست است.

۳ ۴۸

چون  $(q \wedge r) \Rightarrow p$  نادرست است پس  $p \equiv F$  و  $q \wedge r \equiv T$  بوده است.  $q \wedge r$  زمانی درست است که هر دو درست باشند، بنابراین  $q \equiv T$  و  $r \equiv T$ . با توجه به گزینه‌ها، تنها در گزینه ۳ هر سه عبارت درست‌اند.

$$r \vee p, p \Leftrightarrow \sim r, p \Rightarrow q$$

۴ ۴۹

درست بودن  $r \wedge (p \wedge q)$  به معنی درست بودن تمام گزاره‌ها است. چون  $c > 0$  است،  $b^c < 0$  در صورتی رخ می‌دهد که  $b$  منفی و  $c$  عددی فرد باشد. و  $a^c > 0$  در صورتی درست است که  $a$  مثبت باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

توجه کنید چون مقدار  $c, b$  برای ما مشخص نیست، راجع به گزینه ۱ نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۴ ۵۰

با توجه به نمودار توابع  $p \equiv T$  و  $q \equiv T$  و  $r \equiv F$  است. بنابراین گزینه ۴ درست است.

$$p \vee r \equiv T$$

$$\begin{matrix} T & F \\ T & F \end{matrix}$$

۳ ۵۱

از نادرست بودن  $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$  نتیجه می‌گیریم  $\sim p$  نادرست بوده پس  $p \equiv T$  و  $\sim p \vee q$  درست بوده  $q \equiv T$  است. برای دو گزاره درست  $p$  و  $q$  داریم:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$x - 2y = 2 - 2(-2) = 6$$

۲ ۵۲

با توجه به قوانین رادیکال‌ها ارزش  $p$  و  $q$  نادرست و  $r$  درست است بنابراین گزینه ۲ نادرست است.

**بررسی گزینه‌ها**

۱ چون  $q$  نادرست است، به انتفای مقدم کل گزاره درست است.

۳  $p$  گزینه‌ای نادرست و  $(r \wedge q)$  گزاره‌ای نادرست است و ارزش کل گزاره درست خواهد بود.

۴ چون  $p$  نادرست است به انتفای مقدم کل گزاره درست است.

**۱۰ هم‌ارزی‌های منطقی**

اگر ارزش گزاره‌های دو ستون در جدول ارزش گزاره‌ها یکسان باشد، در این صورت آن دو گزاره هم‌ارز منطقی نامیده می‌شوند. به همواره درست یا همواره نادرست بودن گزاره‌های زیر دقت کنید:

$$\begin{array}{ll} p \vee \sim p \equiv T & p \Rightarrow T \equiv T \\ p \wedge \sim p \equiv F & F \Rightarrow p \equiv T \\ p \vee T \equiv T & p \Leftrightarrow p \equiv T \\ p \wedge F \equiv F & p \Leftrightarrow \sim p \equiv F \end{array}$$

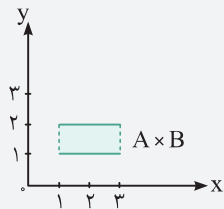
**مهم‌ترین قوانین هم‌ارزی**

قوانین دمورگان:

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

**۲۶ نمودار ضرب دکارتی**

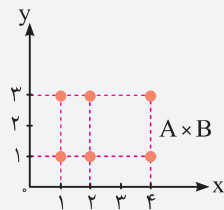
برای رسم نمودار ضرب دکارتی  $A \times B$ ، باید اعضای  $A$  را روی محور  $x$ ها و اعضای  $B$  را روی محور  $y$ ها در نظر بگیریم. حال چند حالت مهم خواهیم داشت:



(۱)  $A$  و  $B$  هر دو بازه‌ای

$A \times B$  سطح یک مربع یا مستطیل

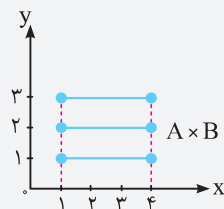
$$A = (1, 3), B = [1, 2]$$



(۲)  $A$  و  $B$  هر دو چند عضوی

$A \times B$  چندین نقطه

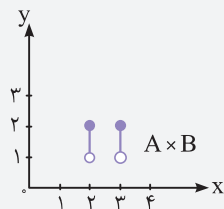
$$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 3\}$$



(۳)  $A$  بازه‌ای و  $B$  چند عضوی

$A \times B$  چند پاره خط موازی محور  $x$ ها

$$A = [1, 4], B = \{1, 2, 3\}$$



(۴)  $A$  چند عضوی و  $B$  بازه‌ای

$A \times B$  چند پاره خط موازی محور  $y$ ها

$$A = \{2, 3\}, B = (1, 2]$$

۳ ۱۹۸

ابتدا مجموعه  $A \times B$  را تشکیل می‌دهیم:

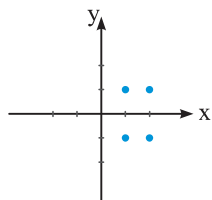
$$A \times B = \{(1, 1), (1, -1), (2, 1), (2, -1)\}$$

اکنون نمودار  $A \times B$  را رسم می‌کنیم:

بنابراین نمودار گزینه ۳ نمایش درستی از

مجموعه  $A \times B$  است.

۱ ۱۹۹



ابتدا مجموعه  $A$  را با اعضایش مشخص می‌کنیم.  $A = \{2, 3, 5, 7\}$  اگر اعضای مجموعه  $A \times B$  روی نیمساز ربع اول واقع باشند، باید روی خط  $y = x$  واقع باشند، یعنی مؤلفه اول و دوم آن‌ها باید با هم برابر باشد.

در مجموعه  $A \times B$ ، فقط اعضای  $(5, 5)$  و  $(3, 3)$  دارای مؤلفه اول و دوم یکسان‌اند. بنابراین ۲ عضو از مجموعه  $A \times B$  روی نیمساز ربع اول واقع است.

۳ ۱۹۴

اگر  $M$  و  $N$  دو مجموعه باشند، از تساوی  $M \times N = N \times M$  می‌توان نتیجه گرفت:

$$(M = N) \vee (M = \emptyset) \vee (N = \emptyset)$$

برای رابطه صورت سؤال داریم:

$$A \times (B - C) = \underbrace{(B \cap C')}_{(B-C)} \times A \xrightarrow{A \neq \emptyset} (A = B - C) \text{ یا } (B - C = \emptyset)$$

$$\Rightarrow (A = B - C) \text{ یا } (B \subseteq C)$$

۳ ۱۹۵

می‌دانیم اگر  $M$  و  $N$  دو مجموعه غیرتهی باشند، آنگاه از تساوی  $M \times N = N \times M$  می‌توان نتیجه گرفت  $M = N$  است.

$$(A \times B) - (B \times A) = \emptyset \Rightarrow A \times B = B \times A \xrightarrow[\substack{A \neq \emptyset \\ B \neq \emptyset}]{A \neq \emptyset} A = B$$

بررسی گزینه‌ها

۱  $(A \cup B) - (B \cap A) = \emptyset$

۲  $(B \times A) - (A \times B) = \emptyset$

۳  $A \cap B = A = B \neq \emptyset$

۴  $B - A = \emptyset$

بنابراین مجموعه گزینه ۳ مخالف تهی است.

۳ ۱۹۶

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} [(A \times B) - (A \times (B \cap A))] \cap A^c &= [A \times (B - (B \cap A))] \cap A^c \\ &= [A \times (B \cap (B \cap A)')] \cap A^c = [A \times (B \cap (B' \cup A'))] \cap A^c \\ &= [A \times (B \cap A')] \cap (A \times A) = A \times [(B \cap A') \cap A] = A \times \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

۳ ۱۹۷

ابتدا مجموعه خواسته شده را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (A \times B) \cap (C \times D) &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \cap \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), \\ & (3, 5), (3, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\} = \{(2, 4)\} \end{aligned}$$

بررسی گزینه‌ها

۱  $(B \cap C) \times (A \cap D) = \{3\} \times \emptyset = \emptyset$

۲  $(A \cap B) \times (C \cap D) = \emptyset \times \{5\} = \emptyset$

۳  $(A \cap C) \times (B \cap D) = \{2\} \times \{4\} = \{(2, 4)\}$

۴  $(A \times B) \cup (C \times D) = \{(1, 3), \dots, (2, 4), (2, 6), \dots, (5, 6)\}$

**نکته** در حالت کلی، ضرب دکارتی و اشتراک می‌توانند با حفظ ترتیب مجموعه‌ها، جایشان را عوض کنند.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

نتیجه

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2$$

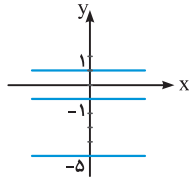
۲ ۲۰۴

ابتدا مجموعه‌های  $C$  و  $B$  را مشخص می‌کنیم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow B = \{-1, +1\}$$

$$x^2 + 4x - 5 \Rightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, -5 \Rightarrow C = \{-5, 1\}$$

اکنون  $A \times B$  و  $A \times C$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



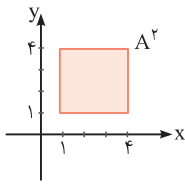
$$A \times B = \{x \in \mathbb{R} \wedge y \in \{-1, 1\}\}$$

$$A \times C = \{x \in \mathbb{R} \wedge y \in \{-5, 1\}\}$$

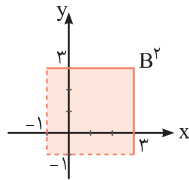
مطابق نمودار، ۳ خط افقی متمایز وجود دارد.

