انتشارات بین المللی
گاج

مجموعه کتاب‌های آی‌کیو قرن جدید

ویـژه کنکور ۱۴۰۴

کنکور

حسابان جامع

دهم | یازدهم | دوازدهم

تالیف جدید

مطابق بـا سبک جدیـد سؤالات کـنـکور

مؤلفان: مهندس سجاد عظمتی - مهندس مجید رفعتی
علی احمدی قزل دشت

مجموعه کتاب‌های **فرمول بیست**

ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی

9 786220 308706

مقدمه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به جای آنکه چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

● برای تألیف این کتاب یک تیم کاربلد و کارکشته در زمینهٔ طرح تست، گرد هم آمدیم و طی دو سال سعی کردیم کتاب کامل و بی‌نقصی را تولید کنیم که جوابگوی همهٔ تست‌های کنکور به‌ویژه تست‌های سطح بالا باشد.

● وقتی اسم برند آیکیو به گوش می‌رسد، اغلب فکر می‌کنند با کتاب المپیادی مواجه هستند و این دسته از کتاب‌ها مخصوص دانش‌آموزان خاص است! درحالی‌که اینگونه نیست؛ این کتاب برای هر کسی که کتاب درسی را خوب خوانده است و یا سر کلاس دبیر فعال بوده است، قطعا مفید خواهد بود. تست‌های این کتاب طوری تالیف شده است که در هر سطحی که باشید، شما را چند پله بالاتر ببرد. پس لزوماً این کتاب دارای تست‌های خیلی سختی نیست. می‌شود گفت غلظت تست‌های سخت و دارای ایدهٔ نو کمی بیش‌تر از سایر کتاب‌هاست.این هم به علت رویکرد کنکورهای جدید است که هر سال رو به دشواری می‌رود. به‌هرحال هدف این کتاب آمادگی ۱۰۰ درصدی شما برای کنکور است، پس طبیعی است که شما را برای سخت‌ترین شرایط آماده کند. در چینش سؤالات و مبحث‌بندی مباحث فصل‌ها خیلی حساسیت به خرج دادیم. سعی کردیم سؤالات را هم براساس درجهٔ سختی و هم براساس روند آموزشی بچینیم و این کار بسیار حساس و طاقت‌فرسا بود! به‌طور کلی رویکرد ما تالیف کتاب کاملی بوده به‌طوری که شما را از هرکتاب دیگری بی‌نیاز کند. همه سعی‌مان این بوده تا به این شعار گاج «به جای آنکه چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید» جامه عمل بپوشانیم. به شما اطمینان کامل می‌دهیم که کنکور ۱۴۰۴ و حتی بعد از آن، سوال خارج از این کتاب و یا سخت‌تر از این سوالات نخواهد داشت.

برای اینکه بتونی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

سطح‌بندی تست‌ها

تست‌های آبی

۱

در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبه.تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.

تست‌های قرمز

۲

تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای تسلط بر زوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.

تست‌های چالشی

iQ+

۳

بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و میخوای بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های iQ+ بری. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه.

دقت کنید! تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.

تست‌های جنجالی

TNT

۴

این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن. پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های TNT بسیار سخت، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشد. سؤالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم با دیدن این کتاب لذت ببرن.

معرفی ویژگی‌های کتاب

۱ — سرنخ

تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت سرنخ دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرنخ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی

۲ — هایلایت

درسنامه‌های کاربردی

درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب هایلایت کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جداول و کادربندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.

۳

یه جوره دیگه !

طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنن و در کنکورهای جدید ازش استفاده میکنن! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.

۴ — روش سریع‌تر

در حل برخی از سوال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از روش سریع‌تر سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبُر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.

۵ — دام تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمن روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنن که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون دام تستی براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.

تشکر و قدردانی:

- تشکر ویژه می‌کنم از اساتید عزیزی که در مراحل تالیف، همراه ما بودن به خصوص آقای نریمان فتح‌اللهی که تک‌تک تست‌ها رو با حوصله بررسی کردن. و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنیم از اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشون، باعث شدند کتاب بهتری تالیف بشه.
- اساتید: معین کرمی، علی مقدم‌نیا، محمد مصطفی ابراهیمی، امید شیری‌نژاد، آرش عمید.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی - مجید رفعتی

sajad.azemati

فهرست

۱ تابع

۲ مثلثات

۳ حد، پیوستگی و مجانب

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha+\beta$

۶۳۷ اگر انتهای کمان x در ربع اول و $\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x=\frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin(\frac{3\pi}{2}-2x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{7}{9}$ ۳) $-\frac{2}{9}$ ۴) $-\frac{7}{9}$

۶۳۸ اگر $x+y=\frac{5\pi}{6}$ باشد، حاصل $(\sin x+\cos y)^2+(\sin y+\cos x)^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۳۹ اگر $\frac{\cos 5x}{\cos x}-\frac{\sin 5x}{\sin x}=1$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶۴۰ اگر $A=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}+\frac{\cos 40^\circ}{\cos 20^\circ}$ باشد، مقدار $\cos 50^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{A}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{A}$ ۳) $2A$ ۴) $\frac{A}{2}$

۶۴۱ از رابطهٔ $\sin 5x\cos 3x-\cos 5x\sin 3x=\frac{2}{3}$ مقدار $\cos 4x$ کدام است؟ (خارج ۹۷)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۶۴۲ اگر $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۶۴۳ اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۹)

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۶۴۴ اگر $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{3}{2}$ باشد، مقدار $(\tan x.\cot y)^2$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۶ ۳) $\frac{25}{16}$ ۴) $\frac{16}{25}$

۶۴۵ اگر $\frac{\cos(\alpha-20^\circ)+\cos(\alpha+20^\circ)}{\sin(\alpha-20^\circ)+\sin(\alpha+20^\circ)}=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۶۴۶ اگر $\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y)\sin(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{3}$ باشد، مقدار $\sin^2 y-\cos^2 y$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

۶۴۷ اگر $\frac{3+4\sqrt{3}}{3}=\frac{2\cos(\frac{5\pi}{6}-\alpha)}{\sqrt{3}\cos\alpha}+\frac{\tan\alpha}{\sqrt{3}}$ باشد، $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}+2$ ۲) $\sqrt{3}-2$ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) $1-\sqrt{3}$

۶۴۸ اگر $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\sin(x+\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۶۴۹ مقدار $A=\frac{3}{\sin 165^\circ}-\frac{3\sqrt{3}}{\cos 165^\circ}$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $12\sqrt{2}$

۶۵۰ اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ و $\sin(x+y)+\sin(x-y)=\frac{2\cos(x+y)}{\frac{3}{4}-\tan y}$ باشند، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{24}{25}$ ۲) $\frac{12}{25}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۶۵۱ اگر $\sin x+\sin y=\sqrt{3}$ و $\cos x+\cos y=\frac{1}{2}$ باشند، مقدار $\cos(x-y)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶۵۲ اگر $\sin x+\cos y=\pi-3$ و $\sin(x+y)=\pi^2-3\pi$ باشد، مقدار $(\sin y+\cos x)^2$ چقدر است؟

۱) π^2-3 ۲) $\pi^2-3\pi$ ۳) π^2-7 ۴) $\pi^2-7\pi$

۶۵۳ اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\tan x}{\cos x}(1-\sin x)=\frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{\pi}{4}-2x)+\sin(\frac{3\pi}{2}+2x)$ کدام است؟

۱) $\frac{7\sqrt{2}-22}{18}$ ۲) $\frac{5\sqrt{2}-20}{9}$ ۳) $\frac{7\sqrt{2}-20}{9}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}-22}{18}$

۶۵۴ در معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{2}(\sin x-\cos x)+3\sin 2x=m$ اگر $\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۵۵ در معادلهٔ مثلثاتی $m(\cos x-\sin x)-3\sqrt{6}\sin 2x=\sqrt{6}$ اگر $\cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

۱) -6 ۲) -3 ۳) 6 ۴) 3

۶۵۶ اگر $f(x)=4\sin x\cos 2x+2\sin x$ باشد، مقدار $f(\frac{41\pi}{9})$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) 1 ۴) -1

۶۵۷ TNT بیش‌ترین مقدار عبارت $A=10+7\sin^2 x+12\sin 2x$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۲۹ ۳) ۲۶ ۴) ۵۸

سرنخ حواست هست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است؟

۶۵۸ در مثلث ABC اگر $\sin\hat{A}\sin\hat{B}=\frac{1}{4}$ و $\cos\hat{A}\cos\hat{B}=\frac{3}{4}$ باشد، زاویهٔ C چند درجه است؟

۱) 150° ۲) 135° ۳) 120° ۴) 60°

۶۵۹ در مثلث ABC با زاویه‌های داخلی A، B و C رابطهٔ $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}=1$ برقرار است. زاویهٔ A چند درجه است؟ (شبیه‌ساز داخل ۱۴۰۱)

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 150°

۶۶۰ در مثلث ABC اگر $(\sin A+\cos B)^2+(\sin B+\cos A)^2=2+\sqrt{2}$ باشد، زاویهٔ C چند درجه می‌تواند باشد؟ (شبیه‌ساز داخل ۱۴۰۱)

۱) 60° ۲) 75° ۳) 135° ۴) 150°

۶۶۱ اندازهٔ زاویهٔ A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیش‌تر از اندازهٔ زاویهٔ B است. حاصل $2\cos A\sin B-\sin C$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سرنخ بریم مثلثات رو با دترمینان ترکیب کنیم!

۶۶۲ اگر $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\cot\alpha}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۶۶۳ اگر $a+b=\frac{3\pi}{2}$ باشد، مقدار $\begin{vmatrix}\sin^2 a & \sin^2 b\\ \cos^2 a & \cos^2 b\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $\sin 2a$ ۲) $\cos 2a$ ۳) $-\cos 2a$ ۴) $-\sin 2a$

سرنخ حالا بریم سراغ سؤالات مربوط به $\tan(\alpha\pm\beta)$

۶۶۴ اگر $\tan(\alpha+\beta)=4$ و $\tan\alpha=3$ باشد، مقدار $\tan\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{11}$ ۲) $\frac{1}{13}$ ۳) $\frac{1}{11}$ ۴) $\frac{7}{13}$

۶۶۵ اگر $\tan x=\frac{1}{4}$ و $\cot y=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan(2x+y)$ کدام است؟ (شبیه‌ساز خارج ۹۳)

۱) $-\frac{37}{9}$ ۲) $-\frac{41}{9}$ ۳) $-\frac{53}{9}$ ۴) $-\frac{47}{9}$

۶۶۶ اگر $\tan(x+\frac{\pi}{4})=\frac{5}{2}$ باشد، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{21}{29}$ ۲) $\frac{42}{59}$ ۳) $\frac{59}{42}$ ۴) $\frac{29}{21}$

۶۶۷ اگر $\tan(\alpha-\beta).\tan(\alpha+\beta)=1$ باشد، مقدار $\tan^2\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶۸ اگر $\tan(\frac{\pi}{8}+\alpha)=\frac{3}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{8}-\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۶۶۹ اگر $\tan(x+2y)=2$ و $\tan(2x-2y)=4$ باشد، حاصل $\cot 3x$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{11}$ ۲) $-\frac{7}{6}$ ۳) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ۴) $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$

۶۷۰ اگر $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2=3$ باشد، مقدار $\tan^2(A-B)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۷۱ اگر $\sin x\cos y=\frac{1}{5}$ و $\sin y\cos x=\frac{3}{10}$ باشد، مقدار مثبت $\tan(x+y)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶۷۲ اگر $\frac{\tan 2x-\tan x}{1+\tan x\tan 2x}=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۶۷۳ در مثلث ABC اگر $\cos A=\frac{3}{5}$ و $\cot B=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan C$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) ۳

۶۷۴ مقدار $\frac{\tan^2 27^\circ-\tan^2 18^\circ}{1-\tan^2 27^\circ\tan^2 18^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan 2^\circ\tan 9^\circ$ ۲) $\tan 9^\circ$ ۳) $\tan 8^\circ$ ۴) $\tan 12^\circ$

۶۷۵ اگر $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})+\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})}{1-\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۶۷۶ اگر $\tan x=\frac{2-\tan y}{1+2\tan y}$ باشد، مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

۶۷۷ حاصل $\frac{1-\tan(\frac{\pi}{6}+x).\tan(\frac{\pi}{6}-x)}{\tan(\frac{\pi}{6}+x)+\tan(\frac{\pi}{6}-x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

۶۷۸ در مثلث ABC اگر $\tan A=\frac{2}{3}$ و $\tan B=3$ باشد، مقدار $\cot C$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) $\frac{3}{11}$ ۳) $-\frac{3}{11}$ ۴) $\frac{11}{3}$

۶۷۹ اگر $\tan 155^\circ=\frac{1}{a}$ باشد، مقدار $\frac{\tan^2 35^\circ-\cot^2 80^\circ}{1-\cot^2 80^\circ\cot^2 55^\circ}$ کدام است؟

۱) a^2 ۲) $\frac{1}{a}$ ۳) a ۴) $-\frac{1}{a}$

۶۸۰ IQ اگر $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{2}{3}$ و $\cot\alpha+\cot\beta=\frac{5}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{11}$ ۲) $\frac{10}{11}$ ۳) $\frac{11}{15}$ ۴) $\frac{13}{15}$

۶۸۱ IQ اگر $\tan x=6$ و $\sin(2x+y)=4\sin y$ باشد، مقدار $\cot(x+y)$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۱۰ ۳) ۰/۲ ۴) ۵

۶۸۲ اگر $\sin(x+y)=6\cos x\cos y$ و $\tan x\tan y=3$ باشد، مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۲) -3 ۳) $-2\sqrt{2}$ ۴) $-1-\sqrt{3}$

۶۸۳ اگر $\tan\alpha=4+\tan\beta$ و $\cot\beta=3\tan\alpha$ باشد، مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۸۴ اگر $\cot x=\frac{3}{4}$ و x زاویه‌ای در ربع اول باشد، مقدار $\tan(\frac{3x}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{2}$ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $-\frac{2}{11}$ ۴) $-\frac{2}{9}$

۶۸۵ اگر $\cot\alpha$ و $\cot\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2x-2=0$ باشد، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی ۹۹)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{4}{7}$

۶۸۶ مقدار $(1+\tan 8^\circ)(1+\tan 37^\circ)$ کدام است؟

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

۶۸۷ اگر $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}=a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\beta)}$ کدام است؟

۱) $\frac{a+1}{a-1}$ ۲) $\frac{a-1}{a+1}$ ۳) $\frac{1-a}{1+a}$ ۴) $\frac{1+a}{1-a}$

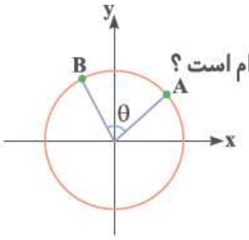
۶۸۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{1+\tan x}$ طول و عرض تمام نقاط را ۲ برابر می‌کنیم، سپس نمودار حاصل را ۱ واحد در راستای محور yها به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $y=\tan(\frac{2x-\pi}{4})$ ۲) $\tan(\frac{x-\pi}{4})$ ۳) $y=\tan(\frac{\pi-2x}{4})$ ۴) $\tan(\frac{\pi-x}{4})$

۶۸۹ اگر $\tan x_1$ و $\tan x_2$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2kx+k-1=0$ باشند و $x_1+x_2=\frac{3\pi}{4}$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

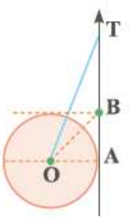
سرنخ حالا وقتشه نسبت‌های مثلثاتی $\alpha\pm\beta$ را توی دایرهٔ مثلثاتی یا در شکل‌های هندسی ببینیم.



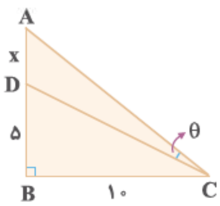
۶۹۰ در شکل مقابل، دو نقطهٔ $A(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ و $B(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$ روی دایرهٔ مثلثاتی هستند. مقدار $\sin\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۶۹۱ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل، اگر $BT=2$ باشد، مقدار $\tan(T\hat{O}B)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

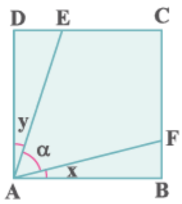


۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$



۶۹۲ در مثلث مقابل؛ اگر $\tan\theta=\frac{3}{14}$ باشد، اندازهٔ x کدام است؟

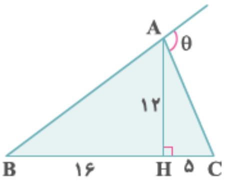
۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۳ ۴) $2\sqrt{2}$



۶۹۳ در مربع مقابل $EC=2DE$ و $3BF=2CF$ است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

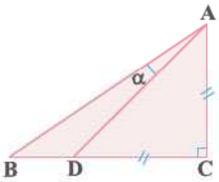
۱) $\frac{12}{13}$ ۲) $\frac{15}{13}$ ۳) $\frac{11}{15}$ ۴) $\frac{13}{11}$

۶۹۴ در شکل مقابل $BH=۱۶$ و $CH=۵$ و $AH=۱۲$ و θ زاویهٔ خارجی مثلث ABC است. مقدار $\tan\theta$ کدام است؟



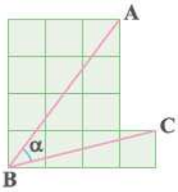
۱) $-\frac{۶۳}{۲۵}$
۲) $-\frac{۵۶}{۱۳}$
۳) $-\frac{۶۳}{۱۶}$
۴) $-\frac{۵۶}{۹}$

۶۹۵ در مثلث مقابل $|BD|=۳|CD|=۲|AC|$ است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



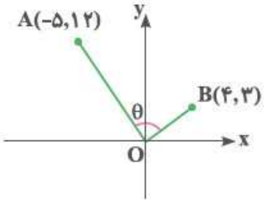
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۶۹۶ شکل مقابل از تعدادی مربع با ضلع یک واحد تشکیل شده است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



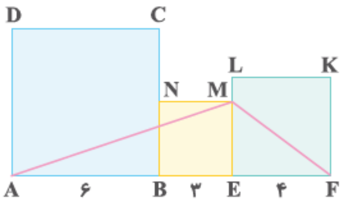
۱) $\frac{۳}{۲۸}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۱۱}{۱۵}$
۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۶۹۷ در شکل مقابل $A(-۵,۱۲)$ و $B(۴,۳)$ است. مقدار $\cos\theta$ کدام است؟



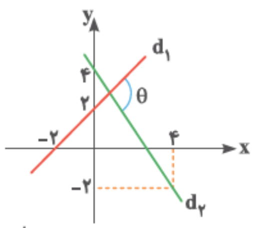
۱) $\frac{۸}{۳۵}$
۲) $\frac{۶}{۱۹}$
۳) $\frac{۲۰}{۵۱}$
۴) $\frac{۱۶}{۶۵}$

۶۹۸ مطابق شکل، سه مربع با اضلاع ۳، ۴ و ۶ کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. مقدار $\tan(F\widehat{M}A)$ کدام است؟



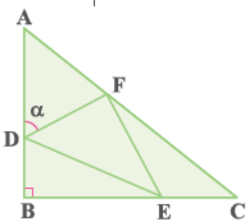
۱) $\frac{-۱۳}{۹}$
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) $\frac{-۱۴}{۹}$

۶۹۹ با توجه به دو خط d_1 و d_2، مقدار $\cot\theta$ کدام است؟



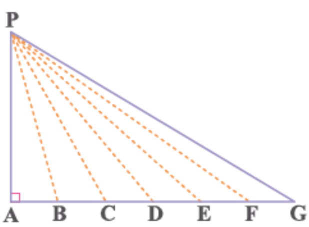
۱) $-۰/۳$
۲) $-۰/۲$
۳) $-۰/۲۵$
۴) $-۰/۷۵$

۷۰۰ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC اگر $BD=۱$ و $BE=۲\sqrt{۲}$ و $DF=\sqrt{۳}$ و $EF=\sqrt{۶}$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۲}$

۷۰۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، ضلع AG به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر $|AB|=۴|AP|$ و $A\hat{P}B=\alpha_1$ و $B\hat{P}C=\alpha_2$ و ... و $F\hat{P}G=\alpha_6$ باشد، مقدار $\frac{\tan(\alpha_5)}{\tan(\alpha_1)}$ کدام است؟



۱) $\frac{۶}{۷}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۹}$

سرنخ حالا وقتشه بریم سراغ روابط بین ریشه‌ها. در ابتدا روابط متقارن مثل $\alpha^2+\beta^2$ یا $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$ یا ... رو بررسی می‌کنیم.

