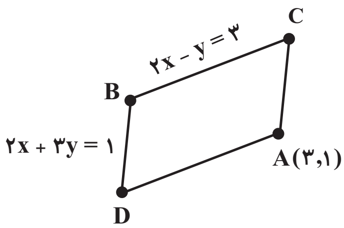
هندسه تحلیلی

۱ در متوازی‌الاضلاع شکل مقابل عرض نقطهٔ D کدام است؟



۱) ۱-
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۲

% ۵۲
آبان ۱۴۰۰

۲ معادله‌ی خطی که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع کرده و بر خط $۲x + ۳y = -۱$ عمود باشد، کدام است؟

۱) $۲y = ۳x + ۹$
۲) $۲y + ۳x = ۹$
۳) $۳y = ۲x + ۶$
۴) $y - ۳x = ۲$

% ۷۵
مهر ۹۶

۳ اگر دو خط به معادله‌های $(m + ۲)y = x + ۳$ و $y = (۲m + ۱)x + ۱$ بر هم عمود باشند، **m** کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) -۱
۴) ۱

% ۶۶
آبان ۹۶

۴ اگر **a** و **b** دو عدد حقیقی متمایز باشند، خط گذرا از نقاط **A(b,a)** و **B(a,b)** همواره بر کدام خط عمود است؟

۱) $y + x = ۰$
۲) $y - ۲x = ۰$
۳) $y - x = ۰$
۴) $x - ۲y = ۰$

% ۵۳
آبان ۹۶

۵ مثلث **ABC** در صفحه مفروض است. اگر معادلهٔ خط گذرنده از ضلع **BC** به صورت $y = x$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع **BC** از رأس $A(۱,۲)$ کدام است؟

۱) $y = -x + ۳$
۲) $y = -x + ۱$
۳) $y = x + ۱$
۴) $y = x + ۳$

% ۴۶
فروردین ۹۷

۶ فاصلهٔ نقطهٔ برخورد دو خط $y = ۳x + ۵$ و $۲x + y = -۱۰$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۲۵
۲) ۵
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

% ۵۶
آبان ۹۶

۷ محیط مثلث ABC با فرض $A(۲,۴)$، $B(۲,۱)$ و $C(-۲,۴)$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) $۷ + ۲\sqrt{۳}$
۳) ۱۲
۴) $۹ + ۲\sqrt{۳}$

% ۷۵
مهر ۹۹

۸) مثلث ABC که مختصات رأس‌های آن $A(۳,۵)$ ، $B(۳,-۱)$ و $C(۷,۲)$ است، چگونه است؟

۱) متساوی‌الساقین
۲) متساوی‌الاضلاع
۳) مختلف‌الاضلاع
۴) قائم‌الزاویه

% ۹۰
مهر ۹۶

۹) فاصلهٔ دو نقطه به طول‌های ۱ و ۴ روی نمودار $y=\sqrt{x}$ از هم کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

% ۷۱
فروردین ۱۴۰۰

۱۰) فاصلهٔ نقطهٔ $B(-۴,۳)$ از مبدأ مختصات و همچنین از نقطهٔ A واقع بر محور طول‌ها به یک اندازه است. مقادیر ممکن برای طول نقطهٔ A کدام است؟

۱) صفر و ۸-
۲) صفر و ۸
۳) صفر و ۲
۴) ۸ و ۸-

% ۵۸
آبان ۹۹

۱۱) اگر $A(۳,۷)$ و $B(۰,۳)$ دو سر یک قطر از یک دایره باشند، مساحت این دایره کدام است؟

۱) $\frac{۲۵\pi}{۴}$
۲) ۲۵π
۳) $\frac{۴۹\pi}{۴}$
۴) ۴۹π

% ۷۶
آبان ۹۹

۱۲) اگر نقاط $A(۳,۴)$ و $B(-۱,۶)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، اندازهٔ مساحت مربع کدام است؟

۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

% ۶۱
فروردین ۹۷

۱۳) یکی از اضلاع مربعی بر خط $۲y+۳x=۱$ واقع است. اگر $A(۳,۱)$ یکی از رئوس این مربع باشد، محیط مربع کدام است؟

۱) $\frac{۴۰\sqrt{۱۳}}{۱۳}$
۲) ۴۰
۳) ۸۰
۴) $\frac{۲۰\sqrt{۱۳}}{۱۳}$

% ۶۹
آبان ۹۹

۱۴) نقاط $A(m-n,۲m+۳)$ و $B(m+n,۲n-۳)$ نسبت به نقطهٔ $C(-۲,۲)$ قرینهٔ یکدیگرند. در این صورت $۳m-۲n$ کدام است؟

۱) ۶-
۲) ۱۴-
۳) ۲-
۴) ۴

% ۴۱
فروردین ۹۷

فصل ۱: هندسه تحلیلی

۱ گزینهٔ «۱»

با توجه به موازی بودن اضلاع BC و AD در متوازی‌الاضلاع نتیجه می‌گیریم معادله خط گذرنده از پاره‌خط AD به صورت $2x-y=c$ خواهد بود که برای یافتن مقدار c کافی است مختصات نقطه A را در آن جایگذاری کنیم، پس داریم:

$$AD: 2x-y=c \Rightarrow 2(3)-(1)=c \Rightarrow c=5 \Rightarrow 2x-y=5$$

مطابق شکل نقطه D حاصل تلاقی اضلاع AD و BD است، پس مختصات آن در هر دو معادله خط صادق است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2x_D+3y_D=1 \\ 2x_D-y_D=5 \end{cases} \Rightarrow y_D=-1, x_D=2$$

پس عرض نقطه D برابر با ۱- می‌باشد.

٪۳۷ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که از برابر بودن شیب دو خط موازی و جایگذاری مختصات نقطه در معادله خط استفاده کرده‌اند تا معادلهٔ AD را به‌دست آورند. سپس D را داخل دستگاه معادلات BD و AD به‌دست آورده‌اند.

نکته

هر دو خط موازی شیب‌های یکسان دارند.
محل برخورد دو خط از حل دستگاه آن‌ها به‌دست می‌آید.

۲ گزینهٔ «۱»

معادله یک خط در صفحه مختصات را به صورت $ax+by+c=0$ یا به صورت $y=mx+b$ نمایش می‌دهند. از طرفی اگر دو خط با شیب‌های m و m' باشد، آن‌گاه شرط عمود بودن آن‌ها $mm'=-1$ است. به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

برای اعمال این شرط بهتر است از نحوه نمایش معادله خط به صورت $(y=mx+b)$ استفاده کنیم. در قدم اول معادله داده شده را به فرم بیان شده در می‌آوریم تا شیب آن به‌دست آید:

$$2x+3y=-1 \to y=\frac{-2}{3}x-\frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{-2}{3}$$

بنابراین با توجه به مطالب فوق شیب خط خواسته شده (m') از رابطه $mm'=-1$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$mm'=(\frac{-2}{3})m'=-1 \Rightarrow m'=\frac{3}{2} \Rightarrow y_{\text{خواسته شده}}=\frac{3}{2}x+b$$

برای یافتن b (عرض از مبدأ) کافی است فرض سؤال برخورد این خط با محور xها در نقطه‌ای به طول (-3) را اعمال کنیم که این شرط بیان‌گر این است که نقطه $(-3,0)$ عضوی از این خط است، پس داریم:

$$(0)=\frac{3}{2}(-3)+b \Rightarrow b=\frac{9}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2} \Rightarrow 2y=3x+9$$

٪۶۲ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که از رابطه بین شیب دو خط عمود استفاده کرده‌اند و شیب خط خواسته شده را به دست آورده‌اند. سپس با جایگذاری مختصات نقطهٔ داده شده عرض از مبدأ را نیز پیدا کرده‌اند.