۲ ۲۰۵

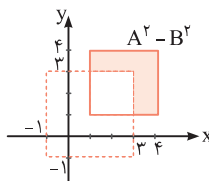
ابتدا نمودار  $A^2$  و  $B^2$  را رسم می‌کنیم:



$$A^2 = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 4 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$$



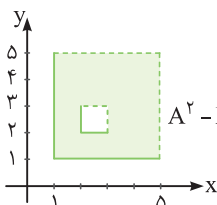
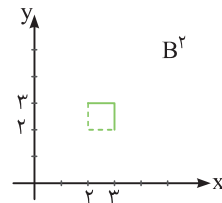
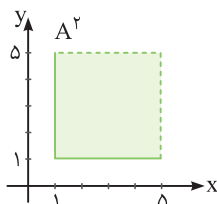
$$B^2 = \{(x, y) | -1 < x \leq 3 \wedge -1 < y \leq 3\}$$



اکنون نمودار  $A^2 - B^2$  را رسم می‌کنیم: مطابق شکل، مساحت  $A^2 - B^2$  برابر  $9 - 4 = 5$  است.

۱ ۲۰۶

ابتدا نمودارهای  $A^2$  و  $B^2$  را رسم می‌کنیم:



اکنون نمودار  $A^2 - B^2$  را رسم می‌کنیم: بنابراین نمودار گزینه ۱ نمودار مختصاتی  $A^2 - B^2$  را به درستی نمایش می‌دهد.

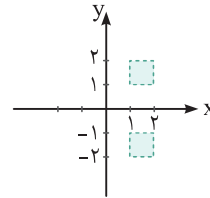
۲ ۲۰۰

ابتدا مجموعه‌های  $B$  و  $A$  را مشخص می‌کنیم:

$$1 < x^2 < 4 \Rightarrow 1 < x < 2 \text{ یا } -2 < x < -1 \Rightarrow A = (-2, -1) \cup (1, 2)$$

$$1 < x^3 < 8 \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow B = (1, 2)$$

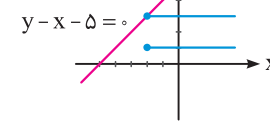
نمودار  $B \times A$  به شکل روبه‌رو خواهد شد:



۲ ۲۰۱

ابتدا مجموعه  $A$  را مشخص می‌کنیم:

$$A = [-2, +\infty)$$



اکنون نمودار  $A \times B$  و خط  $y - x - 5 = 0$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in [-2, +\infty) \wedge y \in \{1, 3\}\}$$

مطابق شکل، این دو نمودار در یک نقطه تلاقی دارند.

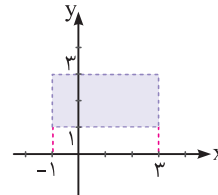
۳ ۲۰۲

ابتدا مجموعه‌های  $B$  و  $A$  را مشخص می‌کنیم:

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow A = (-1, 3)$$

$$x^2 - 6x + 8 < 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) < 0 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow B = (2, 4)$$

اکنون نمودار  $A \times B$  را رسم می‌کنیم:

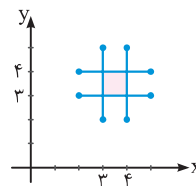


$A \times B = \{(x, y) | -1 < x < 3 \wedge 2 < y < 4\}$  مطابق شکل، مساحت ناحیه محدود به  $A \times B$  برابر  $2 \times 2 = 4$  است.

۱ ۲۰۳

ابتدا هر دو نمودار  $A \times B$  و  $B \times A$

را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



$$A \times B = \{(x, y) | 2 \leq x \leq 5 \wedge y \in \{3, 4\}\}$$

$$B \times A = \{(x, y) | x \in \{3, 4\} \wedge 2 \leq y \leq 5\}$$

مطابق شکل، مساحت ناحیه محدود به نمودار  $A \times B$  و  $B \times A$  برابر  $1 \times 1 = 1$  است.

یادداشت:

**۱۵۳** در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه  $S = \{x, y, z, t\}$  است. اگر  $P(\{x, z, t\}) = \frac{1}{4}$  و  $P(\{z, t\}) = \frac{1}{6}$ ، آن‌گاه مقدار  $P(\{x, y\})$  چقدر است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۴)}$$

**۱۵۴** در یک تجربه تصادفی، فضای نمونه  $S = \{a, b, c, d, e\}$  است. اگر  $A = \{a, e\}$ ،  $B = \{b, c\}$  و  $C = \{a, e, c\}$  باشد و هم چنین  $P(A) = \frac{2}{5}$  و  $P(C) = \frac{5}{7}$  باشد، مقدار  $P((C-A)')$  کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

$$\frac{24}{35} \text{ (۱)} \quad \frac{5}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{26}{35} \text{ (۳)} \quad \frac{23}{35} \text{ (۴)}$$

**۱۵۵** مجموعه  $S = \{x, y, z, t, w\}$  فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و  $A = \{x, y\}$ ،  $B = \{x, y, z, t\}$  و  $C = \{x, y, w\}$  سه پیشامد از  $S$  هستند. اگر  $P(A) = \frac{1}{7}$  و  $P(B) = \frac{3}{5}$  باشد، مقدار  $P(C)$  کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$$\frac{24}{35} \text{ (۱)} \quad \frac{16}{35} \text{ (۲)} \quad \frac{19}{35} \text{ (۳)} \quad \frac{11}{35} \text{ (۴)}$$

**۱۵۶** در یک تجربه تصادفی  $S = \{a, b, c\}$  فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(a)$ ،  $P(b)$ ،  $P(c)$  و دنباله حسابی تشکیل دهند به طوری که  $P(c) - P(a) = \frac{1}{5}$ ، احتمال  $P(\{b, c\})$  کدام است؟

$$\frac{22}{30} \text{ (۱)} \quad \frac{21}{30} \text{ (۲)} \quad \frac{23}{30} \text{ (۳)} \quad \frac{20}{30} \text{ (۴)}$$

**۱۵۷** در یک تجربه تصادفی  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$  فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(a_1)$ ،  $P(a_2)$ ، ... و  $P(a_5)$  یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $\frac{1}{4}$  تشکیل دهند، احتمال رخ ندادن پیشامد  $\{a_3, a_4\}$  کدام است؟

$$\frac{10}{31} \text{ (۱)} \quad \frac{21}{31} \text{ (۲)} \quad \frac{6}{31} \text{ (۳)} \quad \frac{25}{31} \text{ (۴)}$$

**۱۵۸ iq** در یک تجربه تصادفی  $S = \{x, y, z\}$  یک فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(x)$ ،  $P(y)$  و  $P(z)$  یک دنباله هندسی با قدرنسبت کم‌تر از واحد تشکیل دهند و واسطه هندسی آن‌ها  $\frac{1}{5}$  باشد، کم‌ترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در  $S$  چقدر است؟

(ریاضی داخل ۱۴۰۱)

$$\frac{2-\sqrt{2}}{5} \text{ (۱)} \quad \frac{2-\sqrt{3}}{5} \text{ (۲)} \quad \frac{2-\sqrt{3}}{10} \text{ (۳)} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{10} \text{ (۴)}$$

**۱۵۹ iq** اگر در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$  و احتمال رخداد برآمد  $a_k$  از رابطه  $P(a_k) = \frac{\binom{5}{k-1}}{a}$  به دست آید، با محاسبه مقدار  $a$  احتمال پیشامد  $A = \{a_2, a_3\}$  کدام است؟

(ریاضی داخل ۹۲)

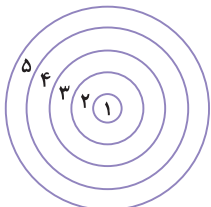
$$\frac{18}{32} \text{ (۱)} \quad \frac{30}{32} \text{ (۲)} \quad \frac{12}{32} \text{ (۳)} \quad \frac{15}{32} \text{ (۴)}$$

**۱۶۰ iq** در یک طرف ۵ گوی با شماره‌های ۱ تا ۵ موجود است. اگر احتمال خارج شدن گوی  $k$ ام از رابطه  $P(a_k) = \frac{P(a_{k+1})}{k}$  به دست آید ( $k \neq 5$ )، احتمال خارج شدن گوی با عددی زوج چقدر است؟

$$\frac{3}{17} \text{ (۱)} \quad \frac{7}{34} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{17} \text{ (۳)} \quad \frac{9}{34} \text{ (۴)}$$

**۱۶۱** در پرتاب یک دارت به صفحه دایره‌ای، مطابق شکل، احتمال اصابت به ناحیه  $k$ ام از رابطه  $x(2k-1)$  به دست می‌آید.

احتمال اصابت دارت به ناحیه چهارم یا پنجم چقدر از احتمال اصابت آن به ناحیه دوم بیش تر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



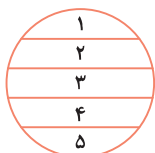
$$\frac{16}{25} \text{ (۱)} \quad \frac{13}{25} \text{ (۲)}$$

$$\frac{11}{25} \text{ (۳)} \quad \frac{9}{25} \text{ (۴)}$$

**۱۶۲** یک نقطه به تصادف از دایره مقابل انتخاب می‌کنیم، اگر احتمال انتخاب نقطه از ناحیه  $k$ ام از رابطه  $P(a_k) = \frac{x}{k+1}$  به دست آید، احتمال انتخاب نقطه‌ای که در ناحیه دوم یا سوم باشد چقدر است؟

$$\frac{25}{87} \text{ (۱)} \quad \frac{50}{87} \text{ (۲)}$$

$$\frac{20}{87} \text{ (۳)} \quad \frac{35}{87} \text{ (۴)}$$





۲۲۰ بررسی‌های آماری نشان داده است اگر یک روز ساحل جزیرهٔ هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است؛ اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد، فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال این‌که دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{10} (۱) \quad \frac{7}{50} (۲) \quad \frac{1}{20} (۳) \quad \frac{1}{30} (۴)$$