۱۹۵۹ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2x-4=0$ باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\alpha^2+\beta^2=12$ ۲) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{2}$ ۳) $\alpha^3+\beta^3=28$ ۴) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-3$

۱۹۶۰ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m-2)x+2m=0$ باشند و مجموع ریشه‌ها برابر با ۱۰ باشد، حاصل $\alpha^3+\beta^3$ کدام است؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۸۰

۱۹۶۱ در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-mx+m+4=0$ اگر مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۷ باشد، مقدار m کدام است؟ (شبیه‌ساز داخل ۹۳)

۱) ۵ و ۳- ۲) ۳ ۳) ۳ و ۵- ۴) ۳-

۱۹۶۲ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-5x+k=0$ باشند و رابطهٔ $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=3$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۴- ۳) ۳ ۴) ۵

۱۹۶۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-a=0$ باشند، به ازای کدام مقدار a رابطهٔ $\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}=\frac{4}{3}$ بین ریشه‌ها برقرار است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۱۹۶۴ اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-4x+3m-10=0$ باشند و رابطهٔ $5a^2+26ab+5b^2=112$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۱۹۶۵ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-5x+m=0$ باشند و مساحت مستطیلی با اضلاع x_1+m و x_2+m برابر ۱۶ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۲ و ۸-

۱۹۶۶ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x-3=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{3x_2+2}+\frac{1}{3x_1+2}$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{7}$ ۲) $\frac{15}{11}$ ۳) $\frac{19}{11}$ ۴) $\frac{19}{7}$

۱۹۶۷ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m+1)x+m+2=0$ باشند و رابطهٔ $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{7}{12}$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۶

۱۹۶۸ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m-3)x+2m-13=0$ باشند و رابطهٔ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>1$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مجموع مقادیر طبیعی m کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۸

۱۹۶۹ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-(5m-1)x+9=0$ و $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=5$ باشد، مقدار m کدام است؟ (شبیه‌ساز داخل ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹۷۰ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل $x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

۱۹۷۱ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-5x-1=0$ باشند، مقدار $(x_1^2+\frac{1}{x_2})(x_2^2+\frac{1}{x_1})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

۱۹۷۲ x_1 و x_2 ریشه‌های متمایز معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-5ax-8=0$ هستند. اگر $x_2^2-x_1^2=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{4}{5}$ ۳) $-\frac{1}{10}$ ۴) $-\frac{7}{11}$

۱۹۷۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-ax+8=0$ باشند و رابطهٔ $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\frac{1}{4}$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) ± 2 ۲) ± 4 ۳) ± 6 ۴) ± 8

۱۹۷۴ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+x+m+2=0$ باشند و رابطهٔ $x_1^2x_2+x_1x_2^2=10$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -4 ۲) $-1\pm\sqrt{11}$ ۳) 12 ۴) -4 و 3

۱۹۷۵ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-6x-1=0$ باشند، مقدار $4x_1^2x_2+4x_1x_2^2+6x_1+6x_2$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۹۷۶ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-(a+2)x+3=0$ باشند و رابطهٔ $x_1^2x_2^3+3x_1^2x_2=81$ بین آن‌ها برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۹۷۷ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-x+m=0$ باشند و رابطهٔ $\frac{\alpha}{\beta-1}+\frac{\beta}{\alpha-1}=-2$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، بیشترین مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۷۸ چه تعداد معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $x^2+ax+b=0$ وجود دارد که در آن $a+b=3$ و معادله دارای ریشه‌های صحیح متمایز باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶ (شبیه‌ساز داخل ۱۴۰۰)

سرنخ بعضی وقت‌ها، طراح یک ارتباط بین ریشه‌های معادله مطرح می‌کنه، مثلاً می‌گه یکی از ریشه‌ها، دو برابر ریشهٔ دیگر است. توی این سؤالا می‌تونیم سراغ جمع و ضرب ریشه‌ها بریم و ریشه‌ها رو پیدا کنیم.

۱۹۷۹ اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $(a+5)x^2+(4a+3)x+2a+1=0$ معکوس یکدیگر باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۹۸۰ معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (داخل ۹۹)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

۱۹۸۱ به ازای دو مقدار a یک ریشهٔ معادلهٔ $3x^2-ax+4=0$ سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a کدام است؟ (داخل ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۹۸۲ α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2-8x+4=0$ هستند. اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$، برابر باشند، مقدار $\log_{\sqrt{2}}a$ کدام است؟ $(a>0)$ (نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹۸۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-12x+2m-6=0$ باشند و رابطهٔ $2x_1-x_2=6$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۵ (شبیه‌ساز داخل ۹۲)

۱۹۸۴ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+(2k-3)x-12=0$ باشند و رابطهٔ $3x_1=-8x_2$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار طبیعی k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹۸۵ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+(a-2)x+16=0$ باشند و $x_1^3=x_2$ و $x_1>x_2$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -8 ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) -12

سرنخ بعضی وقتا ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، به همراه یک عدد دیگه، دنبالهٔ حسابی یا هندسی می‌سازن.

۱۹۸۶ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2(a+1)x+2a-1=0$ باشند، به ازای کدام مقدار a به ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

۱۹۸۷ به ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟

۱) -4 و ۴ ۲) -3 ۳) ۴ ۴) -4

۱۹۸۸ در معادلهٔ درجهٔ دوم $mx^2-(m+1)x+1=0$ اگر واسطهٔ حسابی بین ریشه‌ها برابر با واسطهٔ هندسی بین آن‌ها باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۱۹۸۹ x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+2x+A=0$ هستند و x_3, x_4 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-14x+B=0$ هستند. اگر x_1, x_2, x_3, x_4 چهار جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشد، مقدار $\frac{B}{A}$ کدام است؟

۱) ۱۵- ۲) ۱۲- ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

سرنخ همیشه یادتون باشه، ریشهٔ هر معادله در آن معادله صدق می‌کنه. این جمله خیلی کاربردیه.

۱۹۹۰ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m-1)x+4=0$ باشند و رابطهٔ $\sqrt{x_1}+\frac{2}{\sqrt{x_2}}=2$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۹۹۱ x_1, x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+7x-m+2=0$ هستند و رابطهٔ $x_2^2+x_1x_2=35$ بین ریشه‌ها برقرار است. مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸- ۴) ۱۰-

۱۹۹۲ x_1 , x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $(a+1)x^2+2x+a=0$ هستند و $x_1+x_1x_2=-\frac{1}{a+1}$ است. مقدار a چقدر است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۹۹۳ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+3x-5=0$ باشند، مقدار $\sqrt{\alpha^2(5-3\beta)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

۱۹۹۴ اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x-3=0$ باشند، مقدار عبارت $(a-2)(a-3)+(b-1)(b-4)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۱۹۹۵ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+2=0$ باشند، مقدار $(x_1+\frac{2}{x_1})^2+x_2^2+\frac{4}{x_2^2}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۱۹۹۶ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $(x_2^2-4x_1+4)(x_1^2-4x_2+4)$ کدام است؟

۱) ۱۷۴- ۲) ۱۸۰- ۳) ۱۸۳- ۴) ۱۸۵-

۱۹۹۷ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x=1$ برابر a باشد، مقدار $\frac{6a+4}{a^4}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

۱۹۹۸ اگر a یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx-2=0$ باشد و $a^2+\frac{4}{a^2}=20$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سرنخ در تست‌های زیر ضرایب معادله با کمک ریشه‌های معادله نوشته شدن. در این سؤالات باید به جمع و ضرب ریشه‌ها توجه کنید.

۱۹۹۹ اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(2a+b-2)x+b-2=0$ باشند، مقدار a^3+b^2 کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

۲۰۰۰ اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-10x+a^2+b^2=0$ باشند، کدام گزینه در مورد ریشه‌های این معادله درست است؟

۱) دارای دو ریشهٔ متمایز مثبت
۲) دارای دو ریشهٔ متمایز منفی
۳) دارای دو ریشهٔ یکسان مثبت
۴) دارای دو ریشهٔ یکسان منفی

۲۰۰۱ اعداد صحیح m و n را در نظر بگیرید اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-(m-2n)x+5n+2=0$ برابر $m-n$ و $m+n$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴-

۲۰۰۲ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a^2+b^2-12)x+a+b-1=0$ باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

سرنخ در تست‌های زیر، دو معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشهٔ مشترک هستند. در این سؤالات، به جمع و ضرب ریشه‌ها توجه کنید.

۲۰۰۳ اگر دو معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-2)x^2+2x-3=0$ و $4x^2+mx+n=0$ دارای ریشه‌های یکسان باشند، مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) −۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰ و −۵

۲۰۰۴ معادله‌های $x^2+6x+m=0$ و $x^2+2x-3m=0$ یک ریشهٔ مشترک غیر صفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۲۰۰۵ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a+1)x-3-b=0$ برابر ۳ و یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+c=0$ برابر −۲ است. اگر ریشهٔ دیگر این دو معادله مشترک باشد، مقدار $c+\log_a(1-b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۰۰۶ معادله‌های درجهٔ دوم $x^2-2x+m=0$ و $x^2-7x+m+15=0$ دارای یک ریشهٔ مشترک هستند. مقدار m کدام است؟

۱) −۴ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) −۳

سرنخ در بعضی سؤالات، باید رابطهٔ داده‌شده بین ریشه‌ها را دسته‌بندی کنیم تا به یک رابطه، برحسب S و P و ... برسیم.

۲۰۰۷ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-3=0$ باشند، مقدار $\alpha^3\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta$ کدام است؟

۱) −۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) −۶

۲۰۰۸ اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2+4x-3m-1=0$ باشند و رابطهٔ $a^2+5a+b=12$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۲۰۰۹ اگر α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ $x^2+x-3=0$ باشند، مقدار $2\alpha^2+\beta^2+\alpha$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۰۱۰ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-12x-a=0$ و $2\alpha^2+\beta^2-4\alpha=7$ باشد، مقدار a چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تر معادله است؟

۱) ۳ ۲) −۳ ۳) ۹ ۴) −۹ (ریاضی خارج ۱۴۰۲)

سرنخ معمولاً وقتی طراح، ریشه‌ها را مقایسه می‌کند، و یک رابطه‌ای بین ریشه‌ها را می‌پرسد، نیم‌نگاهی به محاسبهٔ هریک از ریشه‌ها داشته باشید.

۲۰۱۱ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+8x-3=0$ و $\alpha>0$ باشد، حاصل $|\alpha+2\beta|+|\alpha|-|\beta-4|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{61}$ ۲) $-\sqrt{61}$ ۳) $\sqrt{19}$ ۴) $-\sqrt{19}$

۲۰۱۲ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+a=0$ هستند. اگر $\alpha<0<\beta$ و $\alpha^2+\alpha^3+\beta^3=98-4\sqrt{6}$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) −۱ ۲) −۱/۵ ۳) −۲ ۴) −۲/۵

۲۰۱۳ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+a=0$ هستند. اگر $\alpha<\beta<0$ و $3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{13}{4}$ ۴) $\frac{21}{5}$ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

علامت ریشه‌ها

سرنخ تست‌های زیر در مورد تعیین علامت ریشه‌هاست. برای این‌که علامت ریشه‌ها رو تعیین کنیم، باید علامت S و P رو پیدا کنیم. حواستون باشه وقتی معادلهٔ درجهٔ دوم، ۲ ریشهٔ حقیقی متمایز داره، باید $\Delta>0$ باشه.

۲۰۱۴ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+mx+m+6=0$ دارای دو ریشهٔ متمایز مثبت است، بازهٔ مقادیر m کدام است؟ (خارج ۹۹)

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-4,-2)$ ۳) $(-6,0)$ ۴) $(-6,-4)$

۲۰۱۵ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2mx+2+m=0$ باشند، به ازای کدام مقادیر m رابطهٔ $x_1<x_2<0$ برقرار است؟

۱) $-2<m<-1$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<0$ ۴) $m>2$

۲۰۱۶ به ازای کدام مقادیر m معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2(m-1)x+m+1=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز هم‌علامت است؟

۱) $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ ۲) $(3,+\infty)$ ۳) $(-1,0)\cup(3,+\infty)$ ۴) $(-1,0)\cup(3,5)$

۲۰۱۷ به ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-1)x^2+mx+m^2-4=0$ دارای یک ریشهٔ حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۲۰۱۸ اگر a یک عدد حقیقی منفی باشد، کدام عبارت در مورد معادلهٔ $x^2-(2a+3)x+a-2=0$ درست است؟

۱) دو ریشهٔ مثبت متمایز دارد.
۲) دو ریشهٔ یکسان دارد.
۳) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد.
۴) فاقد ریشهٔ حقیقی است.

۲۰۱۹ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $mx^2+(m-1)x+m-3=0$ باشند به طوری‌که $x_1<0<x_2$ و $|x_1|>x_2$ محدودهٔ m کدام است؟

۱) $0<m<3$ ۲) $m>3$ یا $m<1$ ۳) $1<m<3$ ۴) $2\le m<3$

نوشتن معادلهٔ درجهٔ دوم

۲۰۲۰ اندازهٔ طول مستطیلی که محیط آن ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن ۲۸ سانتی‌متر مربع است، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۰۲۱ ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های زیر عکس و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-2x-1=0$ است؟

۱) $3x^2+2x+1=0$ ۲) $x^2-2x+3=0$ ۳) $3x^2+2x-1=0$ ۴) $-x^2+2x+3=0$

۲۰۲۲ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-4=0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به‌صورت $\{\alpha^2+\beta^2, \alpha\beta\}$ است؟

۱) $x^2-8x-24=0$ ۲) $x^2-6x-48=0$ ۳) $x^2-8x-48=0$ ۴) $x^2-6x+3=0$

۲۰۲۳ در کدام معادلهٔ زیر، رابطهٔ $3(x_1+x_2)+x_1x_2=5$ و $(x_1+4)(x_2+4)=25$ بین ریشه‌ها برقرار است؟

۱) $x^2-2x-1=0$ ۲) $x^2-3x+2=0$ ۳) $x^2-4x-7=0$ ۴) $x^2-4x+2=0$

۲۰۲۴ ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر است؟ (داخل ۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

۲۰۲۵ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+1=0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به‌صورت $\{\alpha+\frac{2}{\beta}, \beta+\frac{2}{\alpha}\}$ است؟

۱) $x^2-8x+6=0$ ۲) $x^2-9x-5=0$ ۳) $x^2-12x+9=0$ ۴) $x^2-12x-5=0$

۲۰۲۶ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(7m-1)x+4m-2=0$ باشند و واسطهٔ حسابی بین ریشه‌های آن برابر با ۵ باشد، ریشه‌های کدام معادله به‌صورت $\{\frac{1}{x_1}+1, \frac{1}{x_2}+1\}$ است؟

۱) $5x^2-20x+16=0$ ۲) $5x^2-20x-16=0$ ۳) $5x^2+20x-16=0$ ۴) $5x^2+20x+16=0$

۲۰۲۷ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-ax+b=0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادلهٔ $2ax^2+ax-6=0$ بیش‌تر است. مقدار $[\frac{ab}{4}]$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۲)

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

۲۰۲۸ اگر $\alpha+\frac{1}{\beta}$ و $\beta+\frac{1}{\alpha}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-8x+4=0$ باشند، آن‌گاه ریشه‌های کدام معادله به صورت $\{\alpha,\beta\}$ است؟

۱) $x^2-4x+1=0$ ۲) $x^2-4x+2=0$ ۳) $x^2-6x+1=0$ ۴) $x^2-6x+2=0$

۲۰۲۹ اگر ریشه‌های معادلهٔ $8x^2-3x=1$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ باشند، به ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادلهٔ $4x^2+kx-2=0$ به‌صورت $\{\frac{1}{\alpha}+\beta, \frac{1}{\beta}+\alpha\}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) -1

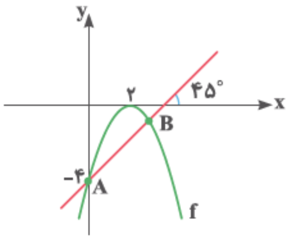
۲۰۳۰ اگر $\alpha+2$ و $\beta+2$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-1=0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله α^2+1 و β^2+1 هستند؟

۱) $x^2-8x-1=0$ ۲) $x^2-9x+17=0$ ۳) $x^2-11x+19=0$ ۴) $2x^2-5x-11=0$

۲۰۳۱ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=x^2-4$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_1^3+\frac{1}{x_2}$ و $x_2^3+\frac{1}{x_1}$ است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $4x^2=51x+221$ ۲) $4x^2+51x=221$ ۳) $4x^2=51x+197$ ۴) $4x^2+51x=197$

۲۰۸۹ نمودار تابع درجهٔ دوم $y = f(x)$ به‌صورت مقابل است. طول نقطهٔ B کدام است؟



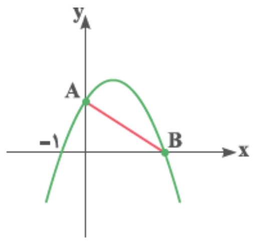
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲۰۹۰ در شکل مقابل، نقطهٔ $(۲,۹)$ رأس سهمی است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) $۵\sqrt{۲}$

۳) $۵\sqrt{۳}$

۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۰۹۱ رأس سهمی تابع $f(x) = x^۲ - ۴x + m + ۱$ روی محور xها قرار دارد و نقطهٔ $A(m,n)$ روی این سهمی است. معادلهٔ سهمی که نقطهٔ A رأس آن باشد و از نقطهٔ رأس سهمی f می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y = -۲x^۲ + ۱۲x - ۱۷$

۲) $y = x^۲ - ۴x + ۴$

۳) $y = -x^۲ + ۶x - ۸$

۴) $y = x^۲ - ۶x + ۸$

۲۰۹۲ نقاط $A(۳,y)$ و $B(-۵,y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^۲ + \beta^۲ = ۵$ باشد، این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۱) $-\frac{۱}{۳}$

۲) $-\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۰۹۳ سهمی گذرا از نقاط $(۱,a)$ و $(-۲,a)$ بر خط $y + ۳ = ۰$ مماس بوده و از هر چهار ناحیهٔ مختصات می‌گذرد. اگر فاصلهٔ نقطهٔ برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات ۲ واحد باشد، مقدار a کدام است؟ (مشابه ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۲۰

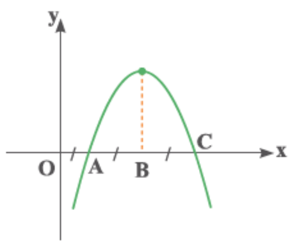
۲) ۲۰-

۳) ۶-

۴) ۶

دیگه وقتشه بریم سراغ تست‌های ترکیبی! توی این تست‌ها باید سهمی رو زیر ذره‌بین بذارید و به همهٔ ویژگی‌هاش توجه کنید.

