

سؤالات زیر مربوط به دسته‌بندی اعداد طبیعی است. توی این سؤالات باید جمله اول هر دسته، جمله آخر هر دسته و تعداد جملات هر دسته را پیدا کنیم. راستی طرح‌های کنکور علاقه زیادی به این تیپ سؤالا دارن!

**واجب ۱۳۴.** اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی  $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ . در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

- ۱) ۷۱      ۲) ۷۲      ۳) ۷۳      ۴) ۷۴

**واجب ۱۳۵.** اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی  $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$ . در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟

- ۱) ۱۵۶۳      ۲) ۱۵۸۹      ۳) ۱۶۳۹      ۴) ۱۶۵۱

**واجب ۱۳۶.** اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته مربع کامل باشد،  $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \dots$ . مجموع جملات دسته دهم کدام است؟

- ۱) ۱۷۳۰      ۲) ۱۷۲۹      ۳) ۱۸۳۰      ۴) ۱۸۲۹

**تست ۱۳۷.** اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که اولین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \dots$  میانگین پنج عدد آخر در دسته دهم کدام است؟

- ۱) ۱۱۹      ۲) ۱۱۸      ۳) ۱۱۷      ۴) ۱۱۲

**واجب ۱۳۸.** اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول و دوم) برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \dots$ . میانگین عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟

- ۱)  $6144/5$       ۲)  $2304/5$       ۳)  $3072/5$       ۴)  $4608/5$

## دنباله‌های حسابی و هندسی

درس ۳

**مثال** در یک دنباله حسابی جمله هشتم برابر ۲۲ و جمله سیزدهم

برابر ۳۷ است. قدر نسبت را به دست آورید.

$$d = \frac{t_{13} - t_8}{13 - 8} = \frac{37 - 22}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

**تست** در یک دنباله حسابی جملات چهارم و هشتم به ترتیب ۶ و

۱۰ است. مجموع جملات دوم و هفتم چند برابر قدر نسبت است؟

$$18 \quad (4) \quad 14 \quad (3) \quad 15 \quad (2) \quad 13 \quad (1)$$

۱ قدرنسبت دنباله برابر است با:  $d = \frac{t_8 - t_4}{8 - 4} = \frac{10 - 6}{4} = 1$

حال چون جمله چهارم برابر ۶ است. پس:

$$t_4 = t_1 + 3d \Rightarrow t_1 + 3 = 6 \Rightarrow t_1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{t_7 + t_2}{d} = \frac{t_1 + 6d + t_1 + d}{d} = \frac{2t_1 + 7d}{d} = \frac{2 \times 3 + 7 \times 1}{1} = 13$$

بدون پیدا کردن  $t_1$  نیز می‌توانستیم جملات دوم و هفتم را

به دست آوریم. چون  $t_4 = 6$  است، پس:

$$t_7 = t_4 - 2d \Rightarrow t_7 = 6 - 2 = 4, \quad t_2 = t_4 + 3d \Rightarrow t_2 = 6 + 3 = 9$$

برای حل مسائل دنباله حسابی، به نکات زیر توجه کنید:

۱ وقتی دو جمله از دنباله حسابی را داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از

جمله عمومی دنباله حسابی یعنی  $t_n = t_1 + (n-1)d$ ، دو جمله داده شده را

برحسب  $t_1$  و  $d$  بنویسیم و با حل دستگاه حاصل، مقدار  $t_1$  و  $d$  را پیدا کنیم.

مثلاً، در دنباله حسابی که جمله پنجم آن برابر ۹ و جمله یازدهم آن برابر

۲۷ است، داریم:

$$\begin{cases} t_5 = 9 \\ t_{11} = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 4d = 9 \\ t_1 + 10d = 27 \end{cases} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow t_1 = -3$$

### دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول)، با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست آید، دنباله حسابی نامیده می‌شود. به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً آن را با  $d$  نمایش می‌دهیم:

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$$

$$+d \quad +d \quad +d$$

مثلاً دنباله زیر، یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۳ است:

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

$$+3 \quad +3 \quad +3$$

جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $d$  به صورت

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, \dots$$

$$+d \quad +d \quad +d$$

### علامت قدرنسبت در دنباله حسابی

۱ اگر  $d > 0$  باشد، دنباله صعودی است.

۲ اگر  $d = 0$  باشد، دنباله ثابت است.

۳ اگر  $d < 0$  باشد، دنباله نزولی است.

$$1, 3, 5, \dots$$

$$+2 \quad +2$$

$$2, 2, 2, \dots$$

$$+0 \quad +0$$

$$11, 7, 3, \dots$$

$$-4 \quad -4$$

**تذکر** اگر  $t_m$  و  $t_n$  دو جمله از دنباله‌ای حسابی باشند، آنگاه قدرنسبت

این دنباله برابر است با:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

**تست** اعداد  $۱-۵p$ ،  $۳p+۴$ ،  $۳p+۳$  سه جمله متوالی یک دنباله

حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۴ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴ شرط تشکیل دنباله حسابی را می‌نویسیم و داریم:

$$\text{جمله سوم} + \text{جمله اول} = 2 \times \text{جمله وسط} \Rightarrow 3p + 4 = \frac{(5p - 1) + (3p + 3)}{2}$$

$$\rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6$$

پس جملات این دنباله به صورت ۱۵، ۲۲، ۲۹ هستند، بنابراین قدرنسبت آن برابر است با:  $d = 22 - 15 = 7$

**قانون اندیس‌ها**

اگر اعداد طبیعی  $m, n, p, q$  شماره جملاتی از دنباله حسابی باشند، به طوری که  $m + n = p + q$  باشد، آنگاه طبق قانون اندیس‌ها رابطه زیر بین جملات این دنباله برقرار است:

$$t_m + t_n = t_p + t_q$$

مثلاً، چون  $۳ + ۷ = ۴ + ۶$  است، پس در هر دنباله حسابی  $t_۳ + t_۷ = t_۴ + t_۶$  است.

**تذکر** با توجه به قانون اندیس‌ها در دنباله حسابی، مجموع هر دو

جمله‌ای که از ابتدا و انتهای بخشی از دنباله فاصله یکسانی دارند، با هم برابر است:

$$\dots + t_1 + t_n = \dots + t_2 + t_{n-1} = \dots + t_3 + t_{n-2} = \dots + t_4 + t_{n-3} = \dots$$

**تست** در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$ ، رابطه

$t_۱ + t_۲ + t_۳ + t_۴ + t_۵ + t_۶ + t_۷ + t_۸ = ۶۳$  مقدار  $t_۱ + t_۹$  کدام است؟

۱۹ (۱) ۱۰ (۲) ۲۳ (۳) ۱۸ (۴)

۴ با استفاده از قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_۱ + t_۲ + t_۳ + t_۴ + t_۵ + t_۶ + t_۷ + t_۸ = 63 \Rightarrow 7t_۵ = 63 \Rightarrow t_۵ = 9$$

بنابراین چون مجموع اندیس‌های  $t_۱$  و  $t_۹$  برابر ۱۰ است، داریم:

$$t_۱ + t_۹ = 2t_۵ = 2 \times 9 = 18$$

**درج واسطه حسابی**

اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  تعدادی عدد دیگر قرار دهیم (درج کنیم) به طوری که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند، کافیست اعداد موردنظر را با جاهای خالی به صورت  $\bigcirc$  نمایش داده، سپس  $a$  و  $b$  را جملات اول و آخر گرفته و مقدار قدرنسبت را بیابیم.

۲ اگر رابطه‌ای بین جملات دنباله داده شود، می‌توانیم با استفاده از جمله عمومی، هر کدام از جمله‌های رابطه داده شده را بازنویسی کرده و عبارت را ساده کنیم.

**مثال ۱** در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و هشتم از جمله

هفتم یک واحد بیشتر است. جمله چهارم دنباله را به دست آورید.

$$t_۳ + t_۸ = t_۷ + 1 \Rightarrow (t_۱ + 2d) + (t_۱ + 7d) = t_۱ + 6d + 1$$

$$\Rightarrow t_۱ + 3d = 1 \Rightarrow t_۴ = 1$$

**مثال ۲** مجموع سه جمله اول دنباله حسابی، چهار برابر مجموع سه

جمله بعدی است. جمله اول چند برابر قدرنسبت است؟

با توجه به صورت سؤال  $t_۱ + t_۲ + t_۳ = 4(t_۴ + t_۵ + t_۶)$  است، پس:

$$t_۱ + t_۱ + d + t_۱ + 2d = 4(t_۱ + 3d + t_۱ + 4d + t_۱ + 5d)$$

$$\Rightarrow 3t_۱ + 3d = 12t_۱ + 48d \Rightarrow 9t_۱ = -45d \Rightarrow t_۱ = -5d \Rightarrow \frac{t_۱}{d} = -5$$

**۳** در مواردی که جمله اول و قدرنسبت دنباله را داریم ولی  $n$  (تعداد جملات

یا شماره جمله) را نداریم، با نوشتن فرمول جمله عمومی و حل معادله یا نامعادله، مقدار  $n$  را می‌یابیم.

**مثال ۱** کدام جمله از دنباله  $۱۲, ۱۹, ۲۶, ۳۳, \dots$  برابر با ۸۹ است؟

$$t_n = 12 + (n-1)(7) \Rightarrow 12 + 7n - 7 = 89 \Rightarrow 7n = 84 \Rightarrow n = 12$$

**مثال ۲** دنباله  $۷, ۱۳, ۱۹, ۲۵, \dots$  چند جمله دورقمی دارد؟

$$t_n = 7 + (n-1)(6) \Rightarrow t_n = 6n + 1 \Rightarrow 10 \leq 6n + 1 \leq 99$$

$$\Rightarrow 9 \leq 6n \leq 98 \Rightarrow 2 \leq n \leq 16$$

پس تعداد جمله‌ها برابر است با:  $16 - 2 + 1 = 15$

**تست** در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول آن ۳۳ و مجموع

سه جمله بعدی آن ۶۰ می‌باشد. جمله هشتم آن کدام است؟

۲۶ (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴)

۲ روابط داده شده را باز می‌کنیم:

۱)  $t_۱ + t_۲ + t_۳ = t_۱ + (t_۱ + d) + (t_۱ + 2d) = 3t_۱ + 3d = 33$

$$\Rightarrow t_۱ + d = 11$$

۲)  $t_۴ + t_۵ + t_۶ = (t_۱ + 3d) + (t_۱ + 4d) + (t_۱ + 5d) = 60$

$$\Rightarrow t_۱ + 4d = 20$$

از روابط (۱) و (۲) مقادیر  $t_۱ = 8$  و  $d = 3$  به دست می‌آیند، بنابراین

جمله هشتم برابر است با:  $t_۸ = t_۱ + 7d = 8 + (7 \times 3) = 29$

**واسطه حسابی**

اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، مجموع جملات اول و سوم، دو برابر جمله وسط است:

$$2b = a + c$$

جمله وسط یعنی  $b$  را واسطه حسابی  $a, c$  می‌نامند.

**تست** در دو دنباله حسابی  $1, 4, 7, \dots$  و  $2, 2, 6, \dots$  بعضی از

جملات یکسان اند. هشتمین جمله مشترک آنها کدام است؟

۹۴ (۱)      ۱۰۸ (۲)      ۱۵۰ (۳)      ۱۰۰ (۴)

**۱** قدرنسبت هر یک از دنباله‌ها و جمله اول مشترک را مشخص می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} 1, 4, 7, 10, \dots \Rightarrow d_1 = 3 \\ -2, 2, 6, 10, \dots \Rightarrow d_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = [3, 4] = 12 \\ = 10 \text{ (اولین جمله مشترک)} \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله‌های مشترک به صورت زیر است:

$$t_n = 10 + (n-1) \times 12 = 12n - 2$$

در نتیجه جمله هشتم آن برابر است با:

$$t_8 = 12 \times 8 - 2 = 94$$

**مجموع جملات دنباله حسابی**

در یک دنباله حسابی، مجموع  $n$  جمله اول از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

**مثال** در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۲ و جمله پانزدهم برابر

۲۲ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله را به دست آورید.

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2 + 22) = \frac{15}{2} \times 24 = 15 \times 12 = 180$$

اگر در رابطه فوق، به جای  $a_n$  معادل آن یعنی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  جایگذاری کنیم، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

از این رابطه زمانی استفاده می‌کنیم که مقدار قدرنسبت ( $d$ ) را داشته باشیم.

**مثال** مجموع ۹ جمله اول از یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۴ که

جمله اول آن برابر ۳- است، را به دست آورید.

$$S_9 = \frac{9}{2}[2(-3) + (9-1)(4)] = \frac{9}{2}(-6 + 32) = \frac{9}{2} \times 26 = 117$$

**تست** مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله

پانزدهم به جمله ششم برابر ۶ است. جمله یازدهم دنباله کدام است؟

-۱۳/۶ (۱)      -۱۴/۸ (۲)      -۱۵/۶ (۳)      -۱۶/۸ (۴)

**۱**  $S_{10} = \frac{1}{2}[2a_1 + 9d] = -26 \Rightarrow 10a_1 + 45d = -26$  (۱)

$\frac{a_{15}}{a_6} = 6 \Rightarrow a_1 + 14d = 6(a_1 + 5d) \Rightarrow 5a_1 + 16d = 0$  (۲)

با حل معادلات به دست آمده از (۱) و (۲) مقادیر  $a_1$  و  $d$  را

به دست می‌آید. پس:  $a_{11} = a_1 + 10d = 6/4 + (-20) = -13/6$

دنباله  $1, 2, 3, \dots, (n-1), n$  یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۱ است. بنابراین مجموع جملات اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  با کمک رابطه  $S_n$

به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**مثال** بین دو عدد ۳ و ۱۹ سه واسطه حسابی درج می‌کنیم. بزرگ‌ترین

واسطه درج شده را به دست آورید.

$$3, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 19 \Rightarrow t_5 = 19 \Rightarrow t_1 + 4d = 19 \Rightarrow 3 + 4d = 19 \Rightarrow 4d = 16 \Rightarrow d = 4$$

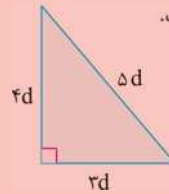
بنابراین جملات دنباله به صورت ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹ هستند که بزرگ‌ترین عدد درج شده برابر ۱۵ است.

**سه جمله متوالی**

در سؤالاتی که صحبت از مجموع سه جمله متوالی یک دنباله حسابی است اما شماره جمله‌ها مشخص نیست، می‌توانیم جمله‌ها را به صورت  $x-d, x, x+d$  در نظر بگیریم. [این روش برای مجموع پنج جمله متوالی، هفت جمله متوالی و ... نیز قابل استفاده است.]

**نکته** اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی با قدر

نسبت  $d$  دهند، طول اضلاع برابر  $3d, 4d, 5d$  است.



**تست** در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله متوالی برابر ۱۵

و مجموع مربعات آنها ۹۳ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

$\pm 1$  (۱)       $\pm 2$  (۲)       $\pm 3$  (۳)       $\pm 4$  (۴)

**۳** سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت  $a-d, a, a+d$  در نظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله برابر ۱۵ است، پس:

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

پس سه جمله مورد نظر به صورت  $5-d, 5, 5+d$  هستند. حال مجموع مربعات این سه جمله را برابر ۹۳ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\begin{aligned} (5-d)^2 + 5^2 + (5+d)^2 &= 93 \\ 25 - 10d + d^2 + 25 + 10d + d^2 &= 93 \\ \Rightarrow 75 + 2d^2 &= 93 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3 \end{aligned}$$

چون نمی‌دانیم دنباله مورد نظر صعودی است یا نزولی، پس هر دو جواب ۳ و ۳- برای قدرنسبت قابل قبول هستند.

**جملات مشترک دو دنباله حسابی**

جمله‌های مشترک دو دنباله حسابی، خود تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند به طوری که:

**۱** جمله اول آن برابر اولین جمله مشترک دو دنباله اولیه است.

**۲** قدرنسبت آن برابر  $m \cdot m$  قدرنسبت‌های دو دنباله اولیه است.

سپس مجموع آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S_{f_5} = \frac{f_5}{2}(a_1 + a_{f_5}) = \frac{f_5}{2}(10 + 98) = f_5 \times 54 = 2430$$

**تست** مجموع جملات دنباله اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و

کوچک‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۸۸۴ (۴)      ۸۶۷ (۳)      ۸۵۲ (۲)      ۸۱۶ (۱)

**۳** دنباله مورد نظر به صورت ۳, ۹, ۱۵, ..., ۹۹ است که یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۶ می‌باشد. برای مشخص کردن تعداد جملات دنباله داریم:

$$a_n = 3 + (n-1)(6) = 99 \Rightarrow n-1 = 16 \Rightarrow n = 17$$

بنابراین مجموع جملات این دنباله برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2}(3 + 99) = 17 \times 51 = 867$$

در سؤالاتی که، مجموع جملات شماره‌های زوج یا مجموع جملات شماره‌های فرد را می‌دهند و از ما اطلاعاتی راجع به دنباله می‌خواهند، می‌توانیم تعداد جملات دسته زوج و دسته فرد را مشخص می‌کنیم و با توجه به جمله اول و آخر هر دسته، از فرمول  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$  استفاده کنیم.

**مثال** در یک دنباله حسابی با ۹ جمله، مجموع جملات شماره‌های فرد

برابر ۵۰ است. مجموع جملات شماره‌های زوج را به دست آورید.

فرد:  $a_1 + a_3 + \dots + a_9 = \frac{5}{2}(a_1 + a_9) = \frac{5}{2}(2a_1 + 8d) = 50$   
 $\Rightarrow a_1 + 4d = 10$

زوج:  $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = \frac{4}{2}(a_2 + a_8)$   
 $= 2(2a_1 + 8d) = 4(a_1 + 4d) = 40$

**تست** در بیست جمله اول دنباله حسابی، مجموع جملات شماره‌های

فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول کدام است؟

۱) صفر (۲)      ۲) ۳      ۳) ۴

**۱** مجموع ۱۰ جمله ردیف زوج و ۱۰ جمله ردیف فرد را نوشته و خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{زوج: } a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 150 \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(a_2 + a_{20}) \\ = 5(a_1 + d + a_1 + 19d) = 5(2a_1 + 20d) = 150 \Rightarrow a_1 + 10d = 15 \\ \text{فرد: } a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135 \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{19}) \\ = 5(a_1 + a_1 + 18d) = 5(2a_1 + 18d) = 135 \Rightarrow a_1 + 9d = 13/5 \\ \Rightarrow d = 1/5, a_1 = 0 \end{array} \right.$$

**نکات پنهان در رابطه  $S_n$**

اگر در فرمول  $S_n$ ، عبارت  $\frac{n}{2}$  را در عبارت داخل پرانتز ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = na_1 + \frac{1}{2}(n^2 - n)d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

مثلاً برای محاسبه مجموع اعداد طبیعی از ۱۰ تا ۵۰ داریم:

$$\underbrace{1+2+3+\dots+9}_{S_9} + \underbrace{10+11+\dots+49+50}_x \Rightarrow x = S_{50} - S_9$$

$$= \frac{50(50+1)}{2} - \frac{9(9+1)}{2} = 25 \times 51 - 9 \times 5 = 1230$$

مجموع اعداد طبیعی زوج متوالی ۲, ۴, ۶, ..., ۲n دو برابر مجموع اعداد طبیعی ۱, ۲, ۳, ..., n است. در نتیجه:

$$2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$$

برای مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی، با شروع از یک داریم:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

**بررسی چند تیپ پر تکرار**

برای حل تست‌های مربوط به مجموع جملات دنباله‌های حسابی به نکات زیر توجه کنید:

در سؤالاتی که جمله اول و قدرنسبت دنباله را داریم ولی **[تعداد جملات یا شماره جمله]** را نداریم، با نوشتن فرمول مجموع n جمله اول و حل معادله یا نامعادله، مقدار (یا مقادیر) n را می‌یابیم.

**مثال** حداقل چند جمله از دنباله حسابی ۸, ۵, ۲, ... را جمع کنیم تا

حاصل منفی شود؟

$$S_n < 0 \Rightarrow \frac{n}{2}[2(8) + (n-1)(-3)] < 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(19 - 3n) < 0$$

n عددی طبیعی است. پس برای آن که  $\frac{n}{2}(19 - 3n)$  عددی منفی شود، باید  $19 - 3n < 0$  باشد، یعنی:

$$3n > 19 \Rightarrow n > \frac{19}{3} \Rightarrow \min(n) = 7$$

در بعضی از سؤالات، مجموع جملاتی از دنباله حسابی خواسته می‌شود که از جمله‌ای غیر از جمله اول شروع شده‌اند. در این سؤالات، بهترین راهکار، استفاده از فرمول  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$  است.

**مثال** در دنباله حسابی ۱, ۳, ۷, ... جمله اول برابر ۱- و قدرنسبت

برابر ۴ است. مجموع جملات پانزدهم تا بیست و دوم این دنباله را به دست آورید.

از آنجایی که تعداد جملات پانزدهم تا بیست و دوم برابر ۸ است. مجموع آن‌ها برابر است با:

$$S = \frac{8}{2}(a_{15} + a_{22}) = 4(a_1 + 14d + a_1 + 21d) = 4(2a_1 + 35d) \\ = 4(2 \times (-1) + 35 \times 4) = 552$$

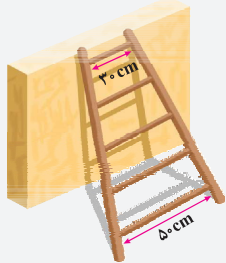
در بعضی از مسائل مربوط به دنباله‌های حسابی، دنباله‌ای در یک بازه مشخص مانند بازه اعداد دو رقمی یا اعداد کوچک‌تر از ۲۰۰ یا ... که دارای یک یا چند ویژگی نظیر «مضرب ۳ بودن» یا «فرد بودن» یا «مضرب ۵ بودن» ... مطرح می‌شود. برای محاسبه مجموع این دنباله‌ها باید با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی، تعداد جملات را به دست آوریم و سپس از رابطه  $S_n$  استفاده کنیم.

مثلاً در دنباله اعداد زوج دو رقمی که به صورت ۱۰, ۱۲, ..., ۹۸ است برای به دست آوردن مجموع آن‌ها ابتدا تعداد جملات را به دست می‌آوریم:

$$a_n = 98 \Rightarrow 10 + (n-1)(2) = 98 \Rightarrow n = 45$$



**تست** نردبام شکل مقابل دارای ۵ پله است، به طوری که طول پله‌های آن به‌طور یکنواخت از پایین به بالا کاهش می‌یابد و از ۵۰ سانتی‌متر به ۳۰ سانتی‌متر می‌رسد. مجموع طول پله‌های این نردبام چقدر است؟



- ۲۰۰ (۱)
- ۲۱۰ (۲)
- ۲۱۸ (۳)
- ۲۲۰/۵ (۴)

طول پله‌های این نردبام تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۵۰ cm و جمله پنجم ۳۰ cm داده‌اند [چون طول پله‌ها به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد]. بنابراین با توجه به رابطه  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$  مجموع طول این پنج پله برابر است با:

$$S_5 = \frac{5}{2}(50 + 30) = \frac{5}{2}(80) = 200 \text{ cm}$$

**دنباله هندسی**

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب عددی ثابت و غیر صفر در جمله قبل از خودش به دست آید، دنباله هندسی نامیده می‌شود. به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً آن را با  $q$  نمایش می‌دهیم:

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$$

$\times q \quad \times q \quad \times q$

مثلاً، دنباله زیر یک دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ است:

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $q$  به صورت  $t_n = t_1 q^{n-1}$  است.

$$t_1, t_1 q, t_1 q^2, t_1 q^3, \dots$$

$\times q \quad \times q \quad \times q$

**صعودی یا نزولی بودن دنباله هندسی**

۱ اگر  $q > 1$  باشد، با توجه به علامت جمله اول، دنباله صعودی یا نزولی است.

$$\text{نزولی} \rightarrow \dots, -18, -6, -2, \dots \text{ صعودی} \rightarrow \dots, 1, 2, 4, \dots$$

$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 2 \quad \times 2$

۲ اگر  $0 < q < 1$  باشد، با توجه به علامت جمله اول، دنباله صعودی یا نزولی است.

$$\text{صعودی} \rightarrow \dots, -2, -5, -10, \dots \text{ نزولی} \rightarrow \dots, 4, 2, 1, \dots$$

$\times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2}$

۳ اگر  $q < 0$  باشد، دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

$$\text{نوسانی} \rightarrow \dots, -54, 18, -6, 2, \dots$$

$\times (-3) \quad \times (-3) \quad \times (-3)$

بنابراین  $S_n$  را همواره می‌توانیم به صورت عبارتی درجه ۲ بر حسب  $n$  به صورت  $S_n = k_1 n^2 + k_2 n$  بنویسیم که در آن  $k_1 = \frac{d}{2}$  و  $k_2 = a_1 - \frac{d}{2}$  است. دقت کنید این عبارت درجه ۲ فاقد مقدار ثابت است.

مثلاً اگر مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = 3n^2 + 17n$  باشد، قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$\frac{d}{2} = 3 \Rightarrow d = 6$$

در سؤالاتی که رابطه مجموع جملات داده می‌شود، می‌توانیم هر یک از جملات دنباله را به صورت زیر به دست آوریم:

$$S_n = \overbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}^{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

مثلاً اگر در یک دنباله حسابی،  $S_n = \frac{4}{5}n^2 - \frac{3}{5}n$  باشد، در این دنباله داریم:

الف) برای محاسبه  $a_1$  کافیست در رابطه  $S_n$  به جای  $n$  عدد ۱ را قرار دهیم:

$$a_1 = S_1 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

ب) جمله پنجم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_5 = S_5 - S_4 = \frac{4(5)^2 - 3(5)}{5} - \frac{4(4)^2 - 3(4)}{5} = \frac{4(5)^2 - 3(5) - 4(4)^2 + 3(4)}{5} = \frac{33}{5} = 6.6$$

ج) مجموع جملات پنجم و ششم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_5 + a_6 = S_6 - S_4 = \frac{4(6)^2 - 3(6)}{5} - \frac{4(4)^2 - 3(4)}{5} = \frac{4(6)^2 - 3(6) - 4(4)^2 + 3(4)}{5} = \frac{74}{5} = 14.8$$

**تست** در یک دنباله حسابی رابطه  $1 + S_n = 2n + S_{n-1}$  برقرار است.

مجموع ۱۰ جمله اول کدام است؟

- ۱۰۰ (۴)
- ۹۰ (۳)
- ۸۰ (۲)
- ۷۵ (۱)

۴ رابطه داده شده را به صورت  $S_n - S_{n-1} = 2n - 1$  مرتب می‌کنیم. از طرفی می‌دانیم در هر دنباله‌ای رابطه  $S_n - S_{n-1} = a_n$  برقرار است. پس:

$$a_n = 2n - 1$$

حال برای پیدا کردن مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله حسابی داریم:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(1 + 19) = 100$$

**مسائل کاربردی دنباله حسابی**

بعضی از مسائل مربوط به مجموع جملات دنباله حسابی، در قالب مسائل کاربردی مطرح می‌شوند. در این نوع مسائل بهتر است چند جمله اول دنباله را بنویسیم تا دنباله مشخص شود. سپس مجموع جملات خواسته شده را به دست آوریم.