۲۲۱ احمد می‌خواهد فردا در مسابقهٔ اسب‌سواری شرکت کند و احتمال باریدن باران برای فردا  $\frac{1}{5}$  است. اگر باران بیارد احمد با احتمال  $\frac{1}{4}$  برنده می‌شود اما اگر باران نیارد، احمد با احتمال  $\frac{1}{3}$  برنده می‌شود. با چه احتمالی احمد برندهٔ مسابقه می‌شود؟

$$0/41 (۱) \quad 0/42 (۲) \quad 0/43 (۳) \quad 0/44 (۴)$$

۲۲۲ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، تاس می‌ریزیم و اگر «پشت» بیاید، سه سکهٔ دیگر را با هم می‌ریزیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه «رو» ظاهر شود، کدام است؟

$$\frac{9}{16} (۱) \quad \frac{11}{16} (۲) \quad \frac{13}{16} (۳) \quad \frac{15}{16} (۴)$$

۲۲۳ دو سکه پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو یکسان بیاید، دو سکه پرتاب می‌کنیم، در غیر این صورت سه سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال در این آزمایش حداقل سه بار «رو» ظاهر می‌شود؟

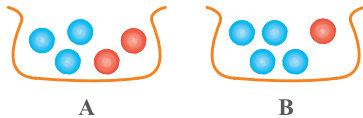
$$\frac{5}{32} (۱) \quad \frac{7}{32} (۲) \quad \frac{11}{16} (۳) \quad \frac{7}{16} (۴)$$

۲۲۴ دو سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر هر دو سکه «رو» یا هر دو «پشت» ظاهر شوند، یک سکه دیگر می‌اندازیم، در غیر این صورت دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. در مجموع با کدام احتمال، دقیقاً دو سکه به «پشت» ظاهر می‌شود؟

$$\frac{1}{4} (۱) \quad \frac{1}{2} (۲) \quad \frac{3}{4} (۳) \quad \frac{3}{8} (۴)$$

### سئال کیسه و مهره در احتمال کل

۲۲۵ مطابق شکل، ظرف A شامل ۳ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ قرمز و ظرف B شامل ۴ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ قرمز است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟



الف) احتمال این‌که ظرف A انتخاب و مهرهٔ آبی از آن خارج شود برابر  $0/6$  است.  
ب) احتمال این‌که ظرف B انتخاب و مهرهٔ آبی از آن خارج شود برابر  $0/8$  است.  
پ) احتمال این‌که مهرهٔ خارج شده آبی باشد برابر  $0/7$  است.

$$1 (۱) \quad 2 (۲) \quad 3 (۳) \quad 4 (۴) \text{ صفر}$$

۲۲۶ سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف سوم ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب و یک مهره بیرون آوریم، با کدام احتمال این مهره سیاه است؟

$$\frac{9}{20} (۱) \quad \frac{11}{20} (۲) \quad \frac{13}{20} (۳) \quad \frac{17}{40} (۴)$$

۲۲۷ ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال ۲ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه خارج می‌شود؟

$$\frac{12}{63} (۱) \quad \frac{17}{63} (۲) \quad \frac{20}{63} (۳) \quad \frac{25}{63} (۴)$$

۲۲۸ سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

$$\frac{1}{3} (۱) \quad \frac{11}{18} (۲) \quad \frac{25}{36} (۳) \quad \frac{13}{18} (۴)$$

۲۲۹ در جعبهٔ اول از دو جعبهٔ کاملاً مشابه ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

$$\frac{31}{168} (۱) \quad \frac{11}{56} (۲) \quad \frac{17}{84} (۳) \quad \frac{12}{56} (۴)$$

۱۳۹ ۴

بخش پذیری بر ۳ = A

بخش پذیری بر ۲ = B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \left[ \frac{100}{100} \right] + \left[ \frac{100}{100} \right] - \left[ \frac{100}{100} \right]$$

$$= \frac{33}{100} + \frac{50}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}$$

۱۴۰ ۱

مجموعه A را اعدادی از فضای نمونه که بر ۲ بخش پذیرند و مجموعه B را اعدادی از فضای نمونه که بر ۳ بخش پذیرند، تعریف می‌کنیم. داریم:

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

برای محاسبه  $P(A \cup B)$  ابتدا تعداد اعضای مجموعه‌های  $A \cap B$  و A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$n(A) = \left[ \frac{100}{3} \right] = 33 \Rightarrow P(A) = \frac{33}{100}$$

$$n(B) = \left[ \frac{100}{2} \right] = 50 \Rightarrow P(B) = \frac{50}{100}$$

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{100}{2 \times 3} \right] = 16 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{16}{100}$$

بنابراین داریم:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left( \frac{33}{100} + \frac{50}{100} - \frac{16}{100} \right)$$

$$= 1 - \frac{67}{100} = \frac{33}{100}$$

۱۴۱ ۱

مجموعه A را اعدادی از فضای نمونه که بر ۴ بخش پذیرند و مجموعه B را اعدادی از فضای نمونه که بر ۵ بخش پذیرند، تعریف می‌کنیم.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

داریم:

برای محاسبه  $P(A \cup B)$  ابتدا تعداد اعضای مجموعه‌های  $A \cap B$  و A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$n(A) = \left[ \frac{250}{4} \right] - \left[ \frac{100}{4} \right] = 62 - 25 = 37 \Rightarrow P(A) = \frac{37}{150}$$

$$n(B) = \left[ \frac{250}{5} \right] - \left[ \frac{100}{5} \right] = 50 - 20 = 30 \Rightarrow P(B) = \frac{30}{150}$$

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{250}{4 \times 5} \right] - \left[ \frac{100}{4 \times 5} \right] = 12 - 5 = 7 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{7}{150}$$

بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = \frac{37}{150} + \frac{30}{150} - \frac{7}{150} = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$$

۱۴۲ ۲

مجموعه A را اعدادی از فضای نمونه که بر ۴ بخش پذیرند و مجموعه B را اعدادی از فضای نمونه که بر ۶ بخش پذیرند، تعریف می‌کنیم.

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

داریم:

ب یعنی احتمال این که فقط در گروه بسکتبال یا فقط در گروه والیبال

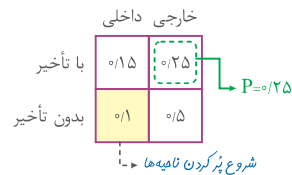
باشد، پس:

$$P = \frac{(20 - 7) + (19 - 7)}{40} = \frac{5}{8}$$

پ با توجه به نمودار و ن داریم:

$$P = \frac{19 - 7}{40} = \frac{3}{10}$$

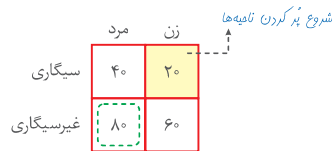
۱۳۷ ۳



تذکر در سؤالاتی که دو پیشامد

A و B به همراه متمم آن‌ها یعنی  $A'$  و  $B'$  مطرح است، نمودار و ن را به صورت مربعی در نظر می‌گیریم و آن را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنیم.

۱۳۸ ۲



$$\Rightarrow P = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$$

## ۹ محاسبه مضارب یک عدد

برخی اوقات تعداد مضارب k را در مجموعه  $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

می‌خواهیم، که این تعداد برابر است با:  $\left[ \frac{n}{k} \right]$

**مثال** در مجموعه  $S = \{1, 2, 3, \dots, 93\}$  چند عدد مضرب ۷ هستند؟

پس ۱۳ عدد بخش پذیر بر ۷ در S وجود دارد.

$$\left[ \frac{93}{7} \right] = 13$$

ممکن است تعداد اعضای را بخواهیم که هم مضرب  $k_1$  و هم مضرب  $k_2$  باشند؛ در این صورت ابتدا کم  $k_1$  و  $k_2$  را محاسبه می‌کنیم و سپس داریم:

$$\left[ \frac{n}{\text{کم } k_1 \text{ و } k_2} \right]$$

**مثال** در مجموعه  $S = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$  چند عدد مضرب ۴ و ۶ هستند؟

کم م ۴ و ۶ برابر ۱۲ است.

$$\left[ \frac{40}{12} \right] = 3$$

**تذکر** اگر مجموعه  $S = \{m, \dots, n\}$  (متوالی است اما از ۱ شروع نشده) در این صورت برای محاسبه تعداد مضارب k در S داریم:

$$\left[ \frac{n}{k} \right] - \left[ \frac{m-1}{k} \right]$$

**مثال** در مجموعه  $S = \{59, \dots, 151\}$  چند عدد مضرب ۵ و ۳ هستند؟

می‌دانیم اعدادی بر ۳ و ۵ بخش پذیرند که بر ۱۵ بخش پذیر باشند،

$$\left[ \frac{151}{15} \right] - \left[ \frac{59}{15} \right] = 10 - 3 = 7$$

بنابراین داریم:

## فصل سوم

## آمار توصیفی

## ۳

درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها  
 درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز  
 درس سوم: معیارهای پراکنندگی

## توصیف و نمایش داده‌ها

درس ۱

## علم آمار

تو بخش اول مفاهیم مقدماتی آمار رو با هم بررسی می‌کنیم.

۱ در علم آمار پس از جمع‌آوری اعداد و ارقام، دو مرحله بعدی به ترتیب کدام است؟

- (۱) تحلیل و تفسیر داده‌ها - نتیجه‌گیری  
 (۲) سازماندهی و نمایش اعداد - نتیجه‌گیری  
 (۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها - سازماندهی و نمایش اعداد  
 (۴) سازماندهی و نمایش اعداد - تحلیل و تفسیر داده‌ها

۲ برای گزارش اخبار هواشناسی، باید دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی

ثبت شود. سپس این اطلاعات سازمان‌دهی و در ایستگاه‌ها به نمایش در بیاید تا کارشناسان نظرات خود را پیرامون وضعیت هوا اعلام کنند و نتیجه نهایی در اختیار مردم قرار گیرد. کدام مرحله، قبل از نظرات کارشناسان است؟

- (۱) جمع‌آوری اعداد و ارقام  
 (۲) سازماندهی و نمایش داده‌ها  
 (۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها  
 (۴) قضاوت و پیش‌بینی

۳ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

- الف) نمونه، زیرمجموعه‌ای از جامعه است.  
 ب) برخی از اعضای نمونه، می‌توانند از اعضای جامعه نباشند.  
 ج) اندازه جامعه بیشتر از اندازه نمونه است.