۲۰۹۴ شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = -x^۲ + ۸x + k$ است. اگر $|OA| = |AB| = |BC|$ باشد، حاصل‌ضرب طول و عرض مختصات نقطهٔ رأس کدام است؟



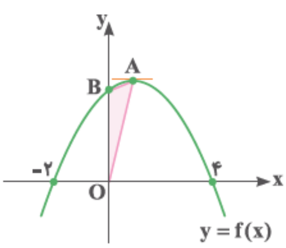
۱) ۸

۲) ۱۰

۳) ۱۴

۴) ۱۶

۲۰۹۵ نمودار تابع درجهٔ دوم f با رأس A به‌صورت مقابل است. اگر مساحت مثلث OAB برابر ۱۶ باشد، بیشترین مقدار تابع کدام است؟



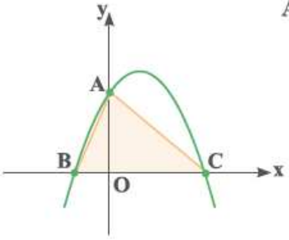
۱) ۳۲

۲) ۳۶

۳) ۴۰

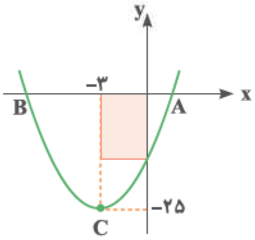
۴) ۴۲

۲۰۹۶ نمودار تابع درجهٔ دوم f به‌صورت مقابل است. اگر $|OA| = |OC| = 3|OB|$ و مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ باشد. مقدار $f(3)$ کدام است؟



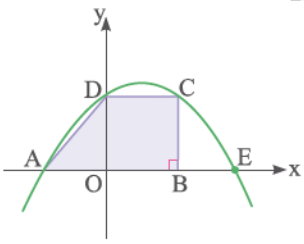
۱) $\frac{15}{2}$
۲) $\frac{11}{2}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{12}{5}$

۲۰۹۷ در شکل مقابل نقطهٔ $C(-3,-25)$ رأس سهمی و مساحت مستطیل رنگی برابر ۴۸ واحد مربع است. طول پاره‌خط AB چند واحد است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۲۰۹۸ مطابق شکل، نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 12$ محور xها را در ۲ نقطهٔ A و E و محور yها را در نقطهٔ D قطع می‌کند. مساحت ذوزنقهٔ ABCD کدام است؟

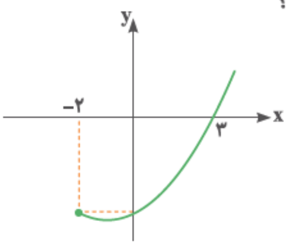


۱) ۳۶
۲) ۴۸
۳) ۵۴
۴) ۶۰

۲۰۹۹ صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $-\frac{3}{4}$
۴) $-\frac{1}{2}$

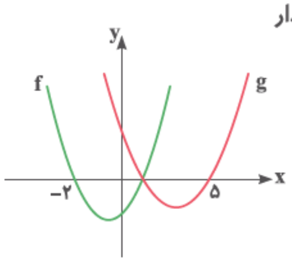
۲۱۰۰ شکل مقابل بخشی از نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. چه تعداد از روابط زیر درست است؟



الف) $a = -3c$
ب) $b = 2a$
پ) $c = -15b$

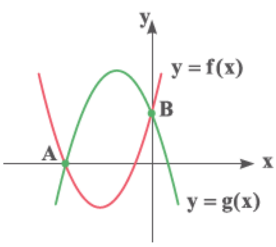
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۲۱۰۱ نمودار دو تابع درجهٔ دوم $f(x) = x^2 + ax - 2$ و $g(x) = x^2 + bx + c$ به‌صورت مقابل است. مقدار $f(2) + g(4)$ کدام است؟



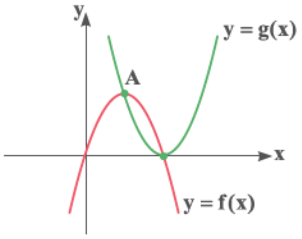
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۱۰۲ مطابق شکل، نمودارهای دو تابع $f(x) = (m-4)x^2 + (m+1)x + m + 3$ و $g(x) = -x^2 - 2x + 3m - 7$ در دو نقطهٔ A و B روی محورهای مختصات متقاطع‌اند. فاصلهٔ رأس‌های این دو سهمی کدام است؟



۱) $2\sqrt{13}$
۲) $2\sqrt{26}$
۳) $4\sqrt{13}$
۴) $4\sqrt{26}$

۲۱۰۳ سهمی f با رأس $A(2,5)$ و سهمی g به‌صورت مقابل است. مقدار $gof(4)$ کدام است؟



۱) ۱۰
۲) -4
۳) ۲۰
۴) ۱۸

وضعیت سهمی و خط یا وضعیت دو سهمی نسبت به هم

۲۱۰۴ خط $y = x + 2$ و سهمی $y = x^2 - 3x + m - 1$ در دو نقطه متقاطع‌اند. بیشترین مقدار صحیح m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۱۰۵ چه تعداد از تابع‌های خطی گذرنده از نقطهٔ $A(0,3)$ نمودار منحنی به معادلهٔ $y = 2x^2 - x - 2$ را در دو نقطه قطع می‌کنند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۲۱۰۶ منحنی به معادلهٔ $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطهٔ مشترکی ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $9 < m < 25$ ۲) $15 < m < 23$ ۳) $7 < m < 15$ ۴) $5 < m < 13$

۲۱۰۷ سهمی $y = -mx^2 + mx + 1$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۲۱۰۸ دو عدد حقیقی a و b را در نظر بگیرید. اگر تابع درجهٔ دوم $f(x) = x^2 - 2ax + 2$ و تابع خطی $g(x) = 2b(a-x)$ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، بیشترین مقدار صحیح $a^2 + b^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۰۹ منحنی‌های دو سهمی به معادلهٔ $y = 9x^2 - kx + 3$ بر خط $y + 1 = 0$ مماس هستند. فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) ۲

۲۱۱۰ به ازای کدام مقادیر a دو سهمی $y = x^2 + 3x + 1$ و $y = -x^2 + x + a$ در دو نقطه متقاطع‌اند؟

۱) $a < 0$ ۲) $a > \frac{1}{2}$ ۳) $0 < a < \frac{1}{2}$ ۴) $a > 1$

۲۱۱۱ به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیهٔ اول محورهای مختصات، مماس است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) -4 ۲) $-12 \,,\, 4$ ۳) $12 \,,\, -4$ ۴) ۱۲

۲۱۱۲ به ازای چه مقدار از m، نمودار تابع $y = -3x^2 + (2m-1)x + m - 6$ بر نیمساز ناحیهٔ چهارم مماس است؟ (کنکور مجدد ۱۴۰۱)

۱) -3 ۲) -6 ۳) ۳ ۴) ۶

۲۱۱۳ به ازای کدام مقدار k دو سهمی $f(x) = 4x^2 + 4x - k$ و $g(x) = kx^2 - 2x + 4$ برهم مماس هستند؟

۱) ۵ ۲) -5 ۳) ± 5 ۴) هیچ مقدار k

۲۱۱۴ سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از $(1,0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ M، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۱۱۵ سهمی $f(x) = x^2 - 2x + n$ و خط $y = 4x + m$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. مختصات نقطهٔ میانی پاره‌خط AB برابر $M(a,17)$ است. مقدار m کدام است؟ (شبیه‌ساز خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

گذر از نواحی

پاسخ: بعضی وقت‌ها سهمی بالای محور xها است که در این حالت از ناحیه‌های اول و دوم دستگاه مختصات می‌گذرد و بعضی‌وقت‌ها هم سهمی پایین محور xها است که در این حالت از ناحیه‌های سوم و چهارم می‌گذرد.

۲۱۱۶) به ازای چند مقدار صحیح m، نمودار سهمی $y=(m+2)x^2-2mx+1$ فقط از ناحیهٔ اول و دوم دستگاه مختصات می‌گذرد؟ (شبیه‌ساز خارج ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۱۱۷) به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$ همواره پایین محور xها است؟ (خارج ۹۸)

۱) $1<m<5$ ۲) $2<m<5$ ۳) $2<m<4$ ۴) $2<m<6$

۲۱۱۸) به ازای کدام مقدار a نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=(a-1)x^2-2x+a+1$ پایین محور xها و برآن مماس است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}+1$ ۴) $\pm\sqrt{2}$

پاسخ: حالا بریم حالت‌هایی رو بررسی کنیم که سهمی فقط از یک ناحیه نمی‌گذرد یا از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

۲۱۱۹) تابع درجهٔ دوم $f(x)=(m-1)x^2+(3m+5)x+m+2$ از هر چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات می‌گذرد. مقادیر m کدام است؟

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) $m<1$ ۴) $m>-2$

۲۱۲۰) به ازای کدام مقادیر m، سهمی $y=-x^2+4x+m-3$ فقط از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $[-1,3)$ ۲) $(-1,3]$ ۳) $(-\infty,3]$ ۴) $(-\infty,-1]$

۲۱۲۱) به ازای چند مقدار a، سهمی $y=ax^2+(3+2a)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (داخل ۱۴۰۱)

۱) تمام مقادیر a ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار a

۲۱۲۲) به ازای کدام مقادیر m، نمودار سهمی $y=mx^2+(3m-1)x+m-6$ حداکثر از سه ناحیه می‌گذرد؟

۱) $(0,6)$ ۲) $\mathbb{R}-(0,6)$ ۳) $[6,+\infty)$ ۴) $[-1,0]\cup[6,+\infty)$

۲۱۲۳) به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=x^2+(m+2)x+2m-1$ دقیقاً از ۳ ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند؟

۱) $m>4$ ۲) $\frac{1}{2}\le m<4$ ۳) $m\ge\frac{1}{2}$ ۴) $m>4$ یا $m<0$

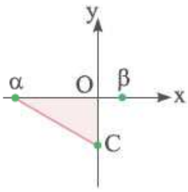
۲۱۲۴) به ازای کدام مجموعه مقادیر a، سهمی به معادلهٔ $y=(a-3)x^2+ax-1$ از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a\le 2$ ۲) $0<a\le 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

یادداشت:

۱۹۵۷ **۴**

با توجه به صورت سؤال، مساحت مثلث برابر است با:



$S=\frac{۱}{۲}\alpha c=c^۲ \Rightarrow \alpha=۲c$

حالا حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۵x+c=۰$ برابر c است، پس:

۱) $P=\alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta=c \xrightarrow{\alpha=۲c} ۲c\beta=c \Rightarrow \beta=\frac{۱}{۲}$

۲) $S=\alpha+\beta=-۵ \Rightarrow ۲c+\frac{۱}{۲}=-۵ \Rightarrow c=-\frac{۱۱}{۴}=-۲/۷۵$

۱۹۵۸ **۲**

ضرایب معادلهٔ $۲kx^۲-۴x-۴k-۵=۰$ صحیح هستند، پس ۲k نیز عددی صحیح است. حالا حاصل‌ضرب ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$P=\frac{c}{a}=\frac{-۴k-۵}{۲k}=-۲-\frac{۵}{۲k}$

برای این‌که حاصل‌ضرب ماکسیمم شود، باید $-\frac{۵}{۲k}$ ماکزیمم شود که به ازای $۲k=-۱$ این اتفاق می‌افتد. پس $k=-\frac{۱}{۲}$ است و داریم:

$-x^۲-۴x+۲-۵=۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲+۴x+۳=۰$

$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_۱=-۱ \\ x_۲=-۳ \end{cases}$

پس تفاضل ریشه‌ها برابر $۲=|(-۳)-(-۱)|$ است.

۱۹۵۹ **۳**

در معادلهٔ $x^۲-۲x-۴=۰$ داریم:

$S=\alpha+\beta=۲ \quad , \quad P=\alpha\beta=-۴$

حالا تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=۲^۲-۲(-۴)=۱۲$

۲) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{p}=\frac{۲}{-۴}=-\frac{۱}{۲}$

۳) $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS=۲^۳-۳(-۴)(۲)=۳۲$

۴) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{۱۲}{-۴}=-۳$

۱۹۶۰ **۴**

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را α و β در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$S=\alpha+\beta=۱۰ \Rightarrow \frac{-b}{a}=۱۰ \Rightarrow \frac{(m-۲)}{۱}=۱۰$

$\Rightarrow m-۲=۱۰ \Rightarrow m=۱۲$

پس معادله به‌صورت $x^۲-۱۰x+۲۴=۰$ و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابر با $P=\frac{c}{a}=۲۴$ است. در نتیجه خواهیم داشت:

$\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳SP=۱۰^۳-۳\times۱۰\times۲۴=۱۰۰۰-۷۲۰=۲۸۰$

۱۹۶۱ **۴**

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$x^۲-mx+m+۴=۰ \Rightarrow S=\alpha+\beta=m \quad , \quad P=\alpha\beta=m+۴$

$\Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲=۷ \Rightarrow S^۲-۲P=۷ \Rightarrow m^۲-۲(m+۴)=۷$

$\Rightarrow m^۲-۲m-۱۵=۰ \Rightarrow (m-۵)(m+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۵ \\ m=-۳ \end{cases}$

در ضمن $m=۵$ قابل قبول نیست چون به ازای آن Δ منفی می‌شود.

دام تستی همیشه یادت باشه توی این مسائل علامت Δ رو چک کنی.

۱۹۶۲ **۴**

چون $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند، پس:

$x^۲-۵x+k=۰ \Rightarrow S=x_۱+x_۲=۵ \quad , \quad P=x_۱x_۲=k$

$\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}=۳ \Rightarrow \frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{x_۱x_۲}=۳ \Rightarrow \frac{S^۲-۲P}{P}=۳ \Rightarrow \frac{۵^۲-۲k}{k}=۳ \Rightarrow k=۵$

۱۹۶۳ **۱**

چون $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند، پس:

$x^۲-x-a=۰ \Rightarrow S=x_۱+x_۲=۱ \quad , \quad P=x_۱x_۲=-a$

$\frac{x_۱^۳+x_۲^۳}{x_۱^۲+x_۲^۲}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{S^۳-۳PS}{S^۲-۲P}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{۱^۳-۳(-a)}{۱^۲-۲(-a)}=\frac{۴}{۳}$

$\Rightarrow \frac{۱+۳a}{۱+۲a}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow a=۱$

۱۹۶۴ **۳**

در معادلهٔ $x^۲-۴x+۳m-۱۰=۰$ مجموع ریشه‌ها برابر $a+b=۴$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها $a.b=۳m-۱۰$ است. حال رابطهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم و داریم:

$۵\underbrace{(a^۲+b^۲)}_{S^۲-۲P}+۲۶ab=۱۱۲ \Rightarrow ۵(۴^۲-۲P)+۲۶P=۱۱۲$

$\Rightarrow ۸۰-۱۰P+۲۶P=۱۱۲ \Rightarrow ۱۶P=۳۲ \Rightarrow P=۲$

$\Rightarrow ۳m-۱۰=۲ \Rightarrow ۳m=۱۲ \Rightarrow m=۴$

۱۹۶۵ **۳**

چون $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند، پس:

$x^۲-۵x+m=۰ \Rightarrow S=x_۱+x_۲=۵ \quad , \quad P=x_۱x_۲=m$

از طرفی مساحت مستطیل برابر ۱۶ است، پس:

$(x_۱+m)(x_۲+m)=۱۶ \Rightarrow x_۱x_۲+m(x_۱+x_۲)+m^۲=۱۶$

$\Rightarrow m+۵m+m^۲=۱۶ \Rightarrow \underbrace{m^۲+۶m-۱۶}_{(m-۲)(m+۸)}=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-۸ \end{cases}$

در ضمن به ازای $m=-۸$ محیط مستطیل، عددی منفی می‌شود!

۱۹۶۶ **۴**

چون $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند، پس:

$x^۲-۵x-۳=۰ \Rightarrow S=x_۱+x_۲=۵ \quad , \quad P=x_۱x_۲=-۳$

$\Rightarrow \frac{۱}{۳x_۱+۲}+\frac{۱}{۳x_۲+۲}=\frac{(۳x_۲+۲)+(۳x_۱+۲)}{(۳x_۱+۲)(۳x_۲+۲)}$

$=\frac{۳(x_۱+x_۲)+۴}{۹x_۱x_۲+۶(x_۱+x_۲)+۴}=\frac{۳(۵)+۴}{۹(-۳)+۶(۵)+۴}=\frac{۱۹}{۷}$

۱۹۶۷ ۳

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^2-(m+1)x+m+2=0\Rightarrow S=x_1+x_2=m+1\ ,$$
$$P=x_1x_2=m+2$$
$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{7}{12}\Rightarrow\frac{(x_2+1)+(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{7}{12}$$
$$\Rightarrow\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\frac{7}{12}$$
$$\Rightarrow\frac{m+1+2}{m+2+m+1+1}=\frac{7}{12}\Rightarrow\frac{m+3}{2m+4}=\frac{7}{12}\Rightarrow m=4$$

۱۹۶۸ ۳

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^2-(m-3)x+2m-13=0\Rightarrow S=x_1+x_2=m-3\ ,$$
$$P=x_1x_2=2m-13$$

حالا نامعادلهٔ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>1$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}>1\Rightarrow\frac{m-3}{2m-13}-1>0\Rightarrow\frac{-m+10}{2m-13}>0\Rightarrow\frac{13}{2}<m<10$$

البته باید $\Delta>0$ باشد:

$$\Delta=(m-3)^2-4(1)(2m-13)=m^2-14m+61=(m-7)^2+12>0$$

پس همهٔ مقادیر طبیعی m در بازهٔ $(\frac{13}{2},10)$ قابل قبول‌اند و مجموع آن‌ها برابر است با: $7+8+9=24$

۱۹۶۹ ۴

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^2-(5m-1)x+9=0\Rightarrow S=x_1+x_2=5m-1\ ,\ P=x_1x_2=9$$

حالا طرفین تساوی $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=5$ را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=25\Rightarrow 5m-1+2\sqrt{9}=25\Rightarrow m=4$$

به جوره دیگه! طراح کنکور سراسری سال ۹۶ همین سؤالو اینجوری مطرح کرد: «مجموع جذر هر دو ریشهٔ این معادلهٔ درجهٔ دوم برابر ۵ است.»

۱۹۷۰ ۱

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^2-3x+1=0\Rightarrow S=x_1+x_2=3\ ,\ P=x_1x_2=1$$

حال با فرض $A=x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}$ داریم:

$$A^2=\overbrace{x_1^2x_2+x_2^2x_1}^{x_1x_2(x_1+x_2)}+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}$$
$$=1\times3+2\times1\times\sqrt{1}=5\Rightarrow A=\sqrt{5}$$

۱۹۷۱ ۱

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$2x^2-5x-1=0\Rightarrow S=x_1+x_2=\frac{5}{2}\ ,\ P=x_1x_2=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow(x_1^2+\frac{1}{x_2})(x_2^2+\frac{1}{x_1})=(x_1x_2)^2+x_1+x_2+\frac{1}{x_1x_2}$$
$$=(-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-2=\frac{3}{4}$$

۱۹۷۲ ۳

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$2x^2-5ax-8=0\Rightarrow S=x_1+x_2=\frac{5a}{2}\ ,\ P=x_1x_2=-4$$
$$\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=x_2^2-x_1^2\Rightarrow\frac{\cancel{x_2-x_1}}{x_1x_2}=(\cancel{x_2-x_1})(x_1+x_2)$$
$$\Rightarrow-\frac{1}{4}=\frac{5a}{2}\Rightarrow10a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{10}$$

۱۹۷۳ ۳

در معادلهٔ $x^2-ax+8=0$ داریم:

$$|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{a^2-32}\quad,\quad P=x_1x_2=8$$

حال با توجه به رابطهٔ $|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|=\frac{1}{4}$ داریم:

$$\frac{|x_2-x_1|}{|x_1x_2|}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{a^2-32}}{8}=\frac{1}{4}\Rightarrow\sqrt{a^2-32}=2$$
$$\Rightarrow a^2=36\Rightarrow a=\pm6\Rightarrow S=x_1+x_2=a=(\pm6)=\pm6$$

۱۹۷۴ ۱

در معادلهٔ $x^2-(m-1)x+m+2=0$ داریم:

$$S=x_1+x_2=m-1\quad,\quad P=x_1x_2=m+2$$
$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=10\Rightarrow x_1x_2(x_1+x_2)=10\Rightarrow(m+2)(m-1)=10$$
$$\Rightarrow m^2+m-12=0\Rightarrow(m+4)(m-3)=0\Rightarrow\begin{cases}m=3\ \times\\ m=-4\ \checkmark\end{cases}$$

به ازای $m=3$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

دام‌تستی اگه علامت Δ رو چک نکنی، گزینهٔ (۴) رو میزنی.