نکته

دو خط زمانی برهم عمودند که حاصل ضرب شیب آن‌ها ۱- شود. $(mm'=-1)$

۳ گزینهٔ «۳»

اگر دو خط با شیب‌های m و m' بر یکدیگر عمود باشند، آن‌گاه رابطه $m.m'=-1$ برقرار است، بنابراین با بازنویسی معادلات داده شده به صورت زیر شرط عمود بودن را روی آن‌ها اعمال می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases} y=(2m+1)x+1 \\ (m+2)y=x+3 \Rightarrow y=\dfrac{x}{m+2}+\dfrac{3}{m+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2m+1)\times(\frac{1}{m+2})=-1 \xrightarrow{m\neq -2} 2m+1=-m-2$$

$$\Rightarrow m=-1$$

پس به ازای $m=-1$ دو خط داده شده بر هم عمود می‌باشند.

٪۵۳ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که از رابطهٔ بین شیب دو خط عمود بر هم استفاده کرده‌اند و به این نکته دقت کرده‌اند که برای به دست آوردن شیب خط باید ضریب y، یک باشد، پس معادله خط را به صورت $y=ax+b$ درآورده‌اند.

۴ گزینهٔ «۳»

معادله خط گذرنده از نقاط A و B به صورت $y=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}x+c$ است که c با جایگذاری مختصات یکی از نقاط A یا B به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$y=\frac{a-b}{b-a}x+c \xrightarrow{A(b,a)} a=-(b)+c$$

$$\Rightarrow c=a+b \Rightarrow y=-x+a+b$$

شیب این خط برابر با -1 است، از طرفی اگر دو خط با شیب‌های m و m' به یکدیگر عمود باشند رابطه $m.m'=-1$ برقرار است، پس با توجه به اینکه شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر -1 است، نتیجه می‌گیریم شیب خط عمود بر آن برابر با ۱ است و این خط را می‌توانیم به صورت $y=x+c'$ نمایش دهیم که با توجه به گزینه‌ها با فرض $c'=0$ گزینه «۳» حاصل می‌شود. توجه کنید مقدار c' تأثیری بر عمود بودن آن ندارد.

٪۳۷ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با داشتن دو نقطه از خط شیب خط گذرنده از آن‌ها را به دست آورده‌اند. سپس از رابطهٔ بین شیب‌های دو خط عمود $(m.m'=-1)$ گزینه صحیح را پیدا کرده‌اند.

نکته

شیب گذرنده از دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

۵ گزینهٔ «۱»

با توجه به اینکه اگر دو خط با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، رابطه $m.m'=-۱$ برقرار است و شیب خط گذرنده از ضلع BC برابر با یک است، نتیجه می‌گیریم شیب معادله ارتفاع وارد بر BC برابر با منفی یک است، پس می‌توان آن را به صورت $y=-x+b$ نمایش داد، با توجه به اینکه ارتفاع از رأس A می‌گذرد، داریم:

$$y=-x+b \xrightarrow{A(۱,۲)} ۲=-(۱)+b \Rightarrow b=۳ \Rightarrow y=-x+۳$$

٪۳۶ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که از عمود بودن ارتفاع بر ضلع و در نتیجه رابطه شیب‌های دو خط عمود استفاده کرده‌اند و شیب ارتفاع وارد بر BC را درآورده‌اند و سپس با جایگذاری مختصات رأس داده شده عرض از مبدأ را نیز حساب کرده‌اند.

نکته

در مثلث ABC، ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است و شیب آن $-\frac{۱}{m_{BC}}$ است و همچنین از نقطه A می‌گذرد.