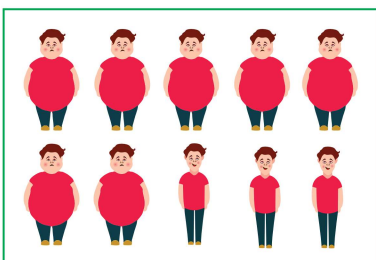
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴) صفر

۴ می‌خواهیم شاخص توده بدنی را در یک مدرسه با ۱۲۰ دانش‌آموز بررسی کنیم. برای این

منظور، مطابق تصویر مقابل ۱۰ دانش‌آموز را به طور تصادفی انتخاب کرده‌ایم. چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

- الف) حجم جامعه برابر ۱۲۰ و حجم نمونه برابر ۱۰ است.  
 ب) پیش‌بینی می‌کنیم بیش از ۵۰ درصد افراد جامعه چاق هستند.  
 ج) اگر شاخص توده بدنی همه ۱۰ نفر انتخاب شده را بررسی کنیم، سرشماری کرده‌ایم.

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴) صفر



مد



مد، ساده‌ترین شاخص مرکزیه. در زندگی روزمره هم اسم مد زیاد به گوشمون میخوره. راستی الان چی مده؟

داده‌های زیر مدت زمان مطالعه هفتگی یک دانش‌آموز، با میانگین مطالعاتی ۴ ساعت را نشان می‌دهد. مد در این داده‌ها کدام است؟

۱۱۷

(برگرفته از کتاب درسی)

(۱) این داده‌ها ۲ مد دارند.

(۲) این داده‌ها مد ندارند.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
مدت مطالعه (ساعت)	a	۵	۳	۴	۳	۴	۶

۳ (۳)

۴ (۴)

در هفت داده آماری  $x$  و  $110, 75, 80, 85, 100, 90$  اگر میانگین، میانه و مد (نما داده) برابر باشند،  $x$  کدام است؟

۱۱۸

(۱) ۸۵ (۲) ۹۰ (۳) ۹۵ (۴) نشدنی

در داده‌های آماری  $10, 19, 15, 17, 13, 7, 15, 14, 5, 13, 9, 15$  تفاضل میانه از مد (نما داده) جامعه کدام است؟

۱۱۹

(۱) ۱ (۲)  $1/5$  (۳) ۲ (۴)  $2/5$ 

در جدول داده‌های زیر، تفاوت مد (نما داده) از میانگین کدام است؟

۱۲۰

داده‌ها	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۲	۳	۲	۲	۱

(۱)  $0/4$  (۲)  $0/7$ (۳)  $1/2$  (۴)  $1/4$ 

در یک نمونه‌گیری از ۱۰۰۰ اتومبیل در حال حرکت از نظر تعداد سرنشینان، جدول زیر تنظیم شده است. اختلاف میانگین تعداد سرنشینان

۱۲۱

از مد (نما داده) کدام است؟

تعداد سرنشینان	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی نسبی	$0/15$	$0/2$	$0/25$	$0/3$	$0/1$

(۱) صفر (۲)  $0/5$ (۳)  $0/75$  (۴) ۱

داده دور افتاده



به داده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با بقیه داده‌ها دارد، داده دور افتاده می‌گیم.

در داده‌های آماری  $170, 14, 11, 8, 5, 2$  با حذف داده دور افتاده، میانه و میانگین به ترتیب چه قدر تغییر می‌کنند؟

۱۲۲

(۱)  $8 - 1/5$  (۲)  $27 - 1/5$  (۳)  $8 - 9/5$  (۴)  $27 - 9/5$ میزان صادرات روزانه نفت یک کشور برحسب میلیون بشکه در هفت روز از سال به صورت  $21, 3, 2, 3, 4, 2/5$  است. کدام معیارگرایش به مرکز

۱۲۳

برای نشان دادن متوسط میزان صادرات روزانه نفت مناسب تر است و با حذف داده دور افتاده، کدام معیارگرایش به مرکز بیشترین تغییر را می‌کند؟

(۱) میانگین - میانه (۲) میانگین - میانگین (۳) میانه - میانگین (۴) میانه - میانه

میزان درآمد ماهیانه یک فروشگاه در ۷ ماه از سال، برحسب میلیون تومان به صورت  $14, 43, 10, 7/5, 1/5, 9, 12$  است. کدام یک از اعداد

۱۲۴

زیر به عنوان شاخص مرکزی، میزان درآمد ماهیانه این فروشگاه را بهتر نشان می‌دهد؟

(۱)  $20/5$  (۲)  $11/5$  (۳) ۱۴ (۴)  $12/5$ 

## معیارهای پراکندگی

درس ۳

دامنه تغییرات



اولین معیار پراکندگی که با هم بررسی می‌کنیم، دامنه تغییرات هست. برای حل سؤالی این بخش فقط باید به بزرگترین و کوچکترین داده

توجه کنید.

اگر دامنه تغییرات داده‌های  $a, 6, 3, 9, 4, 7, 5$  برابر ۸ باشد، مجموع مقادیر قابل قبول  $a$  کدام است؟

۱۲۵

(۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۹

اگر دامنه تغییرات داده‌های  $1 + 2a, c - 1, b - 1, 3a - 1$  برابر صفر باشد، میانه داده‌های  $a, b, c, 6$  چند برابر میانگین آن‌ها است؟

۱۲۶

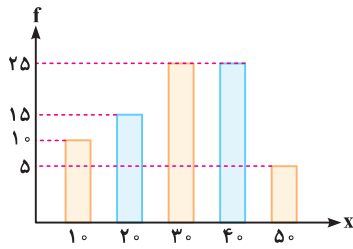
(۱)  $1/2$  (۲)  $2/5$  (۳)  $1/4$  (۴)  $4/3$ 

دامنه تغییرات تعدادی داده آماری برابر ۱۰ است. اگر به هر داده به اندازه نصف آن داده اضافه شود، دامنه تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

۱۲۷

(۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۷

میتونیم با داشتن نمودار فراوانی داده‌ها، واریانس و انحراف معیار رو به دست بیاریم.

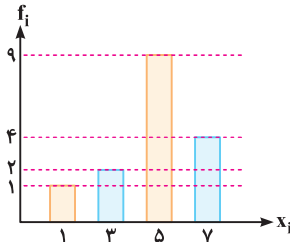


نمودار زیر نمایش‌دهنده طول ۸۰ گیاه پرورش داده‌شده در آزمایشگاه است. واریانس طول

(مشابه داخل ۹۷)

گیاهان کدام است؟

- ۹۰ (۱)  
۱۰۰ (۲)  
۱۲۰ (۳)  
۱۲۵ (۴)

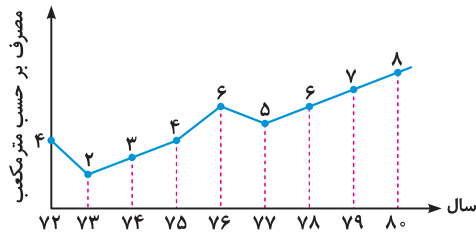


براساس نمودار میله‌ای مقابل، انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

- $\sqrt{10}$  (۱)  
 $\frac{1}{2}\sqrt{10}$  (۲)  
 $\frac{1}{2}$  (۳)  
۲ (۴)

(برگرفته از کتاب درسی)

نمودار میزان گاز مصرفی در ۹ سال اخیر مطابق نمودار زیر است، واریانس این داده‌ها را محاسبه کنید.



- $\frac{7}{3}$  (۱)  
 $\frac{4}{3}$  (۲)  
 $\frac{10}{3}$  (۳)  
 $\frac{11}{3}$  (۴)

بعضی وقتا لازمه داده‌های آماری رو با کمک اطلاعات مسئله پیدا کنیم و بعدش واریانس این داده‌ها رو محاسبه کنیم. ممکنه این تیپ تست رو

در کنکورهای بعدی ببینید!

داده‌های آماری، ریشه‌های معادلات  $x^2 - 9x + 14 = 0$  و  $x^2 - 11x + 24 = 0$  هستند. واریانس این داده‌ها چقدر است؟

- ۶ (۱)  
۶/۵ (۲)  
۷ (۳)  
۷/۵ (۴)

انحراف معیار داده‌های  $\log_{\sqrt{3}} 3, 8 \sin \frac{\pi}{6}, \log_5 5, \tan^2 \frac{\pi}{3}, \log_2 32$  کدام است؟

- ۱/۲ (۱)  
۱/۴ (۲)  
۱/۷ (۳)  
۱/۹ (۴)

انحراف معیار اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۱۳ کدام است؟

- ۳۰ (۱)  
۲۶ (۲)  
۲۱ (۳)  
۱۵ (۴)

اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی  $\{2\}, \{4, 6\}, \{8, 10, 12\}, \dots$ . در این

صورت واریانس جملات دسته هفتم کدام است؟

- ۷ (۱)  
۹ (۲)  
۱۶ (۳)  
۱۸ (۴)

در ۳ سؤال زیر، مقادیر اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌شده که سؤالای مهمی هستند.