۱۹۷۵ ۲

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$2x^2-6x-1=0\Rightarrow S=x_1+x_2=3\quad,\quad P=x_1x_2=-\frac{1}{2}$$

حال مقدار $4x_1^2x_2+4x_1x_2^2+6x_1+6x_2$ را پیدا می‌کنیم:

$$4x_1x_2(x_1+x_2)+6(x_1+x_2)=4(-\frac{1}{2})(3)+6(3)=12$$

۱۹۷۶ ۴

در معادلهٔ $x^2-(a+2)x+3=0$ داریم:

$$S=x_1+x_2=a+2\quad,\quad P=x_1x_2=3$$
$$x_1^2x_2^3+3x_1^2x_2=81\Rightarrow x_1^2x_2^2x_2+3x_1x_2x_1=81$$
$$\Rightarrow(x_1x_2)^2x_2+3(x_1x_2)x_1=81\Rightarrow9x_2+9x_1=81$$
$$\Rightarrow x_1+x_2=9\Rightarrow a+2=9\Rightarrow a=7$$

۱۹۷۷ ۲

در معادلهٔ $x^2-x+m=0$ مجموع ریشه‌ها برابر $S=1$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها $P=m$ است، پس:

$$\frac{\alpha}{\beta-1}+\frac{\beta}{\alpha-1}=-2\Rightarrow\frac{\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)}{(\beta-1)(\alpha-1)}=-2$$
$$\Rightarrow\frac{(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=-2\Rightarrow\frac{S^2-2P-S}{P-S+1}=-2$$
$$\Rightarrow\frac{1-2m-1}{m-1+1}=\frac{-2m}{m}=-2$$

از آن‌جایی که m در مخرج کسر قرار دارد، پس $m \neq 0$ است. از طرفی معادله باید دارای ریشه باشد:

$$\Delta \ge 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4(1)m \ge 0 \Rightarrow m \le \frac{1}{4}\ ,\ m \neq 0$$

پس بیشترین مقدار m برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۹۷۸ ۲

اگر α و β ریشه‌های صحیح معادلهٔ $x^2 + ax + b = 0$ باشند، داریم:

$$\begin{matrix} S = \alpha + \beta = -a \\ P = \alpha.\beta = b \end{matrix} \xrightarrow{a+b=3} \underbrace{-(\alpha+\beta) + \alpha\beta}_{(\alpha-1)(\beta-1)-1} = 3$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 4$$

حال چون α و β اعداد صحیح هستند، حالت‌های زیر را داریم:

$$1)\begin{cases} \alpha - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 2 \\ \beta - 1 = 4 \Rightarrow \beta = 5 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} \alpha - 1 = -1 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \beta - 1 = -4 \Rightarrow \beta = -3 \end{cases}$$

۱۹۷۹ ۲

ریشه‌های معادلهٔ $(a+5)x^2 + (4a+3)x + 2a + 1 = 0$ معکوس یکدیگرند، پس:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1x_2 = 1 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2a+1}{a+5} = 1$$

$$\Rightarrow 2a + 1 = a + 5 \Rightarrow a = 4$$

۱۹۸۰ ۱

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها به‌ترتیب $S = -\frac{2m-1}{3}$ و $P = \frac{2-m}{3}$ است. حال چون مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است، پس:

$$S = \frac{1}{P} \Rightarrow -\frac{2m-1}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 9$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} m = -1\ ,\ m = \frac{7}{2}$$

به ازای $m = -1$ معادله فاقد ریشهٔ حقیقی است، زیرا $\Delta < 0$ می‌شود:

$$m = -1 : 3x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 < 0$$

۱۹۸۱ ۳

در معادلهٔ $3x^2 - ax + 4 = 0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\alpha\beta = \frac{4}{3}$ است. در ضمن $\alpha = 3\beta$ است، پس:

$$\alpha\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\beta \times \beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 2 \\ \beta = -\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = -2 \end{cases}$$

از طرفی مجموع ریشه‌ها برابر $\alpha + \beta = \frac{a}{3}$ است، پس:

$$\alpha + \beta = \pm\frac{8}{3} = \frac{a}{3} \to a = \pm 8 \Rightarrow |a_2 - a_1| = |-8 - 8| = 16$$

۱۹۸۲ ۲

در معادلهٔ $ax^2 - 8x + 4 = 0$ داریم: $\alpha + \beta = \frac{8}{a}\ ,\ \alpha\beta = \frac{4}{a}$

حال با توجه به این‌که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های $\beta\alpha^2\ ,\ \alpha\beta^2$ برابر هستند داریم:

$$\beta\alpha^2 + \alpha\beta^2 = \alpha^2\beta \times \beta^2\alpha \xrightarrow{\div\alpha\beta} \alpha + \beta = (\alpha\beta)^2$$

$$\frac{8}{a} = \left(\frac{4}{a}\right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} a = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$$

۱۹۸۳ ۲

با توجه به معادله مجموع ریشه‌ها برابر $x_1 + x_2 = 12$ است. از طرفی طبق صورت سؤال:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = 18 \Rightarrow x_1 = 6$$

در ضمن چون $x_1 = 6$ یکی از ریشه‌های معادله است در آن صدق می‌کند:

$$x^2 - 12x + 2m - 6 = 0 \xrightarrow{x_1=6} 36 - 72 + 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 21$$

> یه جوره دیگه! قبول دارید که می‌تونیم رابطهٔ صورت سؤال رو به شکل $x_2 = 2x_1 - 6$ بنویسیم؟ خب طراح همین سؤال رو در کنکور داخل ۹۲ این‌جوری مطرح کرد: «اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 12x + 2m - 6 = 0$ از دو برابر ریشهٔ دیگر، ۶ واحد کمتر باشد، مقدار m کدام است؟»

۱۹۸۴ ۴

در معادلهٔ $2x^2 + (2k-3)x - 12 = 0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $x_1x_2 = \frac{-12}{2} = -6$ است. در ضمن $x_1 = -\frac{8}{3}x_2$ است. پس:

$$x_1x_2 = -6 \Rightarrow \left(-\frac{8}{3}x_2\right)(x_2) = -6$$

$$\Rightarrow x_2^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = -4 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \end{cases}$$

از طرفی مجموع ریشه‌ها برابر $x_1 + x_2 = -\frac{2k-3}{2}$ است. پس:

$$x_1 + x_2 = \pm\frac{5}{2} = -\frac{2k-3}{2} \xrightarrow{k \in N} k = 4$$

۱۹۸۵ ۲

در معادلهٔ $x^2 + (a-2)x + 16 = 0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $x_1x_2 = 16$ است. در ضمن با توجه به صورت سؤال $x_2 = x_1^3$ است، پس:

$$x_1x_2 = 16 \xrightarrow{x_2 = x_1^3} x_1^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 = -2 \end{cases}$$

اگر $x_1 = -2$ باشد، $x_2 = -8$ است که در رابطهٔ $x_1 > x_2$ صدق می‌کند، پس با توجه به مجموع ریشه‌ها داریم:

$$x_1 + x_2 = -(a-2) \Rightarrow (-2) + (-8) = -a + 2 \Rightarrow a = 12$$

۱۹۸۶ ۴

چون سه جملهٔ α, a, β تشکیل دنبالهٔ هندسی داده‌اند، پس $\alpha\beta = a^2$ است. از طرفی در معادلهٔ $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها از رابطهٔ $P = \alpha\beta = 2a - 1$ به‌دست می‌آید، پس:

$$\begin{cases} \alpha\beta = a^2 \\ \alpha\beta = 2a - 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 2a - 1 \Rightarrow \underbrace{a^2 - 2a + 1}_{(a-1)^2} = 0 \Rightarrow a = 1$$

۱۹۸۷ ۴

اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، از آن‌جایی که عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین ریشه‌های حقیقی معادله است، بنابراین:

$$\alpha + \beta = 2\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{4}$$

از طرفی در معادلهٔ داده‌شده، مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$S = -\frac{-3}{m^2 - 4} = \frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m = \pm 4$$

حال Δ را به ازای $m=4$ و $m=-4$ به‌دست می‌آوریم تا ببینیم کدام مقدار m قابل قبول است:

$$m=4: 12x^2-3x+4=0 \Rightarrow \Delta=\underbrace{(-3)^2-4(12)(4)}_{9-192}=-183<0$$

به ازای $m=4$ معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$m=-4: 12x^2-3x-4=0$$

دام تستی امیدوارم گزینهٔ (۱) رو نزده باشی؛ چون $m=4$ دِلتا رو منفی میکنه.

$$\Rightarrow \Delta=\underbrace{(-3)^2-4(12)(-4)}_{9+192}=201>0 \checkmark$$

۱۹۸۸ — ۱

در معادلهٔ $mx^2-(m+1)x+1=0$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{m+1}{m}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{1}{m}$$

حال فرض می‌کنیم k واسطهٔ حسابی و هندسی α و β است، پس:

$$\begin{cases} k=\frac{\alpha+\beta}{2} \\ k^2=\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m+1}{2m}\right)^2=\frac{1}{m} \Rightarrow \frac{m^2+2m+1}{4m^2}=\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow m^2+2m+1=4m \Rightarrow \underbrace{m^2-2m+1}_{(m-1)^2}=0 \Rightarrow m=1$$

روش سریع‌تر نیاز به حل معادله نبود، با عددگذاری $m=1$ می‌تونستی درستی این تساوی رو چک کنی.

۱۹۸۹ — ۱

چون x_1, x_2, x_3, x_4 چهار جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی هستند، پس جملهٔ اول را x_1 و قدرنسبت را d در نظر می‌گیریم. حال در هر معادله مجموع ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$1)\ x^2+2x+A=0 \Rightarrow x_1+x_2=-2 \Rightarrow x_1+(x_1+d)=-2$$

$$2)\ x^2-14x+B=0 \Rightarrow x_3+x_4=14 \Rightarrow (x_1+2d)+(x_1+3d)=14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1+d=-2 \\ 2x_1+5d=14 \end{cases} \Rightarrow d=4\ ,\ x_1=-3$$

پس $x_1=-3$ و $x_2=1$ و $x_3=5$ و $x_4=9$ است و داریم:

$$\frac{B}{A}=\frac{x_3x_4}{x_1x_2}=\frac{5\times 9}{-3\times 1}=-15$$

۱۹۹۰ — ۳

با توجه به معادله، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $x_1x_2=4$ است و با توجه به رابطهٔ $\sqrt{x_1}+\frac{2}{\sqrt{x_2}}=2$ داریم:

$$\frac{\sqrt{x_1x_2}+2}{\sqrt{x_2}}=2 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{4}+2}_{4}=2\sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_2}=2 \Rightarrow x_2=4$$

درضمن چون $x_2=4$ یکی از ریشه‌های معادله است، درآن صدق می‌کند:

$$x^2-(m-1)x+4=0 \xrightarrow{x_2=4} 16-4(m-1)+4=0 \Rightarrow m=6$$

۱۹۹۱ — ۳

با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر $x_1+x_2=-7$ است. حال با توجه به رابطهٔ $x_2^2+x_1x_2=35$ داریم:

$$x_2(x_1+x_2)=35 \Rightarrow -7x_2=35 \Rightarrow x_2=-5$$

در ضمن چون $x_2=-5$ یکی از ریشه‌های معادله است، در آن صدق می‌کند:

$$x^2+7x-m+2=0 \xrightarrow{x_2=-5} 25-35-m+2=0$$

$$\Rightarrow m=-8$$

۱۹۹۲ — ۴

در معادلهٔ $(a+1)x^2-2x+a=0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $x_1x_2=\frac{a}{a+1}$ است، پس با جای‌گذاری در رابطهٔ صورت سؤال داریم:

$$x_1+x_1x_2=-\frac{1}{a+1} \Rightarrow x_1+\frac{a}{a+1}=-\frac{1}{a+1}$$

$$\Rightarrow x_1=-\frac{a+1}{a+1}=-1$$

چون $x_1=-1$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$(a+1)x^2+2x+a=0 \xrightarrow{x_1=-1} (a+1)-2+a=0$$

$$\Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۱۹۹۳ — ۳

چون β یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\beta^2+3\beta-5=0 \Rightarrow 5-3\beta=\beta^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2(5-3\beta)}=\sqrt{\alpha^2\beta^2}=\sqrt{(\alpha\beta)^2}=\sqrt{25}=5$$

۱۹۹۴ — ۳

چون a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x-3=0$ هستند پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} a^2-5a-3=0 \Rightarrow a^2-5a=3 \\ b^2-5b-3=0 \Rightarrow b^2-5b=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a-2)(a-3)+(b-1)(b-4)=(a^2-5a+6)+(b^2-5b+4)$$

$$=(3+6)+(3+4)=16$$

۱۹۹۵ — ۳

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2=4x$ هستند، در آن صدق می‌کنند: $(x_1, x_2 \neq 0)$

$$1)\ x_1^2+2=4x_1 \xrightarrow{\div x_1} x_1+\frac{2}{x_1}=4$$

$$2)\ x_2^2+2=4x_2 \xrightarrow{\div x_2} x_2+\frac{2}{x_2}=4$$

حالا حاصل عبارت خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)^2+x_2^2+\frac{4}{x_2^2}=\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{2}{x_2}\right)^2-4$$

$$=4^2+4^2-4=28$$

۱۹۹۶ ۳

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x_1^2-4x_1+1=0\Rightarrow x_1^2=4x_1-1\\ x_2^2-4x_2+1=0\Rightarrow x_2^2=4x_2-1\end{cases}\Rightarrow (x_2^2-4x_2+4)(x_1^2-4x_1+4)$$

$$=(4x_2-1-4x_1+4)(4x_1-1-4x_2+4)$$

$$=(3+4(x_2-x_1))(3-4(x_2-x_1))=9-16(x_2-x_1)^2$$

در ضمن در معادلهٔ $x^2-4x+1=0$ می‌دانیم $|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{12}$ است، پس:

$$9-16(x_2-x_1)^2=9-16(\sqrt{12})^2=9-192=-183$$

۱۹۹۷ ۲

چون a یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x^2-x-1=0\xrightarrow{x=a}a^2-a-1=0\Rightarrow a^2=a+1$$

حال a^4 را ساده می‌کنیم و آن را در مخرج کسر خواسته‌شده قرار می‌دهیم:

$$a^4=(a^2)^2=(a+1)^2=a^2+2a+1=a+1+2a+1=3a+2$$

$$\Rightarrow \frac{6a+4}{a^4}=\frac{6a+4}{3a+2}=2$$

۱۹۹۸ ۴

چون a یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx-2=0$ است، در آن صدق می‌کند:

$$a^2+ma-2=0\Rightarrow a^2-2=-ma\xrightarrow{\div a}a-\frac{2}{a}=-m$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}a^2+\frac{4}{a^2}-4=m^2\Rightarrow a^2+\frac{4}{a^2}=m^2+4$$

از طرفی $a^2+\frac{4}{a^2}=20$ است، پس:

$$m^2+4=20\Rightarrow m^2=16\Rightarrow\begin{cases}m=-4\\m=4\end{cases}$$

۱۹۹۹ ۱

چون a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(2a+b-2)x+b-2=0$ هستند، پس جمع و ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

1) $S=a+b=2a+b-2\Rightarrow a=2$

2) $P=ab=b-2\xrightarrow{a=2}2b=b-2\Rightarrow b=-2$

بنابراین $a^3+b^2=8+4=12$ است.

دام تستی اگه a و b رو جابه‌جا کنی، به گزینهٔ (۴) می‌رسی.

۲۰۰۰ ۳

در معادلهٔ $2x^2-10x+a^2+b^2=0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$P=ab=\frac{a^2+b^2}{2}\Rightarrow a^2+b^2=2ab\Rightarrow a^2-2ab+b^2=0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2=0\Rightarrow a=b$$

از طرفی مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$S=a+b=\frac{10}{2}=5\xrightarrow{a=b}a=b=\frac{5}{2}$$

پس معادله دارای دو ریشهٔ یکسان با علامت مثبت است.

۲۰۰۱ ۴

چون $m-n$ و $m+n$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m-2n)x+5n+2=0$ هستند، پس جمع و ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

1) $S=(m+n)+(m-n)=m-2n\Rightarrow 2m=m-2n\Rightarrow m=-2n$

2) $P=(m+n)(m-n)=5n+2\Rightarrow \underbrace{(-2n+n)(-2n-n)}_{3n^2}=5n+2$

$$\Rightarrow 3n^2-5n-2=0\Rightarrow (n-2)(3n+1)=0$$

$$\xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} n=2\Rightarrow m=-4$$

۲۰۰۲ ۲

در معادلهٔ $x^2-(a^2+b^2-12)x+a+b-1=0$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

1) ضرب ریشه‌ها: $ab=a+b-1\Rightarrow P=S-1$

2) جمع ریشه‌ها: $a+b=a^2+b^2-12\Rightarrow S=S^2-2P-12$

$$\Rightarrow S=S^2-2(S-1)-12\Rightarrow \underbrace{S^2-3S-10}_{(S-5)(S+2)}=0\Rightarrow \begin{cases}S=5\\S=-2\end{cases}$$

چون a و b اعداد طبیعی هستند، پس مجموع آن‌ها برابر $S=a+b=5$ است.

۲۰۰۳ ۱

چون دو معادله دارای ریشه‌های یکسان هستند، پس حاصل‌ضرب و جمع ریشه‌های دو معادله با یکدیگر برابر است:

$$(m-2)x^2+2x-3=0\Rightarrow S_1=-\frac{2}{m-2}\ ,\ P_1=\frac{-3}{m-2}$$

$$4x^2+mx+n=0\Rightarrow S_2=-\frac{m}{4}\ ,\ P_2=\frac{n}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{m-2}=-\frac{m}{4}\Rightarrow \underbrace{m^2-2m-8}_{(m-4)(m+2)}=0\Rightarrow m=4\ ,\ m=-2$$

در ضمن به ازای $m=-2$ معادلهٔ $(m-2)x^2+2x-3=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد چون $\Delta=-44<0$ است.

$$\frac{-3}{m-2}=\frac{n}{4}\xrightarrow{m=4}-\frac{3}{2}=\frac{n}{4}\Rightarrow n=-6\Rightarrow m-n=10$$

دام تستی اگر با $m=-2$ میرفتی، توی دام می‌افتادی و گزینهٔ (۴) رو می‌زدی!

۲۰۰۴ ۳

فرض می‌کنیم x_0 ریشهٔ مشترک هر دو معادله است و داریم:

$$x^2+6x+m=0\Rightarrow S_1=\alpha+x_0=-6$$

$$x^2+2x-3m=0\Rightarrow S_2=\beta+x_0=-2$$

$$\Rightarrow S_2-S_1=\beta-\alpha=-2-(-6)=4$$

۲۰۰۵ ۳

اگر ریشهٔ مشترک معادله‌ها را x_0 در نظر بگیریم، آن‌گاه با توجه به مجموع ریشه‌ها در هر معادله داریم:

1) $x^2-(a+1)x-3-b=0\Rightarrow S_1=3+x_0=(a+1)$

2) $x^2+ax+c=0\Rightarrow S_2=-2+x_0=-a$

حالا این روابط را از هم کم می‌کنیم: $5=2a+1\Rightarrow a=2$

حال معادله‌ها را بازنویسی می‌کنیم و ریشهٔ هر کدام را در معادله قرار می‌دهیم:

$$1)\ x^2-3x-3-b=0 \xrightarrow{x_1=3} 3^2-3\times3-3-b=0\Rightarrow b=-3$$

$$2)\ x^2+2x+c=0 \xrightarrow{x_2=-2} (-2)^2+2(-2)+c=0\Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow c+\log_a(1-b)=0+\log_2 4=2$$

۲۰۰۶ ۴

ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x+m=0$ را α و x_0 و ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+m+15=0$ را β و x_0 در نظر می‌گیریم. حالا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله را می‌نویسیم:

$$1)\ \begin{cases}\alpha+x_0=2\\ \beta+x_0=7\end{cases}\Rightarrow\beta-\alpha=7-2=5$$

$$2)\ \begin{cases}\alpha x_0=m\\ \beta x_0=m+15\end{cases}\Rightarrow\underbrace{(\beta-\alpha)}_{5}x_0=15\Rightarrow x_0=3$$

چون $x_0=3$ ریشهٔ معادله است، پس در آن‌ها صدق می‌کند:

$$x^2-2x+m=0\xrightarrow{x_0=3}3^2-2(3)+m=0\Rightarrow m=-3$$

۲۰۰۷ ۱

در معادلهٔ $x^2+x-3=0$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=-1\ ,\ P=\alpha\beta=-3$$

حالا از $\alpha\beta$ فاکتور می‌گیریم:

$$\alpha^3\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta=\alpha\beta(\alpha^2+\alpha+1)$$

از طرفی چون α ریشهٔ معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^2+\alpha-3=0\Rightarrow\alpha^2+\alpha=3$$

حالا حاصل عبارت خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$\alpha\beta(\alpha^2+\alpha+1)=-3(3+1)=-12$$

۲۰۰۸ ۳

در معادلهٔ $x^2+4x-3m-1=0$ مجموع ریشه‌ها $a+b=-4$ است. در ضمن چون a یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x^2+4x-3m-1=0\xrightarrow{x=a}a^2+4a=3m+1$$

حال با توجه به رابطهٔ $a^2+5a+b=12$ داریم:

$$\underbrace{a^2+4a}_{3m+1}+\underbrace{a+b}_{-4}=12\Rightarrow 3m-3=12\Rightarrow 3m=15\Rightarrow m=5$$

۲۰۰۹ ۲

چون α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-3=0$ هستند، پس $S=\alpha+\beta=-1$ و $P=\alpha\beta=-3$ است. در ضمن چون α یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x^2+x-3=0\xrightarrow{x=\alpha}\alpha^2+\alpha-3=0\Rightarrow\alpha^2+\alpha=3$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2+\beta^2+\alpha=\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{S^2-2P}+\underbrace{\alpha^2+\alpha}_{3}=(-1)^2-2(-3)+3=10$$

۲۰۱۰ ۲

در معادلهٔ $3x^2-12x-a=0$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=4\ ,\ P=-\frac{a}{3}$$