**مثال** در دنباله هندسی که جملات سوم و هفتم آن به ترتیب ۳ و ۴۸ باشند، قدر نسبت را به دست آورید.

$$\frac{t_7}{t_3} = q^{7-3} \Rightarrow \frac{48}{3} = q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$$

**تست** در دنباله هندسی  $\frac{1}{p}, x, 4, y, \dots$  جمله هفتم کدام است؟

$$256(4) \quad 357(3) \quad 358(2) \quad 257(1)$$

**۴** در دنباله هندسی داده شده، جمله اول برابر  $\frac{1}{p}$  و جمله سوم برابر ۴ است، پس:

$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{4}{\frac{1}{p}} = 4p \Rightarrow \frac{t_1 q^2}{t_1} = 4p \Rightarrow q^2 = 4p \Rightarrow q = \pm \sqrt{4p}$$

$$\Rightarrow t_7 = t_1 q^6 = \frac{1}{p} \times (\pm \sqrt{4p})^6 = \frac{1}{p} \times 2^6 \times p^3 = 2^6 \times p^2 = 256$$

**واسطه هندسی**

اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب جملات اول و سوم برابر مربع جمله وسط است، در این حالت جمله وسط یعنی  $b$  را واسطه هندسی  $a$  و  $c$  می‌نامند.

$$b^2 = a \times c$$

**تست** به ازای یک مقدار  $x$  اعداد  $x, 8-x, x, 12+x$  به ترتیب سه جمله

اول یک دنباله هندسی نزولی‌اند. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

$$\frac{1}{9}(4) \quad \frac{1}{3}(3) \quad \frac{2}{9}(2) \quad \frac{2}{3}(1)$$

**۲** اعداد  $x, 8-x, x, 12+x$  جملات متوالی دنباله هندسی‌اند، پس:

$$x^2 = \frac{(8-x)(12+x)}{96 + 8x - 12x - x^2} \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 48}{(x+8)(x-6)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}$$

چون دنباله هندسی نزولی است، پس  $x = 6$  قابل قبول است:

$$\text{جملات دنباله} \Rightarrow t_5 = t_1 q^4 = 18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{9}$$

اگر اعداد طبیعی  $m, n, p, q$  شماره جملاتی از دنباله هندسی باشند به طوری که  $m+n = p+q$  باشد، آنگاه طبق قانون اندیس‌ها رابطه زیر بین جملات این دنباله برقرار است:

$$t_m \times t_n = t_p \times t_q$$

مثلاً چون  $2+8 = 4+6$  است، پس در هر دنباله هندسی  $t_2 \times t_8 = t_4 \times t_6$  است.

**نکته** با توجه به قانون اندیس‌ها در دنباله هندسی، حاصل ضرب هر دو

جمله‌ای که از ابتدا و انتهای بخشی از دنباله فاصله یکسانی دارند، با هم برابر

است:

$$\circ \circ \circ \circ \dots \circ \circ \circ \circ \rightarrow \circ \times \circ = \circ \times \circ = \circ \times \circ = \circ \times \circ = \dots$$

**تذکر** اگر تمام جملات یک دنباله یکسان باشند، آن دنباله هم حسابی محسوب می‌شود و هم هندسی.

مثلاً دنباله  $2, 2, 2, \dots$  را هم می‌توان یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $d=0$  در نظر گرفت و هم دنباله هندسی با قدر نسبت  $q=1$ .

**تست** در دنباله هندسی  $t_n = 5 \times 2^n$  جمله ششم چند برابر جمله سوم است؟

$$11(4) \quad 10(3) \quad 9(2) \quad 8(1)$$

**۱** با توجه به جمله عمومی دنباله یعنی  $t_n = 5 \times 2^n$  داریم:

$$\frac{t_6}{t_3} = \frac{5 \times 2^6}{5 \times 2^3} = 2^3 = 8$$

اگر رابطه‌ای بین جملات دنباله داده شود و یک جمله از دنباله یا قدرنسبت دنباله یا ... را بخواهند با استفاده از جمله عمومی، هر کدام از جمله‌های رابطه داده شده را بازنویسی کرده و عبارت را ساده می‌کنیم.

**مثال** در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات سوم و هفتم، برابر با نصف جمله ششم است. جمله چهارم را به دست آورید.

$$t_3 \times t_7 = \frac{1}{2} t_6 \xrightarrow{t_n = t_1 q^{n-1}} (t_1 q^2) \times (t_1 q^6) = \frac{1}{2} (t_1 q^5)$$

$$\Rightarrow t_1 q^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_4 = \frac{1}{2}$$

**تست** در یک دنباله هندسی  $t_4 = 1$  و  $t_7 = 32$  است. جمله دهم کدام است؟

$$25(4) \quad 64(3) \quad 66(2) \quad 65(1)$$

$$\frac{t_7}{t_4} = 32 \Rightarrow \frac{t_1 q^6}{t_1 q^3} = 32 \Rightarrow q^3 = 32 \Rightarrow q = 2$$

**۳** حال چون  $t_4 = 1$  است، پس:

$$t_4 = t_1 q^3 = 1 \Rightarrow t_1 \times 2^3 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow t_{10} = t_1 q^9 = \frac{1}{8} \times 2^9 = 2^6 = 64$$

**قدرنسبت دنباله هندسی**

وقتی دو جمله از دنباله هندسی را داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی یعنی  $t_n = t_1 q^{n-1}$  دو جمله داده شده را بر حسب  $t_1$  و  $q$  بنویسیم و با حل دستگاه حاصل،  $t_1$  و  $q$  را به دست آوریم.

**مثال** در یک دنباله هندسی جملات پنجم و هشتم آن به ترتیب ۹ و ۷۲ هستند. قدرنسبت را به دست آورید.

$$\begin{cases} t_5 = 9 \\ t_8 = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 q^4 = 9 \\ t_1 q^7 = 72 \end{cases} \xrightarrow{\div} q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

**تذکر** اگر  $t_m$  و  $t_n$  دو جمله از دنباله‌ای هندسی باشند، آنگاه قدرنسبت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{t_m}{t_n} = q^{(m-n)}$$

**۲** حاصل ضرب سه جمله متوالی از دنباله هندسی برابر ۲۱۶ است. بنابراین آن‌ها را به صورت  $x, xq, xq^2$  در نظر می‌گیریم:

$$\left(\frac{x}{q}\right)(x)(xq) = 216 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$$

پس جملات دنباله  $6, 6q, 6q^2, \dots$  هستند. حال مجموع آن‌ها ۱۹ است، پس:

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 13$$

$$\xrightarrow{\times q} 6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ q = \frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر  $q = \frac{2}{3}$  باشد، جملات دنباله به صورت ۹، ۶، ۴ هستند که در هر دو حالت بزرگ‌ترین جمله برابر ۹ است.

**مسائل ترکیبی دنباله حسابی و هندسی**

گاهی اوقات می‌توانیم بعضی از جملات دنباله حسابی را گلچین کرده، آن‌ها را کنار هم قرار دهیم تا تشکیل دنباله هندسی دهند و بالعکس. این حالت، باید به کمک فرمول جمله عمومی دنباله اولیه، جملات را باز کنیم، آن‌ها را کنار هم نوشته، سپس شرط تشکیل دنباله جدید را بنویسیم.

**مثال** در یک دنباله حسابی، جملات سوم، پنجم و دهم تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. قدرنسبت دنباله هندسی را به دست آورید.

$$\underbrace{t_1 + 2d}_a, \underbrace{t_1 + 4d}_b, \underbrace{t_1 + 6d}_c \xrightarrow{b^2=ac} \underbrace{(t_1 + 4d)^2}_{t_1^2 + 8t_1d + 16d^2} = \underbrace{(t_1 + 2d)(t_1 + 6d)}_{t_1^2 + 11t_1d + 12d^2}$$

$$\Rightarrow 3t_1d + 2d^2 = 0 \Rightarrow d(3t_1 + 2d) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{2}{3}d \Rightarrow q = \frac{b}{a} = \frac{t_1 + 4d}{t_1 + 2d} = \frac{\frac{1}{3}d}{\frac{1}{3}d} = \frac{5}{2}$$

**نکته** اگر جملات  $t_m, t_n, t_k$  از یک دنباله حسابی ( $m > n > k$ ) جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی را رابطه مقابل به دست می‌آید.

$$q = \frac{m-n}{n-k}$$

مثلاً، اگر جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشد، قدرنسبت برابر  $q = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$  است.

**مجموع جملات دنباله هندسی**

در دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $q$ ، مجموع  $n$  جمله اول دنباله از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

**مثال** در دنباله هندسی  $1, 2, 4, 8, \dots$  مجموع ۱۰ جمله اول را به دست آورید.

در این دنباله، جمله اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر ۲ است، بنابراین:

$$S_{10} = (1) \left( \frac{1-2^{10}}{1-2} \right) = \frac{1-1024}{-1} = 1023$$

**تست** در یک دنباله هندسی با جمله عمومی  $a_n$  که  $a_3 = 16, a_7 = 5$  است. حاصل  $a_4 \times a_{16}$  کدام است؟

- ۸۵ (۱)      ۸۲ (۲)      ۸۰ (۳)      ۸۶ (۴)

**۳** چون مجموع اندیس‌های دو جمله  $a_3$  و  $a_7$  برابر مجموع اندیس‌های  $a_4$  و  $a_{16}$  است، از قانون اندیس‌ها استفاده می‌کنیم و داریم:

$$4 + 16 = 7 + 13 \Rightarrow a_4 \times a_{16} = a_7 \times a_{13} \Rightarrow a_4 \times a_{16} = 5 \times 16 = 80$$

**تذکر** اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  تعدادی عدد دیگر قرار دهیم به طوری که اعداد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند، کفایت اعداد موردنظر را با جاهای خالی به صورت  $\bigcirc$  نمایش داده، سپس  $a$  و  $b$  را جملات اول و آخر گرفته و مقدار قدرنسبت را بیابیم.

**مثال** بین دو عدد ۱ و ۳۲ چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم.

کوچک‌ترین واسطه درج شده چقدر است؟

$$1, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 32 \Rightarrow t_6 = 32 \Rightarrow t_1 q^5 = 32$$

$$\Rightarrow 1 \times q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین جملات دنباله به صورت ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ هستند که کوچک‌ترین عدد درج شده برابر ۲ است.

**تست** بین دو عدد ۴ و ۹۷۲ چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم.

مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این واسطه‌ها کدام است؟

- ۳۳۶ (۱)      ۳۳۸ (۲)      ۳۴۰ (۳)      ۳۴۲ (۴)

**۱** با قرار دادن چهار عدد بین ۴ و ۹۷۲، دنباله هندسی به صورت مقابل خواهد شد:  $4, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 972, \dots$  بنابراین در این دنباله، جمله اول برابر ۴ و جمله ششم برابر ۹۷۲ می‌شود. پس با استفاده از رابطه جمله عمومی دنباله هندسی قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$t_6 = t_1 q^5 \Rightarrow 972 = 4q^5 \Rightarrow 243 = q^5 \Rightarrow q = 3$$

حال با داشتن قدرنسبت و جمله اول، می‌توان جملات این دنباله را به دست آورد:

$$4, 12, 36, 108, 324, 972 \rightarrow 12 + 324 = 336$$

**نکته** در سؤالاتی که صحبت از حاصل ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی است اما شماره جمله‌ها مشخص نیست می‌توانیم جمله‌ها را به صورت  $x, xq, xq^2$  در نظر بگیریم.

**تست** در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی برابر با ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. بزرگ‌ترین عدد بین این سه جمله کدام است؟

- ۸ (۱)      ۹ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۱ (۴)

**تست** حداقل چند جمله اول دنباله هندسی ...، ۹، ۳، ۱ را جمع کنیم تا حاصل بیش‌تر از ۵۰۰ شود؟

۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۸ (۴)

۳ باید  $S_n$  را بزرگ‌تر از ۵۰۰ قرار دهیم:

$$S_n > 500 \Rightarrow (1) \left( \frac{1-3^n}{1-3} \right) > 500 \Rightarrow \frac{1-3^n}{-2} > 500$$

$$\Rightarrow 1-3^n < -1000 \Rightarrow 1001 < 3^n$$

با جایگذاری هر یک از گزینه‌ها در رابطه  $3^n > 1001$ ، حداقل  $n$  ای که در نامعادله صدق می‌کند عدد ۷ است:

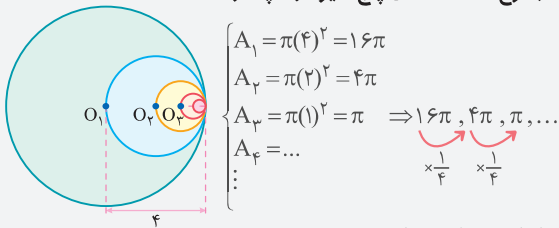
$$3^n > 1001 \Rightarrow 3^7 > 1001 \Rightarrow 2187 > 1001$$

**مسائل کاربردی دنباله هندسی**

برخی مسائل مربوط به مجموع جملات دنباله هندسی در قالب مسائل کاربردی مطرح می‌شوند. در این نوع مسائل بهتر است چند جمله اول دنباله را بنویسیم تا نوع دنباله مشخص شود.

**مثال** در شکل مقابل، در هر مرحله، شعاع دایره‌ها نصف شده است.

مجموع مساحت‌های پنج دایره اول چقدر است؟



$$S_5 = 16\pi \left( \frac{1 - (\frac{1}{4})^5}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 16\pi \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{64\pi}{3} \times \frac{1024 - 1}{1024} = \frac{34\pi}{16}$$

در بعضی از سؤالات مربوط به مجموع جملات دنباله هندسی، درصدی از یک متغیر کم یا زیاد می‌شود و یا مقیاس شکل‌های هندسی با نسبت‌های یکسانی تغییر می‌کنند. راهکار حل این سؤالات این است که جملات دنباله تغییرات را بنویسیم تا بتوانیم قدرنسبت را مشخص کنیم.

**تست** بالنی در دقیقه اول پرواز خود، ۲۴۰ متر از سطح زمین بالا می‌رود. در دقایق بعدی، به سرعت اوج‌گیری بالن افزوده شده، به طوری که در هر دقیقه مسافت طی شده توسط بالن ۲۰ درصد زیاد می‌شود. این بالن در دقیقه پنجم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

(۱)  $120 \cdot ((1/2)^5 - 1)$       (۲)  $240 \cdot ((1/2)^5 - 1)$   
 (۳)  $120 \cdot ((1/2)^4 - 1)$       (۴)  $240 \cdot ((1/2)^4 - 1)$

۱ در هر دقیقه مسافت طی شده ۲۰ درصد زیاد می‌شود. بنابراین مسافت طی شده بالن در بازه‌های یک دقیقه‌ای، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۱/۲ و جمله اول ۲۴۰ تشکیل می‌دهند. بنابراین خواهیم داشت:

$$S_5 = 240 \cdot \left( \frac{1 - (1/2)^5}{1 - 1/2} \right) = 240 \cdot \left( \frac{(1/2)^5 - 1}{-1/2} \right) = 120 \cdot ((1/2)^5 - 1)$$

**تست** در دنباله هندسی غیرنزولی ...،  $\frac{1}{4}, x, 2$  مجموع شش جمله اول کدام است؟

(۱)  $\frac{41}{32}$       (۲)  $\frac{21}{16}$       (۳)  $\frac{11}{8}$       (۴)  $\frac{23}{16}$

۲ ابتدا مقدار قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

اگر  $q = \frac{1}{2}$  باشد، دنباله نزولی خواهد بود که خلاف فرض سؤال است، بنابراین  $q = -\frac{1}{2}$  است. حالا به محاسبه  $S_6$  می‌پردازیم:

$$S_6 = \frac{2(1 - (-\frac{1}{2})^6)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2(1 - \frac{1}{64})}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{64} \right) \Rightarrow S_6 = \frac{21}{16}$$

**رابطه  $S_{2n}$  با  $S_n$  و  $S_{3n}$**

در بعضی از سؤالات دنباله هندسی، نسبت مجموع  $2n$  جمله اول یا  $3n$  جمله اول را به مجموع  $n$  جمله اول می‌خواهند. برای حل این سؤالات از روابط زیر کمک می‌گیریم:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = 1 + q^n + q^{2n}$$

**مثال** در دنباله هندسی ...، ۲۴، ۱۲، ۶، ۳ مجموع ۶ جمله اول و

مجموع ۹ جمله اول به ترتیب چند برابر مجموع ۳ جمله اول هستند؟

قدرنسبت دنباله هندسی داده شده برابر  $q = 2$  است. پس:

$$\frac{S_6}{S_3} = 1 + q^3 = 1 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$\frac{S_9}{S_3} = 1 + q^3 + q^6 = 1 + 2^3 + 2^6 = 1 + 8 + 64 = 73$$

**تست** در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، ده برابر

مجموع چهار جمله اول است. جمله  $a_4$  چند برابر جمله  $a_1$  است؟

(۱) ۹      (۲) ۸۱      (۳) ۱۰      (۴) ۱۰۰

۲ می‌دانیم  $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$  است. پس:

$$\frac{S_8}{S_4} = 10 \Rightarrow 1 + q^4 = 10 \Rightarrow q^4 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = \frac{a_1 q^4}{a_1} = (q^4)^2 = 9^2 = 81$$

**معادلات و نامعادلات در  $S_n$**

در سؤالاتی که جمله اول و قدرنسبت دنباله را داریم ولی  $n$  [تعداد جملات دنباله یا شماره جمله] در دست نباشد، با نوشتن فرمول مجموع  $n$  جمله اول و حل معادله یا نامعادله، مقادیر  $n$  را می‌یابیم.

**مثال** مجموع چند جمله از دنباله هندسی ...، ۸، ۴، ۲ برابر ۵۱۰ است؟

$$S_n = 510 \Rightarrow (2) \left( \frac{1-2^n}{1-2} \right) = 510 \Rightarrow (1-2^n)(-2) = 510$$

$$\Rightarrow 1-2^n = -255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow n = 8$$

دنباله حسابی

برای حل سؤالات دنباله حسابی، نوشتن جمله عمومی و قدر نسبت بسیار کمک‌کننده است.

داخل - ۱۴۰۱

- واجب ۱۳۹.** اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟  
 ۱)  $9/6$     ۲)  $2/4$     ۳)  $1/4$     ۴)  $11/6$
- واجب ۱۴۰.** چه تعداد از اعداد زیر یکی از جمله‌های دنباله حسابی  $4, 8, 12, 16, \dots$  هستند؟  
 الف) ۱۳۵    ب) ۱۴۵    پ) ۱۴۸  
 ۱) ۱    ۲) ۲    ۳) ۳    ۴) صفر
- واجب ۱۴۱.** جمله چندم از دنباله  $129, 126, 123, \dots$  برابر صفر است؟  
 ۱)  $43$ م    ۲)  $44$ م    ۳)  $45$ م    ۴)  $46$ م
- واجب ۱۴۲.** دنباله حسابی  $62, 60, 58, 56, \dots$  چند جمله دارد؟  
 ۱) ۱۶    ۲) ۱۷    ۳) ۱۸    ۴) ۱۹
- واجب ۱۴۳.** دنباله حسابی  $60, 67, 74, \dots$  چند جمله نامنفی دارد؟  
 ۱) ۹    ۲) ۱۰    ۳) ۱۱    ۴) ۱۲
- واجب ۱۴۴.** جمله هشتم دنباله حسابی  $9, 7, 5, 3, \dots$  کدام است؟  
 ۱) ۲۰    ۲) ۲۴    ۳) ۲۵    ۴) ۲۳
- واجب ۱۴۵.** در یک دنباله حسابی جملات هفتم و یازدهم به ترتیب ۱۵ و ۴۳ هستند. بزرگ‌ترین جمله دورقمی این دنباله، جمله چندم است؟  
 ۱) هفدهم    ۲) هجدهم    ۳) نوزدهم    ۴) بیستم
- واجب ۱۴۶.** در یک دنباله حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند و جمله نهم برابر با ۱۲ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟  
 ۱) ۳    ۲) -۲    ۳) ۸    ۴) -۸
- واجب ۱۴۷.** در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$  اگر  $t_5 = 3$  و  $t_8 - t_4 = 48$  باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟  
 ۱) ۲    ۲) ۳    ۳) ۴    ۴) ۶
- واجب ۱۴۸.** تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله حسابی ۵ و مجموع دو جمله دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟  
 ۱) ۳۵    ۲) ۳۶    ۳)  $37/5$     ۴)  $38/5$
- واجب ۱۴۹.** در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول برابر ۹ و مجموع چهار جمله بعدی آن ۲۶ می‌باشد. جمله دهم این دنباله کدام است؟  
 ۱) ۹    ۲) ۱۰    ۳)  $10/5$     ۴) ۱۱
- واجب ۱۵۰.** در دنباله حسابی  $1, a, b, 3, \dots$  حاصل  $\frac{t_2}{t_4 + t_7 + t_9}$  کدام است؟  
 ۱)  $4/3$     ۲)  $4/2$     ۳)  $4/3$     ۴)  $4/1$
- واجب ۱۵۱.** در یک دنباله حسابی تساوی  $63 = t_1 + 2t_{10}$  برقرار است. مقدار  $t_7$  کدام است؟  
 ۱) ۱۹    ۲) ۲۱    ۳) ۲۳    ۴) ۲۵
- واجب ۱۵۲.** مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی ۴ برابر مجموع سه جمله بعدی آن است. جمله ششم کدام است؟  
 ۱) -۱    ۲) ۱    ۳) صفر    ۴) ۲
- واجب ۱۵۳.** در یک دنباله حسابی تفاضل جمله چهارم از جمله دوازدهم برابر ۱۶ است. تفاضل جمله بیستم از جمله پنجم کدام است؟  
 ۱) ۳۸    ۲) ۱۰    ۳) ۲۶    ۴) ۷
- واجب ۱۵۴.** اگر از قدرنسبت یک دنباله حسابی  $\frac{3}{4}$  کم کنیم، جمله یازدهم آن چه تغییری می‌کند؟  
 ۱) دو برابر می‌شود.    ۲) ۱۵ واحد کم می‌شود.  
 ۳) ۳ واحد اضافه می‌شود.    ۴) تغییری نمی‌کند.

**واجب ۱۵۵.** در یک دنباله حسابی  $t_8 = 3$  است. مقدار  $\frac{t_{12}}{t_7}$  کدام است؟

۱  $\frac{17}{7}$       ۲  $\frac{16}{6}$       ۳  $\frac{17}{8}$       ۴  $\frac{16}{5}$

**تسلط ۱۵۶.** جملات متوالی دنباله حسابی  $t_n$  به صورت  $... + 2y + x + y + 7, 6, 3$  است. جمله  $t_x$  کدام است؟

۱ ۱۶      ۲ ۲۰      ۳ ۲۴      ۴ ۲۸

**تسلط ۱۵۷.** در یک دنباله حسابی اگر جمله اول برابر  $x+1$  و جمله دوم برابر  $2x-1$  و جمله پنجم برابر  $4x$  باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱ ۳      ۲ ۵      ۳ ۶      ۴ ۷

**تسلط ۱۵۸.** در دنباله حسابی  $... 2, 5, 8, ...$  با جمله عمومی  $t_n$ ، جملات  $t_7, t_8, t_{14}, ...$  نیز یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱ ۱۸      ۲ ۱۹      ۳ ۲۲      ۴ ۲۰

**واجب ۱۵۹.** چند عدد طبیعی سه رقمی با یکان ۶ وجود دارد؟

۱ ۹۵      ۲ ۱۰۵      ۳ ۱۰۰      ۴ ۹۰

**واجب ۱۶۰.** تعداد اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۶ کدام است؟

۱ ۱۵      ۲ ۲۵      ۳ ۲۶      ۴ ۱۹

**تسلط ۱۶۱.** اگر  $1-2x, 3x, x+2$  به ترتیب جملات نهم، دهم و یازدهم یک دنباله حسابی صعودی باشند، جمله بیست و دوم این دنباله کدام است؟

۱ ۱۱      ۲ ۱۵      ۳ ۱۷      ۴ ۲۰

**تسلط ۱۶۲.** در دنباله حسابی  $44, e, d, c, b, a, 2$  حاصل عبارت  $a-b+c-d+e$  کدام است؟

۱ ۱۱۵      ۲ ۹۲      ۳ ۶۹      ۴ ۲۳

**واجب ۱۶۳.** در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$  مقدار عبارت  $A = \frac{t_3 + t_5 + t_7 + t_9 + t_{11}}{t_7 + t_{13}}$  چقدر است؟

۱  $\frac{17}{7}$       ۲ ۲      ۳  $\frac{2}{5}$       ۴  $\frac{3}{11}$

**تسلط ۱۶۴.** در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$  اگر جمله دوم ۳ برابر جمله اول باشد، حاصل  $\frac{t_4 + t_5 + \dots + t_{18}}{t_{16} + t_{17} + t_{18}}$  کدام است؟

۱  $\frac{35}{11}$       ۲  $\frac{29}{11}$       ۳  $\frac{35}{9}$       ۴  $\frac{29}{9}$

**واجب ۱۶۵.** در یک دنباله حسابی با ۱۵ جمله، مجموع دو جمله اول برابر با ۷ و مجموع دو جمله آخر برابر با ۱۷ است. مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم کدام است؟

۱ ۲۰      ۲ ۱۸      ۳ ۲۲      ۴ ۱۹

**واجب ۱۶۶.** در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$  اگر  $t_8 + t_7 + t_6 + t_5 + t_4 + t_3 + t_2 + t_1 = 63$  باشد، مقدار  $t_1 + t_9$  کدام است؟

۱ ۱۹      ۲ ۱۰      ۳ ۲۳      ۴ ۱۸

**وقتی** (مجموع سه جمله متوالی یا پنج جمله متوالی) از یک دنباله حسابی روداریم، می‌دانید باید جمله هارو چوری در نظر بگیریم؟! تست زیر رو با پاسخ بررسی کنید.

**واجب ۱۶۷.** در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله متوالی برابر ۱۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۹۳ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱  $\pm 1$       ۲  $\pm 2$       ۳  $\pm 3$       ۴  $\pm 4$

**واجب ۱۶۸.** مجموع سه جمله متوالی یک دنباله حسابی صعودی برابر با ۲۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۳۱۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱ ۲      ۲ -۲      ۳ ۳      ۴ -۳

**درج** واسطه حسابی بین دو جمله، خیلی موضوع مهمیه. از تست‌های زیر غافل نشید!

**واجب ۱۶۹.** بین دو عدد ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم. اگر این دنباله حسابی با ۱۸ شروع شود، جمله سیزدهم آن کدام است؟

۱ ۱۳۲      ۲ ۱۴۰      ۳ ۱۴۶      ۴ ۱۵۰

**واجب ۱۷۰.** بین دو عدد ۱۵ و ۲۷ یک بار سه واسطه حسابی و بار دیگر پنج واسطه حسابی درج می‌کنیم. مجموع بزرگ‌ترین واسطه‌های درج شده کدام است؟

۱ ۴۹      ۲ ۵۱      ۳ ۶۰      ۴ ۶۲

دو سؤال بعدی مربوط به تشکیل دنباله حسابی در مثلث هستند.

**واجب ۱۷۱.** اگر زاویه‌های یک مثلث تشکیل دنباله حسابی بدهند، کدام یک از زاویه‌های زیر قطعاً یکی از زاویه‌های این مثلث است؟

- ۱  $3^\circ$       ۲  $45^\circ$       ۳  $6^\circ$       ۴  $9^\circ$

**واجب ۱۷۲.** طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی داده‌اند. محیط مثلث چند برابر طول وتر است؟

- ۱  $2/4$       ۲  $1/8$       ۳  $3/2$       ۴  $2/6$

جمله‌های مشترک دو دنباله حسابی، یک دنباله حسابی تشکیل میدن! تست‌های زیر مربوط به این موضوع است.