اگر داده آماری داشته باشیم و مقادیر اختلاف از میانگین ۶ تای آن‌ها به صورت  $1, 2, 3, 4, -1, -2$  باشد، واریانس این ۷ داده چقدر است؟

- ۱۱/۲ (۱)  
۱۱/۷ (۲)  
۱۲ (۳)  
۱۲/۴ (۴)

انحراف معیار شش داده آماری ۲ و اختلاف آن‌ها از میانگین برابر  $a, 0, b, -1, 3$  است. اگر  $a > 0$  باشد، مقدار  $b$  کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

- ۳ (۱)  
۲ (۲)  
-۲ (۳)  
-۳ (۴)

میانگین شش داده آماری، عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها، به صورت  $1, b^2, 9, 0, a^2, 9$  است. اگر واریانس این

(داخل ۱۴۰۱)

داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟ ( $a, b \in \mathbb{Z}$ )

- ۲ (۱)  
-۴ (۲)  
۴ (۳)  
۲ (۴)

نمرات مهارت برای کارگر (A):  $x+2, x+1, x-1, x-2$  و برای کارگر (B):  $6+2x, 1-2x, 2-2x, 3-2x$  است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

193 IQ

(1) نفر اول (2) نفر دوم (3) یکسان (4) بستگی به مقدار  $x$  دارد.

دو نفر در یک آزمایشگاه، در 5 روز متوالی هم زمان شروع به کار کردند. امتیازات دقت کاری آن‌ها، مطابق جدول زیر است. دقت کاری کدام بیشتر است؟

194

7	9	8	9	7	نفر اول
9	7	6	8	10	نفر دوم

(1) نفر اول

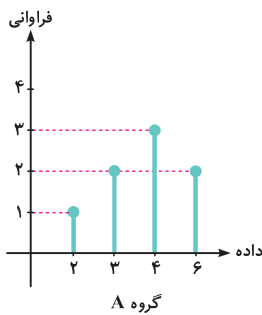
(2) نفر دوم

(3) یکسان

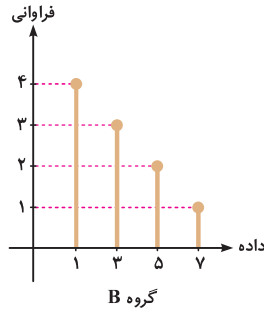
(4) نیاز به اطلاعات بیشتر

نمودار میله‌ای داده‌های دو گروه A و B به صورت زیر است، دقت عمل کدام گروه بیش تر است؟

195



گروه A



گروه B

(1) A

(2) B

(3) یکسان نیست.

(4) قابل محاسبه نیست.

## نمودار جعبه‌ای

آگه می‌خواهی با به نگاه به نمودار چارک‌ها، کم‌ترین و بیش‌ترین داده رو پیدا کنی، نمودار جعبه‌ای بکش.

نرخ بیکاری در ده سال گذشته یک کشور به صورت زیر است. پس از رسم نمودار جعبه‌ای حاصل،  $\frac{IQR}{\sqrt{Q_2 + Q_3}}$  برابر کدام گزینه خواهد بود؟

196

(برگرفته از کتاب درسی)

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	11/5	11/3	10/5	10/4	11/9	13/5	13/3	12/2	10/4	30/1
	0/56 (1)	0/48 (2)	0/36 (4)	0/74 (3)						

22 بوته گل قرمز که تعداد گل‌های هر بوته به صورت زیر می‌باشد در اختیار داریم، حاصل  $\frac{IQR}{2Q_2 - Q_3}$  کدام است؟

197

7, 4, 3, 8, 6, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 9, 1, 2, 4

2 (2)

-1 (1)

1 (4)

-2 (3)

در رسم نمودار جعبه‌ای، در میان داده‌ها، داده‌ای دور افتاده موجود است. کدام مورد در مورد نمودار جعبه‌ای این داده‌ها درست است؟

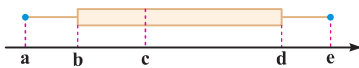
198

(1) جعبه کشیده‌تر می‌شود. (2) خط راست یا چپ جعبه کشیده‌تر می‌شود.

(3)  $Q_2$  عضوی از داده‌ها نیست. (4) تأثیری در نمودار جعبه‌ای ندارد.

نمودار جعبه‌ای زیر مربوط به داده‌های 10, 11, 11, 14, 13, 16, 10, 12, 17, 18, 15 می‌باشد، حاصل  $a^2 - e$  کدام است؟

199



80 (2)

82 (1)

76 (4)

74 (3)

اگر در داده‌های  $10, n+1, n+3, n+4, n+6, n+7, n+10$ ،  $n$  مقداری طبیعی داشته باشد، دامنه میان چارکی کدام است؟

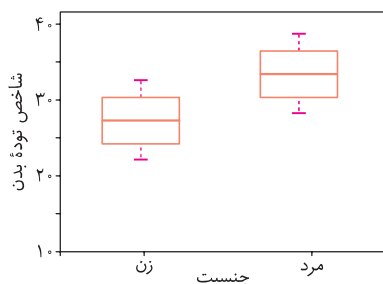
200

8 (4)

7 (3)

6 (2)

5 (1)



نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص توده بودن (BMI) به تفکیک جنسیت

201

رسم شده است. کدام نتیجه‌گیری قطعاً درست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

(1) پراکندگی شاخص توده بدن زن‌ها بیشتر است.

(2) در زن‌ها داده دور افتاده کمتری داریم.

(3) میانگین شاخص توده بدن در زن‌ها کمتر است.

(4) تعداد نمونه‌های زن کمتر است.

۱۵۳ ۳

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{2200}{11} - 14^2 = 200 - 196 = 4$$

۱۵۴ ۳

اگر اضلاع مربعها را  $x_1, x_2, \dots, x_n$  در نظر بگیریم، میانگین مساحت

$$\bar{S} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$$

آن‌ها برابر  $\bar{S} = \dots$  است، پس:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma = \bar{S} - 12^2$$

$$\Rightarrow \bar{S} = \sigma + 144 = 149$$

### ۲۲ اثرات تغییر داده‌ها بر واریانس

**تذکر** اگر همه داده‌ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم، واریانس و انحراف معیار هیچ تغییری نمی‌کنند. اما اگر همه داده‌ها را در  $a$  ضرب کنیم، واریانس داده‌ها در  $a^2$  و انحراف معیار آن‌ها در  $|a|$  ضرب می‌شود.

اگر واریانس داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر  $\sigma^2$  باشد، واریانس و انحراف معیار داده‌های  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$  برابر هستند با:

$$\sigma_{\text{new}}^2 = a^2 \sigma^2$$

$$\sigma_{\text{new}} = |a| \sigma$$

**تذکر** واحد واریانس برابر مجذور واحد داده‌هاست و واحد انحراف معیار برابر با همان واحد داده‌ها است.

**تست** اگر انحراف معیار داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_6$  برابر ۶ باشد، انحراف معیار کدام یک از گروه‌های زیر برابر ۸ است؟

الف)  $\frac{4}{3}x_1 + 4, \frac{4}{3}x_2 + 4, \dots, \frac{4}{3}x_6 + 4$

ب)  $2x_1 - 4, 2x_2 - 4, \dots, 2x_6 - 4$

پ)  $\frac{1}{4}x_1 + 5, \frac{1}{4}x_2 + 5, \dots, \frac{1}{4}x_6 + 5$

۱ می‌دانیم اگر همه داده‌های آماری را  $a$  برابر کنیم و سپس همه آن‌ها را با عدد  $b$  جمع کنیم، انحراف معیار  $|a|$  برابر می‌شود. پس:

الف)  $\sigma_A = \frac{4}{3} \times 6 = 8$

ب)  $\sigma_B = 2 \times 6 = 12$

پ)  $\sigma_C = \frac{1}{4} \times 6 = 3$

۱۵۵ ۳

از همه داده‌ها ۲۴۵ واحد کم می‌کنیم تا داده‌های ۵، ۲، ۰، -۳، -۴، به دست آید. حال واریانس این داده‌ها را به دست می‌آوریم که با واریانس داده‌های اولیه برابر است:

$$\bar{x} = \frac{(-4) + (-3) + 0 + 2 + 5}{5} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2 + 2^2 + 5^2}{5} = \frac{16 + 9 + 4 + 25}{5} = \frac{54}{5} = 10.8$$

۱۵۶ ۴

واریانس داده‌های اولیه برابر  $\sigma^2 = 2^2 = 4$  است. در ضمن می‌دانیم اگر همه داده‌ها را  $a$  برابر کنیم، واریانس آن‌ها  $a^2$  برابر می‌شود، پس:

$$\sigma_{\text{new}}^2 = (1/5)^2 \sigma_{\text{old}}^2 \Rightarrow \sigma_{\text{new}}^2 = 2/25 \times 4 = 9$$

۱۵۷ ۱

واریانس داده‌های  $x_1, x_2, x_3, x_4$  را  $\sigma^2$  در نظر می‌گیریم. پس واریانس داده‌های  $1 - x_1, \dots, 3 - x_4$  برابر  $\sigma^2 = 9$  است که با توجه به صورت سؤال داریم:

$$9\sigma^2 = 36 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

بنابراین واریانس داده‌های  $1 + x_1, \dots, 1 + x_4$  برابر است با:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \sigma^2 = \frac{1}{4} \sigma^2 = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

۱۵۸ ۳

اگر همه داده‌های گروه B را دو برابر کنیم و سپس آن‌ها را با ۱ جمع کنیم، داده‌های گروه A ایجاد می‌شود، پس:

$$\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 2^2 = 4$$

۱۵۹ ۴

میانگین دو داده اضافه شده برابر  $\frac{12+18}{2} = 15$  است که با میانگین داده‌های اولیه برابر است. پس:

$$1(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 = 8 \times 4 = 32$$

$$2 \sigma_{\text{new}}^2 = \frac{(x_1 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 + (12 - 15)^2 + (18 - 15)^2}{10} = 5$$

**تذکر** در رابطه  $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

صورت کسر برابر است با:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 = n\sigma^2$$

۱۶۰ ۴

در ۲۶ داده اولیه واریانس برابر  $\sigma^2 = 4$  است. حال با فرض این که داده ۲۶ ام برابر میانگین است داریم:

$$1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{x})^2 + (x_{26} - \bar{x})^2 = 26 \times 4 = 104$$

$$2 \sigma_{\text{new}}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{x})^2}{25} = \frac{104}{25} = 4.16$$