۶ گزینهٔ «۲»

با توجه به اینکه مختصات نقطه برخورد دو خط در هر یک از معادلات خط‌ها صادق است، اگر نقطه برخورد را M بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} y_M=۳x_M+۵ \\ ۲x_M+y_M=-۱۰ \end{cases} \Rightarrow x_M=-۳, y_M=-۴ \Rightarrow M(-۳,-۴)$$

از طرفی فاصله نقطه M از مبدأ مختصات عبارت است از $d=\sqrt{x_M^۲+y_M^۲}$، پس داریم:

$$d=\sqrt{x_M^۲+y_M^۲}=\sqrt{(-۳)^۲+(-۴)^۲}=۵$$

٪۴۸ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با حل دستگاه معادلات دو خط، نقطهٔ برخورد آن‌ها را به‌دست آورده‌اند و سپس از رابطهٔ فاصلهٔ بین دو نقطه (در قسمت نکته گفته شده) فاصله نقطه به دست آمده از مبدأ مختصات را محاسبه نموده‌اند.

نکته

فاصلهٔ نقاط $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_B\\y_B\end{vmatrix}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

همچنین فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ از مبدأ مختصات به صورت $\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}$ به دست می‌آید.

۷ گزینهٔ «۳»

برای محاسبه طول اضلاع باید فاصله بین هر یک از رأس‌های مثلث را به‌دست آوریم، از طرفی فاصله دو نقطه $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$. پس برای اضلاع مثلث داریم:

$$A(۲,۴),B(۲,۱) \Rightarrow AB=\sqrt{(۲-۲)^۲+(۴-۱)^۲} \Rightarrow AB=۳$$

$$A(۲,۴),C(-۲,۴) \Rightarrow AC=\sqrt{(۲-(-۲))^۲+(۴-۴)^۲} \Rightarrow AC=۴$$

$$B(۲,۱),C(-۲,۴) \Rightarrow BC=\sqrt{(۲-(-۲))^۲+(۱-۴)^۲} \Rightarrow BC=۵$$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر است با: $AB+AC+BC=۱۲$.

٪۶۳ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که از رابطهٔ فاصله بین دو نقطه طول هر سه ضلع را که فاصله بین دو رأس هستند، به دست آورده‌اند. سپس محیط را که جمع اضلاع است محاسبه کرده‌اند.

نکته

با داشتن مختصات ۳ رأس مثلث برای محاسبهٔ محیط باید فاصله رئوس از یکدیگر را حساب کنیم تا طول اضلاع به‌دست آید.

۸ گزینهٔ «۱»

ابتدا باید طول تمام اضلاع را به‌دست آوریم، اگر هر سه ضلع طول یکسانی داشتند، آن‌گاه مثلث متساوی‌الاضلاع خواهد بود، اگر طولی یکی از اضلاع از بقیه بیشتر بوده آن‌گاه با بررسی قضیه فیثاغورس به قائم‌الزاویه بودن یا نبودن آن پی می‌بریم، در انتها اگر تنها دو ضلع برابر داشت، مثلث متساوی‌الساقین و اگر هم قائم‌الزاویه و هم متساوی‌الساقین بود، واضح است که مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، توجه کنید برای از قلم نینداختن هیچ حالتی به همین ترتیب شروع به چک کردن روابط اضلاع کنید. از طرفی فاصله دو نقطه $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$، بنابراین داریم:

$$AB=\sqrt{(۳-۳)^۲+(۵-(-۱))^۲}=۶$$

$$AC=\sqrt{(۳-۷)^۲+(۵-۲)^۲}=۵$$

$$BC=\sqrt{(۳-۷)^۲+((-۱)-۲)^۲}=۵$$

واضح است سه ضلع برابر نیستند و $۶^۲ \neq ۵^۲+۵^۲$ می‌باشد و تنها دو ضلع مثلث برابر هستند، بنابراین این مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد.

٪۶۸ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که برای تعیین نوع مثلث ابتدا طول اضلاع را به‌دست آورده‌اند. برای به دست آوردن طول هر ضلع فاصلهٔ بین دو رأس آن را از رابطهٔ $\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$ محاسبه کرده‌اند.

نکته

در مثلث متساوی‌الساقین، دو ساق از مثلث با هم برابرند.
در مثلث متساوی‌الاضلاع، طول هر ۳ ضلع برابر است.