خارج - ۹۴

**واجب ۱۷۳.** در دو دنباله حسابی به صورت‌های  $2, 7, 12, \dots$  و  $8, 11, 14, \dots$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

- ۱ ۵۸      ۲ ۵۹      ۳ ۶۰      ۴ ۶۱

**تست ۱۷۴.** در دو دنباله حسابی  $2, 1, 4, 7, \dots$  و  $1, 6, 11, 16, \dots$  کوچک‌ترین جمله مشترک سه رقمی کدام است؟

- ۱ ۱۰۴      ۲ ۱۰۶      ۳ ۱۱۰      ۴ ۱۰۰

**تست ۱۷۵.** در دو دنباله حسابی  $1, 3, 5, \dots$  و  $2, 7, 12, 17, \dots$  دهمین جمله مشترک کدام است؟

- ۱ ۹۷      ۲ ۱۰۰      ۳ ۹۸      ۴ ۹۱

**تست ۱۷۶.** جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی باشد، جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدر نسبت دنباله حسابی است؟

نوبت اول - ۱۴۰۲

- ۱  $\frac{6}{5}$       ۲  $\frac{8}{5}$       ۳ ۳      ۴ ۴

**واجب ۱۷۷.** در ردیف اول یک استادیوم ورزشی ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۹ و در ردیف سوم ۲۳ صندلی وجود دارد. اگر تعداد صندلی‌ها به همین منوال افزایش یابد، در ردیف بیستم چند صندلی خواهیم داشت؟

- ۱ ۹۱      ۲ ۹۸      ۳ ۹۰      ۴ ۱۰۲

**۱۷۸ iQ.** در یک دنباله حسابی با جمله اول  $a$  و قدر نسبت  $d$ ، تساوی  $6a_7 = 5a_8 + 3a_9$  برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به  $d$ ، کدام می‌توان باشد؟

نوبت دوم - ۱۴۰۲

- ۱ ۱      ۲  $1/5$       ۳  $3/5$       ۴ ۴

**۱۷۹ iQ.** در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n$  رابطه  $a_n = a_{n-2} + 4$  برقرار است. اگر  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 27$  باشد، جمله ششم کدام است؟

- ۱ ۴      ۲  $4/5$       ۳ ۵      ۴  $5/5$

**۱۸۰ iQ.** در یک دنباله حسابی رابطه  $a_1 - a_2 = -1 - \sqrt{4a_1^2 - 4a_1 + 1}$  برقرار است. اگر  $a_6 = -18$  باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ -۵      ۴ -۷

### مجموع جملات دنباله‌های حسابی

**واجب ۱۸۱.** در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۱۲- و قدرنسبت برابر ۵ است. مجموع ۱۴ جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۱ ۲۱۲      ۲ ۲۵۴      ۳ ۲۸۷      ۴ ۲۹۴

**واجب ۱۸۲.** در یک دنباله حسابی، جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ما قبل خود به اندازه  $\frac{1}{4}$  کمتر است. مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟

- ۱  $22/5$       ۲ ۲۵      ۳  $27/5$       ۴ ۳۰

**واجب ۱۸۳.** مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله پانزدهم به جمله ششم برابر ۶ است. جمله یازدهم دنباله کدام است؟

- ۱  $-13/6$       ۲  $-14/8$       ۳  $-15/6$       ۴  $-16/8$

**واجب ۱۸۴.** در یک دنباله حسابی مجموع ۱۲ جمله اول آن ۱۳۸ و جمله ششم آن ۱۰ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۱ -۵      ۲ -۴      ۳ -۳      ۴ -۲



- ۱۸۵ واجب** در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله برابر صفر است؟  
 ۱۸ ۱      ۱۹ ۲      ۲۰ ۳      ۲۱ ۴
- ۱۸۶ واجب** در یک دنباله حسابی، اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه کنیم، به مجموع ده جمله اول چند واحد اضافه می‌شود؟  
 ۹ ۱      ۱۰ ۲      ۴۵ ۳      ۵۰ ۴
- ۱۸۷ تست** اگر از جمله اول یک دنباله حسابی دو واحد کم کنیم و قدرنسبت آن را یک واحد افزایش دهیم، مجموع ۸ جمله اول دنباله چه تغییری می‌کند؟  
 ۱ ۱۲ واحد افزایش می‌یابد.      ۲ ۷ واحد افزایش می‌یابد.  
 ۳ ۱۲ واحد کاهش می‌یابد.      ۴ ۷ واحد کاهش می‌یابد.
- ۱۸۸ واجب** مجموع ۲۰ عدد طبیعی متوالی با شروع از عدد ۱ چند برابر مجموع ۱۰ عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱ است؟  
 ۱/۵۶ ۱      ۲/۱ ۲      ۲/۲۳ ۳      ۲/۴ ۴
- ۱۸۹ واجب** در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟  
 ۳۲ ۱      ۳۶ ۲      ۳۴ ۳      ۳۸ ۴
- ۱۹۰ واجب** در یک دنباله حسابی، جمله  $n$  ام به صورت  $a_n = \frac{3}{4}n - 5$  است. مجموع جملات دهم تا بیستم چقدر است؟  
 ۱۸۷/۵ ۱      ۱۹۲/۵ ۲      ۲۷۶/۵ ۳      ۲۱۰/۵ ۴
- ۱۹۱ تست** در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن،  $\frac{1}{3}$  مجموع ۵ جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟  
 ۱ ۳/۲      ۲ ۵/۲      ۳ ۳      ۴ ۴
- ۱۹۲ واجب** حداقل چند جمله اول از دنباله حسابی  $... -72, -77, -82$  را جمع کنیم تا حاصل مثبت شود؟  
 ۳۳ ۱      ۳۴ ۲      ۳۵ ۳      ۳۶ ۴
- ۱۹۳ تست** در دنباله حسابی  $... 5, 8, 11$  حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟  
 ۱۶ ۱      ۱۷ ۲      ۱۸ ۳      ۱۹ ۴
- ۱۹۴ واجب** در بیست جمله اول دنباله حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول کدام است؟  
 ۱ صفر      ۲ ۱      ۳ ۲      ۴ ۳
- ۱۹۵ واجب** اگر  $1, x, y, \frac{5}{4}, \dots$  جملات ابتدایی یک دنباله حسابی متناهی با بیست جمله باشند، مجموع جملات شماره‌های زوج کدام است؟  
 ۵۰ ۱      ۵۸ ۲      ۶۰ ۳      ۶۴ ۴
- ۱۹۶ واجب** مجموع جملات دنباله اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰ کدام است؟  
 ۸۱۶ ۱      ۸۵۲ ۲      ۸۶۷ ۳      ۸۸۴ ۴
- ۱۹۷ واجب** مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  است. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟  
 ۹ ۱      ۲۹/۳ ۲      ۴۹/۳ ۳      ۱۸ ۴
- ۱۹۸ تست** مجموع  $n$  جمله اول در یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = n^2 - 5n$  است. جمله هفتم این دنباله کدام است؟  
 ۷ ۱      ۸ ۲      ۱۱ ۳      ۱۵ ۴
- ۱۹۹ واجب** در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n = an + 1$ ، مجموع  $n$  جمله اول آن به صورت  $S_n = 3n^2 + bn$  است. مجموع ۵ جمله اول کدام است؟  
 ۷۵ ۱      ۸۰ ۲      ۱۱۰ ۳      ۹۵ ۴
- ۲۰۰ واجب** یک دنباله حسابی دارای پانزده جمله است. اگر مجموع سه جمله وسط برابر ۹ باشد، مجموع پانزده جمله چقدر است؟  
 ۲۵ ۱      ۳۶ ۲      ۴۵ ۳      ۶۰ ۴
- ۲۰۱ واجب** در یک دنباله حسابی اگر  $S_{15} = S_{11}$  باشد، مجموع ۲۶ جمله اول آن کدام است؟  
 ۱۱ ۱      ۱۵ ۲      ۲۶ ۳      صفر ۴

**۲۰۲** در یک دنباله حسابی  $S_1 - S_7 = 5$  است. مجموع جملات ششم تا دوازدهم کدام است؟

- ۱)  $\frac{25}{3}$     ۲) ۱۰    ۳)  $\frac{35}{3}$     ۴) ۱۲

**۲۰۳** در یک دنباله حسابی رابطه  $1 + S_n = 2n + S_{n-1}$  برقرار است. مجموع ۱۰ جمله اول کدام است؟

- ۱) ۷۵    ۲) ۸۰    ۳) ۹۰    ۴) ۱۰۰

**۲۰۴** در دنباله‌های حسابی  $1, 6, 11, \dots$  و  $7, 11, 15, \dots$  مجموع جملات مشترک دو رقمی کدام است؟

- ۱) ۲۸۰    ۲) ۲۵۵    ۳) ۲۴۶    ۴) ۲۳۲

**۲۰۵** در یک دنباله حسابی متناهی، مجموع سه جمله اول برابر ۱۰ و مجموع سه جمله آخر برابر ۵۶ است. مجموع جملات این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) ۹۸    ۲) ۱۳۲    ۳) ۱۵۰    ۴) ۷۵

**۲۰۶** بین دو عدد ۲ و  $7 + 9\sqrt{2}$  شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟

- ۱)  $3(2 + \sqrt{2})$     ۲)  $48\sqrt{2}$     ۳)  $3(1 + \sqrt{2})$     ۴)  $36(1 + \sqrt{2})$

**۲۰۷** بین دو عدد ۸ و ۹۵، بیست و هشت عدد را طوری قرار می‌دهیم که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند. مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حاصل کدام است؟

- ۱) ۸۱۰    ۲) ۷۸۰    ۳) ۷۶۰    ۴) ۷۳۰

**۲۰۸** با توجه به دنباله حسابی، مجموع  $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{15}$     ۲)  $\frac{1}{18}$     ۳)  $\frac{1}{24}$     ۴)  $\frac{1}{25}$

خارج - ۹۸

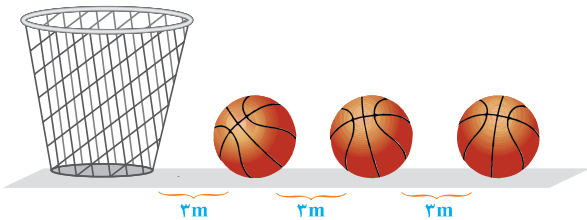
**۲۰۹** در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله‌ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. دونه باید از کنار سبد شروع کرده، توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد. سپس به طرف توپ بعدی برود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونه در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد. مجموعاً چند توپ در سبد انداخته است؟

۱) ۱۶

۲) ۱۷

۳) ۱۸

۴) ۱۹



### دنباله هندسی

برای حل تست‌های دنباله هندسی هم سعی کنید در اولین قدم قدر نسبت و جمله اول رو پیدا کنید. توی حل این سؤال خیلی وقت‌ها لازمه جمله‌ها یا عبارت‌ها رو بر هم دیگه تقسیم کنیم.

**۲۱۰** جمله چندم دنباله هندسی  $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$  برابر ۵۱۲ است؟

- ۱) دوازدهم    ۲) سیزدهم    ۳) چهاردهم    ۴) پانزدهم

**۲۱۱** در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله هفتم برابر ۵ و جمله دهم برابر ۱۳۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۱) ۱    ۲) ۲    ۳) ۳    ۴) ۴

**۲۱۲** در یک دنباله هندسی به صورت  $\dots, 45, 135, \dots$  جمله ششم کدام است؟

- ۱) ۴۰۲    ۲) ۴۰۵    ۳) ۴۶۵    ۴) ۴۸۰

خارج - ۱۴۰

**۲۱۳** در دنباله هندسی  $\frac{1}{3}, a, b, c, \frac{1}{3}, d, e, \dots$  مقدار  $e$  کدام است؟ ( $d > 0$ )

- ۱)  $\frac{1}{6}$     ۲)  $\frac{1}{12}$     ۳)  $\frac{1}{3\sqrt{2}}$     ۴)  $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

**۲۱۴** در یک دنباله هندسی، جمله هشتم، ۸۱ برابر جمله چهارم است. اگر جمله سوم برابر ۱۸- باشد، جمله پنجم چقدر از جمله هفتم بیشتر است؟

- ۱) ۸۹۱    ۲) ۹۷۲    ۳) ۱۰۵۶    ۴) ۱۲۹۶

داخل - ۱۴۰

**واجب ۲۱۵.** در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، اگر مجموع جملات اول و دوم نصف مجموع جملات سوم و چهارم آن باشد، قدرنسبت کدام است؟

۱  $\sqrt{2}$       ۲  $\sqrt{3}$       ۳ ۲      ۴  $\sqrt{5}$

**تسلط ۲۱۶.** در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول برابر ۱۵۲ و مجموع سه جمله دوم برابر ۵۱۳ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

کنکور مجدد - ۱۴۰۱

۱ ۳۲      ۲ ۲۴      ۳ ۱۸      ۴ ۱۶

**واجب ۲۱۷.** در یک دنباله هندسی  $t_1 = 2$  و  $t_8 = t_5^2$  است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱ ۲      ۲  $\sqrt{2}$       ۳  $\frac{1}{2}$       ۴  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**تسلط ۲۱۸.** در یک دنباله هندسی  $t_5 \times t_6 = t_{11}$  است. تفاضل قدرنسبت از جمله اول کدام است؟

۱ صفر      ۲ ۱      ۳ -۱      ۴ ۲

**واجب ۲۱۹.** در یک دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{1}{4}$  و قدرنسبت ۳، اگر قدرنسبت را یک واحد افزایش دهیم، جمله سوم چند برابر می‌شود؟

۱  $\frac{16}{9}$       ۲  $\frac{16}{10}$       ۳  $\frac{15}{9}$       ۴  $\frac{15}{10}$

**واجب ۲۲۰.** در یک دنباله هندسی اگر حاصل ضرب ۲۰ جمله اول برابر ۱۰۲۴ باشد، حاصل ضرب جمله دهم و یازدهم کدام است؟

۱ ۲      ۲ ۸      ۳ ۶      ۴ ۱۴

**واجب ۲۲۱.** در یک دنباله هندسی هر جمله ۲ برابر جمله قبلی آن است. اگر جمله پنجم این دنباله برابر ۱ باشد، حاصل ضرب پانزده جمله اول آن کدام است؟

۱ ۳۰      ۲ ۲۴۵      ۳ ۲۶۰      ۴ ۲۱۰۵

**واجب ۲۲۲.** در یک دنباله هندسی با جمله عمومی  $a_n$  که  $a_6 = 5 \times 3^6$  و قدرنسبت برابر با ۳ است. جمله اول دنباله کدام است؟

۱ ۱۶      ۲ ۱۵      ۳ ۱۷      ۴ ۱۸

**واجب ۲۲۳.** در یک دنباله هندسی با جمله اول  $t_1 = \frac{1}{9}$ ، هر جمله سه برابر جمله قبلی خودش است. جمله عمومی این دنباله کدام است؟

۱  $3n - 3$       ۲  $3n - 2$       ۳  $3n - 1$       ۴  $3n + 1$

 در حل سؤالی بعدی استفاده از واسطه هندسی کمک‌کننده است. توی این سؤال با معودی یا نزولی بودن دنباله دقت کنید.

**واجب ۲۲۴.** به ازای یک مقدار  $x$  اعداد  $x$ ،  $8-x$ ،  $x$ ،  $x+12$  به ترتیب سه جمله اول یک دنباله هندسی نزولی اند. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

۱  $\frac{2}{3}$       ۲  $\frac{2}{9}$       ۳  $\frac{1}{3}$       ۴  $\frac{1}{9}$

**تسلط ۲۲۵.** اگر اعداد  $2a+2$ ،  $4a+1$ ،  $8a-2$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مجموع این سه جمله کدام است؟

۱  $18/5$       ۲  $19/5$       ۳ ۱۸      ۴ ۱۹

**واجب ۲۲۶.** اعداد  $2^a$ ،  $4\sqrt{2}$  و  $2^b$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی اند. واسطه حسابی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

۱  $2/5$       ۲ ۲      ۳  $1/5$       ۴  $\sqrt{2}$

**واجب ۲۲۷.** اگر  $a$ ،  $3$ ،  $b$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی و  $a$ ،  $2$ ،  $b$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، حاصل  $a^3 + b^3$  کدام است؟

۱ ۱۹۶      ۲ ۱۴۴      ۳ ۲۰۴      ۴ ۲۱۶

**تسلط ۲۲۸.** اعداد  $a$ ،  $b$ ،  $3$  تشکیل دنباله حسابی و اعداد  $a+1$ ،  $b-1$ ،  $3$  تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. مقدار  $b$  کدام است؟

۱ ۶      ۲ ۷      ۳ ۸      ۴ ۹

**تسلط ۲۲۹.** به اعداد ۱، ۷، ۲۵ مقدار ثابتی اضافه می‌کنیم تا اعداد حاصل یک دنباله هندسی نزولی تشکیل دهند. قدرنسبت دنباله هندسی به وجود

آمده کدام است؟

۱ ۱      ۲  $\frac{1}{2}$       ۳  $\frac{1}{3}$       ۴  $\frac{1}{4}$

 برای حل سؤال‌های زیر، استفاده از قانون اندیس‌ها خیلی کمک‌کننده است.

**واجب ۲۳۰.** در دنباله هندسی  $a, b, \sqrt{5}, c, d, \dots$  حاصل  $abcd$  کدام است؟

۱ ۲۱      ۲ ۳۱      ۳ ۳۵      ۴ ۲۵

**iq ۲۳۱.** در یک دنباله هندسی اگر  $t_5 = 2^{x+y}$ ،  $t_8 = \frac{1}{2^x}$ ،  $t_{11} = 16 \times 4^{x-y}$  باشد، چه رابطه‌ای بین  $x$  و  $y$  برقرار است؟

۱  $x+2y=6$       ۲  $3x+y=6$       ۳  $2x-y=5$       ۴  $x-2y=5$

۲۳۲. IQ در یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $\sqrt[3]{2}$  حاصل  $\frac{t_1 \times t_{13} + t_5 \times t_9}{t_7 \times t_8}$  کدام است؟

- ۴ ۱      ۶ ۲      ۸ ۳      ۱۰ ۴

۲۳۳. واجب در یک دنباله هندسی با جمله عمومی  $a_n$  که  $a_7 = 5$ ,  $a_{13} = 16$  است. حاصل  $a_4 \times a_{16}$  کدام است؟

- ۸۵ ۱      ۸۲ ۲      ۸۰ ۳      ۸۶ ۴

۲۳۴. IQ دنباله‌های هندسی با قدرنسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعه  $\{1, 2, \dots, 100\}$  باشد؟

ریاضی داخل - ۱۴۰۱

- ۳ ۱      ۴ ۲      ۶ ۳      ۷ ۴

۲۳۵. IQ اگر  $\log_3 8$ ,  $\log_{\sqrt[3]{5}} a$ ,  $\log_5 27$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی صعودی باشند، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱/۵ ۱      ۳ ۲      ۴۱/۵ ۳      ۵ ۴

۲۳۶. واجب بین دو عدد ۴ و ۹۷۲ چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم. مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این واسطه‌ها کدام است؟

- ۳۳۶ ۱      ۳۳۸ ۲      ۳۴۰ ۳      ۳۴۲ ۴

۲۳۷. تسلسل بین دو عدد ۳ و ۴۸ یک بار سه واسطه هندسی درج می‌کنیم و عدد وسط را  $A$  می‌نامیم. بار دیگر چهار واسطه حسابی درج می‌کنیم و بزرگ‌ترین آن واسطه‌ها را  $B$  می‌نامیم. مقدار  $A \times B$  کدام است؟

- ۴۵۲ ۱      ۴۶۸ ۲      ۴۷۲ ۳      ۴۸۰ ۴

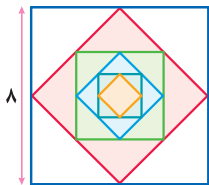
۲۳۸. واجب در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی برابر با ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. بزرگ‌ترین عدد بین این سه جمله کدام است؟

- ۸ ۱      ۹ ۲      ۱۰ ۳      ۱۱ ۴

۲۳۹. واجب دمای آب موجود در یک مخزن آب در هر ساعت ۱۰ درصد گرم‌تر می‌شود. اگر دمای فعلی آب ۵۰ درجه باشد، پس از ۸ ساعت دمای آن تقریباً چند درجه خواهد بود؟

- ۸۴ ۱      ۷۲/۵ ۲      ۹۷/۵ ۳      ۱۰۷ ۴

۲۴۰. واجب وسط‌های اضلاع مربعی به ضلع ۸ سانتی‌متر را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی به وجود آید. اگر این کار را ادامه دهیم، محیط پنجمین مربع کدام است؟



- ۴ ۱       $4\sqrt{2}$  ۲      ۸ ۳       $8\sqrt{2}$  ۴

۲۴۱. واجب یک دانش‌آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم‌شده قبلی است. محیط این مربع‌ها، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

خارج - ۱۴۰۱

- ۳ ۱      ۶ ۲      ۹ ۳      ۱۲ ۴

۲۴۲. تسلسل در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، اگر جمله سوم،  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  و واحد بیشتر از جمله پنجم باشد و مجموع جملات سوم و پنجم برابر  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$  باشد، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ۱      ۲ ۲       $\sqrt{3}$  ۳       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ۴

۲۴۳. تسلسل در یک دنباله هندسی، اگر تفاضل جمله اول از جمله چهارم ۵ برابر مجموع سه جمله اول آن باشد، جمله هفتم چند برابر جمله پنجم است؟

- ۱۵ ۱      ۲۲ ۲      ۳۰ ۳      ۳۶ ۴

از اینجا به بعد سؤالات ترکیبی دنباله حسابی و هندسی رو براتون قرار دادیم.

۲۴۴. واجب در دنباله‌ای که هم هندسی است و هم حسابی، حاصل  $\frac{3t_5 + 5t_7}{t_8}$  کدام است؟

- ۲ ۱      ۳ ۲      ۵ ۳      ۸ ۴

۲۴۵. واجب اگر  $x$  و  $y$  اعدادی صحیح بوده به طوری که  $2x - 2y + 2$  و  $3x + 2y - 4$  هم جملات متوالی دنباله حسابی و هم جملات متوالی دنباله هندسی باشند، مقدار  $x^y$  کدام است؟

- ۲۱ ۱      ۲۲ ۲      ۲۳ ۳      ۲۴ ۴

۲۴۶. اگر جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت  $d$  خواهید داشت. مقدار  $r+d$  کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱۲ ۳  $\sqrt{2}$  ۴  $\frac{1}{2}$  ریاضی نوبت دوم - ۱۴۰۲

۲۴۷. جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- ۱  $\frac{4}{3}$  ۲  $\frac{3}{2}$  ۳ ۲ ۴  $\frac{9}{4}$  خارج - ۹۹

۲۴۸. اگر جملات دوم، دو برابر جمله چهارم و چهار برابر جمله هفتم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- ۱  $\frac{4}{3}$  ۲  $\frac{3}{2}$  ۳ ۳ ۴ ۲

۲۴۹. در یک دنباله هندسی، جمله دوم، دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌هاست؟

- ۱  $2+\sqrt{3}$  ۲  $5+2\sqrt{3}$  ۳  $5+4\sqrt{3}$  ۴  $7+4\sqrt{3}$

۲۵۰. در یک دنباله هندسی غیرثابت جمله پنجم واسطه حسابی بین جملات سوم و هفتم است. اگر  $a_{10} = 5$  باشد، حاصل  $a_1 + a_2 + a_3$  کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۵ ۳ ۱۵ ۴ -۴۵

۲۵۱. در یک دنباله حسابی جمله چهارم، ۴ برابر جمله اول یک دنباله هندسی و جمله نهم دنباله حسابی به ترتیب ۳ برابر جمله دوم و برابر جمله سوم آن دنباله هندسی است. اگر جمله چهارم دنباله هندسی ۱۳۵ باشد، مجموع قدر نسبت دنباله حسابی و هندسی کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴ ۸

### مجموع جملات دنباله‌های هندسی

۲۵۲. در دنباله هندسی غیرنزولی  $1, x, \frac{1}{x}, \dots$  مجموع شش جمله اول کدام است؟

- ۱  $\frac{41}{32}$  ۲  $\frac{21}{16}$  ۳  $\frac{11}{8}$  ۴  $\frac{23}{16}$

۲۵۳. در دنباله هندسی  $1, 2, 4, \dots$  مجموع چهارده جمله اول چند برابر مجموع هفت جمله اول است؟

- ۱ ۶۵ ۲ ۶۳ ۳ ۱۲۷ ۴ ۱۲۹

۲۵۴. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- ۱  $\frac{81}{16}$  ۲ ۸ ۳ ۹ ۴ ۱۶

۲۵۵. در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، ده برابر مجموع چهار جمله اول است. جمله  $a_9$  چند برابر جمله  $a_1$  است؟

- ۱ ۹ ۲ ۸۱ ۳ ۱۰ ۴ ۱۰۰

۲۵۶. مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله هندسی به صورت  $S_n = \frac{5(3^n - 2)}{4}$  است. در این دنباله جمله پنجم کدام است؟

- ۱ ۲۵۵ ۲ ۴۰۵ ۳ ۳۲۰ ۴ ۲۸۰

۲۵۷. به ازای یک مقدار  $x$ ، اعداد  $x^2 - 2, 2x, x^2 + 4$  به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع ۷ جمله این دنباله کدام است؟

داخل - ۹۳

- ۱  $\frac{117}{16}$  ۲  $\frac{125}{16}$  ۳  $\frac{63}{4}$  ۴  $\frac{127}{8}$

۲۵۸. بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

خارج - ۹۱

- ۱ ۴۸۲ ۲ ۴۸۴ ۳ ۴۸۶ ۴ ۴۸۸

۲۵۹. در یک دنباله هندسی با جمله عمومی  $t_n$  اگر  $t_5 - t_1 = 20$  و  $S_4 = 10$  باشد، قدر نسبت این دنباله چقدر است؟

- ۱ ۲ ۲  $1+\sqrt{2}$  ۳ ۳ ۴  $2\sqrt{2}$

۲۶۰. حداقل چند جمله اول دنباله هندسی  $1, 3, 9, \dots$  را جمع کنیم تا حاصل بیش‌تر از ۵۰۰ شود؟

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸

**۲۶۱. واجب** مقدار  $\frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{3^{16}} \times \dots \times \frac{1}{3^{256}}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{255}{3^{256}}$       ۲  $\frac{63}{3^{256}}$       ۳  $\frac{122}{3^{512}}$       ۴  $\frac{122}{3^{256}}$

**۲۶۲. واجب** در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جمله اول کدام است؟

- ۱  $10/8$       ۲  $11/2$       ۳  $12/6$       ۴  $13/4$

**۲۶۳. IQ** تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات ۳ برابر جملات با شماره فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟ **داخل - ۹۴**

- ۱  $\frac{1}{3}$       ۲  $\frac{1}{2}$       ۳  $2$       ۴  $3$

**۲۶۴. IQ** در یک دنباله هندسی با تعداد جملات زوج، مجموع تمام جملات ۵ برابر مجموع جملات، شماره فرد است. جمله پنجم چند برابر جمله

سوم است؟

- ۱  $4$       ۲  $8$       ۳  $10$       ۴  $16$

**۲۶۵. واجب** حاصل  $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^9)$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدام است؟

- ۱  $32(1 + \sqrt{2})$       ۲  $16(\sqrt{2} - 1)$       ۳  $31(1 + \sqrt{2})$       ۴  $15(\sqrt{2} - 1)$

**۲۶۶. واجب** از معادله  $4x + 2x + x + \dots + \frac{x}{8} = 126$  مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱  $4$       ۲  $8$       ۳  $16$       ۴  $20$

**۲۶۷. واجب** حاصل عبارت  $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  کدام است؟ **داخل - ۹۳**

- ۱  $2$       ۲  $3$       ۳  $4$       ۴  $5$

**۲۶۸. IQ** اگر  $a, b, c$  جملات متوالی یک دنباله هندسی با جملات مثبت باشند به طوری که  $a + b + c = 12$ ،  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$  باشد، آنگاه  $b$  کدام

است؟

- ۱  $3$       ۲  $5$       ۳  $6$       ۴  $8$

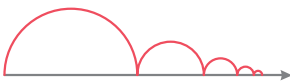
**۲۶۹. واجب** در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول ۴ واحد بیشتر از مجموع سه جمله اول و مجموع نه جمله اول ۳۲ واحد بیشتر از مجموع

شش جمله اول است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۱  $1 + \sqrt{2}$       ۲  $2$       ۳  $2\sqrt{2}$       ۴  $2 + \sqrt{2}$

**۲۷۰. واجب** تویی بر روی نیم دایره‌های بالای یک محور با شعاع اولیه ۳۲ واحد حرکت می‌کند. هر بار که به محور برخورد می‌کند، ۵۰ درصد از اندازه شعاع آن

کاسته می‌شود. اندازه شعاع این نیم دایره‌های متوالی، دنباله‌ای از اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند. مجموع ۵ جمله اول این دنباله کدام است؟



- ۱  $60$       ۲  $61$

- ۳  $62$       ۴  $63$

NOTE

## نامساوی مثلث، معادلات قدرمطلق و روش هندسی حل معادلات

### نامساوی مثلث

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، طبق نامساوی مثلث همواره  $|a| + |b| \geq |a + b|$  بزرگ‌تر یا مساوی  $|a + b|$  است:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

در نامساوی مثلث، اگر  $a$  و  $b$  هم علامت نباشد، قطعاً  $|a| + |b|$  بزرگ‌تر از  $|a + b|$  است. اما اگر  $a$  و  $b$  هم علامت باشند،  $|a + b|$  برابر  $|a| + |b|$  است:

### نامساوی مثلث

$ab \geq 0$ (۲)	$ab < 0$ (۱)
$ a + b  =  a  +  b $	$ a + b  <  a  +  b $

### مثال

نامساوی  $|2x - 3| < |x - 1| + |x - 2|$  به ازای چه مقادیری از  $x$  برقرار است؟

با توجه به این‌که  $(x - 2) + (x - 1) = (2x - 3)$  است، داریم:

$$|2x - 3| < |x - 1| + |x - 2|$$

$$\frac{a \text{ و } b \text{ غیر هم علامت اند}}{ab < 0} \rightarrow (x - 1)(x - 2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

### تست

معادله  $|2x + 5| = |x - 1| + |3x + 4|$  چند جواب صحیح دارد؟

$$1(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4)$$

از آن جایی که  $|-a| = |a|$ ، می‌توانیم به جای  $|x - 1|$  بنویسیم  $|1 - x|$  تا بتوانیم از نامساوی مثلث در حالت تساوی استفاده کنیم:

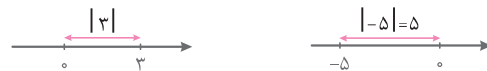
$$|3x + 4| + |1 - x| = |2x + 5| \xrightarrow{a, b \text{ هم علامت اند}} \frac{ab \geq 0}{(3x + 4)(1 - x) \geq 0}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq 1$$

بنابراین اعداد  $\pm 1$ ، جواب‌های صحیح این معادله هستند.