۱۶۱ ۳

میانگین سه داده اضافه شده برابر  $\frac{20+27+28}{3} = 25$  است که با میانگین داده‌های اولیه برابر است:

$$(x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2 = 18 \times 3^2 = 162$$

حال با اضافه شدن داده‌های ۲۰، ۲۷، ۲۸ داریم:

$$\sigma_{\text{new}}^2 = \frac{(x_1 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2}{21}$$

$$\frac{+(20-25)^2 + (27-25)^2 + (28-25)^2}{21} = \frac{200}{21} = 9.52$$

۲ ۱۶۶

چون در این دو گروه میانگین برابر است، پس:

$$\sigma^2 = \frac{n\sigma_A^2 + m\sigma_B^2}{n+m} = \frac{12 \times 12/6 + 24 \times 7/2}{12+24}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{15 \times 1/2 + 12 \times 1/8}{36} = \frac{324}{36} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

**تذکر** دو گروه داده آماری با میانگین برابر را در نظر بگیرید. اگر گروهA شامل n داده آماری با واریانس  $\sigma_A^2$  و گروه B شامل m داده آماری با واریانس  $\sigma_B^2$  باشد، آنگاه واریانس کل این داده‌ها از رابطه

$$\sigma^2 = \frac{n\sigma_A^2 + m\sigma_B^2}{n+m}$$

زیر به دست می‌آید:

**۲۳ ضریب تغییرات**

به میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین، ضریب تغییرات گفته می‌شود و با نماد CV نشان داده می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

**تذکر ۱** از ضریب تغییرات فقط برای داده‌های مثبت استفاده می‌شود.**تذکر ۲** ضریب تغییرات بدون واحد است و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود.**تست** ضریب تغییرات داده‌های ۱، ۰، ۹، ۶، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (۱) \quad \frac{\sqrt{5}}{6} \quad (۲) \quad \frac{\sqrt{7}}{3} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{7}}{6} \quad (۴)$$

**۴** برای سادگی محاسبه واریانس، از همه داده‌ها ۶ واحد کم می‌کنیم:

$$x - 6: -3, -2, -2, 0, 3, 4$$

$$۱) \bar{x} - 6 = \frac{(-3) + (-2) + (-2) + 0 + 3 + 4}{6} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 6$$

$$۲) \sigma^2 = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 3^2 + 4^2}{6}$$

$$= \frac{9 + 4 + 4 + 0 + 9 + 16}{6} = 7 \Rightarrow \sigma = \sqrt{7}$$

$$۳) CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

**تذکر ۳** اگر همه داده‌ها در یک عدد مثبت ضرب شوند، ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند، اما اگر همه داده‌ها در یک عدد منفی ضرب شوند، ضریب تغییرات قرینه می‌شود.**تذکر ۴** اگر داده‌ها از  $x_i$  به  $ax_i + b$  تغییر کنند، ضریب تغییرات

جدید برابر است با:

$$CV = \frac{|a|\sigma}{a\bar{x} + b}$$

۴ ۱۶۲

میانگین داده‌های حذف شده برابر  $\frac{10+15+45+50}{4} = 30$  است که با میانگین داده‌های اولیه برابر است:

$$۱) \underbrace{(x_1 - 30)^2 + (x_2 - 30)^2 + \dots + (x_{25} - 30)^2}_A = 25 \times 8^2 = 1600$$

حال با حذف داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵، ۵۰ داریم:

$$۲) \sigma_{new}^2 = \frac{A - (10-30)^2 - (15-30)^2 - (45-30)^2 - (50-30)^2}{21}$$

$$= \frac{1600 - 400 - 225 - 225 - 400}{21} = \frac{350}{21} = 16/66$$

۲ ۱۶۳

واریانس داده‌های اولیه برابر  $3^2 = 9$  است، پس:

$$(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_{12} - 15)^2 = 12 \times 9 = 108$$

از طرفی چون میانگین داده‌های حذف شده برابر ۱۵

و میانگین داده‌های اضافه شده نیز برابر ۱۵ است، پس

میانگین داده‌های جدید تغییر نمی‌کند. پس:

$$\sigma_{new}^2 = \frac{108 - (11-15)^2 - (12-15)^2 - (22-15)^2 + (9-15)^2 + (21-15)^2}{11}$$

$$\Rightarrow \sigma_{new}^2 = \frac{108 - 16 - 9 - 49 + 36 + 36}{11} = \frac{106}{11} = 9/6$$

۲ ۱۶۴

چون انحراف معیار ۵ داده برابر صفر است، پس همه آن‌ها با یکدیگر برابر هستند. پس می‌توانیم همه آن‌ها را a فرض کنیم. در ضمن، چون با اضافه شدن داده‌های ۸ و ۵ و ۱۱ میانگین تغییر نمی‌کند، پس a برابر است با میانگین این اعداد یعنی  $a = \frac{5+8+11}{3} = 8$  و داریم:

$$\sigma_{new}^2 = \frac{5 \times (0)^2 + (5-8)^2 + (8-8)^2 + (11-8)^2}{8}$$

$$= \frac{0 + 9 + 0 + 9}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sigma_{new} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1/5$$

۲ ۱۶۵

چون میانگین داده‌های قبل از چارک اول برابر میانگین داده‌های بعد از چارک سوم است، پس همه داده‌ها با یکدیگر برابر هستند. حال اگر همه داده‌ها را a در نظر بگیریم، چون با اضافه شدن سه داده ۸، ۱۲، ۱۵ میانگین تغییر نمی‌کند، پس:

$$a = \frac{8+12+25}{3} = 15$$

بنابراین واریانس ۲۰ داده جدید برابر است با:

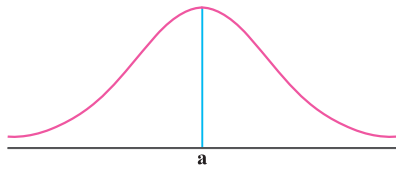
$$\sigma_{new}^2 = \frac{17 \times (15-15)^2 + (8-15)^2 + (12-15)^2 + (25-15)^2}{20}$$

$$\Rightarrow \sigma_{new}^2 = \frac{0 + 49 + 9 + 100}{20} = \frac{158}{20} = 7/9$$



بریم برای تحلیل نمودارهای چندبر فراوانی رسم این نمودارها از اهداف کتاب درسی نیست، اما تحلیل اون‌ها خیلی مهمه.

چندبر بافت نگاشت فراوانی میانگین‌ها



118

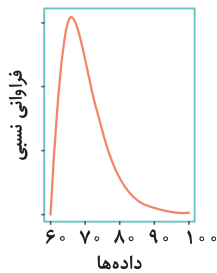
اگر شکل زیر چندبر بافت نگاشت فراوانی میانگین‌ها باشد، جای  $a$  کدام گزینه زیر قرار می‌گیرد؟

(1)  $\bar{x}$ (2)  $\sigma_{\bar{x}}$ (3)  $\mu$ (4)  $\sigma$ 

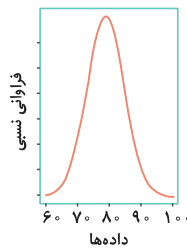
نام چه تعداد از نمودارهای چند بر فراوانی زیر درست نوشته شده است؟

119

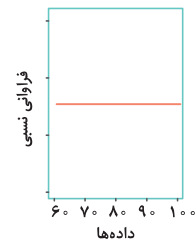
(پ) چوله



(ب) یکنواخت



(الف) نرمال



(4) 3

(3) 2

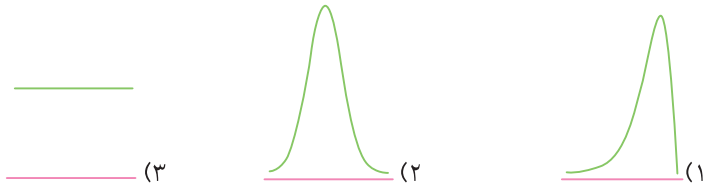
(2) 1

(1) صفر

با نمونه‌گیری با حجم زیاد از یک جامعه با مقادیر مختلف، میانگین جامعه را برآورد می‌کنیم. نمودار بافت نگاشت آن به کدام صورت است؟

120

(برگرفته از کتاب درسی)



(4) هر سه می‌توانند درست باشند.

خط فقر

مثل برآورد بازه‌ای میانگین جامعه، برای خط فقر هم همیشه بازه اطمینان نوشت.

درآمد ۹ نفر بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است. چند نفر آن‌ها زیر خط فقر قرار دارند؟

121

۴ ۱ ۳ ۳ ۵ ۲ ۷ ۲ ۳

(2) 2

(1) 1

(4) 4

(3) 3

درآمد ۴ نفر که به صورت اتفاقی از یک جامعه انتخاب شده‌اند، بر حسب میلیون تومان به صورت ۵، ۴، ۳ است. اگر انحراف معیار جامعه همان انحراف معیار نمونه باشد، برآورد بازه‌ای با اطمینان ۹۵ درصد برای خط فقر کدام است؟

122

$(\sqrt{1/25} = 1/5 = 2/10)$

(2)  $[1/45, 4/5]$ (1)  $[2/9, 8/1]$ (4)  $[1/63, 4/4]$ (3)  $[2/91, 3/91]$ 

۷ نفر در کارگاه خیاطی با حقوق ۸، ۷، ۷، ۶، ۹، ۴ مشغول به کار هستند. اگر شخصی زیر خط فقر نباشد،  $x$  کدام گزینه است؟

123

(4) 18

(3) 17

(2) 16

(1) 14

اگر بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد خط فقر یک جامعه به صورت  $[6/3, 7/1]$  باشد،  $\bar{x}$  کدام گزینه زیر است؟

124

(4) 14/4

(3) 12/4

(2) 14/3

(1) 13/4

برآورد بازه‌ای خط فقر با اطمینان بیش از ۹۵ درصد با نمونه‌گیری، بازه  $[4/9, 7/1]$  محاسبه شده است. اگر حقوق همه کارکنان را ۴۰ درصد

125

افزایش دهیم، میانگین درآمد افراد این نمونه کدام است؟

(4) 16/8

(3) 18/6

(2) 14/2

(1) 12/4

خط فقر، نصف میانگین درآمد افراد جامعه است.

$$\frac{10}{3} = \frac{5}{2} \quad \text{بنابراین خط فقر در این جامعه برابر است با:}$$

در این جامعه تنها یک نفر با حقوق ۱ میلیون تومان زیر خط فقر است.