در ضمن چون α یکی از ریشه‌های معادله است در آن صدق می‌کند:

$$3x^2-12x-a=0\xrightarrow{x=\alpha}3\alpha^2-12\alpha-a=0\Rightarrow\alpha^2-4\alpha=\frac{a}{3}$$

حال با توجه به رابطهٔ $2\alpha^2+\beta^2-4\alpha=7$ داریم:

$$\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{S^2-2P}+\underbrace{\alpha^2-4\alpha}_{\frac{a}{3}}=7\Rightarrow(4)^2-2(-\frac{a}{3})+\frac{a}{3}=7\Rightarrow a=-9$$

پس معادله به شکل $3x^2-12x+9=0$ است و داریم:

$$3(x^2-4x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=3\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{\beta}=\frac{-9}{3}=-3$$

۲۰۱۱ ۳

ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+8x-3=0\xrightarrow[\alpha>0]{\Delta=76}\begin{cases}\alpha=\frac{-8+\sqrt{76}}{2}=-4+\sqrt{19}\\ \beta=\frac{-8-\sqrt{76}}{2}=-4-\sqrt{19}\end{cases}$$

$$\Rightarrow|\underbrace{\alpha+2\beta}_{-}|+|\underbrace{\alpha}_{+}|-|\underbrace{\beta-4}_{-}|=-(\alpha+2\beta)+(\alpha)+(\beta-4)$$

$$=-\beta-4=-(-4-\sqrt{19})-4=\sqrt{19}$$

۲۰۱۲ ۳

در معادلهٔ $x^2-4x+a=0$ مجموع ریشه‌ها برابر $S=4$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $P=a$ است. حال هر یک از ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta=16-4a\Rightarrow\alpha,\beta=\frac{4\pm\sqrt{16-4a}}{2}\xrightarrow{\alpha<0}\alpha=2-\sqrt{4-a}$$

حال رابطهٔ $\alpha^2+\alpha^3+\beta^3$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\alpha^2+(\alpha^3+\beta^3)=(2-\sqrt{4-a})^2+(S^3-3SP)$$

$$=(4+4-a-4\sqrt{4-a})+(64-12a)=72-13a-4\sqrt{4-a}$$

از طرفی با توجه به صورت سؤال $\alpha^2+\alpha^3+\beta^3=98-4\sqrt{6}$ است، پس با مقایسهٔ طرف راست این دو رابطه داریم:

$$72-13a=98\Rightarrow a=-2$$

۲۰۱۳ ۱

در معادلهٔ $x^2+6x+a=0$ مجموع ریشه‌ها برابر $S=-6$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $P=a$ است. حال هریک از ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta=36-4a\Rightarrow\alpha,\beta=\frac{-6\pm\sqrt{36-4a}}{2}\xrightarrow{\alpha<\beta}\alpha=-3-\sqrt{9-a}$$

حال رابطهٔ $3\alpha^2+2\beta^2$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2=2(S^2-2P)+(-3-\sqrt{9-a})^2$$

$$=2(36-2a)+(9+9-a+6\sqrt{9-a})=90-5a+6\sqrt{9-a}$$

از طرفی با توجه به صورت سؤال $3\alpha^2+2\beta^2=85+12\sqrt{2}$ است؛ پس با مقایسهٔ طرف راست این دو رابطه، داریم: $90-5a=85\Rightarrow a=1$

۲۰۱۴ | **۴**

باید $\Delta>0$، $S>0$ و $P>0$ باشد:

$$1)\ \Delta=b^2-4ac>0\Rightarrow m^2-4(2)(m+6)>0$$

$$\Rightarrow m^2-8m-48>0\Rightarrow(m-12)(m+4)>0\Rightarrow m<-4 \text{ یا } m>12$$

$$2)\ S=-\frac{b}{a}>0\Rightarrow-\frac{m}{2}>0\Rightarrow m<0$$

$$3)\ P=\frac{c}{a}=\frac{m+6}{2}>0\Rightarrow m+6>0\Rightarrow m>-6$$

روش سریع‌تر این تیپ تست‌ها با عددگذاری به راحتی قابل حل هستند. اگر $m=-3$ بزاری، Δ منفی میشه و گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) حذف میشن.

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده از (۱) و (۲) و (۳) مقادیر قابل قبول برای m به‌صورت بازهٔ $(-6,-4)$ است.

هایلایت

علامت ریشه‌ها	Δ	S	P
دو ریشهٔ مثبت	+	+	+
دو ریشهٔ منفی	+	−	+
دو ریشهٔ ناهم‌علامت	+		−

توجه کنید وقتی $P<0$ است (a و c هم‌علامت نیستند) قطعاً Δ مثبت است.

۲۰۱۵ | **۱**

باید $\Delta>0$ و $S<0$ و $P>0$ باشد:

$$1)\ \Delta=(-2m)^2-4(1)(m+2)>0\Rightarrow 4m^2-4m-8>0$$

$$\Rightarrow 4(m^2-m-2)>0\Rightarrow 4(m-2)(m+1)>0\Rightarrow m<-1 \text{ یا } m>2$$

$$2)\ S=2m<0\Rightarrow m<0$$

$$3)\ P=m+2>0\Rightarrow m>-2$$

از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) مقادیر قابل قبول برای m به‌صورت بازهٔ $(-2,-1)$ است.

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست همین سؤال رو اینجوری بپرسه: «معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2mx+2+m=0$ به ازای کدام مقادیر m دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز با علامت منفی است؟»

روش سریع‌تر بازم عددگذاری کنیم:
با $m=-1$ گزینهٔ (۳) حذف میشه. با $m=-2$ گزینهٔ (۲) حذف میشه و با $m=3$ گزینهٔ (۴) حذف میشه.

۲۰۱۶ | **۳**

باید $\Delta>0$ و $P>0$ باشد:

$$1)\ \Delta=4(m-1)^2-4(1)(m+1)>0\Rightarrow 4(m^2-3m)>0$$

$$\Rightarrow 4m(m-3)>0\Rightarrow m<0 \text{ یا } m>3$$

$$2)\ P=m+1>0\Rightarrow m>-1$$

از اشتراک جواب (۱) و (۲) مقادیر قابل قبول برای m به‌صورت بازهٔ $(-1,0)\cup(3,+\infty)$ است.

۲۰۱۷ | **۴**

چون معادله دارای یک ریشهٔ حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی است، پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m^2-4}{m-1}<0\Rightarrow$$

m		−۲		۱		۲	
$\frac{m^2-4}{m-1}$	−	۰	+	ت.ن	−	۰	+

پس مقادیر قابل قبول برای m به‌صورت بازهٔ $(-\infty,-2)\cup(1,2)$ است و بی‌شمار مقدار صحیح برای m وجود دارد.

۲۰۱۸ | **۳**

در معادلهٔ $x^2-(2a+3)x+a-2=0$ چون a منفی است بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌ها یعنی $P=a-2$ منفی است. پس معادله یک ریشهٔ حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی دارد.

۲۰۱۹ | **۳**

چون x_1 منفی و x_2 مثبت است، پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است:

$$1)\ P=\frac{c}{a}=\frac{m-3}{m}<0\Rightarrow 0<m<3$$

از طرفی $|x_1|>x_2$ است، یعنی قدر مطلق ریشهٔ منفی، بزرگ‌تر است، پس جمع ریشه‌ها منفی است:

$$2)\ S=-\frac{b}{a}=-\frac{m-1}{m}<0\Rightarrow m<0 \text{ یا } m>1$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم $1<m<3$ است.

روش سریع‌تر میتونستی بدون هیچ اطلاعاتی، عددگذاری کنی. فقط توی گزینهٔ (۴) ممکنه اذیت بشی.

۲۰۲۰ | **۴**

اگر طول مستطیل را x_1 و عرض آن را x_2 در نظر بگیریم، با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases}2x_1+2x_2=22\Rightarrow x_1+x_2=11\\ x_1x_2=28\end{cases}$$

بنابراین x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-11x+28=0$ هستند:

$$x^2-11x+28=0\Rightarrow(x-7)(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=7\\ x_2=4\end{cases}$$

هایلایت

اگر بخواهیم معادلهٔ درجهٔ دومی با ریشه‌های x_1 و x_2 تشکیل دهیم، کافی است $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ را پیدا کنیم و معادله را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x^2-Sx+P=0$$

۲۰۲۱ | **۴**

می‌توانیم در معادلهٔ $3x^2-2x-1=0$، جای a و c را با هم عوض کرده و b را قرینه کنیم، پس معادلهٔ مورد نظر برابر است با:

معادلهٔ اولیه: $3x^2-2x-1=0\Rightarrow$ معادلهٔ جدید: $-x^2+2x+3=0$

قرینه

۲۰۲۲ | **۳**

ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۲x-۴=۰$ را می‌نویسیم: $S=\alpha+\beta=۲\ ,\ P=\alpha\beta=-۴$

یکی از ریشه‌های معادلهٔ جدید، برابر $\alpha^{۲}+\beta^{۲}$ است، پس:

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P=۴-۲(-۴)=۱۲$$

حالا جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را می‌نویسیم:

$$S_{new}=(\alpha^{۲}+\beta^{۲})+\alpha\beta=۱۲+(-۴)=۸$$

$$P_{new}=(\alpha^{۲}+\beta^{۲})(\alpha\beta)=۱۲\times -۴=-۴۸$$

$\Rightarrow$ معادلهٔ جدید : $x^{۲}-۸x-۴۸=۰$

هایلایت

اگر بخواهیم معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسیم که ریشه‌های آن با ریشه‌های یک معادلهٔ دیگر ارتباط داشته باشد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا S و P معادلهٔ اولیه را تشکیل می‌دهیم.

۲ به کمک S و P معادلهٔ اولیه، S و P معادلهٔ خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم.

۳ مطابق رابطهٔ $x^{۲}-Sx+P=۰$ معادلهٔ جدید را می‌نویسیم.

۲۰۲۳ | **۳**

ابتدا با استفاده از روابط داده‌شده S و P معادله را پیدا می‌کنیم:

$$۱)\ ۳(x_{۱}+x_{۲})+x_{۱}x_{۲}=۵\Rightarrow ۳S+P=۵$$

$$۲)\ (x_{۱}+۴)(x_{۲}+۴)=۲۵\Rightarrow ۴(x_{۱}+x_{۲})+x_{۱}x_{۲}=۹\Rightarrow ۴S+P=۹$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $S=۴$ و $P=-۷$ است. حال معادلهٔ جدید را با کمک رابطهٔ $x^{۲}-Sx+P=۰$ می‌نویسیم:

معادلهٔ جدید : $x^{۲}-۴x-۷=۰$

۲۰۲۴ | **۴**

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}-۳x-۱=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}\ ,\ P=\alpha\beta=-\frac{۱}{۲}$$

۲) ریشه‌های معادلهٔ جدید برابر $\frac{۱}{\alpha}-۱$ و $\frac{۱}{\beta}-۱$ است. بنابراین مجموع و حاصل ضرب این ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$S_{new}=(\frac{۱}{\alpha}-۱)+(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}-۲=-۳-۲=-۵$$

$$P_{new}=(\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})+۱$$

$$=\underbrace{\frac{۱}{\alpha\beta}}_{-۲}-\underbrace{(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})}_{-۳}+۱=۲$$

۳) معادلهٔ جدید را با کمک رابطهٔ $x^{۲}-Sx+P=۰$ می‌نویسیم:

معادلهٔ جدید : $x^{۲}-(-۵)x+۲=۰\Rightarrow x^{۲}+۵x+۲=۰$

روش سریع‌تر اگه به گزینه‌ها نگاه کنی متوجه میشی S متفاوتی دارند. پس کافیه S جدید رو پیدا کنی و بری سراغ گزینه‌ها.

۲۰۲۵ | **۳**

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۴x+۱=۰$ را می‌نویسیم: $S=\alpha+\beta=۴\ ,\ P=\alpha\beta=۱$

۲) مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را می‌نویسیم:

$$S_{new}=(\alpha+\frac{۲}{\beta})+(\beta+\frac{۲}{\alpha})=\alpha+\beta+\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}$$

$$=\alpha+\beta+۲(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})=۴+۲(\frac{۴}{۱})=۱۲$$

$$P_{new}=(\alpha+\frac{۲}{\beta})(\beta+\frac{۲}{\alpha})=\alpha\beta+\frac{۴}{\alpha\beta}+۲+۲=۱+\frac{۴}{۱}+۴=۹$$

۳) معادلهٔ جدید را با کمک رابطهٔ $x^{۲}-Sx+P=۰$ می‌نویسیم:

معادلهٔ جدید : $x^{۲}-۱۲x+۹=۰$

۲۰۲۶ | **۱**

در معادلهٔ $۲x^{۲}-(۷m-۱)x+۴m-۲=۰$ مجموع ریشه‌ها برابر $S=x_{۱}+x_{۲}=\frac{۷m-۱}{۲}$ است. از طرفی واسطهٔ حسابی $x_{۱}$ و $x_{۲}$ برابر ۵ است، پس:

$$\frac{x_{۱}+x_{۲}}{۲}=۵\Rightarrow x_{۱}+x_{۲}=۱۰\Rightarrow \frac{۷m-۱}{۲}=۱۰\Rightarrow m=۳$$

پس معادله به شکل $۲x^{۲}-۲۰x+۱۰=۰$ است و حاصل‌ضرب و جمع ریشه‌های آن برابر است با: $S=x_{۱}+x_{۲}=۱۰\ ,\ P=x_{۱}x_{۲}=۵$

حال مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

$$S_{new}=(\frac{۱}{x_{۱}}+۱)+(\frac{۱}{x_{۲}}+۱)=\frac{۱}{x_{۱}}+\frac{۱}{x_{۲}}+۲$$

$$=\frac{x_{۱}+x_{۲}}{x_{۱}x_{۲}}+۲=\frac{۱۰}{۵}+۲=۴$$

$$P_{new}=(\frac{۱}{x_{۱}}+۱)(\frac{۱}{x_{۲}}+۱)=\frac{۱}{x_{۱}x_{۲}}+\frac{x_{۱}+x_{۲}}{x_{۱}x_{۲}}+۱$$

$$=\frac{۱}{۵}+\frac{۱۰}{۵}+۱=\frac{۱۶}{۵}$$

پس معادلهٔ جدید به شکل زیر است:

$$x^{۲}-۴x+\frac{۱۶}{۵}=۰\Rightarrow ۵x^{۲}-۲۰x+۱۶=۰$$

۲۰۲۷ | **۳**

ریشه‌های معادلهٔ $۲ax^{۲}+ax-۶=۰$ را α و β فرض می‌کنیم پس:

$$\alpha+\beta=\frac{-۱}{۲}\ ,\ \alpha\beta=\frac{-۳}{a}$$

حال ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}-ax+b=۰$ به‌صورت $\alpha+\frac{۱}{۲}$ و $\beta+\frac{۱}{۲}$ خواهد بود پس:

$$۱)\ (\alpha+\frac{۱}{۲})+(\beta+\frac{۱}{۲})=\frac{a}{۲}\Rightarrow \underbrace{\alpha+\beta}_{-\frac{۱}{۲}}+۱=\frac{a}{۲}\Rightarrow a=۱$$

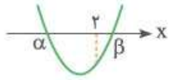
$$۲)\ (\alpha+\frac{۱}{۲})(\beta+\frac{۱}{۲})=\frac{b}{۲}\Rightarrow \alpha\beta+\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)+\frac{۱}{۴}=\frac{b}{۲}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{۳}{a}}_{-۳}+\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۴}=\frac{b}{۲}\Rightarrow \frac{b}{۲}=-۳\Rightarrow b=-۶$$

پس $[\frac{ab}{۴}]=[-\frac{۶}{۴}]=-۲$ می‌باشد.

۲۰۷۸ ۲

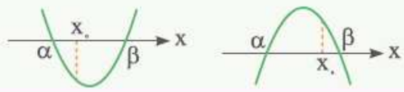
اگر صفرهای تابع $f(x)=x^2-3x+m$ را α و β در نظر بگیریم، با توجه به نمودار، داریم:



$$\Rightarrow af(x_0)<0\Rightarrow 1\times f(2)<0$$
$$\Rightarrow 4-6+m<0\Rightarrow m<2$$

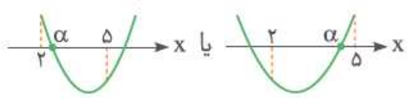
هایلایت

تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند و عدد x_0 بین این دو ریشه باشد، همواره $af(x_0)<0$ است:



۲۰۷۹ ۱

اگر یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^2-6x+m-1$ را α در نظر بگیریم، با توجه به وضعیت‌های زیر، داریم:

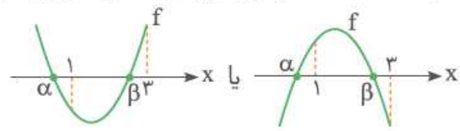


$$\Rightarrow f(2).f(5)<0\Rightarrow (m-9)(m-6)<0\Rightarrow 6<m<9$$

پس دو مقدار $m=8$ و $m=7$ قابل قبول‌اند.

۲۰۸۰ ۴

α و β صفرهای تابع $f(x)=mx^2+2mx-3-m$ هستند. حالا چون $\alpha<1<\beta<3$ است، پس با توجه به شکل‌های زیر، داریم:



$$\Rightarrow f(1).f(3)<0\Rightarrow (2m-3)(14m-3)<0\Rightarrow \frac{3}{14}<m<\frac{3}{2}$$

۲۰۸۱ ۳

سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۴- و صفر قطع کرده و از نقطهٔ (۱,۲) می‌گذرد، پس:

$$f(x)=kx(x+4)\xrightarrow{(1,2)}2=k(1)(5)\Rightarrow k=\frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{5}x(x+4)\Rightarrow f(-1)+f(-2)=(-\frac{6}{5})+(-\frac{8}{5})=-2/8$$

هایلایت

برای نوشتن معادلهٔ سهمی، ۳ حالت کلی داریم:

	داده‌های سؤال	ضابطهٔ سهمی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$
۲	نقطهٔ (x_S,y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$
۳	سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله و سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.

۲۰۸۲ ۳

چون نمودار محور xها را در دو نقطه با طول‌های ۱- و ۵ قطع می‌کند، پس معادلهٔ منحنی را به‌صورت $y=k(x+1)(x-5)$ در نظر می‌گیریم. از طرفی نمودار محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند، پس:

$$10=k(0+1)(0-5)\Rightarrow k=-2$$

بنابراین معادلهٔ منحنی به‌صورت $y=-2(x+1)(x-5)=-2x^2+8x+10$ است و داریم:

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2(-2)}=2\Rightarrow y_S=-2(2)^2+8(2)+10=18$$

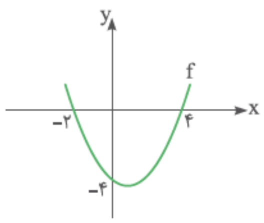
۲۰۸۳ ۱

سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۲- و ۴ قطع کرده است، پس طول رأس سهمی برابر $x_S=\frac{-2+4}{2}=1$ است و چون بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است، پس رأس سهمی نقطهٔ $A(1,3)$ است. پس معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$$f(x)=k(x+2)(x-4)\xrightarrow{(1,3)}3=k(3)(-3)\Rightarrow k=-\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}(x+2)(x-4)\Rightarrow f(0)=-\frac{1}{3}(2)(-4)=\frac{8}{3}\Rightarrow a=\frac{8}{3}$$

۲۰۸۴ ۲

خط $y=x-4$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۴ و محور yها را در نقطه ای به عرض ۴- قطع می‌کند. در ضمن سهمی و خط در این دو نقطه مشترک‌اند، پس معادلهٔ سهمی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



$$\Rightarrow f(x)=k(x+2)(x-4)$$
$$\xrightarrow{f(0)=-4}-4=k(2)(-4)$$
$$\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

پس $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ است. حالا کمترین مقدار تابع را پیدا می‌کنیم:

$$x_S=\frac{-2+4}{2}=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{2}(3)(-3)=-\frac{9}{2}$$

پس کمترین مقدار تابع f برابر $-\frac{9}{2}$ است و محدودهٔ بُرد آن به‌صورت $R_f=[-\frac{9}{2},+\infty)$ است.