۹ گزینهٔ «۱»

فاصله دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با $AB=\sqrt{(x_A-x_A)^۲+(y_A-y_B)^۲}$. در صورت سؤال طول هر دو نقطه داده شده است $(x_B=۴,x_A=۱)$. برای فاصله این دو نقطه به عرض آن‌ها نیاز داریم که با توجه به اینکه هر دو نقطه بر روی منحنی نمودار $y=\sqrt{x}$ قرار دارند، داریم:

$$\begin{cases} y_A=\sqrt{x_A}=\sqrt{۱}=۱ \\ y_B=\sqrt{x_B}=\sqrt{۴}=۲ \end{cases} \Rightarrow AB=\sqrt{(۱-۴)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

٪۶۲ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که ابتدا با جایگذاری طول نقاط در معادله خط، عرض نقاط را به دست آورده‌اند. سپس با داشتن مختصات نقاط از رابطه فاصله دو نقطه (در قسمت نکته گفته شده) استفاده کرده‌اند.

نکته

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_B\\y_B\end{vmatrix}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

۱۰ گزینهٔ «۱»

فاصله نقطه B از مبدأ مختصات برابر است با $d=\sqrt{x_B^2+y_B^2}$ و همچنین فاصله آن از نقطه A برابر است با $d=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$. از طرفی چون نقطه A واقع بر محور طول‌ها است، $y_A=0$ می‌باشد، پس داریم:

$$\sqrt{{x_B}^2+{y_B}^2}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$=\sqrt{(-4-x_A)^2+(3-0)^2}\Rightarrow\sqrt{25}=\sqrt{(-4-x_A)^2+9}$$

$$\Rightarrow|-4-x_A|=4\Rightarrow\begin{cases}-4-x_A=4\Rightarrow x_A=-8\\4+x_A=4\Rightarrow x_A=0\end{cases}$$

پس طول نقطه A می‌تواند صفر یا -8 باشد.

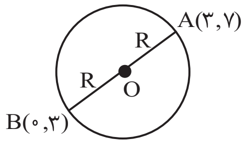
٪۴۵ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با استفاده از فرمول فاصله دو نقطه، فاصلهٔ B از مبدأ و از نقطهٔ A را برابر قرار داده‌اند. از حل معادله مقادیر طول A به‌دست می‌آید.

نکته

مختصات یک نقطه روی محور طول‌ها به صورت $(\alpha,0)$ و مختصات یک نقطه روی محور عرض‌ها به صورت $(0,\beta)$ خواهد بود.

۱۱ گزینهٔ «۱»

مطابق شکل فاصلهٔ بین نقاط A و B برابر با قطر دایره یا به عبارتی دو برابر اندازه شعاع دایره $(2R)$ می‌باشد، از طرفی فاصله دو نقطه $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از یکدیگر برابر است با $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2-(y_A-y_B)^2}$. بنابراین برای شعاع دایره داریم:



$$2R=AB\Rightarrow R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(3-0)^2+(7-3)^2}}{2}=\frac{5}{2}$$

از طرفی مساحت دایره از رابطهٔ $S=\pi R^2$ به‌دست می‌آید که با توجه به شعاع به‌دست آمده مساحت دایره برابر است با $S=\pi R^2=\pi(\frac{5}{2})^2=\frac{25\pi}{4}$.

٪۶۳ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که ابتدا با پیدا کردن فاصله نقطهٔ A و B طول AB یا همان قطر دایره را به‌دست آورده‌اند، سپس شعاع و مساحت دایره را به راحتی محاسبه کرده‌اند.

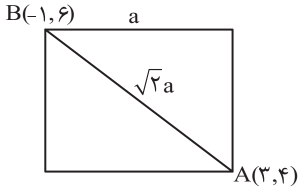
نکته

اگر مختصات دو سر یک قطر از دایره را داشته باشیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ این دو نقطه قطر $(2R)$ محاسبه می‌شود و با نصف کردن آن شعاع (R) به‌دست می‌آید.