۲ ۱۲۲

ابتدا میانگین و انحراف معیار نمونه را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{3+4+10+5}{4} = 5.5$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-5.5)^2 + (4-5.5)^2 + (10-5.5)^2 + (5-5.5)^2}{4}$$

$$= \frac{29}{4} = 7.25 \Rightarrow \sigma = 2.6$$

اکنون بازه برآورد میانگین جامعه با اطمینان ۹۵ درصد را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.9 \leq \mu \leq 8.1$$

خط فقر، نصف میانگین درآمد جامعه است. برای محاسبه بازه اطمینان ۹۵٪ خط فقر داریم:

$$1.45 \leq \frac{\mu}{2} \leq 4.05$$

۱ ۱۲۳

ابتدا میانگین درآمدهای جامعه را حساب می‌کنیم:

$$\mu = \frac{4+9+6+7+7+8+x}{7} = \frac{41+x}{7}$$

خط فقر، نصف میانگین درآمد افراد جامعه است. چون در این جامعه، هیچ‌کس زیر خط فقر نیست، خط فقر باید کوچک‌تر از کم‌ترین حقوق باشد.

$$\frac{\mu}{2} < 4 \Rightarrow \frac{41+x}{14} < 4 \Rightarrow 41+x < 56 \Rightarrow x < 15$$

تنها گزینه ۱ در شرایط مسئله صادق است.

۱ ۱۲۴

خط فقر، نصف میانگین درآمد افراد جامعه است.

$$6.3 \leq \frac{\mu}{2} \leq 7.1 \Rightarrow 12.6 \leq \mu \leq 14.2$$

میانگین اعضای نمونه  $(\bar{x})$ ، نقطه وسط بازه برآورد میانگین جامعه است.

$$\bar{x} = \frac{14.2+12.6}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{26.8}{2} = 13.4$$

۴ ۱۲۵

خط فقر، نصف میانگین درآمد افراد جامعه است.

$$4.9 \leq \frac{\mu}{2} \leq 7.1 \Rightarrow 9.8 \leq \mu \leq 14.2$$

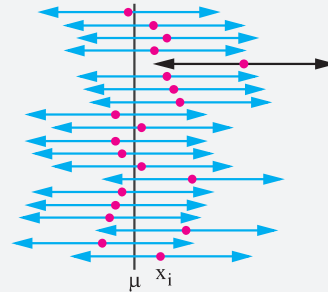
میانگین اعضای نمونه، نقطه وسط بازه برآورد میانگین جامعه است.

$$\bar{x} = \frac{14.2+9.8}{2} = 12$$

اگر حقوق همه کارکنان ۴۰٪ افزایش پیدا کند، میانگین اعضای نمونه نیز ۴۰٪ افزایش می‌یابد. بنابراین میانگین حقوق اعضای نمونه برابر است با:

$$12 + (12 \times 0.4) = 16.8$$

مفهوم ضریب اطمینان ۹۵ درصد این است که به طور متوسط از هر ۱۰۰ فلش، ۹۵ فلش (یا مثلاً از هر ۲۰ فلش، ۱۹ فلش) خط  $\mu$  را قطع می‌کنند. **مثال** در ۲۰ فلش رسم شده فقط یک فلش با خط  $\mu$  برخورد نمی‌کند.



۳ ۱۱۷

چون بازه اطمینان ۹۵ درصدی است، از ۱۰۰ آزمایش ۹۵ تا خط میانگین را قطع می‌کند و ۵۰ تا دیگر قطع نمی‌کنند.

۳ ۱۱۸

اگر داده‌های نمونه‌گیری افزایش یابد، شکل چند بر فراوانی بافت‌نگاشت به نمودار نرمال تبدیل می‌شود که  $a$  میانگین جامعه است که با  $\mu$  نمایش داده می‌شود.

۲ ۱۱۹

نمودار الف) یکنواخت است، نمودار ب) نرمال و نمودار پ) چوله یا نامتقارن نام دارد. بنابراین فقط نام نمودار پ) درست نوشته شده است.

۲ ۱۲۰

اگر حجم نمونه زیاد باشد نمودار چند بر فراوانی بافت‌نگاشت میانگین جامعه به صورت نمودار نرمال گزینه ۲ خواهد بود.

## ۱۹ خط فقر

حداقل درآمدی که برای زندگی در یک ماه به‌ازای هر نفر مورد نیاز است، خط فقر نامیده می‌شود.

### محاسبه خط فقر

خط فقر برابر است با "نصف میانگین درآمد افراد جامعه؛ بنابراین بازه اطمینان بیش از ۹۵٪ خط فقر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{\bar{x}}{2} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{\mu}{2} \leq \frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**مثال** اگر بازه میانگین درآمد جامعه با ضریب اطمینان بیش از ۹۵٪ به صورت  $[8, 11]$  باشد، برآورد بازه‌ای خط فقر نصف آن، یعنی  $[4, 5.5]$  است.

۱ ۱۲۱

ابتدا میانگین درآمد افراد جامعه را محاسبه می‌کنیم.

$$\mu = \frac{4+1+3+3+5+2+7+2+3}{9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

## فصل پنجم

 پایه دهم:  
شمارش بدون شمردن

۵

 درس اول: شمارش  
درس دوم: جایگشت  
درس سوم: ترکیب

 درس  
۱

شمارش

اصل ضرب و اصل جمع

اصل جمع و اصل ضرب از مهم‌ترین موضوعات در این فصل است که با حل سؤالات زیر می‌تونید به سطح خیلی خوبی در این موضوع برسید.

- ۱ در منوی یک رستوران ۴ نوع غذا و ۲ نوع نوشیدنی وجود دارد. چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)
- الف) تعداد راه‌های انتخاب یک غذا و یک نوشیدنی برابر ۸ است.  
ب) تعداد راه‌های انتخاب یک غذا یا یک نوشیدنی برابر ۶ است.  
پ) اگر یک نوع نوشیدنی دیگر به منوی رستوران اضافه شود، تعداد راه‌های انتخاب یک غذا و یک نوشیدنی برابر ۱۲ می‌شود.
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر
- ۲ دو تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. در چند حالت تاس اول عدد زوج و تاس دوم عدد مضرب ۳ ظاهر می‌شود؟
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (۴)
- ۳ در یک کارخانه خودروسازی نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۸ رنگ، ۳ حجم موتور و ۲ نوع دنده اتوماتیک و غیر اتوماتیک تولید می‌شود. اگر یکی از رنگ‌های تولید شده خاکستری باشد، در این کارخانه چند نوع اتومبیل دنده اتوماتیک و خاکستری تولید می‌شود؟ (برگرفته از کتاب درسی)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱۰ (۴)
- ۴ در شکل زیر ۵ مربع کوچک داریم که کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. اگر ۴ رنگ مختلف داشته باشیم، به چند طریق می‌توانیم مربع‌ها را رنگ آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو مربع مجاور هم رنگ نباشند؟ (برگرفته از کتاب درسی)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱۲۸ (۴)
- ۵ یک آزمون شامل ۶ سؤال چهارگزینه‌ای و ۳ سؤال دو گزینه‌ای (بله - خیر) است. به چند طریق می‌توان به این آزمون پاسخ داد به طوری که بتوان سؤال‌ها را بدون جواب گذاشت؟
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۳۵ × ۳ (۴)
- ۶ در یک آزمون با ۵ سؤال سه گزینه‌ای اگر پاسخ دادن به ۴ سؤال اول الزامی باشد و پاسخ دادن به سؤال آخر به دلخواه باشد، پاسخ‌نامه به چند طریق قابل پُر کردن است؟
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲۹۶ (۴)
- ۷ پلاک تعدادی اتومبیل سواری در تهران به صورت زیر است. اگر به جای هر \* یک رقم از مجموعه {۱, ۲, ۳, ۴} و به جای ● یکی از حروف {الف، ه، و، ی} قرار گیرد، چند اتومبیل قابل شماره‌گذاری است؟ (برگرفته از کتاب درسی)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲ × ۳<sup>۵</sup> (۲)
- ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ × ۴<sup>۵</sup> (۳)

۳۹ اگر  $n$  عددی طبیعی و  $m$  عدد طبیعی دورقمی و  $m! = \binom{3n+2}{n-1}$  باشد، مقدار  $\frac{m}{n}$  کدام است؟

- ۲!(۱)      ۳!(۲)      ۳!(۳)      ۴!(۴) - ۵!

در تست‌های بعدی می‌خواهیم افراد یا اشیا را جایگشت دهیم. جایگشت انواع مختلفی دارد که اون‌ها رو به ترتیب براتون قرار دادیم.