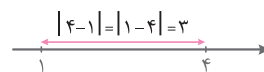
### قدرمطلق به عنوان فاصله

می‌دانیم از نظر هندسی، مقدار  $|x|$  نشان دهنده فاصله  $x$  از نقطه صفر بر روی محور اعداد حقیقی است.

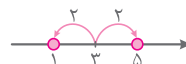


مقدار  $|a - b|$  نشان دهنده فاصله نقطه  $a$  از نقطه  $b$  بر روی محور اعداد حقیقی است.

فاصله نقطه ۱ از نقطه ۴ بر روی محور اعداد حقیقی برابر ۳ است:



مثلاً جواب‌های معادله  $|x - 3| = 2$ ، نقاطی بر روی محور اعداد حقیقی هستند که فاصله آن‌ها از ۳ برابر ۲ باشد:



نامساوی‌های مهم در قدرمطلق به صورت زیر است:

۱ نامساوی  $|x| < a$  نشان دهنده نقاطی بر روی محور اعداد حقیقی است که فاصله آن‌ها از صفر کمتر از عدد حقیقی و مثبت  $a$  است. در واقع، این نامساوی نشان دهنده  $x$ ‌هایی است که بین  $a$  و  $-a$  قرار دارند.

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Rightarrow \text{Diagram showing a number line with open circles at -a and a, and a shaded region between them.$$

۲ نامساوی  $|x| > a$  نشان دهنده نقاطی بر روی محور اعداد حقیقی است که فاصله آن‌ها از صفر بیشتر از عدد حقیقی  $a$  است.

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a \Rightarrow \text{Diagram showing a number line with open circles at -a and a, and shaded regions to the left of -a and to the right of a.$$

واضح است اگر  $a$  منفی باشد، نامعادله  $|x| > a$  همواره برقرار است؛ ولی نامعادله  $|x| < a$  جواب ندارد.

نمایش نامساوی‌های  $|x| \leq a$  و  $|x| \geq a$  به صورت زیر است:

$ x  \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$	$ x  \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ یا } x \leq -a$

تست کدام نامعادله نشان دهنده نقاطی از محور اعداد حقیقی است

که در بازه  $[-3, 5]$  قرار دارند؟

$$1) |x - 4| \leq 1 \quad 2) |x - 1| \leq 4$$

$$3) |x - 4| \geq 1 \quad 4) |x - 1| \geq 4$$

۱ وسط بازه  $-3 \leq x \leq 5$  برابر  $\frac{(-3) + (5)}{2} = 1$  است. حال برای این‌که بتوانیم از ویژگی‌های قدرمطلق استفاده کنیم و این بازه را به صورت قدرمطلق نمایش دهیم، از طرفین آن ۱ واحد کم می‌کنیم تا بازه متقارن شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$-3 \leq x \leq 5 \xrightarrow{-1} -4 \leq x - 1 \leq 4 \Rightarrow |x - 1| \leq 4$$

### انواع معادلات قدرمطلق

جواب‌های معادله  $|f(x)| = g(x)$  با شرط  $g(x) \geq 0$  از حل دو معادله زیر

$$f(x) = \pm g(x)$$

به دست می‌آید:

$$|2x^2 - 3| = x^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{همواره } x^2 + 1 > 0} \begin{cases} 2x^2 - 3 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 2x^2 - 3 = -(x^2 + 1) \Rightarrow 3x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = 2x + 1$$

$$\Rightarrow |x - 1| = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \\ 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow x = -2 \\ x - 1 = -(2x + 1) \Rightarrow x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

از میان جواب‌های به دست آمده فقط  $x = 0$  در شرط  $2x + 1 \geq 0$  صدق می‌کند.



**تست** مجموع جواب‌های معادله  $|2x-1|+|x+2|=3$  کدام است؟

(خارج-۹۸)

$$\frac{2}{3} (۱) \quad \frac{2}{3} (۲) \quad ۱ (۳) \quad \frac{4}{3} (۴)$$

۲ ریشه عبارت داخل قدرمطلق‌ها  $x = \frac{1}{2}$  و  $x = -2$  است. بنابراین معادله را در سه ناحیه حل می‌کنیم:

$$۱) x < -2: -(2x-1) - (x+2) = 3 \Rightarrow -3x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \quad \times$$

$$۲) -2 \leq x \leq \frac{1}{2}: -(2x-1) + (x+2) = 3 \Rightarrow -x+3 = 3 \Rightarrow x = 0 \quad \checkmark$$

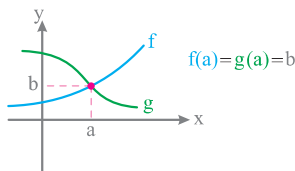
$$۳) x > \frac{1}{2}: (2x-1) + (x+2) = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر  $\frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$  است.

### روش هندسی حل معادلات

برای به دست آوردن جواب‌های  $f(x) = g(x)$  یک راهکار این است که نمودار هر دو تابع  $f$  و  $g$  را در یک دستگاه مختصات رسم و طول نقاط تلاقی را مشخص کنیم. این روش حل معادله را روش هندسی [نموداری] حل معادلات می‌نامند.

فرض کنید نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشد. با توجه به این که در  $x = a$ ، عرض دو تابع با هم برابر است، پس ریشه معادله  $f(x) = g(x)$  یا  $f(x) - g(x) = 0$  است.



از طریق روش هندسی، می‌توان تعداد، علامت و همچنین مقدار تقریبی [و گاهی دقیق] جواب‌ها را مشخص کرد.

**تست** معادله  $|x^2-1|=x$  چند جواب مثبت دارد؟

$$۱ (۲) \quad \text{صفر} (۱) \\ ۲ (۳) \quad ۴ (۴)$$

۳ نمودار دو تابع  $f(x) = |x^2-1|$  و  $g(x) = x$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا تعداد جواب‌های معادله  $|x^2-1|=x$  مشخص شود:



با توجه به شکل، معادله داده شده دو جواب مثبت دارد.

با توجه به ویژگی‌های قدرمطلق جواب‌های معادله  $|f(x)| = a$  به ازای  $a \geq 0$  از حل دو معادله زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = \pm a$$

$$|2x-5|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-5=3 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4 \\ 2x-5=-3 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$||x|-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x|-1=3 \Rightarrow |x|=4 \Rightarrow x=\pm 4 \\ |x|-1=-3 \Rightarrow |x|=-2 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

جواب‌های معادله  $|f(x)| = |g(x)|$  از حل دو معادله زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = \pm g(x)$$

$$|2x-3|=|x+5| \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=x+5 \Rightarrow x=8 \\ 2x-3=-(x+5) \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

یک روش دیگر برای حل معادلات بالا این است که طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم تا قدرمطلق از بین برود:

$$|2x-3|=|x-2| \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 4x + 4 \\ \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} x = 1, x = \frac{5}{3}$$

**تست** معادله  $|2x-3| = \left| \frac{1}{x-2} \right|$  چند جواب طبیعی دارد؟

$$۱ (۱) \quad ۲ (۲) \quad ۳ (۳) \quad ۴ (۴)$$

۱ با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$|2x-3| = \left| \frac{1}{x-2} \right| \Rightarrow \begin{cases} 2x-3 = \frac{1}{x-2} \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \quad \checkmark \\ x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \quad \times \end{cases} \\ 2x-3 = -\frac{1}{x-2} \Rightarrow 2x^2 - 7x + 7 = 0 \\ \Delta < 0 \\ \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \quad \times \end{cases}$$

### نکاتی برای حل معادلات قدرمطلقى

در معادلاتی که، برخی عبارات شامل  $x$  درون قدرمطلق و برخی بیرون قدرمطلق هستند یا معادله از مجموع یا تفاضل چند قدرمطلق تشکیل شده است، بهترین راهکار این است که عبارت داخل قدرمطلق را به ازای ریشه داخل قدرمطلق تعیین علامت کنیم تا قدرمطلق حذف شود.

$$x|x-1|=x+2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1: x(x-1) = x+2 \Rightarrow x^2 - x = x+2 \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \\ x < 1: x(1-x) = x+2 \\ \Rightarrow -x^2 + x = x+2 \\ \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

توجه کنید جواب  $x = 1 - \sqrt{3}$  در شرط  $x \geq 1$  صدق نمی‌کند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

نامساوی مثلث، معادلات قدرمطلق و روش هندسی حل معادلات

- واجب ۵۴۴.** معادله  $|3x+4|+|x-1|=|2x+5|$  چند جواب صحیح دارد؟  
 ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴
- واجب ۵۴۵.** کدام نامعادله نشان دهنده نقطاتی از محور اعداد حقیقی است که در بازه  $[-3, 5]$  قرار دارند؟  
 ۱  $|x-1| \leq 4$       ۲  $|x-4| \leq 1$       ۳  $|x-1| \geq 4$       ۴  $|x-4| \geq 1$
- واجب ۵۴۶.** معادله  $|3x-1|=x-3$  چند جواب دارد؟  
 ۱ صفر      ۲ ۱      ۳ ۲      ۴ بیشمار
- واجب ۵۴۷.** معادله  $|2x-3|=\frac{1}{x-2}$  چند جواب طبیعی دارد؟  
 ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴
- واجب ۵۴۸.** معادله  $||x-2|-3|=4$  چند جواب صحیح دارد؟  
 ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴
- تسلط ۵۴۹.** معادله  $\frac{y-x}{|x-3|}=1$  چند جواب صحیح دارد؟  
 ۱ صفر      ۲ ۱      ۳ ۲      ۴ ۳
- واجب ۵۵۰.** مجموع جواب‌های معادله  $|2x-1|+|x+2|=3$  کدام است؟  
 ۱  $-\frac{2}{3}$       ۲  $\frac{2}{3}$       ۳ ۱      ۴  $\frac{4}{3}$
- تسلط ۵۵۱.** نمودار تابع  $f(x)=|x-1|+|2x+4|-4$  از کدام ناحیه محوره‌های مختصات نمی‌گذرد؟  
 ۱ اول      ۲ دوم      ۳ سوم      ۴ چهارم
- واجب ۵۵۲.** معادله  $x^3+x-1=0$  چند ریشه حقیقی دارد؟  
 ۱ صفر      ۲ ۱      ۳ ۲      ۴ ۴
- واجب ۵۵۳.** معادله  $x \sin x - 1 = 0$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  چند ریشه حقیقی دارد؟  
 ۱ ۲      ۲ ۴      ۳ ۵      ۴ ۶
- واجب ۵۵۴.** معادله  $|x^2-1|=x$  چند جواب مثبت دارد؟  
 ۱ صفر      ۲ ۱      ۳ ۲      ۴ ۴
- واجب ۵۵۵.** معادله  $x\sqrt{x}=1$  چند جواب دارد؟  
 ۱ صفر      ۲ ۲      ۳ ۱      ۴ ۳
- واجب ۵۵۶.** معادله  $x^2-\sqrt{x^2}=x+6$  چند ریشه مثبت دارد؟  
 ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ صفر
- واجب ۵۵۷.** تعداد جواب‌های معادله  $|\frac{\sin \pi x}{2x}|=1$  کدام است؟  
 ۱ صفر      ۲ ۲      ۳ ۱      ۴ ۳
- واجب ۵۵۸.** معادله  $x \log_{\Delta} x = 1$  چند جواب دارد؟  
 ۱ صفر      ۲ ۱      ۳ ۲      ۴ ۳
- واجب ۵۵۹.** معادله  $|\cos x| = (\frac{5}{e})^{x-x^2}$  چند جواب دارد؟  
 ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ صفر
- واجب ۵۶۰.** تعداد جواب‌های معادله  $x2^x = 2x+1$  کدام است؟  
 ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ صفر
- تسلط ۵۶۱.** تعداد جواب‌های معادله  $\cos^2 x = x$  کدام است؟  
 ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴
- واجب ۵۶۲.** تعداد جواب‌های معادله  $\log_2(1-\sin x) = x+1$  در بازه  $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  کدام است؟  
 ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴
- واجب ۵۶۳.** دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{1+\sin x - x}$  شامل چند عدد حقیقی نمی‌باشد؟  
 ۱ ۵      ۲ ۶      ۳ ۷      ۴ ۸

خارج - ۹۸

خارج - ۹۴

**واجب ۱۶۵۴.** اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\sin^3 x + \cos^3 x$  چقدر است؟

- ۱  $\frac{13}{27}$       ۲  $\frac{13}{81}$       ۳  $\frac{17}{27}$       ۴  $\frac{17}{81}$

**واجب ۱۶۵۵.** اگر  $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$  باشد، حاصل  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{9}$       ۲  $\frac{7}{3}$       ۳  $\frac{7}{9}$       ۴  $\frac{8}{9}$

**تسلط ۱۶۵۶.** اگر  $\tan x + \cot x = -3$  و  $3\pi < 4x < 4\pi$  باشد، حاصل  $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$  کدام است؟

- ۱  $-0.5\sqrt{6}$       ۲  $0.75\sqrt{3}$       ۳  $-0.75\sqrt{3}$       ۴  $0.5\sqrt{6}$

**تسلط ۱۶۵۷.** اگر  $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x}\right)$  باشد، مقدار  $f(34)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{2}{9}$       ۲  $\frac{17}{18}$       ۳  $\frac{3}{7}$       ۴  $\frac{11}{18}$

نوبت دوم - ۱۴۰۲

روابط مثلثاتی  $\alpha + \beta$

**واجب ۱۶۵۸.** حاصل  $\frac{\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ}$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲  $\sqrt{3}$       ۳  $\frac{1}{2}$       ۴  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**واجب ۱۶۵۹.** حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

- ۱ ۲      ۲  $\sqrt{6}$       ۳  $2\sqrt{2}$       ۴  $2\sqrt{3}$

**واجب ۱۶۶۰.** اگر انتهای کمان  $x$  در ربع اول و  $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{2}{9}$       ۲  $\frac{7}{9}$       ۳  $-\frac{2}{9}$       ۴  $-\frac{7}{9}$

**تسلط ۱۶۶۱.** از رابطه  $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x = \frac{2}{3}$  مقدار  $\cos 4x$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{9}$       ۲  $\frac{2}{9}$       ۳  $\frac{1}{3}$       ۴  $\frac{4}{9}$

**واجب ۱۶۶۲.** اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$  باشد، حاصل  $(\sin \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \beta + \cos \alpha)^2$  کدام است؟

- ۱  $1 + \sqrt{3}$       ۲  $1 - \sqrt{3}$       ۳  $2 + \sqrt{3}$       ۴  $2 - \sqrt{3}$

**واجب ۱۶۶۳.** حاصل  $\frac{\cos 5^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\sin 15^\circ}$  کدام است؟

- ۱  $5 \sin 15^\circ$       ۲  $4 \sin 20^\circ$       ۳  $\sqrt{2} \cos 5^\circ$       ۴  $\sqrt{3} \cos 15^\circ$

**تسلط ۱۶۶۴.** اگر  $\tan x = \frac{4}{5}$  باشد، حاصل  $\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x}$  کدام است؟

- ۱  $0.45$       ۲  $0.6$       ۳  $0.75$       ۴  $0.9$

**واجب ۱۶۶۵.** حاصل  $\sin 10^\circ \sin 55^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$  کدام است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       ۲  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۳  $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$       ۴  $\frac{4-\sqrt{3}}{3}$

**واجب ۱۶۶۶.** ساده شده عبارت  $\frac{\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}$  کدام است؟

- ۱  $-\tan \alpha$       ۲  $\cot \alpha$       ۳  $-\tan \beta$       ۴  $\cot \beta$

**واجب ۱۶۶۷.** اگر  $\alpha = \frac{\pi}{6} + \beta$  باشد، حاصل  $\frac{\sin(\alpha+\beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha+\beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{2}$       ۲  $-\sqrt{3}$       ۳ ۱      ۴  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**واجب ۱۶۶۸.** اگر  $\tan \alpha = \frac{7}{3}$  و  $\tan \beta = \frac{1}{6}$  باشد، حاصل  $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$  کدام است؟

- ۱  $1/65$       ۲  $2/1$       ۳  $2/5$       ۴  $2/9$

داخل - ۹۶

خارج - ۹۷

**واجب ۱۶۶۹.** اگر  $\tan x = \sqrt{2}$  و انتهای کمان  $x$  در ربع سوم باشد، مقدار  $\cos(x - \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6})$  کدام است؟

- ۱  $\sqrt{2}$     ۲  $-\sqrt{2}$     ۳  $\sqrt{3}$     ۴  $-\sqrt{3}$

ریاضی داخل - ۹۹

**واجب ۱۶۷۰.** اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع دوم دایره مثلثاتی و  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$  باشد، مقدار  $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{4}{5}$     ۲  $-\frac{3}{5}$     ۳  $\frac{3}{5}$     ۴  $\frac{4}{5}$

ریاضی خارج - ۹۹

**تسلط ۱۶۷۱.** اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع اول دایره مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  باشد، مقدار  $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{4}{5}$     ۲  $-\frac{3}{5}$     ۳  $\frac{3}{5}$     ۴  $\frac{4}{5}$

**تسلط ۱۶۷۲.** اگر  $\alpha$  زاویه‌ای حاده و  $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{6}$     ۲  $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$     ۳  $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$     ۴  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$

**واجب ۱۶۷۳.** اگر  $\alpha + \beta = 135^\circ$  و  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{4}{3}$     ۲  $-\frac{1}{2}$     ۳  $\frac{4}{3}$     ۴  $\frac{1}{2}$

**تسلط ۱۶۷۴.** اگر  $\frac{5}{4} = (\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2$  باشد، آنگاه حاصل  $\cos(2x - 2y)$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{7}{8}$     ۲  $-\frac{5}{8}$     ۳  $-\frac{3}{11}$     ۴  $-\frac{2}{5}$

خارج - ۹۶

**واجب ۱۶۷۵.** اگر  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع چهارم باشد، مقدار  $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{2}{3}$     ۲  $-\frac{1}{3}$     ۳  $\frac{1}{3}$     ۴  $\frac{2}{3}$

داخل - ۹۳

**واجب ۱۶۷۶.** اگر  $\frac{2}{3} = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3})$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{2}{9}$     ۲  $-\frac{1}{9}$     ۳  $\frac{1}{9}$     ۴  $\frac{2}{9}$

داخل - ۹۷

**واجب ۱۶۷۷.** اگر  $\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 2$  باشد،  $\tan x$  کدام است؟

- ۱  $-3$     ۲  $\frac{1}{3}$     ۳  $\frac{2}{3}$     ۴  $3$

**واجب ۱۶۷۸.** اگر  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  و انتهای کمان  $\theta$  در ربع اول باشد، حاصل  $\sin(\frac{\pi}{4} + 2\theta) + \cos(\frac{3\pi}{4} - 2\theta)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{3 - 25\sqrt{2}}{50}$     ۲  $\frac{8 - 2\sqrt{3}}{50}$     ۳  $\frac{31\sqrt{2} - 48}{50}$     ۴  $\frac{20\sqrt{3} + 1}{50}$

**واجب ۱۶۷۹.** اگر  $\frac{1}{4} = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  باشد، حاصل  $\sin(x + \frac{\pi}{3})$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{4}$     ۲  $\frac{2}{3}$     ۳  $\frac{3}{5}$     ۴  $\frac{1}{3}$

**تسلط ۱۶۸۰.** حاصل عبارت  $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$  کدام است؟

- ۱  $1$     ۲  $2$     ۳  $3$     ۴  $4$

ریاضی داخل - ۱۴۰

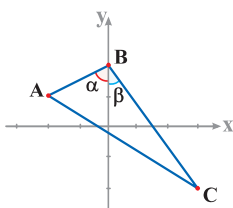
**واجب ۱۶۸۱.** اندازه زاویه  $A$  در مثلث  $ABC$ ،  $45^\circ$  درجه بیشتر از اندازه زاویه  $B$  است. حاصل  $2 \cos A \sin B - \sin C$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     ۲  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     ۳  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$     ۴  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**iq ۱۶۸۲.** نقاط  $A(-2, 1), B(0, 2), C(3, -2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. مقدار  $\sin(\alpha + \beta)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{2}{\sqrt{5}}$     ۲  $\frac{11}{5\sqrt{5}}$

- ۳  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$     ۴  $\frac{5}{3\sqrt{5}}$



**واجب ۱۶۸۳.** اگر  $\sin 3\theta = a \sin^3 \theta + b \sin \theta$  باشد. مقدار  $a \times b$  کدام است؟

- ۱ ۸      ۲ -۸      ۳ ۱۲      ۴ -۱۲

**واجب ۱۶۸۴.** اگر  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  باشد، آنگاه مقدار  $\cos 3\alpha$  کدام است؟

- ۱  $\frac{9}{16}$       ۲  $-\frac{9}{16}$       ۳  $-\frac{7}{9}$       ۴  $\frac{7}{9}$

خارج - ۱۴۰۰

**واجب ۱۶۸۵.** اگر  $f(x) = 4 \sin x \cos 2x + 2 \sin x$  باشد. مقدار  $f(\frac{41\pi}{9})$  کدام است؟

- ۱  $-\sqrt{3}$       ۲  $\sqrt{3}$       ۳ ۱      ۴ -۱

**تسلیم ۱۶۸۶.** اگر  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$  و انتهای کمان  $\theta$  در ربع اول باشد،  $\frac{\cos 3\theta}{\cos 4\theta}$  چقدر است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{6}}{7}$       ۲  $-\frac{\sqrt{2}}{5}$       ۳  $-\frac{\sqrt{6}}{7}$       ۴  $\frac{\sqrt{2}}{5}$

**واجب ۱۶۸۷.** اگر  $\tan(\frac{\pi}{8} + \alpha) = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\tan(\frac{\pi}{8} - \alpha)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{5}$       ۲  $-\frac{1}{5}$       ۳  $\frac{1}{3}$       ۴  $-\frac{1}{3}$

**واجب ۱۶۸۸.** مقدار  $\frac{1 - \tan 1^\circ}{1 + \tan 1^\circ}$  کدام است؟

- ۱  $\tan 35^\circ$       ۲  $\tan 40^\circ$       ۳  $\cot 35^\circ$       ۴  $\cot 40^\circ$

**جو ۱۶۸۹.** اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲ -۱      ۳  $\frac{1}{2}$       ۴  $-\frac{1}{2}$

خارج - ۹۳

**واجب ۱۶۹۰.** اگر  $\tan \alpha = 2$  و  $\tan \beta = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\tan(\alpha - \beta)$  کدام است؟

- ۱ -۳      ۲ -۲      ۳  $\frac{1}{2}$       ۴ ۳

**واجب ۱۶۹۱.** اگر  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$  باشد، مقدار  $\tan 2\alpha$  کدام است؟

- ۱  $\frac{2}{8}$       ۲  $\frac{2}{4}$       ۳  $\frac{1}{8}$       ۴  $\frac{1}{6}$

**تسلیم ۱۶۹۲.** اگر  $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = 2$  باشد، مقدار  $\sin 2x$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{4}$       ۲  $\frac{2\sqrt{2}}{5}$       ۳  $\frac{3}{5}$       ۴  $\frac{5}{8}$

**تسلیم ۱۶۹۳.** اگر  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  باشد، مقدار  $\tan(\frac{\pi}{4} - 2\alpha)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{11}{17}$       ۲  $-\frac{11}{17}$       ۳  $\frac{7}{17}$       ۴  $-\frac{7}{17}$

**واجب ۱۶۹۴.** اگر  $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \frac{1}{2}$  باشد، حاصل  $\tan(30^\circ + \alpha)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{7 - 2\sqrt{3}}{11}$       ۲  $\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}$       ۳  $\frac{7 + 2\sqrt{2}}{11}$       ۴  $\frac{5\sqrt{3} - 8}{11}$

**جو ۱۶۹۵.** اگر  $1 + \tan 25^\circ \tan x = 3(\tan x - \tan 25^\circ)$  باشد، آنگاه حاصل  $\tan(x + 20^\circ)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۲ ۲      ۳  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       ۴ ۳

**واجب ۱۶۹۶.** اگر  $\tan \alpha = 3$  باشد، مقدار  $\tan 3\alpha$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{9}{13}$       ۲  $\frac{9}{13}$       ۳  $-\frac{3}{8}$       ۴  $\frac{3}{8}$

**واجب ۱۶۹۷.** اگر  $\tan(x + y) = 5$  و  $\tan y = 2$  باشد، مقدار  $\tan 2x$  کدام است؟

- ۱  $\frac{15}{56}$       ۲  $\frac{33}{56}$       ۳  $\frac{19}{28}$       ۴  $\frac{17}{28}$

**واجب ۱۶۹۸.** اگر  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  و  $\sin x = -\frac{1}{3}$  و همچنین  $0 < y < \frac{\pi}{4}$  و  $\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$  باشد، مقدار  $\tan(x+y)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{9+5\sqrt{2}}{2}$  ۲  $\frac{9-5\sqrt{2}}{2}$  ۳  $\frac{7+5\sqrt{2}}{2}$  ۴  $\frac{7-5\sqrt{2}}{2}$

**واجب ۱۶۹۹.** اگر  $\tan(\theta + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\tan \theta$  کدام است؟

- ۱  $\frac{5-3\sqrt{3}}{3}$  ۲  $\frac{6-5\sqrt{3}}{3}$  ۳  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$  ۴  $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