مساحت دایره برابر πR^2 است.

۱۲ گزینهٔ «۲»

فاصله بین دو نقطه برابر با قطر مربع و از رابطه $d=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$ به‌دست می‌آید، پس داریم:



$$d=\sqrt{(3-(-1))^2+(4-6)^2}=\sqrt{20}$$

از طرفی در مربعی به ضلع a طبق قضیه فیثاغورس قطر مربع برابر با $\sqrt{2}a$ است، بنابراین داریم:

$$d=\sqrt{2}a=\sqrt{20}\Rightarrow a=\sqrt{10}\Rightarrow \text{مساحت مربع}=a^2=10$$

٪۳۵ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که ابتدا با محاسبه فاصله بین دو رأس مقابل، قطر مربع را به‌دست آورده‌اند. سپس با استفاده از رابطه فیثاغورس و برابر بودن اضلاع مربع، رابطه بین قطر و ضلع مربع را به‌دست آورده و ضلع را پیدا کرده‌اند.

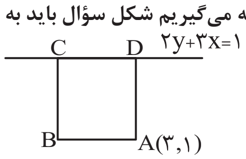
نکته

در هر مربع فاصلهٔ دو رأس مقابل، اندازهٔ قطر را می‌دهد.

در هر مربع به ضلع a، اندازهٔ قطر $\sqrt{2}a$ است.

۱۳ گزینهٔ «۱»

با توجه به اینکه مختصات نقطه A در معادله خط داده شده، صدق نمی‌کند، بنابراین نتیجه می‌گیریم شکل سؤال باید به صورت زیر باشد



با توجه به این‌که نقطهٔ A در معادله خط صدق نمی‌کند، فاصلهٔ A از خط برابر با ضلع مربع است. داریم:

$$\text{ضلع مربع}=\frac{|3(3)+2(1)-1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{13}}\Rightarrow \text{محیط}=4(\frac{10}{\sqrt{13}})=\frac{40\sqrt{13}}{13}$$

٪۶۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که شکل مسئله را به‌درستی رسم کرده‌اند.

نکته

اگر معادله یک ضلع از مربع و یک رأس غیر واقع بر این ضلع را داشته باشیم، فاصلهٔ رأس مورد نظر از خط داده شده برابر طول ضلع مربع است.

۱۴ گزینهٔ «۲»

با توجه به اینکه نقطه B قرینه نقطه A نسبت به نقطه C است، پس نقطه C وسط پاره‌خط AB است و مختصات آن عبارت است از $C(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$، پس داریم:

$$\begin{cases} x_C=\frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow -2=\frac{(m-n)+(m+n)}{2} \Rightarrow m=-2 \\ y_C=\frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow 2=\frac{(2m+3)+(2n-3)}{2} \Rightarrow m+n=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m=-2, n=4$$

بنابراین حاصل $3m-2n$ برابر با $3(-2)-2(4)=-14$ است.

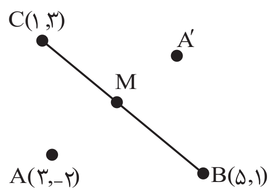
٪۳۳ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که از این نکته که نقطه C وسط پاره‌خط AB است پس مختصات آن میانگین مختصات A و B است، استفاده کرده‌اند.