۴۰ رضا و جواد به همراه چهار دوست خود به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند و عکس یادگاری بگیرند؟

- ۴۶۰ (۱)      ۷۲۰ (۲)      ۵۲۰ (۳)      ۹۶۰ (۴)

۴۱ با حروف کلمه «ACTION» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت به طوری که با حرف صدادار شروع و به حرف T ختم شود؟

- ۴۸ (۱)      ۵۶ (۲)      ۶۶ (۳)      ۷۲ (۴)

۴۲ با حروف کلمه «جایگشت» چند کلمه چهارحرفی می‌توان ساخت به طوری که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

- ۱۲۰ (۱)      ۱۸۰ (۲)      ۲۴۰ (۳)      ۲۸۰ (۴)

۴۳ با حروف کلمه CALCULUS چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که با C شروع و به S ختم شود؟

- ۸۰ (۱)      ۱۵۰ (۲)      ۱۸۰ (۳)      ۳۶۰ (۴)

۴۴ یک گوی قرمز، دو گوی سبز یکسان و سه گوی آبی یکسان را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که در ابتدا و انتها گوی آبی قرار گیرد؟

- ۶ (۱)      ۹ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۵ (۴)

۴۵ با ارقام ۱, ۲, ۲, ۲, ۵, ۹, ۹ چند عدد ۷ رقمی می‌توان ساخت به طوری که با ۹ شروع و به ۲ ختم شوند؟

- ۳۰ (۱)      ۶۰ (۲)      ۱۲۰ (۳)      ۱۵۰ (۴)

۴۶ رضا شماره تلفن هفت رقمی دوست خود را فراموش کرده است. تنها چیزی که به یاد دارد، این است که شماره تلفن دوستش شامل سه رقم ۴، دو رقم ۵ و دو رقم ۶ است. رضا حداکثر باید چند شماره را امتحان کند تا بتواند با دوستش تماس بگیرد؟

- ۱۵۰ (۱)      ۲۱۰ (۲)      ۲۴۰ (۳)      ۳۶۰ (۴)

۴۷ با ارقام ۳, ۳, ۳, ۳, ۰, ۰, ۰ چند عدد ۶ رقمی زوج می‌توان ساخت؟

- ۸ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۵ (۳)      ۱۸ (۴)

هر موقع لازم شد چند شیء کنار هم باشند، باید اون اشیا رو در یک بسته قرار بدیم!

۴۸ حروف A, A, A, B, B, C را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که سه حرف A کنار هم باشند؟

- ۸ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۶ (۴)

۴۹ با کنار هم قرار دادن ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت به طوری که رقم‌های فرد کنار هم باشند؟

- ۱۲ (۱)      ۲۴ (۲)      ۳۶ (۳)      ۴۸ (۴)

۵۰ با حروف کلمه «LAGRANGE» چند جایگشت ۸ حرفی می‌توان ساخت که حروف یکسان کنار هم باشند؟

- ۲۴۰ (۱)      ۳۶۰ (۲)      ۷۲۰ (۳)      ۹۶۰ (۴)

۵۱ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متفاوت را در یک قفسه کتاب کنار هم قرار داد، به طوری که دو کتاب A و B کنار هم نباشند؟

- ۷۲ (۱)      ۸۰ (۲)      ۸۵ (۳)      ۹۶ (۴)

۵۲ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «SYSTEM» به طوری که Sها کنار هم نباشند، کدام است؟

- ۱۲۰ (۱)      ۱۸۰ (۲)      ۲۴۰ (۳)      ۳۶۰ (۴)

۵۳ سه زن و شوهر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار گیرند، به طوری که هر مرد کنار همسرش باشد؟

- ۸ (۱)      ۲۴ (۲)      ۴۸ (۳)      ۵۶ (۴)

۵۴ با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که در آن «جهان» دیده شود؟

- ۲۴ (۱)      ۷۲ (۲)      ۱۲۰ (۳)      ۱۶۰ (۴)

۵۵ با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حروف کلمه «جهان» کنار هم قرار گیرند؟

- ۶! (۱)      ۴! × ۵! (۲)      ۴ × ۵! (۳)      ۹! (۴)

۵۶ با حروف کلمه «FUNCTION» چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت که سه حرف صدادار کنار هم نباشند؟

- ۲۵ × ۶! (۱)      ۳ × ۷! (۲)      ۵ × ۶! (۳)      ۴ × ۷! (۴)

## ۸ کنار هم بودن

اگر بخواهیم جایگشت  $n$  شیء را پیدا کنیم به طوری که چند شیء مشخص کنار هم باشند، ابتدا آن اشیاء را درون یک بسته قرار می‌دهیم و این بسته را به عنوان یک عضو در نظر می‌گیریم و جایگشت آن را با بقیه اعضا محاسبه می‌کنیم، سپس حاصل را در جایگشت اشیای درون بسته ضرب می‌کنیم.

**مثال** ۳ دختر و ۴ پسر به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، به طوری که:

الف) دخترها کنار هم باشند؟

۳ دختر را درون یک بسته در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت بسته و ۴ پسر را محاسبه و آن را در جایگشت دخترها ضرب می‌کنیم:

$$\boxed{D} \boxed{D} \boxed{D} \boxed{P} \boxed{P} \boxed{P} \boxed{P} \Rightarrow 5! \times 3! = 720$$

ب) دخترها کنار هم نباشند؟

تعداد جایگشت‌هایی که ۳ دختر کنار هم هستند را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم:

$$7! - 5! \times 3! = 7 \times 6 \times 5! - 6 \times 5! = (7-1) \times 6 \times 5! = 4 \times 3 \times 5! = 4320$$

در مثال قبل، اگر بخواهیم هیچ دو دختری کنار هم نباشند باید بین پسرهای جای خالی در نظر بگیریم و جایگشت ۴ پسر را حساب کنیم. حال پنج جای خالی ایجاد شده است که باید ۳ دختر را طبق اصل ضرب در آن‌ها قرار دهیم.

دختر اول ۵ انتخاب دارد،

دختر دوم ۴ انتخاب و دختر

بعدی ۳ انتخاب، یعنی:

$$\Rightarrow 4! \times \frac{5 \times 4 \times 3}{\text{دخترها}}$$



۳ ۴۸

۳ حرف A را یک بسته در نظر می‌گیریم و جایگشت این بسته را با حروف B, B, C محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{A} \boxed{A} \boxed{A} \boxed{B} \boxed{B} \boxed{C} \Rightarrow \frac{4!}{3!} = 12$$

۳ ۴۹

رقم‌های فرد را کنار هم در یک بسته قرار می‌دهیم. سپس جایگشت رقم‌های درون بسته و همچنین جایگشت بسته و ۲ رقم زوج را محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{1,3,5} \boxed{2} \boxed{4} \Rightarrow 3! \times 3! = 36$$

۳ ۵۰

دو حرف A را با هم در یک بسته و دو حرف G را با هم در یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{A,A} \boxed{G,G} \boxed{L} \boxed{R} \boxed{N} \boxed{E} \Rightarrow 6! = 720$$

۱ ۵۱

تعداد جایگشت‌هایی که دو کتاب A و B کنار هم هستند را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم:

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \boxed{D} \boxed{E} - \boxed{A,B} \boxed{C} \boxed{D} \boxed{E}$$

$$\Rightarrow 5! - 2! \times 4! = 72$$

## ۷ جایگشت با تکرار

اگر بخواهیم جایگشت  $n$  شیء را پیدا کنیم که  $n_1$  تای آن‌ها شبیه هم،  $n_2$  تای دیگر نیز شبیه هم، ... و  $n_k$  تای آن‌ها شبیه هم باشند، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

**تست** با حروف کلمه «DAMDAR» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

$$360 \quad (4) \quad 180 \quad (3) \quad 96 \quad (2) \quad 30 \quad (1)$$

**۳** از حرف A دو تا و از حرف D نیز دو تا داریم، پس:

$$\frac{6!}{2!2!} = 180$$

**نکته** تعداد جایگشت‌های  $(n-1)$  تایی از  $n$  شیء با تعداد جایگشت‌های  $n$  تایی آن‌ها برابر است. این نکته هم برای اشیاء تکراری و هم برای اشیاء غیرتکراری برقرار است.

**تست** با حروف کلمه «Colour» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

$$360 \quad (4) \quad 320 \quad (3) \quad 290 \quad (2) \quad 270 \quad (1)$$

**۴** کلمه «Colour» از ۶ حرف تشکیل شده است؛ بنابراین تعداد کلمات ۵ حرفی که می‌توان با حروف آن ساخت برابر با تعداد کلمات ۶ حرفی است. پس:

$$\frac{6!}{1!} = 360 = \text{تعداد جایگشت‌های ۶ تایی} = \text{تعداد جایگشت‌های ۵ تایی}$$

۳ ۴۳

حرف S را در انتها و یک حرف C را در ابتدا قرار می‌دهیم. سپس

جایگشت ۶ حرف L, L, U, U, A, C را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{6!}{2!2!} = 180$$

۳ ۴۴

دو گوی آبی در ابتدا و انتها قرار می‌دهیم و ۱ گوی قرمز، ۲ گوی سبز، ۱

گوی آبی باقی مانده را جایگشت می‌دهیم:

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

۲ ۴۵

یک رقم ۹ را در ابتدای عدد و یک رقم ۲ را در انتهای عدد قرار می‌دهیم

و جایگشت پنج رقم باقی مانده را محاسبه می‌کنیم:

$$1,2,2,5,9 \Rightarrow \frac{5!}{2!} = 60$$

۲ ۴۶

تعداد شماره‌هایی که رضا باید امتحان کند، برابر با جایگشت ارقام

روبه‌رو است:

$$4,4,4,5,5,6,6 \Rightarrow \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

۲ ۴۷

تعداد جایگشت‌های  $(n-1)$  تایی از  $n$  شیء مشابه یا غیرمشابه همواره

با تعداد جایگشت‌های  $n$  تایی آن‌ها برابر است. پس چون ۷ رقم داریم،

می‌توانیم تعداد اعداد ۷ رقمی زوج را به دست آوریم. برای این کار کافی

است رقم سمت چپ را ۳ و رقم سمت راست را صفر در نظر بگیریم و

با ۵ رقم باقی مانده یک عدد ۵ رقمی بنویسیم:

$$\frac{5!}{2!3!} = 10$$