**واجب ۱۷۰۰.** اگر  $\tan(\alpha + \beta) = 2$  و  $\tan(2\alpha + \beta) = 4$  باشد، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

- ۱  $\frac{36}{85}$  ۲  $-\frac{19}{39}$  ۳  $\frac{23}{52}$  ۴  $\frac{18}{43}$

**تسلط ۱۷۰۱.** اگر  $\tan(x+2y) = 2$  و  $\tan(2x-2y) = 4$  باشد، حاصل  $\cot 3x$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{5}{11}$  ۲  $-\frac{7}{6}$  ۳  $\frac{3}{2\sqrt{2}}$  ۴  $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$

**تسلط ۱۷۰۲.** اگر  $\sin(x+y) = 6\cos x \cos y$  و  $\tan x \tan y = 3$  باشد، مقدار  $\tan(x+y)$  کدام است؟

- ۱  $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$  ۲  $-3$  ۳  $-2\sqrt{2}$  ۴  $-1 - \sqrt{3}$

ریاضی داخل - ۹۹

**واجب ۱۷۰۳.** اگر  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  برابرریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  باشند، مقدار  $\tan(\alpha + \beta)$  کدام است؟

- ۱  $1$  ۲  $\frac{3}{2}$  ۳  $-3$  ۴  $-1$

**تسلط ۱۷۰۴.** اگر  $\cot \alpha$  و  $\cot \beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 2x - 2 = 0$  باشد، مقدار  $\tan(\alpha + \beta)$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{2}{3}$  ۲  $-\frac{2}{5}$  ۳  $-\frac{3}{4}$  ۴  $-\frac{4}{5}$

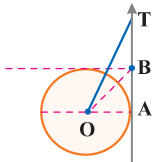
**واجب ۱۷۰۵.** اگر  $\tan x_1$  و  $\tan x_2$  ریشه‌های معادله  $\tan^2 x - 2k \tan x + k - 1 = 0$  باشند و  $x_1 + x_2 = \frac{3\pi}{4}$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- ۱  $1$  ۲  $2$  ۳  $-1$  ۴  $-2$

ریاضی خارج - ۹۹

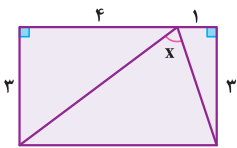
**تسلط ۱۷۰۶.** با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، اگر  $BT = 2$  باشد، مقدار  $\tan(\widehat{TOB})$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{4}$  ۲  $\frac{1}{3}$  ۳  $\frac{1}{2}$  ۴  $\frac{2}{3}$



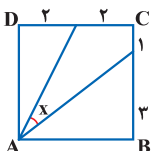
**واجب ۱۷۰۷.** در مستطیل شکل مقابل، مقدار  $\sin x$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{\sqrt{10}}$  ۲  $\frac{3}{\sqrt{10}}$  ۳  $\frac{5}{\sqrt{10}}$  ۴  $\frac{7}{\sqrt{10}}$



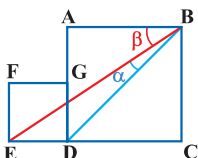
**تسلط ۱۷۰۸.** در مربع مقابل، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{4}$  ۲  $\frac{1}{2}$  ۳  $\frac{2}{3}$  ۴  $\frac{2}{5}$



**واجب ۱۷۰۹.** در شکل مقابل چهارضلعی‌های ABCD و FGDE مربع هستند و  $\tan \beta = \frac{2}{3}$  است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{3}$  ۲  $\frac{1}{4}$  ۳  $\frac{1}{5}$  ۴  $\frac{1}{6}$



## چند مسئله ترکیبی

**واجب ۲۳۲۵.** اگر  $\frac{f(3x)}{g(x-2)} = x^3$  ،  $f'(3) = 5$  و  $g(-1) = 2$  باشد، مقدار  $g'(-1)$  کدام است؟

- ۱ ۷      ۲ ۸      ۳ ۹      ۴ ۱۰

**واجب ۲۳۲۶.** اگر  $f$  تابعی درجه دوم باشد و  $f(x) - f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$  باشد، مقدار  $f(1)$  کدام است؟

- ۱  $\sqrt{2}$       ۲ ۱      ۳  $1/5$       ۴ ۲

**واجب ۲۳۲۷.** تابع  $f$  مشتق پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر  $f'(-1) = \frac{3}{4}$  و  $g(x) = f(x+1) + f(3x+1)$  باشد، حاصل  $g'(-2)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{13}{2}$       ۲ ۳      ۳  $\frac{7}{2}$       ۴ ۶

ریاضی داخل - ۱۴۰۱

**تسلط ۲۳۲۸.** نمودار تابع مشتق پذیر  $f$  نسبت به محور  $y$ ها متقارن است. اگر  $f(1) = 3$  و  $f'(1) = 2f'(1)$  باشد، مشتق تابع  $xf(x)$  در  $x = -1$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴

**واجب ۲۳۲۹.** اگر  $1 \leq x$  ;  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  باشد، شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f^{-1}$  در نقطه تلاقی آن با محور  $x$ ها کدام است؟

- ۱ -۱      ۲  $-\frac{2}{5}$       ۳  $-\frac{1}{2}$       ۴  $-\frac{2}{3}$

## عامل صفرشونده و ساده سازی

در این بخش، چند روش میانبر برای مشتق گرفتن با هم یاد می‌گیریم. یکی از مهم‌ترین آن‌ها، توجه به عامل صفرشونده است.

**واجب ۲۳۳۰.** مشتق تابع  $f(x) = (x^2 - 2)(x - 4)(x^2 - 6)(x - 8)$  به ازای  $x = 4$  کدام است؟

- ۱ ۲۸۰      ۲ ۵۶۰      ۳ -۲۸۰      ۴ -۵۶۰

**واجب ۲۳۳۱.** اگر  $f(x) = (x^2 - 2x)(x^3 - x^2 - 2)$  باشد،  $f'(2)$  کدام است؟

- ۱ ۱۶      ۲ ۸      ۳ ۲۴      ۴ ۳۲

**واجب ۲۳۳۲.** اگر  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{6x-2}}$  باشد، مقدار  $f'(1)$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲  $\frac{1}{2}$       ۳  $\frac{3}{2}$       ۴ ۲

**واجب ۲۳۳۳.** اگر  $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$  باشد،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$  کدام است؟

- ۱ -۶      ۲ -۳      ۳  $-\frac{3}{2}$       ۴  $-\frac{3}{4}$

**واجب ۲۳۳۴.** مشتق تابع  $f(x) = (x+1)(x^2-1)\sqrt{x^2-3x+1}$  به ازای  $x = -1$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲ -۱      ۳ ۲      ۴ صفر

**تسلط ۲۳۳۵.** اگر  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x+1}}$  باشد، حاصل  $f'(1) \times f'(4)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{3}{2}$       ۲  $-\frac{3}{2}$       ۳  $\frac{9}{2}$       ۴  $-\frac{9}{2}$

**iq ۲۳۳۶.** اگر  $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2 + \log_3 x}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{3}+h) - f(\frac{1}{3})}{h}$  کدام است؟

- ۱ -۱      ۲ -۲      ۳ -۳      ۴ -۴

**واجب ۲۳۳۷.** مشتق تابع  $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$  به ازای  $x = 2$  کدام است؟

- ۱  $0/5$       ۲  $0/75$       ۳ ۱      ۴  $1/5$

**واجب ۲۳۳۸.** مشتق تابع  $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$  به ازای  $x = 1$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴

**واجب ۲۳۳۹.** مشتق تابع  $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x} + 2}$  به ازای  $x = 3$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{2}$       ۲  $\frac{1}{4}$       ۳  $\frac{1}{5}$       ۴  $\frac{1}{8}$



**واجب ۲۳۴۰.** مشتق تابع  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$  به ازای  $x = \frac{1}{4}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳) ۱      ۴)  $-1$

**واجب ۲۳۴۱.** اگر  $f(x) = \frac{\sqrt{x}(x-3)+x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-3x}}$  باشد، مقدار  $f'(4)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{2}{5}$       ۴)  $\frac{5}{6}$

**تسلط ۲۳۴۲.** اگر  $f(x) = \frac{\sqrt[2]{x^2-x}}{1-\sqrt{x}}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{2}{5}$       ۲)  $\frac{1}{3}$       ۳)  $\frac{3}{4}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

**واجب ۲۳۴۳.** اگر  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$  و  $g(x) = \frac{-5}{x-2}$  حاصل  $f'(x)+g'(x)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $-1$       ۳) ۲      ۴)  $-2$

**واجب ۲۳۴۴.** اگر  $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$  باشد، حاصل  $f'(\lambda)g(\lambda) + g'(\lambda)f(\lambda)$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{4}$       ۲)  $-\frac{2}{3}$       ۳)  $-1$       ۴)  $-\frac{3}{5}$

**تسلط ۲۳۴۵.** اگر  $f(x) = (x + \sqrt{x^2-x})^3$  و  $g(x) = (x - \sqrt{x^2-x})^3$  باشد، حاصل  $f'(2)g(2) + g'(2)f(2)$  چقدر است؟

- ۱)  $-12$       ۲) ۱۲      ۳)  $-8$       ۴) ۸

**واجب ۲۳۴۶.** اگر  $f(x) = \frac{3x+6}{\sqrt{x+1}}$  و  $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$  باشد، حاصل  $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$  به ازای  $x = \frac{1}{4}$  کدام است؟

- ۱) ۱۲      ۲)  $-12$       ۳) ۴      ۴)  $-4$

**واجب ۲۳۴۷.** اگر  $f(x) = \sqrt{2x^2+x} + x$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+x-x}}$  باشد، حاصل  $f'(4)g(4) - g'(4)f(4)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{3}{2}$       ۲)  $\frac{5}{2}$       ۳)  $\frac{9}{4}$       ۴)  $\frac{11}{4}$

### مشتق مرتبه دوم

دو بار از تابع مشتق بگیرید! همین!

**واجب ۲۳۴۸.** در تابع با ضابطه  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 6x$  اگر  $f'(-1) = 2$  و  $f''(1) = 10$  باشد، مقدار  $b$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

**واجب ۲۳۴۹.** اگر  $f(x) = \sqrt{3x-2}$  باشد،  $f''(2)$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{9}{8}$       ۲)  $\frac{9}{8}$       ۳)  $-\frac{9}{32}$       ۴)  $\frac{9}{32}$

**واجب ۲۳۵۰.** مشتق دوم تابع  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  به ازای  $x=1$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $-\frac{1}{2}$       ۴)  $-\frac{3}{4}$

**واجب ۲۳۵۱.** اگر  $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ ، مقدار  $f''(-4)$  کدام است؟

- ۱) ۱۲      ۲)  $-12$       ۳) ۸      ۴)  $-8$

**واجب ۲۳۵۲.** در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{a}{x+1}$  اگر  $f''(1) = \frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱)  $-1$       ۲)  $-2$       ۳) ۱      ۴) ۲

۲۳۵۳. اگر  $f''(1) = 3$  و  $f'(1) = 2$  و  $f(x) = x^2 + g(x)$  باشد، مقدار  $f''(1)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{3}{2}$       ۲) ۷      ۳)  $\frac{7}{2}$       ۴) ۹

۲۳۵۴. اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{h} = x - \frac{2}{x}$  باشد،  $f''(-1)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) -۱      ۳) ۲      ۴) -۲

۲۳۵۵. اگر  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1+h) - f'(-1)}{h}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $\frac{2}{5}$       ۳) ۲      ۴)  $\frac{3}{4}$

### مشتق تابع مرکب (۱)

تست‌های این بخش رو با حوصله و دقت حل کنید. معمولاً یک تست در کنکور داره!

۲۳۵۶. واجب اگر  $f(5) = f'(5) = -2$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{3x+3} = \frac{2}{3}$  باشد،  $(f \circ f)'(5)$  کدام است؟

- ۱) -۱      ۲) -۲      ۳) -۳      ۴) -۴

۲۳۵۷. واجب اگر  $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$  باشد،  $(f \circ f)'(1)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{9}$       ۲)  $\frac{5}{9}$       ۳)  $\frac{7}{9}$       ۴) ۱

۲۳۵۸. واجب اگر  $g(x) = \sqrt{2x+1}$  و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 6$  باشد،  $(f \circ g)'(4)$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۲      ۳) ۶      ۴) ۸

۲۳۵۹. واجب اگر  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(3+h) - f^2(3)}{h}$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{16}$       ۲)  $\frac{1}{16}$       ۳)  $-\frac{1}{32}$       ۴)  $\frac{1}{32}$

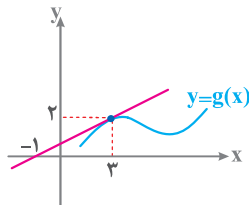
۲۳۶۰. واجب اگر  $f(x) = \sqrt{4x-7}$  و  $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع  $g \circ f$  به ازای  $x=2$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۶      ۳) ۸      ۴) ۱۲

۲۳۶۱. واجب اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 4$  و  $g(x) = x^2 + x$  باشد،  $(g \circ f)'(2)$  کدام است؟

- ۱) ۱۲      ۲) ۶      ۳) ۱۸      ۴) ۲۰

۲۳۶۲. واجب نمودار تابع  $g$  و خط مماس بر آن در  $x=3$  به صورت مقابل است. اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 6$  باشد،  $(f \circ g)'(3)$  کدام است؟



باشد،  $(f \circ g)'(3)$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۶

۲۳۶۳. واجب اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل و  $g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x+1}}$  باشد، مقدار  $(f \circ g)'(4)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{7}$       ۲)  $\frac{5}{7}$

- ۳)  $\frac{1}{28}$       ۴)  $\frac{5}{28}$

۲۳۶۴. واجب خط به معادله  $y = 3x - 5$  در نقطه  $x=2$  بر نمودار تابع  $y=g(x)$  مماس است. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x-2} = \frac{2}{3}$  باشد،  $(f \circ g)'(2)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

خارج - ۹۸

**واجب ۲۳۶۵.** اگر  $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  و  $(fog)'(2) = 6$  باشد،  $f'(5)$  کدام است؟

- ۱) -۲      ۲) -۱      ۳) ۲      ۴) ۳

**واجب ۲۳۶۶.** اگر  $f(x) = \sqrt{5x-9}$  و  $g(x) = x^2 + ax$  باشد، به ازای کدام مقدار  $a$  رابطه  $(gof)'(2) = 10$  برقرار است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) -۱      ۴) -۲

**واجب ۲۳۶۷.** اگر  $f'(3) = 1$  و  $f(3) = 4$  باشد، مقدار مشتق تابع  $y = \sqrt{f(x)} + \frac{2}{f(x)}$  در  $x=3$  کدام است؟

- ۱) ۴      ۲) -۳۱      ۳) ۲۷      ۴) -۱۱

**واجب ۲۳۶۸.** اگر  $f(x) = x^2 + x$  باشد، مشتق تابع  $y = f(x-f(x))$  در  $x=1$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

**واجب ۲۳۶۹.** اگر  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$ ، آنگاه مشتق تابع  $f(xf(x))$  در نقطه  $x=2$  کدام است؟

- ۱) -۱      ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴) ۱

**واجب ۲۳۷۰.** اگر  $f'(0) = 1$  و  $f(x) = g(x^2 - f(x))$  باشد، مقدار  $g'(-1)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۳      ۳) -۱      ۴) -۳

**واجب ۲۳۷۱.** اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{2}{5}$  باشد، مقدار مشتق تابع  $y = f(x^3 + 2x)$  به ازای  $x=1$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۴      ۳) -۲      ۴) -۴

**واجب ۲۳۷۲.** اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 8$  باشد، مشتق تابع  $f(\sqrt{1-3x})$  در  $x=-1$  کدام است؟

- ۱) -۶      ۲) ۴      ۳) ۸      ۴) -۳

**واجب ۲۳۷۳.** اگر  $f(x^2 + 1) = 2x^3 - 4x^2 + 5$  باشد،  $f'(5)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

**تسلط ۲۳۷۴.** اگر  $f(\sqrt{x}) = x^2 - 2x$  باشد، مشتق تابع  $f(\frac{1}{x})$  در  $x=2$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{3}{8}$       ۲)  $-\frac{3}{8}$       ۳)  $\frac{3}{4}$       ۴)  $-\frac{3}{4}$

**تسلط ۲۳۷۵.** اگر مشتق تابع  $f(\sqrt[3]{3x+2})$  در  $x=2$  برابر  $\frac{1}{3}$  باشد، مشتق  $f(x+x^2)$  در  $x=1$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{3}{4}$       ۲) ۲      ۳)  $\frac{7}{3}$       ۴) ۴

**واجب ۲۳۷۶.** اگر  $f$  یک تابع مشتق پذیر و  $g(x) = f(\sqrt[3]{6x+2})$  و  $g'(1) = -2$  باشد، مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) -۳      ۳) ۶      ۴) -۴

**تسلط ۲۳۷۷.** اگر  $f^3(x) + f(x) = x$  باشد، مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲) ۱      ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴) ۲

**تسلط ۲۳۷۸.** اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 8}{x - 3} = 4$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 + f(3x)}$  باشد، مقدار  $g'(1)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $\frac{3}{2}$       ۳)  $\frac{7}{3}$       ۴) ۲

**واجب ۲۳۷۹.** اگر  $f(2x) + g(\sqrt{x}) = \frac{1}{x}$  و  $g'(1) = -10$  باشد، حاصل  $f'(2)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

**واجب ۲۳۸۰.** اگر  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1+x^3}$  و  $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل  $g'(x) \cdot f'(g(x))$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{3}{x}$       ۲)  $\frac{3}{x^2}$       ۳)  $\frac{1}{3x}$       ۴)  $\frac{x-3}{x^2}$

**واجب ۲۳۸۱.** اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  و  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  باشد، حاصل  $f'(x) \cdot g'(f(x))$  کدام است؟

$\frac{1}{3}x$  ۱۴

$x$  ۳

$\frac{1}{2}$  ۲

$-1$  ۱

**واجب ۲۳۸۲.** اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x-1} = 4$  باشد، مشتق تابع  $f(x) + g(2-x)$  در  $x=1$  کدام است؟

$-4$  ۱۴

$4$  ۳

$-2$  ۲

$2$  ۱

**واجب ۲۳۸۳.** اگر  $g(x) = 2x - 1$  و  $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$  باشند، مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

$-6$  ۱۴

$5$  ۳

$-\frac{2}{3}$  ۲

$-\frac{3}{2}$  ۱

**واجب ۲۳۸۴.** اگر  $f(2x) + f(3-x) = \frac{2x^2+1}{x^2-2}$  باشد، مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

$8$  ۱۴

$-10$  ۳

$3$  ۲

$-2$  ۱

**واجب ۲۳۸۵.** اگر  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x}; & x \geq 0 \\ x^2-2; & x < 0 \end{cases}$  باشد، مقدار  $(f \circ f)'(4)$  کدام است؟

$4$  ۱۴

$3$  ۳

$2$  ۲

$1$  ۱

### مشتق تابع مرکب (۲)

**واجب ۲۳۸۶.** مشتق تابع  $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^5$  در  $x=1$  کدام است؟

$5^6$  ۱۴

$5^4$  ۳

$5^3$  ۲

$5^2$  ۱

**واجب ۲۳۸۷.** اگر  $f(x) = (x + \frac{2}{x})^3$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  کدام است؟

$-45$  ۱۴

$-36$  ۳

$-27$  ۲

$-18$  ۱

**واجب ۲۳۸۸.** اگر  $f(x) = \frac{x^2+1}{(2x-3)^2}$  باشد، مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

$-20$  ۱۴

$-16$  ۳

$-12$  ۲

$-8$  ۱

**واجب ۲۳۸۹.** مشتق تابع  $f(x) = (\frac{3x+1}{x^2+1})^4$  در  $x=1$  کدام است؟

$-16$  ۱۴

$-8$  ۳

$16$  ۲

$8$  ۱

**واجب ۲۳۹۰.** مشتق تابع  $f(x) = (x^3 - \sqrt{x+2})^3$  به ازای  $x=-1$  کدام است؟

$62$  ۱۴

$48$  ۳

$32$  ۲

$30$  ۱

**واجب ۲۳۹۱.** اگر تابع  $f$  در  $x=4$  مشتق پذیر و  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)+7}{x-4} = -\frac{3}{2}$  باشد، آنگاه مشتق  $\frac{f(2x)}{x}$  در  $x=2$  کدام است؟

$\frac{2}{9}$  ۱۴

$\frac{1}{7}$  ۳

$\frac{1}{4}$  ۲

$\frac{1}{2}$  ۱

خارج - ۹۵

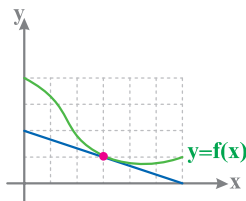
**واجب ۲۳۹۲.** تابع  $f$  در  $x=2$  مشتق پذیر است. اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-9}{h} = \frac{3}{2}$  باشد، مشتق تابع  $g(x) = x\sqrt{f(x)}$  در  $x=2$  کدام است؟

$4$  ۱۴

$3/5$  ۳

$3$  ۲

$2/5$  ۱



**واجب ۲۳۹۳.** نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. مشتق تابع  $y = \sqrt{f(x)}$  در  $x=3$  کدام است؟

$-\frac{2}{3}$  ۲

$\frac{2}{3}$  ۱

$-\frac{1}{6}$  ۱۴

$\frac{1}{6}$  ۳

**واجب ۲۳۹۴.** اگر  $f'(x) = \frac{1}{x}$  باشد، مشتق تابع  $f(x + \sqrt{1+x^2})$  به ازای  $x = \sqrt{3}$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{3}$  ۱۴

$\frac{\sqrt{3}}{3}$  ۳

$\frac{1}{3}$  ۲

$\frac{1}{2}$  ۱

**واجب ۲۳۹۵.** اگر  $f'(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{5+x^2}}$  باشد، مشتق تابع  $f(\frac{1}{x})$  در  $x = \frac{1}{4}$  کدام است؟

$-\frac{1}{4}$  ۱۴

$\frac{1}{4}$  ۳

$-4$  ۲

$4$  ۱

داخل - ۹۵

**واجب ۲۳۹۶.** در تابع با ضابطه  $f(x) = (\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}})^3$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$  کدام است؟

- ۱ - ۲۱      ۲ - ۱۸      ۳ - ۱۲      ۴ - ۱۵

**واجب ۲۳۹۷.** اگر  $f(x) = \sqrt{\frac{3x^2-1}{x^2+1}}$  باشد، مقدار  $f'(1)$  کدام است؟

- ۱ - ۱      ۲ -  $\frac{1}{2}$       ۳ -  $\frac{3}{2}$       ۴ - ۲

**تسلط ۲۳۹۸.** مشتق تابع  $f(x) = \sqrt[3]{(\frac{3x+2}{2x-3})^2}$  به ازای  $x=2$  کدام است؟

- ۱ -  $-\frac{11}{3}$       ۲ -  $-\frac{13}{3}$       ۳ -  $-\frac{8}{3}$       ۴ -  $-\frac{4}{3}$

خارج - ۹۹

**واجب ۲۳۹۹.** مقدار مشتق تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt[3]{(\frac{2x-x^2}{3x+5})^2}$  در نقطه  $x=-2$  کدام است؟

- ۱ - ۳      ۲ - ۴      ۳ - ۵      ۴ - ۶

خارج - ۹۸

**واجب ۲۴۰۰.** مشتق تابع  $f(x) = x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$  در نقطه  $x=-3$  کدام است؟

- ۱ -  $\frac{2}{3}$       ۲ -  $\frac{3}{4}$       ۳ -  $\frac{4}{3}$       ۴ -  $\frac{3}{2}$

**تسلط ۲۴۰۱.** اگر  $f(x) = (\sqrt{3x+1})^3$  باشد، مقدار  $f'(1)$  کدام است؟

- ۱ -  $\frac{11}{2}$       ۲ -  $-\frac{15}{8}$       ۳ -  $\frac{5}{4}$       ۴ -  $-\frac{16}{5}$

داخل - ۹۹

**واجب ۲۴۰۲.** مشتق تابع با ضابطه  $f(x) = (\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2-x})^3$  در نقطه  $x=2$  کدام است؟

- ۱ -  $-\frac{3}{4}$       ۲ -  $-\frac{5}{4}$       ۳ -  $-\frac{5}{2}$       ۴ -  $-\frac{15}{4}$

**مشتق توابع مثلثاتی**

**واجب ۲۴۰۳.** اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-2h)}{2h} = 3 \cos x$  آنگاه  $f'(\frac{\pi}{3})$  کدام است؟

- ۱ - ۱      ۲ - ۲      ۳ - ۳      ۴ - ۴

داخل - ۹۸

**واجب ۲۴۰۴.** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x}$  کدام است؟

- ۱ -  $-\sin a$       ۲ -  $-\cos a$       ۳ -  $\cos a$       ۴ -  $\sin a$

**واجب ۲۴۰۵.** مشتق تابع  $y = \cos^2 2x$  در  $x = \frac{\pi}{12}$  کدام است؟

- ۱ -  $-\sqrt{3}$       ۲ -  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       ۳ -  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ۴ -  $\sqrt{3}$

**واجب ۲۴۰۶.** مشتق تابع  $f(x) = \frac{x^2}{\sin(\frac{\pi}{x})}$  در  $x = \frac{3}{2}$  کدام است؟

- ۱ -  $\frac{2\sqrt{3}-2\pi}{2}$       ۲ -  $\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{3}$       ۳ -  $\frac{2\sqrt{3}+2\pi}{2}$       ۴ -  $\frac{6\sqrt{3}+2\pi}{2}$

خارج - ۹۰

**واجب ۲۴۰۷.** مقدار مشتق تابع  $f(x) = \cos^2 \frac{\pi}{3x}$  به ازای  $x=4$  کدام است؟

- ۱ -  $\frac{\pi}{96}$       ۲ -  $\frac{\pi}{72}$       ۳ -  $\frac{\pi}{48}$       ۴ -  $\frac{\pi}{32}$

**واجب ۲۴۰۸.** مقدار مشتق تابع  $y = \frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{12}$  کدام است؟

- ۱ -  $-\frac{4}{3}$       ۲ -  $-\frac{3}{4}$       ۳ -  $\frac{3}{4}$       ۴ -  $\frac{4}{3}$

**واجب ۲۴۰۹.** مشتق تابع  $f(x) = 2\sqrt{x} \sin(\pi\sqrt{x})$  در  $x = \frac{1}{16}$  کدام است؟

- ۱ -  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pi+4)$       ۲ -  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pi-4)$       ۳ -  $\sqrt{2}(\pi+4)$       ۴ -  $\sqrt{2}(\pi-4)$

**واجب ۲۴۱۰.** مشتق تابع  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}$  در  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

۱  $\sqrt{2} - 1$       ۲  $2\sqrt{2} - 4$       ۳  $2\sqrt{2} + 1$       ۴  $4\sqrt{2}$

خارج - ۹۳

**واجب ۲۴۱۱.** مشتق تابع  $y = \sin^2 \sqrt{2x}$ ، به ازای  $x = \frac{\pi^2}{18}$  کدام است؟

۱  $\frac{9}{8\pi}$       ۲  $\frac{9}{4\pi}$       ۳  $\frac{27}{8\pi}$       ۴  $\frac{27}{4\pi}$

**تسلط ۲۴۱۲.** مشتق تابع  $f(x) = \sin^2 \pi(x + \sqrt{x})$  در  $x = \frac{1}{9}$  کدام است؟

۱  $\pi$       ۲  $2\pi$       ۳  $-\pi$       ۴  $-2\pi$

**تسلط ۲۴۱۳.** اگر  $f(x) = \cos^2(\frac{\pi}{4} \sin x)$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}}$  کدام است؟

۱  $\pi\sqrt{3}$       ۲  $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$       ۳  $-\pi\sqrt{3}$       ۴  $-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

**واجب ۲۴۱۴.** خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \cos^2 x + \cos x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  در چند نقطه موازی محور  $x$  ها است؟