نکته

اگر نقاط $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطه $C\left|\begin{matrix}x_C\\y_C\end{matrix}\right.$ قرینه یکدیگر باشند، C وسط پاره‌خط AB است و داریم:

$$\begin{cases} x_C=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_C=\frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

۱۵ گزینهٔ «۲»



وسط پاره‌خط BC را M می‌نامیم، صورت سؤال قرینه نقطه A نسبت به M را می‌خواهد به عبارتی اگر قرینه نقطه A را A′ بنامیم، نقطه M وسط پاره‌خط AA′ خواهد بود، بنابراین M میان هر دو پاره‌خط AA′ و BC است، از طرفی با توجه به اینکه مختصات وسط پاره‌خط برابر با میانگین نقاط ابتدا و انتهای پاره‌خط است داریم:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{x_A+x_{A'}}{2} \Rightarrow \frac{1+5}{2}=\frac{3+x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'}=3 \\ y_M=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{y_A+y_{A'}}{2} \Rightarrow \frac{3+1}{2}=\frac{(-2)+y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'}=6 \end{cases}$$

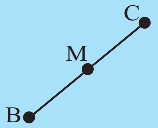
پس مختصات قرینه نقطه A نسبت به وسط پاره‌خط BC برابر است با $A'(3,6)$.

٪۶۰ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که ابتدا مختصات نقطه M یعنی وسط پاره‌خط BC را از میانگین مختصات نقاط B و C و سپس مختصات M را که وسط پاره‌خط AA′ نیز است از میانگین مختصات نقاط A و A′ به‌دست آورده و مساوی هم قرار داده‌اند تا مختصات نقطه A′ به‌دست آید.

نکته

وسط پاره‌خط BC به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_B+x_C}{2} \\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2} \end{cases}$$



۱۶ گزینهٔ «۳»

قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $A'(-x,-y)$ می‌باشد یا به عبارتی داریم:

$$\begin{cases} \frac{x_A+x_{A'}}{2}=0 \Rightarrow x_{A'}=-x_A=-3 \\ \frac{y_A+y_{A'}}{2}=0 \Rightarrow y_{A'}=-y_A=2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3,2)$$

از طرفی اگر قرینه نقطه نسبت به M را B بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_{A'}+x_B}{2} \Rightarrow -1=\frac{-3+x_B}{2} \Rightarrow x_B=1 \\ y_M=\frac{y_{A'}+y_B}{2} \Rightarrow 7=\frac{2+y_B}{2} \Rightarrow y_B=12 \end{cases} \Rightarrow B(1,12)$$

بنابراین قرینه نقطه A′ نسبت به نقطه M، نقطه $B(1,12)$ می‌باشد.

٪۵۴ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که از این موضوع که در قرینه کردن نقطه نسبت به محور x ها تنها y، در قرینه کردن نقطه نسبت به محور y ها تنها x و در قرینه کردن نقطه نسبت به مبدأ مختصات x و y قرینه می‌شوند استفاده نموده‌اند.

نکته

قرینه نقطه $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ نسبت به محور x ها به صورت $A_1\left|\begin{matrix}x_A\\-y_A\end{matrix}\right.$ و قرینه آن نسبت به محور y ها، $A_2\left|\begin{matrix}-x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و قرینه آن نسبت به مبدأ مختصات $A_3\left|\begin{matrix}-x_A\\-y_A\end{matrix}\right.$ خواهد بود.

۱۷ گزینهٔ «۱»

مختصات نقطه وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$، پس داریم:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow 2=\frac{4+x_B}{2} \Rightarrow x_B=0 \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow -2=\frac{-1+y_B}{2} \Rightarrow y_B=-3 \end{cases} \Rightarrow B(0,-3)$$

از طرفی اگر قرینه B نسبت به نقطه C را B′ بیابیم، آن‌گاه نقطه C وسط پاره‌خط BB′ خواهد بود و مختصات آن عبارت است از $C(\frac{x_B+x_{B'}}{2},\frac{y_B+y_{B'}}{2})$. پس داریم:

$$\begin{cases} x_C=\frac{x_B+x_{B'}}{2} \Rightarrow 6=\frac{0+x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{B'}=12 \\ y_C=\frac{y_B+y_{B'}}{2} \Rightarrow -2=\frac{-3+y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{B'}=-1 \end{cases} \Rightarrow B'(12,-1)$$

مجموع طول عرض نقطه B′ برابر با $12+(-1)=11$ می‌باشد.