۲۰۸۵ ۲

مختصات رأس سهمی f نقطهٔ (۱,۱) است و این سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:

$$f(x)=k(x-1)^2+1\xrightarrow{(0,0)}0=k+1\Rightarrow k=-1$$
$$\Rightarrow f(x)=-(x-1)^2+1$$

در ضمن $g(x)=-x+1$ است. حالا سراغ حل معادله می‌رویم:

$$f(x)=g^2(x)\Rightarrow -(x-1)^2+1=(-x+1)^2$$
$$\Rightarrow 2(x-1)^2=1\Rightarrow (x-1)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x^2-2x+\frac{1}{2}=0\Rightarrow S=2$$

۲۰۸۶ **۲**

چون $A(-1,9)$ رأس سهمی است، پس معادلهٔ سهمی را به‌صورت $y=k(x+1)^2+9$ می‌نویسیم حال چون سهمی از نقطهٔ $(3,1)$ می‌گذرد، پس:

$$1=k(3+1)^2+9\Rightarrow 16k=-8\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$ خواهد بود.
با جای‌گذاری گزینه‌ها، نقطهٔ $(5,-9)$ روی سهمی قرار دارد.

۲۰۸۷ **۴**

چون این سهمی محور تقارن خود را در نقطهٔ $(2,-7)$ قطع می‌کند، پس نقطهٔ $(2,-7)$ رأس سهمی است. بنابراین معادلهٔ آن را به‌صورت $y=k(x-2)^2-7$ در نظر می‌گیریم. حال چون این سهمی از نقطهٔ $(6,1)$ می‌گذرد، پس:

$$y=k(x-2)^2-7\xrightarrow{(6,1)}1=k(6-2)^2-7\Rightarrow 16k=8\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-7$ است که از میان گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(-2,1)$ در آن صدق می‌کند.

روش سریع‌تر نقاط هم‌عرض توی سهمی یادته که؟!
اگر میانگین طول دو نقطه بشه طول رأس سهمی، در نتیجه اون دو نقطه هم‌عرض هستن:

$$x_S=\frac{6+(-2)}{2}=2\to \text{گزینهٔ (۴)}$$

۲۰۸۸ **۱**

چون نقطهٔ $(0,5)$ روی سهمی قرار دارد، پس عرض از مبدأ سهمی برابر ۵ است، یعنی $c=5$. حال با توجه به این‌که نقاط $(-2,5)$ و $(1,11)$ روی سهمی قرار دارند پس در معادلهٔ سهمی $y=ax^2+bx+c$ صدق می‌کنند:

$$(-2,5):5=4a-2b+5\Rightarrow 4a=2b\Rightarrow 2a=b \quad (1)$$

$$(1,11):11=a+b+5\Rightarrow a+b=6\xrightarrow{(1)}a=2,b=4$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=2x^2+4x+5$ است. در میان گزینه‌ها، فقط مختصات $(-1,3)$ در این معادله صدق می‌کند.

۲۰۸۹ **۳**

چون سهمی با دهانهٔ روبه پایین در نقطهٔ $x=2$ بر محور xها مماس است و محور yها را در نقطهٔ ۴- قطع می‌کند، پس:

$$f(x)=-(x-2)^2=-x^2+4x-4$$

از طرفی خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد پس شیب آن برابر $m=\tan 45^\circ=1$ است و عرض از مبدأ آن برابر ۴- است، پس معادلهٔ آن $y=x-4$ است. حالا نقاط برخورد خط و سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$-x^2+4x-4=x-4\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$$

پس طول نقطهٔ B برابر $x=3$ است.

۲۰۹۰ **۲**

چون نقطهٔ $(2,9)$ رأس سهمی است، پس معادلهٔ آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=k(x-2)^2+9\xrightarrow{(-1,0)}f(-1)=k(-3)^2+9=0$$

$$\Rightarrow k=-1\Rightarrow f(x)=-(x-2)^2+9$$

حال نقاط برخورد با محورهای مختصات را پیدا می‌کنیم:

$$f(0)=-(0-2)^2+9=5\Rightarrow A(0,5)$$

$$f(x)=0\Rightarrow -(x-2)^2+9=0\Rightarrow (x-2)^2=9\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=5\end{cases}$$

پس $B(5,0)$ است و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$AB=\sqrt{(5-0)^2+(0-5)^2}=5\sqrt{2}$$

۲۰۹۱ **۳**

طول رأس سهمی $f(x)=x^2-4x+m+1$ برابر $x_S=2$ است.
چون رأس سهمی روی محور xها قرار دارد، پس $f(2)=0$ است:

$$f(2)=4-8+m+1=0\Rightarrow m=3$$

پس $f(x)=x^2-4x+4$ است و چون نقطهٔ $A(3,n)$ روی این سهمی است، پس:

$$f(3)=n\Rightarrow n=9-12+4=1$$

حالا باید معادلهٔ سهمی با رأس $A(3,1)$ و گذرنده از نقطهٔ $(2,0)$ را بنویسیم:

$$y=k(x-3)^2+1\xrightarrow{(2,0)}0=k(-1)^2+1\Rightarrow k=-1$$

$$\Rightarrow y=-(x-3)^2+1\Rightarrow y=-x^2+6x-8$$

۲۰۹۲ **۳**

چون نقاط $A(3,y)$ و $B(-5,y)$ هم‌عرض هستند، پس طول رأس سهمی $x_S=\frac{-5+3}{2}=-1$ است. از طرفی $y_S=1$ است، پس ضابطهٔ سهمی به شکل زیر می‌باشد:

$$y=k(x+1)^2+1\Rightarrow y=kx^2+2kx+k+1$$

در ضمن با توجه به صورت سؤال α و β ریشه‌های سهمی هستند، پس $S=\alpha+\beta=-\frac{2k}{k}=-2$ و $P=\alpha\beta=\frac{k+1}{k}$ است و داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=5\Rightarrow S^2-2P=5\Rightarrow(-2)^2-2P=5\Rightarrow P=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{k+1}{k}=-\frac{1}{2}\Rightarrow k=-\frac{2}{3}\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$$

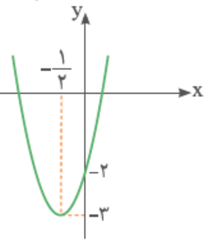
به ازای $x=0$ عرض از مبدأ سهمی به‌دست می‌آید:

$$y(0)=\frac{1}{3}$$

دام تستی عجله نکن! بعضی‌ها $k=-\frac{2}{3}$ به‌دست میارن و همونو میزنن!

۲۰۹۳ ۴

چون نقاط $(-2,a),(1,a)$ هم‌عرض هستند، پس طول رأس سهمی برابر $-\frac{1}{2}=\frac{1+(-2)}{2}$ است. در ضمن سهمی بر خط $y=-3$ مماس است، یعنی عرض رأس سهمی برابر ۳- است. حالا چون سهمی از هر چهار ناحیه می‌گذرد و فاصلهٔ برخورد سهمی با محور yها تا مبدأ مختصات برابر ۲ واحد است، سهمی به شکل زیر است و داریم:

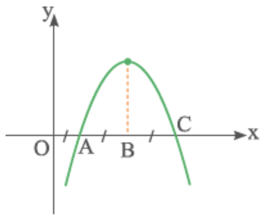


$$y=k(x+\frac{1}{2})^2-3\xrightarrow{(0,-2)}-2=\frac{k}{4}-3$$
$$\Rightarrow k=4\Rightarrow y=4(x+\frac{1}{2})^2-3$$

حالا نقطهٔ $(1,a)$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a=4(\frac{3}{2})^2-3=9-3=6$$

۲۰۹۴ ۴

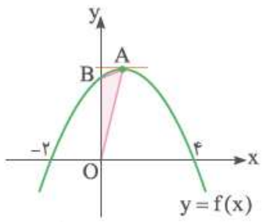


معادلهٔ محور تقارن سهمی، خط $x=-\frac{b}{2a}=4$ است. چون $|OB|=4$ و $|OA|=|AB|=|BC|$ است، پس نقاط برخورد سهمی با محور xها به‌صورت $A(2,0)$ و $C(6,0)$ هستند.

چون در سهمی f، ضریبِ x^2 برابر ۱- است پس $f(x)=-(x-2)(x-6)$ است و عرض رأس سهمی برابر است با:

$$f(4)=-(4-2)(4-6)=4\Rightarrow x_S\times y_S=4\times4=16$$

۲۰۹۵ ۲



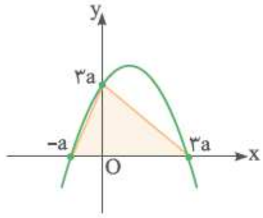
چون سهمی محور xها را در دو نقطه ۲- و ۴ قطع کرده است، پس طول رأس سهمی برابر $x_A=\frac{-2+4}{2}=1$ است. پس ارتفاع مثلث OAB برابر ۱ است و مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\times1\times OB=16\Rightarrow OB=32$$

پس $B(0,32)$ است و باتوجه به نقاط برخورد سهمی با محور xها معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

$$f(x)=k(x+2)(x-4)\xrightarrow{(0,32)}32=k(2)(-4)\Rightarrow k=-4$$
$$\Rightarrow f(x)=-4(x+2)(x-4)\xrightarrow{x_S=1}y_s=-4(3)(-3)=36$$

۲۰۹۶ ۱



چون $|OA|=|OC|=3|OB|$ است، پس می‌توانیم فرض کنیم $A(0,3a)$ و $B(-a,0)$ و $C(3a,0)$ است. حال چون مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ است، داریم:

$$S=\frac{1}{2}4a\times3a=24\Rightarrow6a^2=24\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2$$

پس $C(6,0)$ و $B(-2,0)$ است و معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

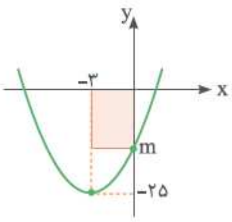
$$f(x)=k(x+2)(x-6)\xrightarrow{A(0,6)}6=k(2)(-6)\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-6)\Rightarrow f(3)=-\frac{1}{2}\times(5)\times(-3)=\frac{15}{2}$$

۲۰۹۷ ۳

چون مساحت مستطیل رنگی برابر ۴۸ است، پس:

$$S=|-3|\times|m|=48\Rightarrow m=-16$$

پس رأس سهمی نقطهٔ $C(-3,-25)$ است و محور yها را در نقطه‌ای با عرض ۱۶- قطع کرده است، بنابراین می‌توانیم معادلهٔ سهمی را بنویسیم و صفرهای تابع را پیدا کنیم:



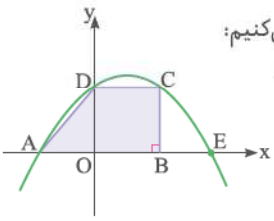
$$y=k(x+3)^2-25\xrightarrow{(0,-16)}$$
$$-16=k(0+3)^2-25\Rightarrow9k=9$$
$$\Rightarrow k=1\Rightarrow y=(x+3)^2-25$$

حالا صفرهای تابع را پیدا می‌کنیم:

$$(x+3)^2-25=0\Rightarrow(x+3)^2=25\Rightarrow\begin{cases}x_A=2\\x_B=-8\end{cases}\Rightarrow|AB|=10$$

۲۰۹۸ ۴

ابتدا مختصات نقاط A و D را پیدا می‌کنیم:



$$1)\ f(x)=0\Rightarrow-x^2+4x+12=0$$
$$\Rightarrow-(x-6)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x_A=-2\\x_E=6\end{cases}$$
$$2)\ f(0)=12\Rightarrow D(0,12)$$

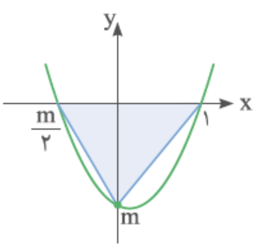
چون دو نقطهٔ C و D هم‌عرض‌اند، ضابطهٔ تابع را برابر ۱۲ می‌گذاریم تا طول نقطهٔ C پیدا شود:

$$-x^2+4x+12=12\Rightarrow-x^2+4x=0\Rightarrow\begin{cases}x_D=0\\x_C=4\end{cases}$$

چون دو نقطهٔ C و B هم‌طول‌اند، پس $B(4,0)$ است و مساحت ذوزنقهٔ رنگی برابر است با:

$$S=\frac{(|AB|+|CD|)\times|OD|}{2}=\frac{(6+4)\times12}{2}=60$$

۲۰۹۹ ۴



با توجه به این‌که در معادلهٔ $2x^2-(m+2)x+m=0$، مجموع ضرایب برابر صفر است پس ریشه‌های معادله به‌صورت ۱ و $x=\frac{m}{2}$ می‌باشد. بنابراین:

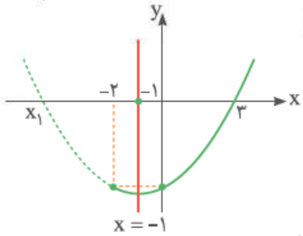
$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|(\frac{m}{2}-1)(m)|$$
$$\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{4}|m(m-2)|\Rightarrow\begin{cases}m^2-2m+3=0\Rightarrow\Delta<0\ \text{ریشه ندارد}\\m^2-2m-3=0\Rightarrow m=-1,3\end{cases}$$

با توجه به این‌که طول رأس سهمی $y=x^2-mx+1$ به‌صورت $x_S=\frac{m}{2}$ می‌باشد پس $x_S=-\frac{1}{2}$ و $x_S=\frac{3}{2}$ می‌توانند رأس سهمی مورد نظر باشند.

۲۱۰۰ **۱**

با توجه به نمودار صورت سؤال، دو نقطه با طول‌های $x=0$ و $x=-2$ هم‌عرض هستند. بنابراین طول رأس سهمی برابر $\frac{-2+0}{2}=-1$ بوده و سهمی نسبت به خط $x=-1$ متقارن است. پس اگر سهمی را تکمیل کنیم، داریم:

$$\frac{x_1+3}{2}=-1\Rightarrow x_1=-5$$



پس مجموع و حاصل‌ضرب صفرها برابر است با:

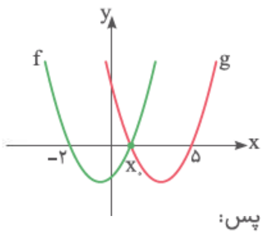
$$S=-\frac{b}{a}=-2\Rightarrow b=2a$$

$$P=\frac{c}{a}=-15\Rightarrow c=-15a$$

با تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر داریم:

$$\frac{c}{b}=\frac{-15a}{2a}\Rightarrow c=\frac{-15}{2}b$$

۲۱۰۱ **۱**



در سهمی $f(x)=x^2+ax-2$ حاصل‌ضرب صفرهای تابع برابر -2 است، پس:

$$-2\times x_0=-2\Rightarrow x_0=1$$

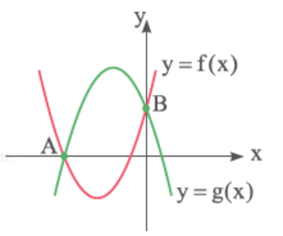
مجموع صفرهای تابع f برابر $-a$ است، پس:

$$-a=1+(-2)\Rightarrow a=1$$

حالا چون تابع g محور xها را در دو نقطه به طول ۱ و ۵ قطع می‌کند، پس $g(x)=(x-1)(x-5)$ است. بنابراین:

$$\begin{cases}f(x)=x^2+x-2\\ g(x)=x^2-6x+5\end{cases}\Rightarrow f(2)+g(4)=4+(-3)=1$$

۲۱۰۲ **۲**



نمودارهای دو تابع در نقطهٔ B روی محور yها متقاطع‌اند، پس عرض از مبدأ آن‌ها یکسان است:

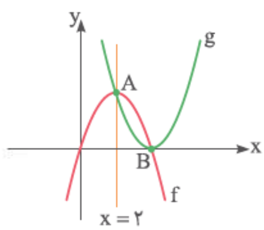
$$f(0)=g(0)\Rightarrow m+3=3m-7$$

$$\Rightarrow 2m=10\Rightarrow m=5$$

پس $f(x)=x^2+6x+8$ و $g(x)=-x^2-2x+8$ است. مختصات رأس سهمی f به‌صورت $(-3,-1)$ و مختصات رأس سهمی g به‌صورت $(-1,9)$ است و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(-3+1)^2+(-1-9)^2}=\sqrt{4+100}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$$

۲۱۰۳ **۳**



چون طول رأس سهمی f برابر ۲ است، پس خط $x=2$ محور تقارن این سهمی است. در ضمن این سهمی از نقطهٔ $x=0$ می‌گذرد، پس به دلیل تقارن سهمی $B(4,0)$ است.

حالا ضابطهٔ تابع g را با داشتن رأس $B(4,0)$ می‌نویسیم:

$$g(x)=k(x-4)^2\xrightarrow{A(2,5)}5=4k\Rightarrow k=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{5}{4}(x-4)^2$$

بنابراین می‌توانیم $gof(4)$ را پیدا کنیم:

$$g(f(4))=g(0)=\frac{5}{4}(0-4)^2=\frac{5}{4}\times16=20$$

۲۱۰۴ **۳**

چون سهمی و خط $y=x+2$ در دو نقطه متقاطع‌اند، پس Δ در معادلهٔ تلاقی مثبت است:

$$\begin{cases}y=x^2-3x+m-1\\ y=x+2\end{cases}\Rightarrow x^2-3x+m-1=x+2$$

$$\Rightarrow x^2-4x+m-3=0\xrightarrow{\Delta>0}\Delta=16-4(m-3)>0$$

$$\Rightarrow 4>m-3\Rightarrow 7>m$$

پس بیشترین مقدار صحیح m برابر ۶ است.

هایلایت

برای بررسی وضعیت سهمی و خط نسبت به هم با معادله‌های $y_1=ax^2+bx+c$ و خط $y_2=mx+h$ ابتدا معادلهٔ تلاقی یعنی $y_1=y_2$ را تشکیل می‌دهیم. سپس همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم و در معادلهٔ درجهٔ دوم ایجادشده، علامت Δ را پیدا می‌کنیم:

علامت Δ	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
وضعیت خط و سهمی	در ۲ نقطه متقاطع‌اند.	در یک نقطه بر هم مماس‌اند.	یکدیگر را قطع نمی‌کنند.
شکل			

۲۱۰۵ **۴**

معادلهٔ خطوط گذرنده از نقطهٔ $(0,3)$ به‌صورت $y=mx+3$ هستند. حالا باید علامت Δ را در معادلهٔ تلاقی این خطوط با سهمی $y=2x^2-x-2$ پیدا کنیم:

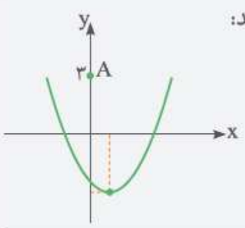
$$\begin{cases}y=2x^2-x-2\\ y=mx+3\end{cases}\Rightarrow 2x^2-x-2=mx+3$$

$$\Rightarrow 2x^2-(m+1)x-5=0\Rightarrow\Delta=(m+1)^2+40$$

چون علامت Δ همواره مثبت است، پس همهٔ خطوط گذرنده از نقطهٔ $(0,3)$، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کنند.

روش سریع‌تر به نمودار سهمی توجه کنید:

چون نقطهٔ $A(0,3)$ درون دهانه سهمی است، پس همهٔ خطوط گذرنده از آن، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کنند.