۱ ۲      ۲ ۳      ۳ ۴      ۴ ۵

**واجب ۲۴۱۵.** مشتق تابع  $f(x) = \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\right)^2$  در  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

۱  $-4$       ۲  $16$       ۳  $-8$       ۴  $2$

خارج - ۹۷

**واجب ۲۴۱۶.** مشتق عبارت  $\tan^3 2x$  به ازای  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

۱ ۲۴      ۲ ۳۶      ۳ ۵۴      ۴ ۷۲

**واجب ۲۴۱۷.** مشتق تابع  $f(x) = \tan^2(\frac{\pi}{4} \sin \pi x)$  در  $x = \frac{1}{9}$  کدام است؟

۱  $\frac{2\pi^2}{3}$       ۲  $\frac{4\pi^2}{9}$       ۳  $-\frac{2\pi^2}{3}$       ۴  $-\frac{4\pi^2}{9}$

**واجب ۲۴۱۸.** اگر  $g(x) = f(\sin x)$  و  $f'(1) = 3$  باشد، آنگاه  $g''(\frac{\pi}{4})$  کدام است؟

۱  $-3$       ۲  $-1/5$       ۳  $3$       ۴  $1/5$

**واجب ۲۴۱۹.** اگر  $f(x) = \sqrt{2 \sin \pi x^2}$ ، آنگاه  $f'(\frac{1}{\sqrt{6}})$  کدام است؟

۱  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$       ۲  $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$       ۳  $\pi\sqrt{2}$       ۴  $\pi\sqrt{3}$

**واجب ۲۴۲۰.** مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{3 + \tan 2x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{8}$  کدام است؟

۱  $\frac{1}{2}$       ۲  $-\frac{1}{2}$       ۳  $1$       ۴  $-1$

**واجب ۲۴۲۱.** مقدار مشتق عبارت  $\sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$  به ازای  $x = \frac{3}{\pi}$  کدام است؟

۱  $-\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$       ۲  $-\frac{2\pi^2}{9}$       ۳  $\frac{2\pi^2}{9}$       ۴  $\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

خارج - ۹۱

**تسلط ۲۴۲۲.** اندازه مشتق تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}}$  به ازای  $x = 3$  کدام است؟

۱  $\frac{1}{12}$       ۲  $\frac{1}{9}$       ۳  $\frac{1}{6}$       ۴  $\frac{1}{4}$

**واجب ۲۴۲۳.** مشتق تابع  $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{2} \cos \pi x}$  به ازای  $x = \frac{1}{4}$  چه مقدار است؟

۱  $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$       ۲  $-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$       ۳  $\frac{\pi}{3}$       ۴  $-\frac{\pi}{3}$

**واجب ۲۴۲۴.** مقدار مشتق  $\frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

۱  $\frac{4}{9}$       ۲  $\frac{5}{9}$       ۳  $\frac{7}{9}$       ۴  $\frac{8}{9}$

۲۴۲۵. تسکین اگر  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$  باشد، مقدار  $f'(\frac{\pi}{6})$  برابر کدام است؟

- ۱  $-\frac{16\sqrt{3}}{25}$       ۲  $\frac{16\sqrt{3}}{25}$       ۳  $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$       ۴  $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

۲۴۲۶. واجب اگر  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  و  $f(\cos^2 x) = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x + 1}$  باشد، مقدار  $f'(\frac{3}{4})$  کدام است؟

- ۱  $\frac{2}{4}$       ۲  $-\frac{3}{4}$       ۳  $\frac{4}{3}$       ۴  $-\frac{4}{3}$

۲۴۲۷. واجب مشتق تابع  $y = 2 \sin^2(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})$  به ازای  $x = \frac{\pi}{3}$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       ۲  $-\frac{1}{2}$       ۳  $-\frac{1}{4}$       ۴  $-\frac{1}{8}$

۲۴۲۸. تسکین مقدار مشتق تابع  $y = \cos^2(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4})$  به ازای  $x = \frac{\pi}{3}$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{1}{4}$       ۲  $-\frac{1}{8}$       ۳  $\frac{1}{8}$       ۴  $\frac{1}{4}$

۲۴۲۹. واجب مقدار مشتق تابع  $y = \tan^3 x - \cot 2x$  در  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{4}{3}$       ۲  $2$       ۳  $\frac{8}{3}$       ۴  $4$

۲۴۳۰. واجب اگر  $f(x) = (\cot 4x + 3 \tan 4x)^3$  باشد، مقدار  $f'(\frac{\pi}{16})$  کدام است؟

- ۱  $96$       ۲  $-96$       ۳  $-384$       ۴  $768$

۲۴۳۱. واجب خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = 1 + \tan 2x$  در کدام نقاط موازی خط  $y = 2x$  است؟

- ۱  $x = k\pi$       ۲  $x = \frac{k\pi}{2}$       ۳  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$       ۴  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۲۴۳۲. واجب اگر  $f'(x) = 1 - 2x$  باشد، مشتق تابع  $y = f(\sin^2 x)$  در  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{4}$       ۲  $\frac{1}{6}$       ۳  $\frac{1}{8}$       ۴  $\frac{1}{12}$

۲۴۳۳. واجب اگر  $f(x) = \sin 2x$  و  $g(x) = \sqrt{x}$ ، مقدار مشتق تابع  $g \circ f$  در  $x = \frac{\pi}{12}$  کدام است؟

- ۱  $\sqrt{\frac{3}{2}}$       ۲  $\sqrt{\frac{4}{3}}$       ۳  $\sqrt{\frac{3}{4}}$       ۴  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

۲۴۳۴. واجب اگر  $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{5x-9}$  و  $f(x) = \sin^2 \pi x$  باشد، مشتق تابع  $f \circ g$  به ازای  $x = 2$  کدام است؟

- ۱  $\frac{5\pi}{8}$       ۲  $\frac{5}{8}$       ۳  $\frac{3}{4}\pi$       ۴  $\frac{3}{4}$

۲۴۳۵. تسکین اگر  $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x+2}$  و  $g(x) = 2 \cos x$  باشد، حاصل  $(f \circ g)'(\frac{3\pi}{4})$  کدام است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۲  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       ۳  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۴  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

۲۴۳۶. واجب اگر  $f(x) = \sin \pi x$  باشد، مقدار  $(f \circ f)'(1)$  کدام است؟

- ۱  $\pi^2$       ۲  $2\pi$       ۳  $-\pi^2$       ۴  $-2\pi$

۲۴۳۷. واجب اگر  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  و  $g(x) = \sqrt{x+1}$  باشد، مقدار  $(g \circ f)'(\frac{\pi}{3})$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{1}{3}$       ۲  $-\frac{\sqrt{3}}{9}$       ۳  $\frac{1}{3}$       ۴  $\frac{\sqrt{3}}{9}$

۲۴۳۸. واجب اگر  $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{4} \cos \pi x$  باشد، مشتق تابع  $y = f(f(x))$  در  $x = \frac{1}{3}$  چند برابر  $3\sqrt{3}$  است؟

- ۱  $\frac{\pi}{8}$       ۲  $\frac{\pi}{4}$       ۳  $\frac{\pi^2}{8}$       ۴  $\frac{\pi^2}{4}$

۲۴۳۹. واجب اگر  $f(1) = 1/5$  و  $f(x) = \tan(3x - 2f(x))$  باشد، مقدار  $f'(1)$  کدام است؟

- ۱  $1$       ۲  $2$       ۳  $3$       ۴  $4$

۲۴۴۰. واجب اگر  $f$  تابع مشتق پذیر و  $g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$  و  $g'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$  باشد، مقدار  $f'(2)$  چقدر است؟

- ۱  $\frac{1}{2}$       ۲  $\frac{2}{3}$       ۳  $\sqrt{3}$       ۴  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

داخل - ۹۳

داخل - ۹۱

خارج - ۱۴۰۱



ریاضی داخل - ۹۹

۲۴۴۱. اگر  $f$  یک تابع مشتق پذیر و  $g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$  و  $g'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$  باشد، مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{1}{4}$       ۲  $\frac{1}{4}$       ۳  $\frac{1}{2}$       ۴  $\frac{1}{3}$

۲۴۴۲. مقدار تابع  $f$  و مشتق آن در  $x=0$  و  $x=1$  به صورت جدول مقابل است، مشتق تابع  $y = \frac{f(1 - \Delta \tan x)}{\cos x + f(x)}$  در  $x=0$  کدام است؟

x	f(x)	f'(x)
0	9	-2
1	-3	1/5

۱ 0/64

۲ 0/81

۳ -0/64

۴ -0/81

۲۴۴۳. اگر  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  و  $g(x) = 6 + 2 \cos^2 \frac{\pi x}{4}$  باشد، مشتق تابع  $y = f(x + g(x))$  در  $x=1$  کدام است؟

- ۱  $\frac{\pi - 2}{96}$       ۲  $\frac{\pi + 2}{96}$       ۳  $\frac{\pi - 2}{24}$       ۴  $\frac{\pi + 2}{24}$

ریاضی خارج - ۹۹

۲۴۴۴. اگر  $f$  یک تابع مشتق پذیر،  $g(x) = f(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x})$  و  $g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  باشند، مقدار  $f'(\frac{1}{3})$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{2}{3}$       ۲  $-\frac{3}{4}$       ۳  $-\frac{4}{3}$       ۴  $-\frac{3}{2}$

۲۴۴۵. اگر  $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x - 1} \cot \frac{\pi}{x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  کدام است؟

- ۱  $\pi\sqrt{2}$       ۲  $\pi$       ۳  $-\pi\sqrt{2}$       ۴  $-\pi$

۲۴۴۶. مشتق تابع  $f(x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$  در  $x = \frac{\pi}{8}$  کدام است؟

- ۱ 2      ۲ -2      ۳ 4      ۴ -4

خارج - ۹۶

۲۴۴۷. مشتق تابع  $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

- ۱ -1      ۲ صفر      ۳ 1      ۴ 2

۲۴۴۸. مشتق تابع  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

- ۱  $-\sqrt{2}$       ۲ صفر      ۳  $\sqrt{2}$       ۴  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

داخل - ۹۷

۲۴۴۹. مشتق عبارت  $\sin^4 x + \cos^4 x$  به ازای  $x = \frac{\pi}{8}$  کدام است؟

- ۱ -1      ۲  $-\frac{1}{2}$       ۳ 1      ۴  $\frac{1}{2}$

۲۴۵۰. مشتق تابع  $f(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\sin x + \cos x}$  در  $x = -\frac{\pi}{4}$  کدام است؟

- ۱  $1 + \sqrt{2}$       ۲  $\sqrt{2} - 1$       ۳  $\sqrt{2}$       ۴  $2\sqrt{2}$

۲۴۵۱. اگر  $f(x) = 12 \sin x \cos x \cos^2 x$  باشد، مقدار  $f'(\frac{\pi}{3})$  کدام است؟

- ۱  $-6\sqrt{3}$       ۲  $-2\sqrt{3}$       ۳  $6\sqrt{3}$       ۴  $2\sqrt{3}$

۲۴۵۲. مشتق تابع  $f(x) = \cos^2 \pi\sqrt{x} - \sin^2 \pi\sqrt{x}$  به ازای  $x = \frac{1}{9}$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$       ۲  $\frac{2\pi\sqrt{3}}{2}$       ۳  $-3\pi\sqrt{3}$       ۴  $3\pi\sqrt{2}$

۲۴۵۳. اگر  $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x}$  باشد، مقدار  $f''(\frac{\pi}{6})$  کدام است؟

- ۱ 1      ۲ 2      ۳ 3      ۴ 4

۲۴۵۴. مشتق تابع  $y = (1 + \tan^2 x) \cos^4 x - \sin^2 x$  به ازای  $x = \frac{\pi}{8}$  کدام است؟

- ۱  $-\sqrt{2}$       ۲  $\sqrt{2}$       ۳  $-2\sqrt{2}$       ۴  $2\sqrt{2}$

۲۴۵۵. در تابع  $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{9}) \cos(x + \frac{\pi}{9}) - \sin(x + \frac{\pi}{9}) \cos(3x + \frac{\pi}{9})$  مقدار  $f'(\frac{\pi}{11})$  کدام است؟

- ۱  $\sqrt{3}$       ۲  $\sqrt{2}$       ۳ 2      ۴  $\sqrt{3} - 1$

۲۴۵۶. مشتق تابع  $f(x) = \cos^3 x \cos 2x - \sin^3 x \sin 2x$  در  $x = \frac{\pi}{15}$  کدام است؟

- ۱  $5\sqrt{3}$     ۲  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$     ۳  $-5\sqrt{3}$     ۴  $-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

۲۴۵۷. واجب اگر  $f(x) = 3\cos^2 2x + \sqrt{9\sin^2 x - 1}$  و  $g(x) = 3\cos^2 2x - \sqrt{9\sin^2 x - 1}$  باشد، حاصل  $g'(\frac{\pi}{4})f(\frac{\pi}{4}) + g(\frac{\pi}{4})f'(\frac{\pi}{4})$  کدام است؟

- ۱ ۶    ۲ ۹    ۳ -۶    ۴ -۹

۲۴۵۸. واجب مشتق تابع  $f(x) = \frac{2 \tan x (1 + \cos 4x)}{1 - \tan^2 x}$  در  $x = \frac{\pi}{16}$  کدام است؟

- ۱  $2\sqrt{2}$     ۲  $\sqrt{2}$     ۳  $-2\sqrt{2}$     ۴  $-\sqrt{2}$

۲۴۵۹. اگر  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sin x}$  و  $g(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x}{x + 1}$  آنگاه مقدار  $2ff'g + g'f^2$  به ازای  $x = 1$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{2}$     ۲  $\frac{1}{4}$     ۳  $-\frac{1}{4}$     ۴ ۱

۲۴۶۰. واجب اگر  $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\pi}{4} + h) - f(\frac{\pi}{4})}{h}$  کدام است؟

- ۱ ۴    ۲ ۸    ۳ -۴    ۴ -۸

۲۴۶۱. واجب اگر  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  و  $f(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x \cos x$  باشد، مقدار  $f'(\frac{1}{4})$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$     ۲  $\frac{\sqrt{3}}{6}$     ۳  $-\frac{1}{2}$     ۴  $\frac{1}{4}$

### معادله خط مماس

برای نوشتن معادله خط مماس لازم یک نقطه از خط و شیب خط را داشته باشیم. برای پیدا کردن شیب خط هم که از مشتق استفاده می‌کنیم.

۲۴۶۲. واجب معادله خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 3x$  در نقطه  $(1, 4)$  کدام است؟

- ۱  $y = 3x - 4$     ۲  $y = 3x + 4$     ۳  $y = 5x - 1$     ۴  $y = 5x + 1$

۲۴۶۳. واجب خطی با شیب -۱ مماس بر نمودار تابع  $f(x) = 2x^2 + 3x$  است. طول نقطه تماس کدام است؟

- ۱ -۱    ۲ ۲    ۳ ۳    ۴ -۵

۲۴۶۴. واجب عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \sqrt{x^2 + 3x}$  در نقطه  $x = 1$  واقع بر آن کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{4}$     ۲  $\frac{3}{4}$     ۳  $\frac{7}{4}$     ۴  $\frac{9}{4}$

۲۴۶۵. واجب خطی با شیب -۲ بر نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  مماس است. فاصله نقطه  $A(1, 4)$  از این خط کدام است؟

- ۱  $\sqrt{3}$     ۲ ۲    ۳  $\sqrt{5}$     ۴  $\sqrt{6}$

۲۴۶۶. واجب خطی با شیب ۳ بر منحنی به معادله  $y = 2x + \sqrt{x}$  مماس است. معادله این خط کدام است؟

- ۱  $4y = 3x + 1$     ۲  $4y = 12x + 1$     ۳  $y = 3x + 1$     ۴  $y = 12x + 1$

۲۴۶۷. واجب خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \frac{2}{1-x}$  در نقطه‌ای به طول -۱ واقع بر آن کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- ۱ اول    ۲ دوم    ۳ سوم    ۴ چهارم

۲۴۶۸. واجب خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$  در نقطه  $x = 4$  واقع بر آن، محور  $y$ ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ -۴    ۲ -۱    ۳ ۲    ۴ ۳

۲۴۶۹. واجب اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 5$  باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = f(x)$  در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  واقع بر منحنی کدام است؟

- ۱ -۳    ۲ -۸    ۳ -۵    ۴ -۱

۲۴۷۰. واجب خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$  در نقطه  $(2, \frac{1}{2})$  محورهای مختصات را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع می‌کند. اگر  $O$  مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث  $OAB$  کدام است؟

- ۱  $\frac{8}{3}$     ۲  $\frac{5}{6}$     ۳  $\frac{7}{6}$     ۴  $\frac{4}{3}$

**۲۴۷۱. واجب** خط مماس بر منحنی به معادله  $y = x^3 - x^2$  در نقطه  $x = 1$  واقع بر آن، منحنی را در نقطه دیگر A قطع می‌کند. طول نقطه A کدام است؟

- ۱ | -۱  
۲ | -۲  
۳ | -۳  
۴ | ۲

**۲۴۷۲. واجب** معادله خط مماس بر منحنی  $y = \frac{x+4}{x-2}$  در نقطه تلاقی منحنی با نیمساز ناحیه اول کدام است؟

- ۱ |  $2y - 3x = 20$   
۲ |  $3y + 2x = 20$   
۳ |  $2y + 3x = 20$   
۴ |  $3y - 2x = 20$

**۲۴۷۳. واجب** خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  در نقطه‌ای به طول  $\alpha$  واقع بر آن، از نقطه  $(-1, 0)$  می‌گذرد،  $\alpha$  کدام است؟

- ۱ | -۱  
۲ | ۱  
۳ |  $-\frac{3}{2}$   
۴ | ۲

**۲۴۷۴. واجب** معادله خط مماس بر نمودار  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$  در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت  $4y - 3x = n$  است. مقدار  $m + n$  کدام است؟

داخل - ۱۴۰۱

- ۱ | -۳  
۲ | -۲  
۳ | ۲  
۴ | ۳

**۲۴۷۵. واجب** کدام خط زیر به موازات نیمساز ربع اول و سوم بر منحنی  $f(x) = -x^2 + 3x + 1$  مماس می‌شود؟

- ۱ |  $y - x = 4$   
۲ |  $y - x = 2$   
۳ |  $x - y = 4$   
۴ |  $x - y = 2$

**۲۴۷۶. واجب** خط مماس بر منحنی  $y = -x^2 + 4x + 1$  که با خط  $y = 2x + 5$  موازی است، محورهای مختصات را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. طول

پاره خط AB کدام است؟

- ۱ |  $\sqrt{4}$   
۲ | ۲  
۳ |  $\sqrt{5}$   
۴ |  $2\sqrt{2}$

**۲۴۷۷. تست** خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = x^3 - 3x + 4$  در نقاط A و B روی نمودار موازی محور xها است. طول پاره خط AB کدام است؟

- ۱ | ۵  
۲ |  $2\sqrt{5}$   
۳ |  $2\sqrt{3}$   
۴ | ۳

**۲۴۷۸. تست** چه تعداد از خط‌های افقی زیر بر منحنی به معادله  $y = x^4 - 2x^2 + 3$  مماس هستند؟

- الف)  $y = -1$   
ب)  $y = 2$   
پ)  $y = 3$   
ت)  $y = 0$   
۱ | ۱  
۲ | ۲  
۳ | ۳  
۴ | ۴

 هر وقت دو خط بر هم عمود باشند، شیب آن‌ها عکس و قرینه هم است.

خارج - ۱۴۰۱

**۲۴۷۹. واجب** در کدام نقطه از منحنی  $y = x^2 - 4x + 5$ ، خط مماس بر منحنی، بر  $6y - 3x = 1$  عمود است؟

- ۱ |  $(-2, 17)$   
۲ |  $(-1, 10)$   
۳ |  $(1, 2)$   
۴ |  $(2, 1)$

**۲۴۸۰. iq** خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = x^2 + 3x + 4$  در یک نقطه روی منحنی بر خط  $d$  به معادله  $x + 4y = 12$  عمود است. خط مماس بر منحنی

و خط  $d$  در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع‌اند؟

- ۱ |  $\frac{4}{9}$   
۲ |  $-\frac{7}{17}$   
۳ |  $-\frac{3}{17}$   
۴ |  $-\frac{3}{5}$

**۲۴۸۱. واجب** خط مماس بر منحنی به معادله  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$  بر خط به معادله  $x - 3y = 2$  عمود است. این خط مماس از نقطه‌ای با کدام مختصات

می‌گذرد؟

- ۱ |  $(1, 3)$   
۲ |  $(1, 4)$   
۳ |  $(2, -6)$   
۴ |  $(2, -4)$

**۲۴۸۲. واجب** در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$  و دامنه  $[0, 8]$  خط مماس بر نمودار آن موازی پاره خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل

خارج - ۹۸

می‌کند. این خط مماس محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ | -۲  
۲ |  $-1/5$   
۳ | -۱  
۴ |  $-5/5$

**۲۴۸۳. واجب** از نقاطی به طول‌های ۱ و -۱ واقع بر نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + ax + 1$  دو مماس عمود برهم بر نمودار f قابل رسم است. مقدار a کدام است؟

- ۱ |  $\pm 1$   
۲ |  $\pm \sqrt{2}$   
۳ |  $\pm \sqrt{3}$   
۴ |  $\pm 2$

**۲۴۸۴. تست** خط d موازی محور xها، قرینه سهمی  $y = x^2 + 1$  نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر

ریاضی نوبت دوم - ۱۴۰۲

هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ |  $1/25$   
۲ |  $3/25$   
۳ |  $5/25$   
۴ |  $2/25$

خارج - ۱۴۰۱

**۲۴۸۵ واجب** اگر  $y = 2x + b$  بر نمودار  $y = \frac{x+a}{ax+1}$  در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار  $a - b$  کدام است؟

- ۱ صفر      ۲  $\frac{1}{2}$       ۳  $\frac{2}{3}$       ۴ ۱

خارج - ۹۷

**۲۴۸۶ واجب** به ازای کدام مقدار  $a$ ، خط به معادله  $y = 5x + a$  بر نمودار تابع  $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$  مماس است؟

- ۱ -۲      ۲ -۳      ۳ ۲      ۴ ۳

**۲۴۸۷ واجب** خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  و  $g(x) = ax^2 + bx$  در نقطه  $x=2$  مشترک اند. مقدار  $b$  کدام است؟

خارج - ۹۹

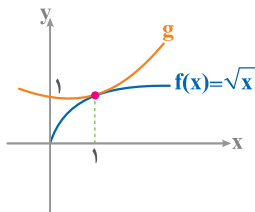
- ۱ ۴      ۲ ۵      ۳ ۶      ۴ ۷

**۲۴۸۸ واجب** فرض کنید نمودارهای دو تابع  $y = x\sqrt{x}$  و  $y = x^2 + ax + b$  در یک نقطه مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار  $b$  کدام است؟

ریاضی خارج - ۹۹

- ۱ ۸      ۲ ۹      ۳ ۱۰      ۴ ۱۲

**۲۴۸۹ iQ** نمودار دو تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g$  به صورت مقابل است. مشتق تابع  $y = \frac{g(x)}{\sqrt{x+1}}$  در نقطه  $x=1$  کدام است؟



- ۱  $\frac{1}{12}$       ۲  $\frac{1}{6}$       ۳  $-\frac{1}{12}$       ۴  $-\frac{1}{6}$

**۲۴۹۰ iQ** خط به معادله  $y = 3x - 2$  در نقطه  $x=2$  بر منحنی پیوسته  $y = f(x)$  مماس است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 4f(x)}{x-2}$  کدام است؟

- ۱ ۳      ۲ ۶      ۳ ۱۲      ۴ ۱۵

**۲۴۹۱ iQ** خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$  بر خطی به معادله  $2y + 14x = 9$  عمود است. طول نقاط تماس کدام است؟

- ۱ -۳ و -۲      ۲ -۳ و ۴      ۳ ۳ و -۴      ۴ ۳ و -۲

**۲۴۹۲ iQ** به ازای کدام مقدار  $b$ ، خط  $y = -3x + b$  بر منحنی  $f(x) = x^3 - 3x^2$  مماس است؟

- ۱ -۲      ۲ -۱      ۳ ۱      ۴ ۲

**۲۴۹۳ iQ** دو نقطه  $A$  و  $B$  به طول‌های ۴ و ۸ بر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$  مفروض اند. خط مماس بر منحنی در نقطه  $C$  واقع بر آن موازی خط  $AB$  است. طول نقطه  $C$  کدام است؟

- ۱ ۶      ۲  $4\sqrt{2}$       ۳ ۵      ۴  $2\sqrt{6}$

**۲۴۹۴ iQ** به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، خط‌هایی به معادله  $y = mx + b$  بر نمودار تابع  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  مماس هستند؟

- ۱  $(-\infty, 1]$       ۲  $(3, +\infty)$       ۳  $[-1, 2]$       ۴  $[2, +\infty)$

**۲۴۹۵ iQ** چه تعداد از خط‌های زیر را می‌توان بر نمودار تابع  $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}$  مماس کرد؟

الف) خطی موازی محور  $x$  ها      ب) خط  $y = 2x - 1$       پ) خطی موازی نیمساز ربع دوم و چهارم

- ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ صفر

**۲۴۹۶ iQ** به ازای کدام مقدار  $a$  خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax^2 - a}{x^2 - 4}$  در نقطه‌ای به طول  $x=1$  واقع بر آن، بر خط  $d$  به معادله  $3x - 2y + 1 = 0$  عمود است؟

- ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴

**۲۴۹۷ تسلط** معادله خط مماس بر منحنی  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$  در نقطه برخورد آن با محور  $x$ ‌ها کدام است؟

- ۱  $y = x - 1$       ۲  $x = 1$       ۳  $y = -x$       ۴ خط مماس وجود ندارد.

**۲۴۹۸ iQ** خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  در دو نقطه  $A$  و  $B$  موازی خط  $y = 3x + 5$  است. طول پاره خط  $AB$  کدام است؟

- ۱  $\sqrt{10}$       ۲  $2\sqrt{10}$       ۳  $\sqrt{20}$       ۴  $2\sqrt{20}$

۱۰۴۹۲. به ازای کدام مقدار  $a$  خط به معادله  $y = -3x + 2$  بر منحنی به معادله  $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$  مماس است؟

- ۱ | -۱      ۲ | صفر      ۳ | ۱      ۴ | ۲

۱۰۴۹۳. سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  از نقطه  $(0, 1)$  می‌گذرد و خط مماس بر آن در نقطه  $(1, 0)$  برابر  $y = x - 1$  است. عرض رأس سهمی کدام است؟

- ۱ |  $\frac{3}{2}$       ۲ |  $\frac{3}{4}$       ۳ |  $-\frac{1}{8}$       ۴ |  $-\frac{1}{4}$

۱۰۴۹۴. از دو نقطه بر روی نمودار تابع  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ ، دو خط مماس موازی با نیمساز ناحیه اول و سوم رسم می‌کنیم. فاصله این دو خط مماس کدام است؟

- ۱ |  $\sqrt{2}$       ۲ |  $2\sqrt{2}$       ۳ |  $\sqrt{3}$       ۴ |  $2\sqrt{3}$

۱۰۴۹۵. فاصله بین خطوط افقی مماس بر نمودار تابع  $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$  کدام است؟

- ۱ | ۳      ۲ | ۴      ۳ | ۷      ۴ | ۸

۱۰۴۹۶. خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$  با بیشترین شیب ممکن محور  $y$ ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ |  $-\frac{4}{3}$       ۲ |  $-\frac{5}{3}$       ۳ |  $-\frac{7}{3}$       ۴ |  $-\frac{8}{3}$

۱۰۴۹۷. چه تعداد از عبارات زیر در مورد تابع  $f(x) = \frac{\pi \sin x}{x}$  درست است؟

(الف) خطوطی که در نقاط  $x = \pi$  و  $x = -\pi$  بر نمودار تابع مماس می‌شوند، بر هم عمودند.

(ب) تابع  $f$  در  $x = 0$  مشتق پذیر است.

(پ) خط مماس بر نمودار در بیشمار نقطه موازی محور  $x$ ها است.

- ۱ | ۱      ۲ | ۲      ۳ | ۳      ۴ | صفر

۱۰۴۹۸. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \tan^2 x + \cos 2x$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  واقع بر آن کدام است؟

- ۱ |  $1 + \frac{\pi}{4}$       ۲ |  $1 - \frac{\pi}{4}$       ۳ |  $1 + \frac{\pi}{2}$       ۴ |  $1 - \frac{\pi}{2}$

۱۰۴۹۹. معادله خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \frac{1}{4} \cos 2x - \cos x$  در نقطه‌ای به طول  $x = \frac{\pi}{3}$  واقع بر آن کدام است؟

- ۱ |  $y = -\frac{3}{4}$       ۲ |  $y = \frac{3}{4}$       ۳ |  $y = -x + \frac{\pi}{3} - 1$       ۴ |  $y = x + \frac{\pi}{3}$

۱۰۵۰۰. به ازای چه مقداری از  $m$  خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \tan^3 x$  موازی خط  $y = mx + 2$  است؟

- ۱ |  $m \leq 2$       ۲ |  $m \geq 2$       ۳ |  $m \leq 3$       ۴ |  $m \geq 3$

۱۰۵۰۱. چه تعداد از خط‌های زیر را می‌توان بر نمودار تابع  $f(x) = \sin x + \cos x$  مماس کرد؟

(الف) خط  $y = 3x - 1$       (ب) خطی موازی محور  $x$ ها      (پ) خطی موازی نیمساز ربع دوم و چهارم

- ۱ | ۱      ۲ | ۲      ۳ | ۳      ۴ | صفر

۱۰۵۰۲. امتداد خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{3}$  با نیمساز ربع سوم زاویه  $\alpha$  می‌سازد. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

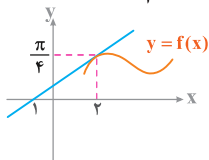
- ۱ |  $\frac{1}{5}$       ۲ |  $\frac{1}{2}$       ۳ |  $\frac{5}{2}$       ۴ |  $\frac{3}{5}$

۱۰۵۰۳. در نقطه تلاقی منحنی‌های  $f(x) = \sin x + \frac{1}{4} \cos x$  و  $g(x) = \frac{3}{4} \sin x$  در بازه  $[0, \pi]$  خط مماس بر منحنی  $f(x)$  رسم می‌شود. این خط، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

ریاضی داخل - ۱۴۰۱

- ۱ |  $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}$       ۲ |  $\frac{\pi}{2} - 1$       ۳ |  $\frac{\pi}{4} - 3$       ۴ |  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}$

۱۰۵۰۴. نمودار تابع  $f$  و خط مماس بر آن در  $x = 2$  به صورت مقابل است. مشتق تابع  $g(x) = \cos^2(f(x) + \frac{\pi}{6})$  در  $x = 2$  کدام است؟



- ۱ |  $\frac{\pi}{8}$       ۲ |  $-\frac{\pi}{8}$       ۳ |  $\frac{\pi}{24}$       ۴ |  $-\frac{\pi}{24}$

حال می‌خواهیم ببینیم  $t_n$  به ازای چه مقدار  $n$  برابر صفر می‌شود، پس:

$$-3n + 132 = 0 \Rightarrow 3n = 132 \Rightarrow n = 44$$

۱۴۲

جمله اول دنباله حسابی داده شده برابر ۶- و قدرنسبت آن برابر ۴ است. پس جمله عمومی این دنباله حسابی برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = -6 + (n-1)(4) = 4n - 10$$

حال می‌خواهیم ببینیم ۶۲ چندمین جمله این دنباله است، پس:

$$t_n = 62 \Rightarrow 4n - 10 = 62 \Rightarrow 4n = 72 \Rightarrow n = 18$$

پس این دنباله دارای ۱۸ جمله است.

۱۴۳

جمله اول دنباله حسابی  $74, 67, 60, \dots$  برابر ۷۴ و قدرنسبت آن ۷- است. پس جمله عمومی این دنباله برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 74 + (n-1)(-7) = -7n + 81$$

حال برای این که مشخص کنیم چند جمله این دنباله نامنفی است، باید جمله عمومی را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم، پس داریم:

$$t_n \geq 0 \Rightarrow -7n + 81 \geq 0 \Rightarrow 7n \leq 81 \Rightarrow n \leq \frac{81}{7} \Rightarrow n \leq 11.57 \dots$$

بنابراین مقادیر  $n=1, 2, \dots, 11$  قابل قبول هستند؛ یعنی دنباله دارای ۱۱ جمله نامنفی است.

۱۴۴

با توجه به این که جمله اول دنباله برابر ۳- و جمله چهارم آن برابر ۹ است، قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{t_4 - t_1}{4 - 1} = \frac{9 - (-3)}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

بنابراین جمله هشتم برابر است با:

$$t_8 = t_1 + 7d \Rightarrow t_8 = -3 + 7(4) = 25$$

۱۴۵

قدرنسبت برابر است با:

$$d = \frac{t_{11} - t_7}{11 - 7} = \frac{43 - 15}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

حال از آن جایی که جمله هفتم برابر ۱۵ است، پس:

$$t_7 = t_1 + 6d \Rightarrow 15 = t_1 + (6 \times 7) \Rightarrow t_1 = 15 - 42 = -27$$

بنابراین جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = -27 + (n-1)(7) \Rightarrow t_n = 7n - 34$$

حال باید مشخص کنیم به ازای کدام مقدار  $n$ ، بزرگ‌ترین جمله دورقمی به دست می‌آید:

$$t_n < 100 \Rightarrow 7n - 34 < 100 \Rightarrow 7n < 134 \Rightarrow n < 19.14 \dots$$

چون  $n$  نشان دهنده شماره جمله‌ها است، پس بزرگ‌ترین مقدار قابل قبول  $n=19$  می‌باشد، یعنی جمله نوزدهم بزرگ‌ترین جمله دورقمی این دنباله است.

۱۴۶

$$t_7 = -t_8 \Rightarrow t_7 + t_8 = 0 \Rightarrow \underbrace{(t_1 + d) + (t_1 + 7d)}_{2t_1 + 8d = 0} = 0 \Rightarrow t_1 + 4d = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + 8d = 12 \\ t_1 + 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow 4d = 12 \Rightarrow d = 3$$

۱۴۷

با استفاده از اتحاد مزدوج، رابطه داده شده در صورت سؤال را باز می‌کنیم:

$$t_6^2 - t_7^2 = 48 \Rightarrow \underbrace{(t_6 - t_7)}_{2d} \underbrace{(t_6 + t_7)}_{2t_5} = 48 \Rightarrow 2d \times 6 = 48 \Rightarrow d = 4$$

۱۳۴

چون آخرین عدد هر دسته مربع کامل است، پس عدد آخر دسته نهم برابر  $9^2 = 81$  و عدد آخر دسته هشتم  $8^2 = 64$  است. بنابراین عدد اول دسته نهم برابر  $64 + 1 = 65$  است، پس واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر دسته نهم برابر است با:

$$\frac{65 + 81}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

۱۳۵

اعداد طبیعی فرد به طریقی دسته‌بندی شده‌اند که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد، پس جمله آخر در دسته چهارم برابر  $4^2 = 16$  و جمله اول آن  $1 + 2 + \dots + 4 = 10$  است:

$$1 + 2 + \dots + 4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

بنابراین  $82^{\text{امین}}$  عدد فرد را می‌خواهیم که برابر است با:

$$a_n = 2n - 1 \xrightarrow{n=82} 2 \times (82) - 1 = 163$$

۱۳۶

آخرین جمله هر دسته مربع کامل است، پس آخرین جمله دسته نهم برابر  $9^2 = 81$  و آخرین جمله دسته دهم برابر  $10^2 = 100$  است. پس دسته دهم شامل ۱۹ عدد طبیعی به صورت  $(100, 83, \dots, 82)$  است که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$82 + 83 + \dots + 100 = (1 + 2 + \dots + 100) - (1 + 2 + \dots + 81) = \frac{100 \times 101}{2} - \frac{81 \times 82}{2} = 1729$$

۱۳۷

چون اولین عدد هر دسته مربع کامل است، پس عدد اول دسته دهم برابر  $10^2 = 100$  و عدد اول دسته یازدهم  $13^2 = 169$  است. بنابراین پنج جمله آخر دسته دهم  $100, 117, 134, 151, 168$  هستند و میانگین آن‌ها برابر ۱۱۸ است.

۱۳۸

به جز دسته اول و دوم، اعداد آخر هر دسته تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ می‌دهند، یعنی  $6, 12, 24, 48, \dots$  پس عدد آخر دسته  $n^{\text{ام}}$  از رابطه  $6 \times 2^{n-2} = 3072$  به دست می‌آید. حال چون عدد آخر دسته دوازدهم برابر  $6 \times 2^9 = 3072$  است، پس عدد اول دسته سیزدهم برابر با  $3072 + 1 = 3073$  و عدد آخر دسته سیزدهم برابر با  $6 \times 2^{10} = 6144$  است. چون اعضای هر دسته، اعداد طبیعی متوالی‌اند، پس میانگین اعداد دسته سیزدهم برابر است با:

$$\frac{3073 + 6144}{2} = 4608.5$$

۱۳۹

$$a_9 - a_8 = 5d \Rightarrow 5 - 8 = 5d \Rightarrow d = -\frac{3}{5}$$

$$a_{16} = a_1 + 15d = 5 + 15 \left(-\frac{3}{5}\right) = 5 - 9 = -4$$

۱۴۰

دنباله  $4, 0, 4, 8, \dots$  یک دنباله حسابی با جمله اول ۴- و قدرنسبت ۴ است. بنابراین جمله عمومی دنباله برابر  $4n - 8$  است:

$$t_n = -4 + (n-1) \times 4 = 4n - 8$$

است. حال به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف)  $t_n = 4n - 8 = 135 \Rightarrow 4n = 143 \Rightarrow n = \frac{143}{4}$

ب)  $t_n = 4n - 8 = 145 \Rightarrow 4n = 153 \Rightarrow n = \frac{153}{4}$

پ)  $t_n = 4n - 8 = 148 \Rightarrow 4n = 156 \Rightarrow n = 39$

۱۴۱

دنباله داده شده یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۲۹ و قدرنسبت ۳- است. پس جمله عمومی آن برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 129 + (n-1)(-3) \Rightarrow t_n = -3n + 132$$

پاسخ نامه تشریحی فصل اول

۲ ۱۵۴

با فرض این که جمله اول این دنباله حسابی برابر  $t_1$  و قدرنسبت آن برابر  $d$  باشد، جمله یازدهم برابر است با:

$$t_{11} = t_1 + 10d$$

حال اگر از قدرنسبت این دنباله  $\frac{3}{4}$  کم کنیم، خواهیم داشت:

$$t_{11} = t_1 + 10(d - \frac{3}{4}) = t_1 + 10d - 15$$

۱ ۱۵۵

رابطه داده شده را ساده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{t_8}{t_5} = 3 \Rightarrow \frac{t_1 + 7d}{t_1 + 4d} = 3 \Rightarrow t_1 + 7d = 3t_1 + 12d \Rightarrow -2t_1 = 5d \Rightarrow t_1 = -\frac{5}{2}d$$

حال با قرار دادن  $d$  به جای  $t_1$ ، جمله‌های  $12$ ام و  $17$ ام را برحسب  $d$  می‌نویسیم و داریم:

$$\frac{t_{17}}{t_7} = \frac{t_1 + 16d}{t_1 + 6d} = \frac{-\frac{5}{2}d + 16d}{-\frac{5}{2}d + 6d} = \frac{11\frac{1}{2}d}{\frac{7}{2}d} = \frac{11}{7}$$

۳ ۱۵۶

قدرنسبت این دنباله حسابی برابر  $d = 6 - 3 = 3$  می‌باشد. پس جمله سوم آن برابر ۹ و جمله چهارم آن برابر ۱۲ است:

$$7 + y = 9 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2y = 12 \Rightarrow x + 2(2) = 12 \Rightarrow x = 8$$

برای به دست آوردن  $t_8$  داریم:

$$t_8 = t_1 + 7d \Rightarrow t_8 = 3 + 7(3) = 24$$

۲ ۱۵۷

با توجه به جمله‌های داده شده داریم:

$$1) t_7 = t_1 + d \Rightarrow 2x - 1 = x + 1 + d \Rightarrow x = d + 2$$

$$2) t_5 = t_1 + 4d \Rightarrow 4x = x + 1 + 4d \Rightarrow 4d = 3x - 1$$

با جایگذاری معادله به دست آمده از ۱ در ۲ داریم:

$$4d = 3(d + 2) - 1 \Rightarrow d = 5$$

۱ ۱۵۸

قدرنسبت دنباله حسابی  $2, 5, 8, \dots$  برابر ۳ است. چون جملات  $t_1, t_4, t_7, \dots$  نیز دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند، پس قدرنسبت برابر است با:

$$d' = t_4 - t_1 = (t_1 + 7d) - (t_1 + d) = 6d = 6(3) = 18$$

۴ ۱۵۹

اعداد طبیعی سه رقمی با یکان ۶ به صورت  $106, 116, 126, \dots, 996$  هستند که یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۰۶ و قدرنسبت ۱۰ می‌سازند. حال می‌خواهیم مشخص کنیم جمله چندم این دنباله برابر ۹۹۶ است. پس ابتدا جمله عمومی را به دست می‌آوریم و آن را برابر ۹۹۶ می‌گذاریم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 996 = 106 + (n-1)(10) \Rightarrow n-1 = 89 \Rightarrow n = 90$$

$890 = (n-1)(10)$

بنابراین ۹۰ عدد طبیعی سه رقمی با یکان ۶ وجود دارد.

۱ ۱۶۰

اعداد دو رقمی مضرب ۶ به صورت  $12, 18, 24, \dots, 96$  هستند که یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۲ و قدرنسبت ۶ می‌سازند. حال برای مشخص کردن تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۶ جمله عمومی را برابر ۹۶ می‌گذاریم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 96 = 12 + (n-1)(6) \Rightarrow 6n = 90 \Rightarrow n = 15$$

$6n + 6$

پس ۱۵ عدد طبیعی دو رقمی مضرب ۶ وجود دارد.

۳ ۱۴۸

تفاضل جمله دهم از دوازدهم برابر ۵ و مجموع آن‌ها برابر ۲۵ است، پس:

$$1) t_{12} - t_{10} = 5 \Rightarrow 2d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

$$2) t_7 + t_{10} = 25 \Rightarrow (t_1 + 11d) + (t_1 + 9d) = 25 \Rightarrow 2t_1 + 20d = 25$$

$$d = \frac{5}{2} \rightarrow 2t_1 + 20(\frac{5}{2}) = 25 \Rightarrow t_1 = -\frac{25}{2}$$

بنابراین جمله بیست و یکم این دنباله برابر است با:

$$t_{21} = t_1 + 20d \Rightarrow t_{21} = -\frac{25}{2} + 20(\frac{5}{2}) = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$$

۴ ۱۴۹

مجموع سه جمله اول به صورت  $t_1 + t_2 + t_3$  و مجموع چهار جمله بعدی به صورت  $t_4 + t_5 + t_6 + t_7$  می‌باشد. با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی، همه جمله‌ها را باز می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 9 \Rightarrow 3t_1 + 3d = 9 \\ t_4 + t_5 + t_6 + t_7 = 26 \Rightarrow 4t_1 + 18d = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 + 2d = 6 \\ 2t_1 + 9d = 13 \end{cases} \Rightarrow d = 1, t_1 = 2$$

بنابراین جمله دهم برابر است با:

$$t_{10} = t_1 + 9d = 2 + 9(1) = 11$$

۱ ۱۵۰

ابتدا با داشتن جمله اول و چهارم قدرنسبت را به دست می‌آوریم. در این دنباله جمله اول برابر ۱ و جمله چهارم برابر ۳ است. پس:

$$t_4 = t_1 + 3d \Rightarrow 3 = 1 + 3d \Rightarrow 3d = 2 \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

حال با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی، جملات را باز می‌کنیم و داریم:

$$\frac{t_{10}}{t_7} = \frac{t_1 + 9d}{t_1 + 6d} = \frac{t_1 + 9d}{t_1 + 17d}$$

$$\frac{t_1 = 1}{d = \frac{2}{3}} \rightarrow \frac{1 + 9(\frac{2}{3})}{3 + 17(\frac{2}{3})} = \frac{\frac{41}{3}}{\frac{43}{3}} = \frac{41}{43}$$

۲ ۱۵۱

در تساوی  $t_1 + 2t_{10} = 63$  جمله دهم را با استفاده از جمله عمومی باز می‌کنیم و آن را برحسب  $t_1$  و  $d$  می‌نویسیم:

$$t_1 + 2(t_1 + 9d) = 63 \Rightarrow 3t_1 + 18d = 63 \xrightarrow{\div 3} t_1 + 6d = 21 \Rightarrow t_1 = 21 - 6d$$

۳ ۱۵۲

مجموع سه جمله اول به صورت  $t_1 + t_2 + t_3$  و مجموع سه جمله بعدی آن به صورت  $t_4 + t_5 + t_6$  می‌باشد. حال چون می‌دانیم مجموع سه جمله اول، ۴ برابر مجموع سه جمله بعدی است، جملات را باز می‌کنیم:

$$(t_1 + t_2 + t_3) = 4(t_4 + t_5 + t_6)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d)}_{3t_1 + 3d} = 4 \underbrace{(t_1 + 3d + t_1 + 4d + t_1 + 5d)}_{12t_1 + 48d}$$

$$\Rightarrow 9t_1 + 45d = 0 \xrightarrow{\div 9} t_1 + 5d = 0$$

از طرفی می‌دانیم  $t_6 = t_1 + 5d$  است، بنابراین جمله ششم برابر صفر است.

۲ ۱۵۳

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$t_7 - t_4 = 16 \Rightarrow \underbrace{(t_1 + 11d) - (t_1 + 3d)}_{8d} = 16 \Rightarrow d = 2$$

$$t_{10} - t_5 = (t_1 + 24d) - (t_1 + 9d) = 5d = 5 \times 2 = 10$$



۱۶۱

چون جملات داده شده، جملات متوالی یک دنباله حسابی صعودی هستند، پس  $3x$  واسطه حسابی بین  $2x-1$  و  $x+2$  است:

$$2(3x) = (2x-1) + (x+2) \Rightarrow 6x = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

پس  $t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 1, t_3 = -\frac{1}{3}$  بوده و قدرنسبت دنباله برابر  $\frac{4}{3}$  است. پس جمله بیست و دوم برابر است با:

$$t_{22} = t_1 + 21d = 1 + 21\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + 28 = 29$$

۱۶۲

با استفاده از قانون اندیس‌ها داریم:

$$2, a, b, c, d, e, 44 \Rightarrow 2 + 44 = a + e = b + d = 2c$$

چون  $2c = 44$ ، پس  $c = 22$  است. حال عبارت خواسته شده را به صورت زیر می‌نویسیم و داریم:

$$(a+e) - (b+d) + c = 44 - 44 + 22 = 22$$

۱۶۳

با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$A = \frac{t_1 + t_5 + t_9 + t_{11}}{t_7 + t_{12}} = \frac{2t_7 + 2t_9 + t_{11}}{2t_9} = \frac{5t_9}{2t_9} = \frac{5}{2}$$

۱۶۴

با توجه به صورت سؤال داریم:  $t_7 = 3t_1 \Rightarrow t_1 + d = 3t_1 \Rightarrow d = 2t_1$

از طرفی در صورت کسر رابطه  $2 \times 11 = 22 = 4 + 18 = 5 + 17 = \dots$  و در مخرج کسر رابطه  $2 \times 17 = 34 = 16 + 18$  بین شماره جملات برقرار است، پس با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$\frac{t_4 + t_5 + \dots + t_{18}}{t_{16} + t_{17} + t_{18}} = \frac{14t_{11} + t_{11}}{3t_{17}} = \frac{5t_{11}}{t_{17}} = 5 \times \frac{t_1 + 10d}{t_1 + 16d}$$

$$\frac{d=2t_1}{5} \times \frac{t_1 + 20t_1}{t_1 + 32t_1} = 5 \times \frac{21t_1}{33t_1} = 5 \times \frac{3 \times 7}{3 \times 11} = \frac{35}{11}$$

۱۶۵

مجموع دو جمله اول برابر ۷ و مجموع دو جمله آخر برابر ۱۷ است، پس:

$$(t_1 + t_7) + (t_4 + t_{10}) = 24 \Rightarrow (t_1 + t_{10}) + (t_4 + t_7) = 24$$

$$2t_4 + 2t_4 = 24 \Rightarrow t_4 = 6$$

حال مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم برابر است با:

$$t_7 + t_8 + t_9 = t_4 + t_4 + t_4 = 3t_4 = 3 \times 6 = 18$$

۱۶۶

با استفاده از قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_7 + t_7 + t_7 + t_8 + t_8 + t_7 + t_8 = 63 \Rightarrow 7t_8 = 63 \Rightarrow t_8 = 9$$

بنابراین چون مجموع اندیس‌های  $t_1$  و  $t_9$  برابر ۱۰ است، داریم:

$$t_1 + t_9 = 2t_5 = 2 \times 9 = 18$$

۱۶۷

سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت  $a-d, a, a+d$  در نظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله برابر ۱۵ است، پس:

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

پس سه جمله موردنظر به صورت  $5-d, 5, 5+d$  هستند. حال مجموع مربعات این سه جمله را برابر ۹۳ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\underbrace{(5-d)^2}_{25-10d+d^2} + \underbrace{5^2}_{25} + \underbrace{(5+d)^2}_{25+10d+d^2} = 93 \Rightarrow 75 + 2d^2 = 93 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

چون نمی‌دانیم دنباله موردنظر صعودی است یا نزولی، پس هر دو جواب ۳ و  $-3$  برای قدرنسبت قابل قبول هستند.

۱۶۸

سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت  $a-d, a, a+d$  در نظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله برابر ۲۱ است، پس:

$$(a-d) + a + (a+d) = 21 \Rightarrow 3a = 21 \Rightarrow a = 7$$

بنابراین سه جمله موردنظر به صورت  $7-d, 7, 7+d$  هستند. حال حاصل ضرب این سه جمله را می‌نویسیم و داریم:

$$\underbrace{(7-d)(7+d)}_{(49-d^2)}(7) = 315 \Rightarrow 49-d^2 = 45 \Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = \pm 2$$

چون دنباله صعودی است، پس فقط  $d=2$  قابل قبول است.

۱۶۹

با توجه به این‌که جمله اول دنباله برابر ۱۸ و جمله پنجم آن ۶۲ است، قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$18, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 62 \Rightarrow t_5 = t_1 + 4d = 18 + 4d = 62 \Rightarrow d = 11$$

بنابراین جمله سیزدهم برابر است با:  $t_{13} = t_1 + 12d = 18 + 12(11) = 150$

۱۷۰

وقتی بین دو عدد ۱۵ و ۲۷ سه واسطه حسابی قرار دهیم، جمله اول برابر ۱۵ و جمله پنجم برابر ۲۷ است:

$$15, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 27 \Rightarrow t_5 = 15 + 4d = 27 \Rightarrow 4d = 12 \Rightarrow d = 3$$

بنابراین جملات دنباله به صورت  $15, 18, 21, 24, 27$  است. حال با قراردادن پنج واسطه حسابی بین اعداد ۱۵ و ۲۷ داریم:

$$15, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 27 \Rightarrow t_7 = 15 + 6d = 27 \Rightarrow d = 2$$

بنابراین جملات دنباله در این حالت به صورت  $15, 17, 19, 21, 23, 25, 27$  است. در نتیجه مجموع دو واسطه بزرگ برابر  $24 + 25 = 49$  است.

۱۷۱

چون زاویه‌های مثلث تشکیل دنباله حسابی داده‌اند، آن‌ها را به صورت  $x-d, x, x+d$  در نظر می‌گیریم. [حتماً تا امروز به گوشتان خورده است که

مجموع زاویه‌های داخلی مثلث برابر ۱۸۰ درجه است]، بنابراین داریم:

$$(x-d) + x + (x+d) = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

پس حتماً یکی از زاویه‌های این مثلث  $60^\circ$  است.



۱۷۶ ۴

اگر جملات دنباله حسابی را با  $a_n$  و قدرنسبت آن را با  $d$  نمایش دهیم و هم چنین جملات الگوی خطی را با  $b_n$  و قدرنسبت آن را با  $d'$  نمایش دهیم داریم:

$$\left. \begin{aligned} a_4 = b_4 &\Rightarrow a_1 + 3d = b_1 + d' \\ a_8 = b_8 &\Rightarrow a_1 + 7d = b_1 + 6d' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4d = 5d' \Rightarrow d = \frac{5}{4}d'$$

هم چنین با توجه به این که  $b_1 = 0$  است، داریم:

حال نسبت جمله پنزدهم الگو به قدرنسبت دنباله حسابی را به دست می آوریم:

$$b_{15} = \frac{b_1 + 14d'}{d'} = \frac{0 + 14d'}{\frac{5}{4}d'} = \frac{14d'}{\frac{5}{4}d'} = \frac{56d'}{5d'} = \frac{56}{5}$$

۱۷۷ ۱

تعداد صدلی ها در ردیف ها، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۵ و قدرنسبت ۴ می دهند. بنابراین تعداد صدلی ها برابر  $t_n = 15 + (n-1) \times 4$  است و تعداد صدلی ها در ردیف بیستم برابر است با:

$$t_{20} = 15 + (20-1) \times 4 = 91$$

۱۷۸ ۱

نسبت جمله چهارم به قدرنسبت دنباله به صورت  $\frac{a+3d}{d} = \frac{a}{d} + 3$  است. پس باید مقدار  $\frac{a}{d}$  را به دست آوریم:

$$6a^2 = 5a^2 + 3a^2 \Rightarrow 6(a+d)^2 = 5(a+2d)a + 3(a+d)a$$

$$6a^2 + 12ad + 6d^2 = 5a^2 + 10ad + 3a^2 + 3ad$$

$$\Rightarrow 2a^2 + ad - 6d^2 = 0 \xrightarrow{+d^2} 2\frac{a^2}{d^2} + \frac{a}{d} - 6 = 0 \xrightarrow{\frac{a}{d}=t} 2t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (2t-3)(t+2) = 0 \Rightarrow t = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{d} = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{d} + 3 = 1, \frac{9}{2}$$

۱۷۹ ۲

با توجه به رابطه  $a_n = a_{n-2} + 4$  داریم:

$$a_n - a_{n-2} = 4 \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

از طرفی با توجه به رابطه داده شده در صورت سؤال داریم:

$$a_8^2 + 3a_8a_4 + 3a_8a_4 + a_4^2 = 27 \Rightarrow (a_8 + a_4)^2 = 27 \Rightarrow a_8 + a_4 = 3$$

$$\Rightarrow a_1 + 4d + a_1 + 2d = 3 \xrightarrow{d=2} 2a_1 + 14 = 3 \Rightarrow a_1 = -\frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow a_6 = a_1 + 5d = -\frac{11}{2} + 5 \times 2 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

۱۸۰ ۴

ابتدا رابطه داده شده را ساده می کنیم:

$$\sqrt{4a_1^2 - 4a_1 + 1} - a_1 = -1 \Rightarrow \sqrt{(2a_1 - 1)^2} = a_1 - 1 \Rightarrow |2a_1 - 1| = a_1 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 - 1 = a_1 - 1 \Rightarrow 2a_1 - a_1 = 0 \Rightarrow a_1 - d = 0 \Rightarrow a_1 = d \\ 2a_1 - 1 = 1 - a_1 \Rightarrow 2a_1 + a_1 = 2 \Rightarrow 3a_1 + d = 2 \end{cases}$$

از طرفی  $a_6 = -18$  می باشد، بنابراین در هر حالت قدرنسبت را می یابیم:

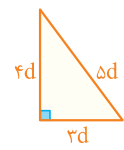
$$1 \begin{cases} a_1 = d \\ a_1 + 5d = -18 \xrightarrow{a_1=d} 6d = -18 \Rightarrow d = -3 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 3a_1 + d = 2 \\ a_1 + 5d = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + d = 2 \\ -3a_1 - 15d = +54 \end{cases} \xrightarrow{+} -14d = 56 \Rightarrow d = -\frac{56}{14} = -4$$

پس مجموع قدرنسبت ها برابر  $-7 = (-3) + (-4)$  می باشد.