بنابراین داریم:

$$\log(\sin x-\cos x)=\frac{1}{2}\log a-1\Rightarrow \log(\frac{2}{\sqrt5})=\log\sqrt a-\log 10$$

$$\Rightarrow \log(\frac{2}{\sqrt5})=\log(\frac{\sqrt a}{10})\Rightarrow \frac{2}{\sqrt5}=\frac{\sqrt a}{10}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{4}{5}=\frac{a}{100}$$

$$\Rightarrow 5a=400\Rightarrow a=80$$

۶۳۷ **۲**

$$\underbrace{\cos2x\cos x+\sin2x\sin x}_{\cos(2x-x)}=\frac13\Rightarrow\cos x=\frac13$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{3\pi}{2}-2x)=-\cos2x=-(2\cos^2x-1)=-(2\times\frac19-1)=\frac79$$

هایلایت

سینوس و کسینوس زاویهٔ $\alpha+\beta$

روابط $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ به‌صورت زیر است:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

اگر در این روابط به جای β زاویهٔ $-\beta$ جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

روابط فرعی زیر را به خاطر داشته باشید:

$$\sin x+\cos x=\sqrt2\sin(x+\frac\pi4)$$

$$\sin x-\cos x=\sqrt2\sin(x-\frac\pi4)$$

۶۳۸ **۳**

با استفاده از اتحاد مربع داریم:

$$(\sin x+\cos y)^2+(\sin y+\cos x)^2=\sin^2x+2\sin x\cos y+\cos^2y$$

$$+\sin^2y+2\sin y\cos x+\cos^2x=2(\sin x\cos y+\sin y\cos x)$$

$$+\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}+\underbrace{\sin^2y+\cos^2y}_{1}=2\sin(x+y)+2$$

هم‌چنین با توجه به این‌که $x+y=\frac{5\pi}{6}$ است، داریم:

$$\sin(x+y)=\sin\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\sin(x+y)=\frac12\Rightarrow 2\sin(x+y)+2$$

$$=2(\frac12)+2=3$$

۶۳۹ **۴**

$$\frac{\sin5x}{\sin x}-\frac{\cos5x}{\cos x}=1\Rightarrow\frac{\sin5x\cos x-\cos5x\sin x}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin(5x-x)}{\frac12\sin2x}=\frac{2\sin4x}{\sin2x}=\frac{4\sin2x\cos2x}{\sin2x}$$

$$=4\cos2x=1\Rightarrow\cos2x=\frac14$$

۶۴۰ **۲**

ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم و سپس از رابطهٔ $\sin(\alpha+\beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos40°}{\cos20°}+\frac{\sin40°}{\sin20°}=\frac{\cos40°\sin20°+\sin40°\cos20°}{\cos20°\sin20°}$$

$$=\frac{\sin(\overbrace{20°+40°}^{60°})}{\frac12\sin40°}=\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12\cos50°}=\frac{\sqrt3}{\cos50°}=A$$

$$\Rightarrow\cos50°=\frac{\sqrt3}{A}$$

۶۴۱ **۱**

با توجه به رابطهٔ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ داریم:

$$\sin5x\cos3x-\cos5x\sin3x=\frac23$$

$$\Rightarrow\sin(5x-3x)=\sin2x=\frac23$$

حال برای محاسبهٔ $\cos4x$ از رابطهٔ $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos4x=1-2\sin^22x=1-2(\frac23)^2=1-2(\frac49)=1-\frac89=\frac19$$

۶۴۲ **۱**

ابتدا عبارت $\cos(\frac\pi4-\alpha)-\cos(\frac\pi4+\alpha)$ را ساده می‌کنیم:

$$(\cancel{\cos\frac\pi4\cos\alpha}+\sin\frac\pi4\sin\alpha)-(\cancel{\cos\frac\pi4\cos\alpha}-\sin\frac\pi4\sin\alpha)$$

$$=2\sin\frac\pi4\sin\alpha=2(\frac{\sqrt2}{2})\sin\alpha=\sqrt2\sin\alpha$$

حال از آن‌جایی که $\cos\alpha=\frac{\sqrt7}{3}$ است، خواهیم داشت:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\sin^2\alpha=1-(\frac{\sqrt7}{3})^2=1-\frac79=\frac29$$

$$\xrightarrow{\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi}\sin\alpha=-\frac{\sqrt2}{3}\Rightarrow\sqrt2\sin\alpha=\sqrt2(-\frac{\sqrt2}{3})=-\frac23$$

یه جوره دیگه! طراح کنکور سال ۹۳ مشابه این تست رو اینجوری پرسید: «اگر $\cos(x+\frac\pi3)+\cos(x-\frac\pi3)=\frac23$ باشد، مقدار $\cos2x$ کدام است؟»

۶۴۳ **۳**

ابتدا $\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)$ را ساده می‌کنیم:

$$\cos(3\pi-\frac\pi4+\alpha)=-\cos(\frac\pi4-\alpha)=-[\cos\frac\pi4\cos\alpha+\sin\frac\pi4\sin\alpha]$$

حال با توجه به این‌که $\sin\alpha=\frac{\sqrt2}{10}$ است، $\cos\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(\frac{\sqrt2}{10})^2=1-\frac{2}{100}=\frac{98}{100}$$

$$\xrightarrow{\alpha\ \text{ربع دوم}}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{98}}{10}=-\frac{7\sqrt2}{10}$$

$$\Rightarrow-\cos(\frac\pi4-\alpha)=-[\underbrace{\frac{\sqrt2}{2}\times(\frac{-7\sqrt2}{10})+\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt2}{10}}_{-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}=-\frac35}]=\frac35$$

۶۴۴ ۱

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\sin x\cos y-\sin y\cos x}=\frac{۳}{۲}$$

$$۲\sin x\cos y+۲\sin y\cos x=۳\sin x\cos y-۳\sin y\cos x$$

$$\sin x\cos y=۵\sin y\cos x\xrightarrow{\div\cos x\sin y}\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos y}{\sin y}=۵$$

$$\tan x.\cot y=۵\xrightarrow{\text{توان ۲}}(\tan x.\cot y)^{۲}=۲۵$$

۶۴۵ ۴

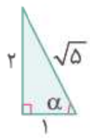
با استفاده از رابطهٔ بسط مجموع و تفاضل داریم:

$$\frac{\cos(\alpha-۲۰^\circ)+\cos(\alpha+۲۰^\circ)}{\sin(\alpha-۲۰^\circ)+\sin(\alpha+۲۰^\circ)}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos\alpha\cos۲۰^\circ+\cancel{\sin\alpha\sin۲۰^\circ}+\cos\alpha\cos۲۰^\circ-\cancel{\sin\alpha\sin۲۰^\circ}}{\sin\alpha\cos۲۰^\circ-\cancel{\cos\alpha\sin۲۰^\circ}+\sin\alpha\cos۲۰^\circ+\cancel{\cos\alpha\sin۲۰^\circ}}$$

$$=\frac{۲\cos\alpha\cos۲۰^\circ}{۲\sin\alpha\cos۲۰^\circ}=\cot\alpha=\frac{۱}{۲}$$

باتوجه به این‌که $\cot\alpha=\frac{۱}{۲}$ است، داریم:



$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\\ \cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۲}{\sqrt{۵}})(\frac{۱}{\sqrt{۵}})=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۶۴۶ ۴

$$\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y)\sin(x-y)=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\Rightarrow\cos((x+y)-(x-y))=\cos۲y=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta=\cos۲\theta$ داریم:

$$\sin^{۲}y-\cos^{۲}y=-\cos۲y=-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

> یه جوره دیگه! توی همین سوال، طراح می‌تونست اینجوری بپرسه: «اگر x و y زاویه‌هایی حاده باشند، مقدار $\cos y$ کدام است؟»
>
> جواب: $\cos۲y=\frac{\sqrt{۲}}{۳}\Rightarrow۲\cos^{۲}y-۱=\frac{\sqrt{۲}}{۳}\Rightarrow\cos y=\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۲}}{۶}}$

۶۴۷ ۱

$$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{۳}}+\frac{۲\cos(\frac{۵\pi}{۶}-\alpha)}{\sqrt{۳}\cos\alpha}=\frac{۳+۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{۳}}+\frac{۲(\cos(\frac{۵\pi}{۶})\cos\alpha+\sin\frac{۵\pi}{۶}\sin\alpha)}{\sqrt{۳}\cos\alpha}=\frac{۳+۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sqrt{۳}\cos\alpha}+\frac{۲(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\cos\alpha+\frac{۱}{۲}\sin\alpha)}{\sqrt{۳}\cos\alpha}=\frac{۳+۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۲\sin\alpha-\sqrt{۳}\cos\alpha}{\sqrt{۳}\cos\alpha}=\frac{۳+۴\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow۶\sin\alpha-۳\sqrt{۳}\cos\alpha$$

$$=(۳\sqrt{۳}+۱۲)\cos\alpha\Rightarrow۶\sin\alpha=(۶\sqrt{۳}+۱۲)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۶\sqrt{۳}+۱۲}{۶}=\sqrt{۳}+۲$$

۶۴۸ ۱

طرفین رابطهٔ داده شده را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۳}\sin x+\sin\frac{\pi}{۳}\cos x$$

$$=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۴}$$

۶۴۹ ۴

$$A=۳(\frac{۱}{\sin(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)}-\frac{\sqrt{۳}}{\cos(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)})$$

$$=۳(\frac{۱}{\sin۱۵^\circ}+\frac{\tan۶۰^\circ}{\cos۱۵^\circ})=۳\times\frac{\cos۱۵^\circ+\sin۱۵^\circ\frac{\sin۶۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}}{\sin۱۵^\circ\cos۱۵^\circ}$$

$$=۳\times\frac{\frac{\cos۶۰^\circ\cos۱۵^\circ+\sin۶۰^\circ\sin۱۵^\circ}{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}\sin۳۰^\circ}$$

$$=۲۴\cos(\underbrace{۶۰^\circ-۱۵^\circ}_{۴۵^\circ})=۲۴\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱۲\sqrt{۲}$$

۶۵۰ ۱

ابتدا طرف راست تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۲\cos(x+y)}{\frac{۳}{۴}-\tan y}=\sin(x+y)+\sin(x-y)$$

$$\Rightarrow\frac{۲(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}{\frac{۳}{۴}-\tan y}$$

$$=\sin x\cos y+\sin y\cos x+\sin x\cos y-\sin y\cos x$$

$$\Rightarrow\frac{۲(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}{۲\sin x\cos y}=\frac{۳}{۴}-\tan y$$

$$\Rightarrow\frac{\cos x\cos y}{\sin x\cos y}-\frac{\sin x\sin y}{\sin x\cos y}=\frac{۳}{۴}-\tan y$$

$$\Rightarrow\cot x-\tan y=\frac{۳}{۴}-\tan y\Rightarrow\cot x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\tan x=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow\sin۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}=\frac{۲(\frac{۴}{۳})}{۱+(\frac{۴}{۳})^{۲}}=\frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{۲۵}{۹}}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

۶۵۱ ۳

ابتدا طرفین روابط داده شده را به توان دو می‌رسانیم و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\cos^{۲}x+\cos^{۲}y+۲\cos x\cos y=\frac{۱}{۴}\\ \sin x+\sin y=\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\sin^{۲}x+\sin^{۲}y+۲\sin x\sin y=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\cos^{۲}x+\sin^{۲}x}_{۱}+\underbrace{\cos^{۲}y+\sin^{۲}y}_{۱}+۲\underbrace{(\cos x\cos y+\sin x\sin y)}_{\cos(x-y)}$$

$$=۳+\frac{۱}{۴}\Rightarrow۲\cos(x-y)=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\cos(x-y)=\frac{۵}{۸}$$

۶۵۲ ۳

$$\sin x + \cos y = \pi - ۳$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^۲ x + \cos^۲ y + ۲\sin x \cos y = \pi^۲ - ۶\pi + ۹ \quad (۱)$$

اگر رابطهٔ $(\sin y+\cos x)^۲$ را برابر با A فرض کنیم، داریم:

$$(\sin y+\cos x)^۲=A \Rightarrow \sin^۲ y+\cos^۲ x+۲\sin y\cos x=A \quad (۲)$$

حال طرفین رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x+\cos^۲ y+\sin^۲ y+۲\sin x\cos y+۲\sin y\cos x$$

$$= \pi^۲ - ۶\pi + ۹ + A \Rightarrow ۲ + ۲(\underbrace{\sin x \cos y + \sin y \cos x}_{\sin(x+y)})$$

$$= \pi^۲ - ۶\pi + ۹ + A$$

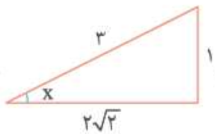
$$۲(\pi^۲ - ۳\pi) = \pi^۲ - ۶\pi + ۷ + A \Rightarrow A = \pi^۲ - ۷$$

۶۵۳ ۱

$$\frac{\tan x}{\cos x}(۱-\sin x) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{\sin x(۱-\sin x)}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{\sin x - \sin^۲ x}{۱-\sin^۲ x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۴\sin x - ۴\sin^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$$

$$۳\sin^۲ x - ۴\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۱ \ \times \\ \sin x = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow \cos x = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

حال با توجه به این‌که $\sin ۲x=۲\sin x\cos x=۲(\frac{۱}{۳})(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$ و $\cos ۲x = ۱-۲\sin^۲ x = ۱-۲(\frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۷}{۹}$ است و داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)+\sin(\frac{۳\pi}{۲}+۲x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos ۲x-\sin ۲x)-\cos ۲x$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۷}{۹}-\frac{۴\sqrt{۲}}{۹})-\frac{۷}{۹}=\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۸}-\frac{۸}{۱۸}-\frac{۱۴}{۱۸}=\frac{۷\sqrt{۲}-۲۲}{۱۸}$$

۶۵۴ ۳

$$\sin(x-\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x-\cos x) = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۳} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱-\sin ۲x = \frac{۲}{۹} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۷}{۹}$$

حال با توجه به این‌که $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$ و $\sin ۲x = \frac{۷}{۹}$ است،
با جای‌گذاری در رابطهٔ صورت سؤال داریم:

$$\sqrt{۲}(\sin x - \cos x) + ۳\sin ۲x = m$$

$$\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۳} + ۳(\frac{۷}{۹}) = m \Rightarrow m = ۳$$

۶۵۵ ۳

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \cos x-\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱-\sin ۲x=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \sin ۲x=\frac{۱}{۳}$$

حال با توجه به این‌که $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ و $\sin ۲x = \frac{۱}{۳}$ است، داریم:

$$m(\cos x-\sin x) - ۳\sqrt{۶}\sin ۲x = \sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow m(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}) - ۳\sqrt{۶}(\frac{۱}{۳}) = \sqrt{۶} \xrightarrow{\times\sqrt{۶}} ۲m - ۶ = ۶ \Rightarrow m = ۶$$

۶۵۶ ۱

ضابطهٔ تابع f را با استفاده از رابطهٔ $\cos ۲x = ۱-۲\sin^۲ x$ ساده می‌کنیم:

$$f(x) = ۴\sin x(۱-۲\sin^۲ x)+۲\sin x = \underbrace{۶\sin x - ۸\sin^۳ x}_{۲(۳\sin x-۴\sin^۳ x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲\sin ۳x \Rightarrow f(\frac{۴۱\pi}{۹}) = ۲\sin\frac{۴۱\pi}{۳}$$

$$=۲\sin(۱۴\pi-\frac{\pi}{۳})=۲\sin(-\frac{\pi}{۳})=-۲\sin(\frac{\pi}{۳})=-۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-\sqrt{۳}$$

هایلایت

نسبت مثلثاتی ۳α و ۴α

اگر در روابط مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ به جای β زاویهٔ ۲α قرار دهیم، آن‌گاه نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۳α به‌دست می‌آیند.

$$\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha \qquad \cos ۳\alpha = ۴\cos^۳\alpha - ۳\cos\alpha$$

۶۵۷ ۳

ابتدا رابطهٔ داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A=۱۰+۷\sin^۲ x+۱۲\sin ۲x=۱۰+\frac{۷(۱-\cos ۲x)}{۲}+۱۲\sin ۲x$$

$$=\frac{۲۷}{۲}+۱۲\sin ۲x-\frac{۷}{۲}\cos ۲x$$

حال با استفاده از نامساوی $-\sqrt{a^۲+b^۲} \le a\sin\theta+b\cos\theta \le \sqrt{a^۲+b^۲}$ داریم:

$$-\sqrt{۱۴۴+\frac{۴۹}{۴}} \le ۱۲\sin ۲x-\frac{۷}{۲}\cos ۲x \le \sqrt{۱۴۴+\frac{۴۹}{۴}}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲۵}{۲} \le ۱۲\sin ۲x - \frac{۷}{۲}\cos ۲x \le \frac{۲۵}{۲}$$

$$\xrightarrow{+\frac{۲۷}{۲}} \frac{۲۷}{۲}-\frac{۲۵}{۲} \le \frac{۲۷}{۲}+۱۲\sin ۲x-\frac{۷}{۲}\cos ۲x \le \frac{۲۷}{۲}+\frac{۲۵}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱ \le A \le ۲۶$$

۶۵۸ ۳

$$\begin{cases} ۱)\cos\hat{A}\cos\hat{B}=\frac{۳}{۴} \\ ۲)\sin\hat{A}\sin\hat{B}=\frac{۱}{۴} \end{cases} \xrightarrow{(۱)-(۲)} \cos\hat{A}\cos\hat{B}-\sin\hat{A}\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B} = ۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ} \hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

۶۵۹ ۳

با توجه به این‌که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ است، رابطهٔ داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\underbrace{\cos\frac{\hat{B}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲}-\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}}_{\cos(\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲})}+\sin\frac{\hat{A}}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow \cos(\underbrace{\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}}_{۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}})+\sin\frac{\hat{A}}{۲}=۱ \Rightarrow \sin\frac{\hat{A}}{۲}+\sin\frac{\hat{A}}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

۶۶۰ ۳

$$(\sin A+\cos B)^2+(\sin B+\cos A)^2=2+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A+\cos^2 B+2\sin A\cos B+\sin^2 B+\cos^2 A+2\sin B\cos A=2+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2+2(\underbrace{\sin A\cos B+\sin B\cos A}_{\sin(A+B)})=2+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin(A+B)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال با توجه به این‌که $A+B=180^\circ-C$ است، داریم:

$$\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow C=45^\circ$ یا 135°

۶۶۱ ۳

با توجه به‌صورت سؤال $\hat{A}=\hat{B}+45^\circ$ است. پس:

$$\cos\hat{A}=\cos(\hat{B}+45^\circ)=\cos B\cos 45^\circ-\sin B\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos B-\sin B)$$

از طرفی می‌دانیم $\sin C=\sin(\pi-(A+B))=\sin(A+B)$، پس:

$$2\cos A\sin B-\sin C=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos B-\sin B)\sin B-\sin(\underbrace{A+B}_{2B+45^\circ})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin B\cos B-2\sin^2 B)-(\sin 2B\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos 2B)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2B+\cos 2B-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2B+\cos 2B)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

روش سریع‌تر با توجه به‌صورت سؤال $\hat{A}=\hat{B}+45^\circ$ است. می‌توانیم فرض کنیم $\hat{A}=90^\circ$ و $\hat{B}=45^\circ$ است. پس $\hat{C}=45^\circ$ می‌باشد.

$$2\cos A\sin B-\sin C=\underbrace{2\cos 90^\circ\sin 45^\circ}_{0}-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۶۲ ۲

با توجه به این‌که $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$ است و داریم:

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\Rightarrow \cos\alpha\sin\alpha-(-\sin\alpha)\cos\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\cot\alpha}=\cot\alpha+\tan\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

۶۶۳ ۳

$$\begin{vmatrix}\sin^2 a & \sin^2 b\\ \cos^2 a & \cos^2 b\end{vmatrix}=\sin^2 a\cos^2 b-\sin^2 b\cos^2 a$$

$$=(\sin a\cos b-\sin b\cos a)(\sin a\cos b+\sin b\cos a)$$

$$=\sin(a-b)\sin(a+b)\xrightarrow{a+b=\frac{3\pi}{2}}\sin(a-(\frac{3\pi}{2}-a))\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$=\sin(\frac{3\pi}{2}-2a)=-\cos 2a$$

۶۶۴ ۲

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=4\xrightarrow{\tan\alpha=3}\frac{3+\tan\beta}{1-3\tan\beta}=4$$

$$\Rightarrow 4-12\tan\beta=3+\tan\beta\Rightarrow \tan\beta=\frac{1}{13}$$

هایلایت

اتحاد $\tan(\alpha\pm\beta)$

برای محاسبهٔ تانژانت مجموع یا تفاضل دو زاویه، از اتحاد های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

در رابطهٔ بالا اگر به جای β زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ قرار دهیم، به رابطه‌های پرکاربرد زیر می‌رسیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\qquad \tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

۶۶۵ ۳

با توجه به این‌که $\cot y=\frac{1}{3}$ است، پس $\tan y=3$ می‌باشد.

همچنین $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{15}$ است. بنابراین:

$$\tan(2x+y)=\frac{\tan 2x+\tan y}{1-\tan 2x\tan y}=\frac{\frac{8}{15}+3}{1-\frac{8}{15}\times 3}=\frac{\frac{53}{15}}{\frac{-3}{5}}=\frac{-53}{9}$$

۶۶۶ ۱

با توجه به رابطهٔ $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ داریم:

$$\tan(x+\frac{\pi}{4})=\frac{5}{2}\Rightarrow \frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2+2\tan x=5-5\tan x\Rightarrow \tan x=\frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{2(\frac{3}{7})}{1+(\frac{3}{7})^2}=\frac{\frac{6}{7}}{\frac{58}{49}}=\frac{21}{29}$$

۶۶۷ ۱

$$\tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha+\beta)=1\Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha-\tan^2\beta=1-\tan^2\alpha\tan^2\beta$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha+\tan^2\alpha\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha(1+\tan^2\beta)=1+\tan^2\beta\xrightarrow{\div(1+\tan^2\beta)}\tan^2\alpha=1$$

۶۶۸ **۲**

مجموع دو زاویهٔ $\frac{\pi}{8}+\alpha$ و $\frac{\pi}{8}-\alpha$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است؛ در نتیجه:

$$\tan(\frac{\pi}{8}+\alpha+\frac{\pi}{8}-\alpha)=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\frac{\pi}{8}+\alpha)+\tan(\frac{\pi}{8}-\alpha)}{1-\tan(\frac{\pi}{8}+\alpha)\tan(\frac{\pi}{8}-\alpha)}=1 \xrightarrow{\tan(\frac{\pi}{8}-\alpha)=x} \frac{\frac{3}{2}+x}{1-\frac{3}{2}x}=1$$

$$\Rightarrow 1-\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}+x \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{5}{2}x$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{5} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{8}-\alpha)=-\frac{1}{5}$$

۶۶۹ **۲**

با کمک زاویه‌های $x+2y$ و $2x-2y$ داریم:

$$\tan(\underbrace{2x-2y+x+2y}_{3x})=\frac{\tan(2x-2y)+\tan(x+2y)}{1-\tan(2x-2y)\tan(x+2y)}$$

$$\Rightarrow \tan 3x=\frac{4+2}{1-4\times 2}=-\frac{6}{7}\Rightarrow \cot 3x=-\frac{7}{6}$$

۶۷۰ **۲**

$$\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B+\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B=3$$

$$\Rightarrow 2+2(\cos A\cos B+\sin A\sin B)=3\Rightarrow 2\cos(A-B)=1$$

$$\Rightarrow \cos(A-B)=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(A-B)}=4$$

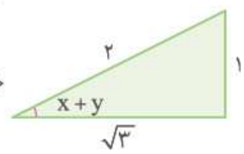
$$\Rightarrow 1+\tan^2(A-B)=4\Rightarrow \tan^2(A-B)=3$$

۶۷۱ **۱**

ابتدا طرفین تساوی‌های داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}1)\ \sin x\cos y=\frac{1}{5}\\ 2)\ \sin y\cos x=\frac{3}{10}\end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} \sin x\cos y+\sin y\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x+y)=\frac{1}{2}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \tan(x+y)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

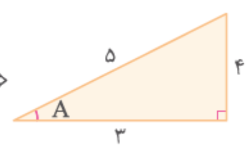
۶۷۲ **۳**

$$\frac{\tan 2x-\tan x}{1+\tan x\tan 2x}=\tan(2x-x)=\tan x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

۶۷۳ **۲**

$$\cos A=\frac{3}{5}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \tan A=\frac{4}{3}$$

$$\cot B=\frac{1}{2}\Rightarrow \tan B=2$$

حال چون $C=\pi-(A+B)$ است؛ داریم:

$$\tan C=\tan(\pi-(A+B))=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}+2}{1-\frac{4}{3}\times 2}=-\frac{\frac{10}{3}}{-\frac{5}{3}}=2$$

۶۷۴ **۲**

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{\tan^2 27^\circ-\tan^2 18^\circ}{1-\tan^2 27^\circ\tan^2 18^\circ}=\frac{\tan 27^\circ+\tan 18^\circ}{1-\tan 27^\circ\tan 18^\circ}\times\frac{\tan 27^\circ-\tan 18^\circ}{1+\tan 27^\circ\tan 18^\circ}$$

$$=\underbrace{\tan(27^\circ+18^\circ)}_{1}\times\tan(27^\circ-18^\circ)=\tan 9^\circ$$

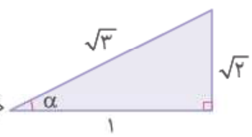
۶۷۵ **۴**

$$\frac{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})+\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})}{1-\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})}=\tan((\alpha+\frac{\pi}{4})+(\alpha-\frac{\pi}{4}))$$

$$=\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

حال با توجه به این‌که $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم است، داریم:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \tan\alpha=-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(-\sqrt{2})}{1-(-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$$

۶۷۶ **۱**

$$\tan x=\frac{2-\tan y}{1+2\tan y}\Rightarrow \tan x+2\tan x\tan y=2-\tan y$$

$$\tan x+\tan y=2(1-\tan x\tan y)$$

$$\xrightarrow{\div(1-\tan x\tan y)} \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=2\Rightarrow \tan(x+y)=2$$

۶۷۷ **۳**

$$\frac{1-\tan(\frac{\pi}{6}+x).\tan(\frac{\pi}{6}-x)}{\tan(\frac{\pi}{6}+x)+\tan(\frac{\pi}{6}-x)}=\frac{1}{\frac{\tan(\frac{\pi}{6}+x)+\tan(\frac{\pi}{6}-x)}{1-\tan(\frac{\pi}{6}+x).\tan(\frac{\pi}{6}-x)}}$$

$$=\frac{1}{\tan((\frac{\pi}{6}+x)+(\frac{\pi}{6}-x))}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۶۷۸ **۲**

با توجه به این‌که $A+B+C=180^\circ$ است؛ داریم:

$$\tan C=-\tan(A+B)\Rightarrow \tan C=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$=-\frac{\frac{2}{3}+3}{1-\frac{2}{3}\times 3}=\frac{11}{3}\Rightarrow \cot C=\frac{1}{\tan C}=\frac{1}{\frac{11}{3}}=\frac{3}{11}$$

۶۷۹ **۴**

چون $\tan ۱۵۵^\circ = -\tan ۲۵^\circ = \frac{۱}{a}$ می‌باشد؛ پس $\tan ۲۵^\circ = -\frac{۱}{a}$ است. بنابراین:

$$\frac{\tan^۲ ۳۵^\circ - \cot^۲ ۸۰^\circ}{۱-\cot^۲ ۸۰^\circ \cot^۲ ۵۵^\circ} = \frac{\tan^۲ ۳۵^\circ - \tan^۲ ۱۰^\circ}{۱-\tan^۲ ۱۰^\circ \tan^۲ ۳۵^\circ}$$

$$= \frac{\tan ۳۵^\circ - \tan ۱۰^\circ}{۱+\tan ۱۰^\circ \tan ۳۵^\circ}\times\frac{\tan ۳۵^\circ+\tan ۱۰^\circ}{۱-\tan ۱۰^\circ \tan ۳۵^\circ}$$

$$=\tan ۲۵^\circ \times \tan ۴۵^\circ = -\frac{۱}{a}$$

۶۸۰ **۲**

با توجه به این‌که $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{۲}{۳}$ است، داریم:

$$\cot\alpha+\cot\beta = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{\tan\alpha}+\frac{۱}{\tan\beta}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{\tan\beta+\tan\alpha}^{\frac{۲}{۳}}}{\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow \tan\alpha.\tan\beta=\frac{۴}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۴}{۱۵}} = \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱۱}{۱۵}} = \frac{۱۰}{۱۱}$$

۶۸۱ **۱**

با توجه به این‌که $\tan x = ۶$ است، داریم:

$$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} = \frac{۱۲}{۳۷}, \cos ۲x = \frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x} = \frac{-۳۵}{۳۷}$$

$$۴\sin y = \sin(۲x+y) \Rightarrow ۴\sin y = \sin ۲x\cos y+\cos ۲x\sin y$$

$$۴\sin y = \frac{۱۲}{۳۷}\cos y - \frac{۳۵}{۳۷}\sin y \Rightarrow \frac{۱۸۳}{۳۷}\sin y = \frac{۱۲}{۳۷}\cos y$$

$$\Rightarrow \tan y = \frac{۱۲}{۱۸۳} = \frac{۴}{۶۱}$$

حال مقدار $\cot(x+y)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\cot(x+y) = \frac{۱}{\tan(x+y)} = \frac{۱-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y} = \frac{۱-۶\times\frac{۴}{۶۱}}{۶+\frac{۴}{۶۱}}$$

$$=\frac{\frac{۳۷}{۶۱}}{\frac{۳۷۰}{۶۱}} = \frac{۱}{۱۰}$$

۶۸۲ **۲**

از تساوی $\sin(x+y)=۶\cos x\cos y$ داریم:

$$\sin x\cos y+\sin y\cos x = ۶\cos x\cos y$$

سپس طرفین این تساوی را بر $\cos x\cos y$ تقسیم می‌کنیم:

$$\tan x+\tan y = ۶$$

حال $\tan(x+y)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y} = \frac{۶}{۱-۳} = -۳$$

۶۸۳ **۲**

$$\cot\beta = ۳\tan\alpha \Rightarrow \frac{۱}{\tan\beta} = ۳\tan\alpha \Rightarrow \tan\beta = \frac{۱}{۳\tan\alpha}$$

حال با توجه به این‌که $\tan\alpha = ۴+\tan\beta$ و $\tan\beta = \frac{۱}{۳\tan\alpha}$ است؛ داریم:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{۴+\tan\beta-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\times\frac{۱}{۳\tan\alpha}}$$

$$=\frac{۴}{۱+\frac{۱}{۳}} = \frac{۴}{\frac{۴}{۳}} = ۳$$

۶۸۴ **۱**

با توجه به این‌که $\cot x = \frac{۳}{۴}$ است پس $\tan x = \frac{۴}{۳}$ است. بنابراین:

$$\tan x = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۳\tan\frac{x}{۲} = ۲-۲\tan^۲\frac{x}{۲} \Rightarrow ۲\tan^۲\frac{x}{۲}+۳\tan\frac{x}{۲}-۲=۰$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{۲} = \frac{-۳\pm\sqrt{۲۵}}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\tan\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲} & ✓\\ \tan\frac{x}{۲}=-۲ & ✗\end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{۳}{۲}x) = \tan(x+\frac{x}{۲}) = \frac{\tan x+\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan x\tan\frac{x}{۲}}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱۱}{۶}}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱۱}{۲}$$

۶۸۵ **۱**

چون $\cot\alpha$ و $\cot\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۲=۰$ هستند، پس مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با:

$$۱)\ P=\cot\alpha\cot\beta = \frac{۱}{\tan\alpha}\times\frac{۱}{\tan\beta} = -۲ \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta = -\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ S = \cot\alpha+\cot\beta = \frac{۱}{\tan\alpha}+\frac{۱}{\tan\beta} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{-\frac{۱}{۲}} = ۲ \Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta = -۱$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{-۱}{۱-(-\frac{۱}{۲})} = \frac{-۱}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۲}{۳}$$

یه جوره دیگه! طراح کنکور در سال ۹۹ این‌جوری پرسید:

اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ برابر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-۱=۰$ باشند، $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۶۸۶ ۳

با توجه به این‌که $۳۷^\circ + ۸^\circ = ۴۵^\circ$ است؛ داریم:

$$\tan(۳۷^\circ+۸^\circ)=\tan ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{\tan ۳۷^\circ+\tan ۸^\circ}{۱-\tan ۳۷^\circ \tan ۸^\circ}=۱$$

$$\Rightarrow \tan ۳۷^\circ+\tan ۸^\circ=۱-\tan ۳۷^\circ \tan ۸^\circ$$

$$\Rightarrow \tan ۳۷^\circ+\tan ۸^\circ+\tan ۳۷^\circ \tan ۸^\circ=۱$$

$$\xrightarrow{+۱} ۱+\tan ۳۷^\circ+\tan ۸^\circ(۱+\tan ۳۷^\circ)=۲$$

$$(۱+\tan ۳۷^\circ)(۱+\tan ۸^\circ)=۲$$

۶۸۷ ۲

$$\frac{\sin(۲\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin ۲\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos ۲\alpha}{\sin\beta}$$

$$=\sin ۲\alpha\cot\beta+\cos ۲\alpha=a$$

حال حاصل عبارت خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta-\sin^۲\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos^۲\alpha}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\cos\beta-\sin^۲\alpha\sin\beta}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos^۲\alpha}$$

$$=\frac{\sin ۲\alpha\cot\beta-۲\sin^۲\alpha}{\sin ۲\alpha\cot\beta+۲\cos^۲\alpha}=\frac{\sin ۲\alpha\cot\beta+\cos ۲\alpha-۱}{\sin ۲\alpha\cot\beta+\cos ۲\alpha+۱}=\frac{a-۱}{a+۱}$$

۶۸۸ ۳

$$f(x)=\frac{۱}{۱+\tan x}\xrightarrow{\text{طول و عرض نقاط دو برابر}} y=\frac{۲}{۱+\tan\frac{x}{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد سمت پایین}} y=\frac{۲}{۱+\tan\frac{x}{۲}}-۱=\frac{۱-\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan\frac{x}{۲}}$$

$$=\tan(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})=\tan(\frac{\pi-۲x}{۴})$$

۶۸۹ ۴

$$x_۱+x_۲=\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow \tan(x_۱+x_۲)=\tan\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x_۱+\tan x_۲}{۱-\tan x_۱\tan x_۲}=-۱$$

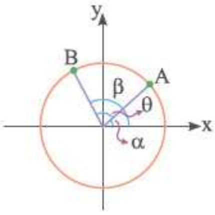
$$\Rightarrow \tan x_۱+\tan x_۲=\tan x_۱\tan x_۲-۱ \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به معادلهٔ $x^۲-۲kx+k-۱=۰$ داریم:

$$\tan x_۱+\tan x_۲=-\frac{b}{a}=۲k,\ \tan x_۱\tan x_۲=\frac{c}{a}=k-۱$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۲k=k-۱-۱\Rightarrow k=-۲$$

۶۹۰ ۳



$$\Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=y_A=\frac{۱}{\sqrt{۲}},\cos\alpha=x_A=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\\ \sin\beta=y_B=\frac{۲}{\sqrt{۵}},\cos\beta=x_B=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\end{cases}$$

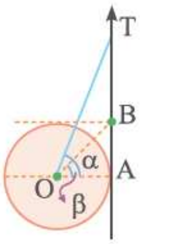
حال با توجه به این‌که $\theta=\beta-\alpha$ می‌باشد، داریم:

$$\sin\theta=\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$(\frac{۲}{\sqrt{۵}})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})-(\frac{-۱}{\sqrt{۵}})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})=\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

۶۹۱ ۳

چون مثلث OAB در دایرهٔ مثلثاتی قرار گرفته، بنابراین $OA=AB=۱$ است، پس:



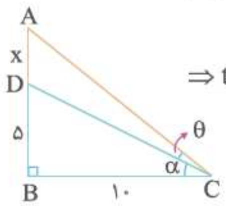
$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\frac{AT}{OA}=\frac{۳}{۱}=۳\\ \tan\beta=\frac{AB}{OA}=\frac{۱}{۱}=۱\end{cases}$$

$$\tan(T\hat{O}B)=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{۳-۱}{۱+۳\times۱}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۶۹۲ ۳

ابتدا $\tan\alpha$ و $\tan(\alpha+\theta)$ را به‌دست می‌آوریم:



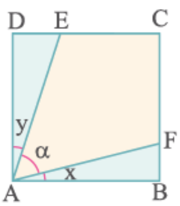
$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲},\ \tan(\alpha+\theta)=\frac{۵+x}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{۱-\tan\alpha\tan\theta}\Rightarrow \frac{۵+x}{۱۰}=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۴}}{۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۴}}$$

$$\Rightarrow \frac{۵+x}{۱۰}=\frac{\frac{۵}{۷}}{\frac{۲۵}{۲۸}}\Rightarrow \frac{۵+x}{۱۰}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۵+x=۸\Rightarrow x=۳$$

۶۹۳ ۴

با توجه به این‌که $EC=۲DE$ است پس $DC=DE+EC=۳DE$ می‌باشد. هم‌چنین چون $CF=\frac{۳}{۲}BF$ است پس $BC=BF+CF=\frac{۵}{۲}BF$ می‌باشد. بنابراین:



$$\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\frac{BF}{AB}=\frac{BF}{BC}=\frac{BF}{\frac{۵}{۲}BF}=\frac{۲}{۵}\\ \tan y=\frac{DE}{AD}=\frac{DE}{DC}=\frac{DE}{۳DE}=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

حال چون $\alpha=\frac{\pi}{2}-(x+y)$ است و داریم:

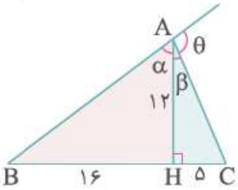
$$\tan\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-(x+y))=\cot(x+y)=\frac{1}{\tan(x+y)}$$

$$=\frac{1}{\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}}=\frac{1-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{1-\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{11}{15}}=\frac{13}{11}$$

۶۹۴ ۳

چون θ زاویهٔ خارجی می‌باشد پس $\theta=\pi-(\alpha+\beta)$ است و داریم:



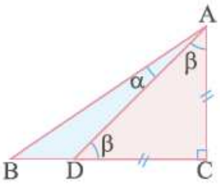
$$\Rightarrow\begin{cases}1)\tan\alpha=\frac{BH}{AH}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}\\ 2)\tan\beta=\frac{CH}{AH}=\frac{5}{12}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\tan(\pi-(\alpha+\beta))=-\tan(\alpha+\beta)$$

$$-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{5}{12}}=-\frac{\frac{7}{4}}{\frac{4}{9}}=-\frac{63}{16}$$

۶۹۵ ۴

چون $|BD|=\frac{2}{3}|CD|$ است پس $|BC|=\frac{2}{3}|CD|+|CD|=\frac{5}{3}|CD|$ است. بنابراین:



$$\tan\beta=\frac{AC}{CD}=1$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{5}{3}CD}{CD}=\frac{5}{3}$$

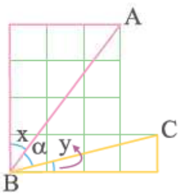
حال اگر $\tan\alpha=x$ باشد، داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{5}{3}=\frac{x+1}{1-x\times1}$$

$$\Rightarrow 3x+3=5-5x\Rightarrow 8x=2\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

۶۹۶ ۴

ابتدا $\tan x$ و $\tan y$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\tan x=\frac{3}{4},\tan y=\frac{1}{4}$$

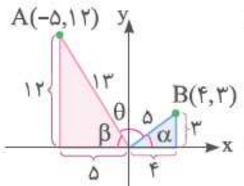
حال با توجه به اینکه $\alpha=\frac{\pi}{2}-(x+y)$ است؛ داریم:

$$\tan\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-(x+y))=\cot(x+y)=\frac{1}{\tan(x+y)}$$

$$=\frac{1}{\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}}=\frac{1-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{1-(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{13}{16}}{1}=\frac{13}{16}$$

۶۹۷ ۴

ابتدا $\sin\alpha$، $\cos\alpha$، $\sin\beta$ و $\cos\beta$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos\alpha=\frac{4}{5}\\ \sin\beta=\frac{12}{13},\cos\beta=\frac{5}{13}\end{cases}$$

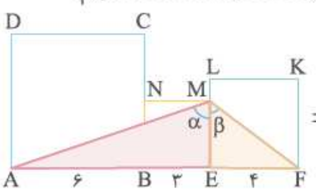
حال با توجه به اینکه $\theta=\pi-(\alpha+\beta)$ است، داریم:

$$\cos\theta=\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)$$

$$=-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=-(\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13})=\frac{16}{65}$$

۶۹۸ ۱

با توجه به اینکه $\tan(F\widehat{M}A)=\tan(\alpha+\beta)$ است؛ داریم:



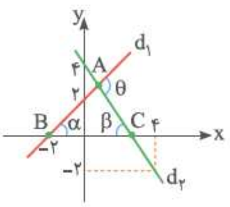
$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\frac{AE}{ME}=\frac{9}{3}=3\\ \tan\beta=\frac{EF}{ME}=\frac{4}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\tan(F\widehat{M}A)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{3+\frac{4}{3}}{1-3\times\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{\frac{13}{3}}{-3}=\frac{-13}{9}$$

۶۹۹ ۲

با توجه به اینکه θ زاویهٔ خارجی مثلث ABC می‌باشد؛ پس $\theta=\alpha+\beta$ است. بنابراین:



$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=m_{AB}=1\\ \tan\beta=-m_{AC}=\frac{-(-6)}{4}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1+\frac{3}{2}}{1-(1)(\frac{3}{2})}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{-1}=-5$$

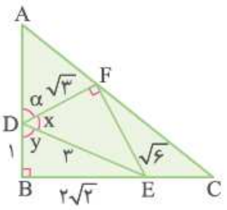
$$\cot\theta=\frac{1}{-5}=-0/2$$

۷۰۰ ۴

ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث در مثلث DBE طول ضلع DE را به‌دست می‌آوریم:

$$(DE)^2=(2\sqrt{2})^2+1^2=9\Rightarrow DE=3$$

حال چون در مثلث DEF رابطهٔ فیثاغورث برقرار می‌باشد، پس این مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین:



$$\tan x=\frac{EF}{DF}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

$$\tan y=\frac{BE}{DB}=\frac{2\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\tan(\pi-(x+y))=-\tan(x+y)=-\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{2}}{-3}=\sqrt{2}$$