۱۷۲ ۱

چون اضلاع مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی داده اند، آن ها را به صورت  $3d, 4d, 5d$  در نظر می گیریم و داریم:



$$\text{محیط مثلث} = 3d + 4d + 5d = 12d$$

پس نسبت محیط این مثلث به وتر آن برابر است با:

$$\frac{\text{محیط}}{\text{طول وتر}} = \frac{12d}{5d} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

۱۷۳ ۳

از آن جایی که قدرنسبت دو دنباله داده شده برابر ۵ و ۳ است، پس قدرنسبت دنباله جمله های مشترک برابر  $[3, 5] = 15$  است. حال چند جمله اول هر یک از دنباله ها را می نویسیم تا اولین جمله مشترک مشخص شود:

$$2, 7, 12, 17, \dots$$

$$\Rightarrow 17 = \text{اولین جمله مشترک}$$

$$8, 11, 14, 17, \dots$$

پس جمله عمومی دنباله مورد نظر برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 17 + (n-1) \times 15 = 15n + 2$$

بنابراین برای به دست آوردن تعداد اعداد سه رقمی داریم:

$$100 \leq 15n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997 \Rightarrow 6/100 \leq n \leq 66/100$$

$$\Rightarrow n = 7, 8, \dots, 66 \Rightarrow \text{تعداد جملات مشترک سه رقمی} = 66 - 7 + 1 = 60$$

تذکر

جمله های مشترک دو دنباله حسابی، خود تشکیل یک دنباله حسابی می دهند که جمله اول آن برابر اولین جمله مشترک دو دنباله اولیه و قدرنسبت آن برابر م.م.قدرنسبت های دو دنباله اولیه است.

۱۷۴ ۲

قدرنسبت و جمله اول هر یک از دنباله ها را مشخص می کنیم و داریم:

$$-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots \Rightarrow d_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} d = [3, 5] = 15 \\ 16 = \text{اولین جمله مشترک} \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله جمله های مشترک به صورت زیر است:

$$t_n = 16 + (n-1) \times 15 = 15n + 1$$

حال برای پیدا کردن کوچک ترین جمله سه رقمی این دنباله داریم:

$$t_n \geq 100 \Rightarrow 15n + 1 \geq 100 \Rightarrow 15n \geq 99 \Rightarrow n \geq 6/100 \Rightarrow \text{Min}(n) = 7$$

بنابراین کوچک ترین جمله سه رقمی جمله هفتم دنباله است:

$$t_7 = 15 \times 7 + 1 = 106$$

۱۷۵ ۱

قدرنسبت و جمله اول هر یک از دنباله ها را مشخص می کنیم و داریم:

$$-1, 1, 3, 5, 7, \dots \Rightarrow d_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} d = [2, 5] = 10 \\ 7 = \text{اولین جمله مشترک} \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله جمله های مشترک به صورت زیر است:

$$t_n = 7 + (n-1) \times 10$$

در نتیجه دهمین جمله مشترک برابر است با:

$$t_{10} = 7 + (10-1) \times 10 = 7 + 9 \times 10 = 97$$

۱۸۱

می‌دانیم در یک دنباله حسابی، مجموع  $n$  جمله اول از رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$  به دست می‌آید. بنابراین:

$$S_{14} = \frac{14}{2}[2(-12) + (14-1)5] = 7[-24 + 65] = 7 \times 41 = 287$$

۱۸۲

با توجه به آن که جمله پنجم برابر ۳ و قدر نسبت برابر  $-\frac{1}{4}$  است، جمله اول را به دست می‌آوریم:

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 3 = a_1 + 4(-\frac{1}{4}) \Rightarrow a_1 = 5$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 5 + (10-1)(-\frac{1}{4})] = 27.5$$

۱۸۳

$$1) S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + 9d] = -26 \Rightarrow 10a_1 + 45d = -26$$

$$2) \frac{a_{15}}{a_6} = 6 \Rightarrow a_1 + 14d = 6(a_1 + 5d) \Rightarrow 5a_1 + 16d = 0$$

با حل معادلات به دست آمده از ۱ و ۲ مقادیر  $a_1 = 6/4$  و  $d = -2$  به دست می‌آید:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 6/4 + (-20) = -13/2$$

۱۸۴

روابط داده شده را باز می‌کنیم:

$$1) S_{17} = 138 \Rightarrow \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) = 138 \Rightarrow 2a_1 + 16d = 23$$

$$2) a_6 = 10 \Rightarrow a_1 + 5d = 10$$

از روابط ۱ و ۲ مقدار  $a_1 = -5$  به دست می‌آید.

۱۸۵

ابتدا رابطه داده شده را باز می‌کنیم:

$$a_7 = \frac{1}{3}a_9 \Rightarrow 2a_7 = a_9 \Rightarrow 2a_1 + 12d = a_1 + 10d \Rightarrow a_1 = -10d$$

حال  $S_n$  را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = 0 \xrightarrow{a_1 = -10d} \frac{n}{2}[2(-10d) + (n-1)d] = 0$$

$$\Rightarrow -20d + (n-1)d = 0 \Rightarrow (n-1)d = 20d \Rightarrow n = 21$$

۱۸۶

قدرنسبت دنباله را  $d$  در نظر می‌گیریم و داریم:

$$S_{new} - S_{old} = \frac{10}{2}[2a_1 + 9(d+1)] - \frac{10}{2}[2a_1 + 9d]$$

$$= 5(2a_1 + 9d + 9) - 5(2a_1 + 9d) = 5 \times 9 = 45$$

۱۸۷

قبل از انجام تغییرات  $S_8$  را محاسبه می‌کنیم:

$$S_8 = \frac{8}{2}[2a + (8-1)d] = 8a + 28d$$

سپس به جای  $a$ ، مقدار  $a-2$  و به جای  $d$ ، مقدار  $d+1$  را جایگذاری می‌کنیم:

$$S'_8 = \frac{8}{2}[2(a-2) + (8-1)(d+1)] = 8a + 28d + 12$$

با مقایسه مجموع‌های به دست آمده واضح است که بعد از انجام تغییرات، به مجموع ۸ جمله اول، ۱۲ واحد اضافه شده است.

۱۸۸

مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا  $n$  از رابطه  $\frac{n(n+1)}{2}$  و مجموع اعداد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱ از رابطه  $n^2$  به دست می‌آید. پس مجموع ۲۰

عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱ برابر  $210 = \frac{20(20+1)}{2}$  و مجموع ۱۰ طبیعی

فرد متوالی با شروع از ۱ برابر  $100 = 10^2$  است. در این صورت، نسبت آن‌ها برابر است با:

$$\frac{210}{100} = 2.1$$

۱۸۹

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$S_{70} = 3S_{17} \Rightarrow \frac{70}{2}(2a_1 + 69d) = 3 \times \frac{17}{2}(2a_1 + 16d)$$

$$\Rightarrow 20a_1 + 190d = 3(17a_1 + 136d) \Rightarrow -8d = 16a_1 \Rightarrow d = -2a_1$$

از طرفی جمله سوم برابر ۶ است، پس:

$$a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \Rightarrow d = 4$$

$$\Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

۱۹۰

با توجه به جمله عمومی، جمله دهم برابر  $a_{10} = \frac{3}{4} \times 10 - 5 = 10$  و جمله بیستم برابر  $a_{20} = \frac{3}{4} \times 20 - 5 = 25$  است. از آن جایی که تعداد جملات دهم تا بیستم برابر ۱۱ است، خواهیم داشت:

$$S = \frac{11}{2}(a_{10} + a_{20}) = \frac{11}{2}(10 + 25) = \frac{11}{2} \times 35 = 192.5$$

**تذکر** مجموع  $n$  جمله متوالی در یک دنباله حسابی از رابطه زیر به دست

$$S_n = \frac{n}{2}(\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}) \text{ می‌آید.}$$

۱۹۱

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = \frac{1}{3}(a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10})$$

$$\Rightarrow 3 \times a_3 = a_8 \Rightarrow 3(a_1 + 2d) = a_1 + 7d \Rightarrow 2a_1 = d$$

$$\Rightarrow \frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 + 6d}{a_1} = \frac{a_1 + 12a_1}{a_1} = 13$$

**تذکر** اگر  $n$  فرد باشد مجموع  $n$  جمله متوالی در یک دنباله حسابی

$$S_n = n \times \text{جمله وسط} \text{ برابر است با:}$$

۱۹۲

جمله اول دنباله برابر ۸۲- و قدرنسبت آن برابر ۵ است. برای این که بینیم حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل مثبت شود، باید  $S_n$  را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم، پس خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{2}[2(-82) + (n-1)5] > 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(-164 + 5n - 5) > 0$$

$$\Rightarrow -169 + 5n > 0 \Rightarrow 5n > 169 \Rightarrow n > 33.8$$

پس کوچک‌ترین مقدار  $n$  برابر با ۳۴ است.

پاسخ نامه تشریحی فصل اول

۳ ۲۰۰

چون دنباله دارای ۱۵ جمله است، جمله هشتم جمله وسط دنباله می باشد. پس:

$$a_7 + a_8 + a_9 = 9 \Rightarrow 3a_8 = 9 \Rightarrow a_8 = 3$$

$$\Rightarrow S_{15} = 15 \times (\text{جمله وسط}) = 15 \times 3 = 45$$

۴ ۲۰۱

با توجه به رابطه  $S_{15} = S_{11}$  داریم:

$$S_{15} - S_{11} = 0 \Rightarrow a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{قاعده اندیس ها}} a_1 + a_{26} + a_1 + a_{26} = 0 \Rightarrow a_1 + a_{26} = 0$$

$$\Rightarrow S_{26} = \frac{26}{2}(a_1 + a_{26}) = 0$$

۳ ۲۰۲

$$S_9 - S_7 = 5 \Rightarrow a_8 + a_9 = 3a_8 = 5 \Rightarrow a_8 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow a_8 + a_7 + \dots + a_1 = \frac{7}{2}(a_8 + a_1) = 7a_8 = 7 \times \frac{5}{3} = \frac{35}{3}$$

۴ ۲۰۳

رابطه داده شده را به صورت  $S_n - S_{n-1} = 2n - 1$  مرتب می کنیم. از طرفی می دانیم در هر دنباله ای رابطه  $S_n - S_{n-1} = a_n$  برقرار است. پس:

$$a_n = 2n - 1$$

حال برای پیدا کردن مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله حسابی داریم:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(1 + 19) = 100$$

۲ ۲۰۴

اولین جمله مشترک دو دنباله داده شده برابر ۱۱ و قدر نسبت آن ها برابر ۴ و ۵ است. پس قدرنسبت دنباله های مشترک برابر  $k$  م.م.دو عدد ۴ و ۵ یعنی ۲۰ است. بنابراین جمله عمومی دنباله های مشترک برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 11 + (n-1) \times 20 = 20n - 9$$

با جایگذاری  $n=5$  بزرگ ترین جمله دو رقمی به دست می آید، پس مجموع جملات مشترک دو رقمی برابر است با:

$$S_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = \frac{5}{2}(11 + 91) = 255$$

۲ ۲۰۵

با توجه به قانون اندیس ها، می دانیم:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

حال خواهیم داشت:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{10} + \underbrace{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}_{56} = 66 \Rightarrow 2(a_1 + a_n) = 66$$

$$\Rightarrow a_1 + a_n = 33 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 11n$$

با توجه به این که  $n$  عددی طبیعی است، پاسخ باید مضرب صحیحی از عدد ۱۱ باشد، در میان گزینه ها فقط ۱۳۲ مناسب است.

۴ ۲۰۶

با قرار دادن شش عدد بین دو عدد ۲ و  $7 + 9\sqrt{2}$ ، نتیجه می گیریم  $t_1$  و  $t_8$  است، پس:

$$S_8 = \frac{8}{2}(t_1 + t_8) = 4(2 + 7 + 9\sqrt{2}) = 36(1 + \sqrt{2})$$

۳ ۱۹۳

می خواهیم  $S_n > 493$  شود، پس:

$$\frac{n}{2}[2 \times 5 + (n-1) \times 3] > 493 \Rightarrow \frac{3n^2 + 7n}{2} > 493$$

$$\Rightarrow 3n^2 + 7n - 986 > 0 \Rightarrow (n-17)(3n+58) > 0$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n > 17 \Rightarrow n = 18$$

۱ ۱۹۴

جملات شماره فرد را از شماره زوج کم کنیم تا قدرنسبت به دست آید:

$$1) a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 150$$

$$2) a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135$$

$$1) \text{ و } 2) \Rightarrow \underbrace{(a_2 - a_1)}_d + \underbrace{(a_4 - a_3)}_d + \dots + \underbrace{(a_{20} - a_{19})}_d = 150 - 135$$

$$\Rightarrow d = \frac{15}{15} = 1$$

حال جملات را با هم جمع کنیم تا مجموع جملات  $a_1$  تا  $a_{20}$  به دست آید:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{19} + a_{20}) = 135 + 150 = 285$$

$$\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19 \times 1) = 285 \Rightarrow 20a_1 + 285 = 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

۳ ۱۹۵

جمله چهارم دنباله حسابی داده شده برابر  $\frac{5}{3}$  است، پس:

$$1 + 3d = \frac{5}{3} \Rightarrow 3d = \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{9}$$

بنابراین جملات این دنباله به صورت  $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots$  بوده و جملات با شماره

زوج به صورت  $\frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots, \frac{21}{3}$  است. بنابراین مجموع آن ها برابر است با:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(\frac{3}{3} + \frac{21}{3}) = 60$$

۳ ۱۹۶

دنباله مورد نظر به صورت  $3, 9, 15, \dots, 99$  است که یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۶ می باشد. برای مشخص کردن تعداد جملات دنباله داریم:

$$a_n = 3 + (n-1)(6) = 99 \Rightarrow n-1 = 16 \Rightarrow n = 17$$

بنابراین مجموع جملات این دنباله برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2}(3 + 99) = 17 \times 51 = 867$$

۴ ۱۹۷

با استفاده از رابطه  $S_n = \frac{n(n-1)d}{2}$  خواهیم داشت:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18(18-1)d}{2} - \frac{6(6-1)d}{2} = 9 - (-9) = 18$$

۲ ۱۹۸

می دانیم  $a_n = S_n - S_{n-1}$  است، پس:

$$a_7 = S_7 - S_6 = (7^2 - 5 \times 7) - (6^2 - 5 \times 6) = (49 - 35) - (36 - 30) = 8$$

۴ ۱۹۹

می دانیم  $S_7 = t_1 + t_7$  و  $S_1 = t_1$  است، پس:

$$1) 3(1)^2 + b(1) = a + 1 \Rightarrow a - b = 2$$

$$2) 3(2)^2 + b(2) = (a+1) + (2a+1) \Rightarrow 3a - 2b = 10$$

از حل دو معادله بالا نتیجه می گیریم  $a = 6$  و  $b = 4$  است، پس:

$$S_n = 3n^2 + 4n \Rightarrow S_5 = 3(5)^2 + 4(5) = 95$$

۲۰۷ ۱۴

وقتی بین دو عدد ۸ و ۹۵ بیست و هشت واسطه حسابی قرار می‌دهیم، جمله اول برابر ۸ و جمله سی‌ام برابر ۹۵ است:

$$۸, \underbrace{O, O, \dots, O}_{t_{28}}, ۹۵ \Rightarrow t_{30} = t_1 + 29d \Rightarrow ۹۵ = ۸ + 29d$$

$$\Rightarrow 29d = 87 \Rightarrow d = 3$$

حال مجموع ۲۰ جمله اول را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 8 + 19 \times 3] = 730$$

۲۰۸ ۱

با توجه به این که اختلاف اعداد در مخرج هر کسر برابر ۳ واحد است، ابتدا هر یک از کسرها را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right), \frac{1}{5 \times 8} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right), \dots, \frac{1}{17 \times 20} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

بنابراین مجموع همه این کسرها برابر است با:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10-1}{20}\right) = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0.15 \end{aligned}$$

۲۰۹ ۲

دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت  $3+3=6$  متر را طی کند، برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدرنسبت ۶ می‌دهد. بنابراین برای به دست آوردن تعداد توپ‌ها داریم:

$$S_n = 918 = \frac{n}{2} \underbrace{(12 + (n-1) \times 6)}_{6n+6} \Rightarrow 306 = n(n+1)$$

$$\xrightarrow{17 \times 18 = 306} n = 17$$

۲۱۰ ۳

جمله اول دنباله هندسی برابر  $\frac{1}{16}$  و قدرنسبت آن برابر ۲ است. پس جمله عمومی این دنباله برابر  $t_n = \frac{1}{16} \times 2^{n-1}$  است. حال برای این که معلوم شود چندمین جمله برابر ۵۱۲ است، جمله عمومی را برابر ۵۱۲ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{16} \times 2^{n-1} = 512 \Rightarrow 2^{n-1} = 16 \times 512 = 2^{13} \Rightarrow n-1=13 \Rightarrow n=14$$

۲۱۱ ۳

$$\frac{t_1}{t_7} = \frac{135}{5} = 27 \Rightarrow \frac{t_1 q^6}{t_1 q^0} = 27 \Rightarrow q^6 = 27 \Rightarrow q = 3$$

۲۱۲ ۲

ابتدا با داشتن دو جمله متوالی دنباله، قدرنسبت را محاسبه می‌کنیم و سپس جمله ششم را به دست می‌آوریم:

$$q = \frac{135}{45} = 3 \Rightarrow t_6 = t_1 q^5 = \frac{5}{3} (3)^5 = 405$$

۲۱۳ ۱

در دنباله هندسی  $\frac{4}{3}, a, b, c, \frac{1}{3}, d, e, \dots$  جمله اول برابر با  $t_1 = \frac{4}{3}$  و جمله پنجم برابر  $t_5 = \frac{1}{3}$  است، پس:

$$\frac{t_5}{t_1} = \frac{1}{3} = q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow e = t_5 = t_1 q^4 = \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

۲۱۴ ۱۴

$$1) \frac{t_8}{t_4} = 81 \Rightarrow \frac{t_1 q^7}{t_1 q^3} = 81 \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

$$2) t_7 = t_1 q^6 = -18 \Rightarrow t_1 \times 9 = -18 \Rightarrow t_1 = -2$$

$$\Rightarrow t_8 - t_7 = t_1 q^7 - t_1 q^6 = -2 \times 81 \times (1-9) = 1296$$

$$\frac{t_1 q^6 (1-q)}{t_1 q^6 (1-q^2)}$$

۲۱۵ ۱

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$(t_1 + t_7) = \frac{1}{\sqrt{2}} (t_7 + t_7) \Rightarrow (t_1 + t_1 q^6) = \frac{1}{\sqrt{2}} (t_1 q^3 + t_1 q^3)$$

$$\Rightarrow t_1 (1+q) = \frac{1}{\sqrt{2}} t_1 q^3 (1+q) \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} q^3 \Rightarrow q^3 = \sqrt{2} \Rightarrow q = \pm \sqrt[3]{2}$$

چون جملات دنباله مثبت است، پس  $q = \sqrt[3]{2}$  قابل قبول است.

۲۱۶ ۱

مجموع سه جمله دوم را به مجموع سه جمله اول تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_2 + a_4 + a_6}{a_1 + a_3 + a_5} = \frac{513}{152} \Rightarrow \frac{ar^2 + ar^4 + ar^6}{a + ar + ar^3} = \frac{19 \times 27}{19 \times 8}$$

$$\Rightarrow \frac{ar^2(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{27}{8} \Rightarrow r^2 = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

چون مجموع سه جمله اول برابر ۱۵۲ است، پس:

$$a + ar + ar^2 = 152 \Rightarrow a + \frac{3}{2}a + \frac{9}{4}a = 152 \Rightarrow \frac{19}{4}a = 152$$

$$\Rightarrow a = \frac{152 \times 4}{19} = 8 \times 4 = 32$$

۲۱۷ ۳

$$t_8 = t_1^2 \Rightarrow t_1 q^7 = (t_1 q^4)^2 \Rightarrow 1 = t_1 q \xrightarrow{t_1=2} 2q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t_1 q^7 = t_1^2 q^8}{t_1 q^7 = t_1^2 q^8}$$

۲۱۸ ۱

با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی، تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$t_8 \times t_6 = t_{11} \Rightarrow t_1 q^7 \times t_1 q^5 = t_1 q^{10} \Rightarrow t_1^2 q^{12} = t_1 q^{10} \Rightarrow t_1 = q$$

بنابراین تفاضل قدرنسبت از جمله اول برابر است با:

$$t_7 - q = t_1 - t_1 = 0$$

۲۱۹ ۱

در حالت اولیه  $q=3$  و در حالت جدید  $q=3+1=4$  است. پس:

$$\frac{t_{r \text{ new}}}{t_{r \text{ old}}} = \frac{t_1 q_{\text{new}}^r}{t_1 q_{\text{old}}^r} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

۲۲۰ ۱

حاصل ضرب  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی برابر است با:

$$t_1^n \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

پس طبق صورت سؤال، حاصل ضرب ۲۰ جمله اول این دنباله هندسی برابر است با:

$$1024 = t_1^{20} \times q^{\frac{20 \times 19}{2}} = t_1^{20} \times q^{190} = (t_1^2 q^{19})^{10} \Rightarrow t_1^2 \times q^{19} = 2$$

از طرفی حاصل ضرب جمله دهم و یازدهم برابر است با:

$$t_{10} \times t_{11} = t_1 q^9 \times t_1 q^{10} = t_1^2 \times q^{19} = 2$$

۲ ۲۲۸

اعداد  $a, b, 3$ ، تشکیل دنباله حسابی داده‌اند، شرط تشکیل دنباله حسابی را می‌نویسیم:

$$1) b = \frac{a+3}{3} \Rightarrow 2b = a+3 \Rightarrow a = 2b-3$$

همچنین اعداد  $a+1, b-1, 3$  تشکیل دنباله هندسی داده‌اند، پس:

$$(b-1)^2 = 3(a+1) \xrightarrow{1} \underbrace{(b-1)^2}_{b^2-2b+1} = 3 \underbrace{(2b-3+1)}_{2b-2} \Rightarrow b^2-2b+1 = 6b-6$$

$$b^2 - 8b + 7 = 0 \Rightarrow (b-1)(b-7) = 0 \Rightarrow b=1, b=7$$

چون به ازای  $b=1$  جملات دنباله هندسی به صورت  $1, 0, 3, a+1$  می‌شوند و می‌دانیم دنباله هندسی نمی‌تواند فقط یکی از جملاتش صفر باشد، پس  $b=7$  قابل قبول است.

۳ ۲۲۹

با اضافه کردن عدد ثابت  $x$  به هر عدد، اعداد  $1+x, 7+x, 25+x$  ایجاد می‌شوند که تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. پس شرط تشکیل دنباله هندسی را برای آن‌ها می‌نویسیم:

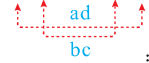
$$\underbrace{(7+x)^2}_{x^2+14x+49} = \underbrace{(1+x)(25+x)}_{x^2+26x+25} \Rightarrow 12x = 24 \Rightarrow x=2$$

به ازای  $x=2$  دنباله هندسی  $3, 9, 27, \dots$  تشکیل می‌شود که قدرنسبت برابر  $q = \frac{1}{3}$  است.

۴ ۲۳۰

با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$a, b, \sqrt{d}, c, d, \dots \Rightarrow ad = bc = (\sqrt{d})^2 = d$$



پس حاصل ضرب خواسته شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$abcd = (ad) \times (bc) = d \times d = 25$$

۲ ۲۳۱

می‌دانیم  $t_8 = \frac{8^x}{3} = 2^{3x-1}$  و  $t_1 = 2^{2x-2y+4}$  است. حال با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_8^2 = t_1 \Rightarrow (2^{3x-1})^2 = 2^{2x-2y+4} \Rightarrow 2^{6x-2} = 2^{2x-2y+4} \Rightarrow 6x-2 = 2x-2y+4 \Rightarrow 4x+y=6$$

۳ ۲۳۲

از آن جایی که  $1+13=5+9=2 \times 7$  و  $3+5=2 \times 4$  است، با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$\frac{t_1 \times t_3 + t_5 \times t_9}{t_2 \times t_8} = \frac{t_7^2 + t_7^2}{t_4^2} = \frac{2t_7^2}{t_4^2} = 2 \left( \frac{t_7}{t_4} \right)^2 = 2(q^{7-4})^2 = 2q^6 = 2(\sqrt[3]{2})^6 = 2 \times 4 = 8$$

۳ ۲۳۳

چون مجموع اندیس‌های دو جمله  $a_7$  و  $a_3$  برابر مجموع اندیس‌های  $a_6$  و  $a_4$  است، از قانون اندیس‌ها استفاده می‌کنیم و داریم:

$$4+16=7+13 \Rightarrow a_4 \times a_6 = a_3 \times a_7 \Rightarrow a_4 \times a_6 = 5 \times 16 = 80$$

۴ ۲۳۴

جملات دنباله را به صورت  $aq^0, aq^1, aq^2, aq^3, aq^4$  در نظر می‌گیریم. حال با توجه به شرایط مسئله اگر  $aq^4 \leq 100$  باشد، پس:

$$1) q=2 \Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$2) q=3 \Rightarrow a \in \{1\}$$

7 دنباله

۲ ۲۳۱

جمله پنجم دنباله برابر ۱ است، پس:

$$t_5 = 1 \Rightarrow t_1 q^4 = 1 \xrightarrow{q=2} t_1 \times 16 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{16}$$

پس حاصل ضرب پانزده جمله اول این دنباله برابر است با:

$$t_1 \times t_2 \times \dots \times t_{15} = t_1 \times t_1 q \times t_1 q^2 \times \dots \times t_1 q^{14} = t_1^{15} \times q^{(1+2+\dots+14)} = t_1^{15} \times q^{105} = \left(\frac{1}{16}\right)^{15} \times 2^{105} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{15} \times 2^{105} = \frac{1}{2^{60}} \times 2^{105} = 2^{105-60} = 2^{45}$$

۲ ۲۳۲

با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 q^5$$

چون می‌دانیم  $q=3$  و  $a_6 = 5 \times 3^6$ ، داریم:

$$5 \times 3^6 = a_1 \times 3^5 \xrightarrow{\div 3^5} 5 \times 3 = a_1 \Rightarrow a_1 = 15$$

۱ ۲۳۳

این‌که هر جمله سه برابر جمله قبلی خودش است، یعنی قدرنسبت برابر ۳ است، پس:

$$t_n = t_1 q^{n-1} = \frac{1}{9} (3)^{n-1} = 3^{-2} \times 3^{n-1} = 3^{n-3}$$

۲ ۲۳۴

اعداد  $12+x, x, 8-x$  جملات متوالی دنباله هندسی اند، پس:

$$x^2 = (8-x)(12+x) \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + 2x - 48}_{(x+8)(x-6)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}$$

چون دنباله هندسی نزولی است، پس  $x=6$  قابل قبول است:

۱ ۲۲۵

$$جملات دنباله: 1, 8, 64, \dots \Rightarrow t_5 = t_1 q^4 = 1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{64}$$

شرط تشکیل دنباله هندسی را می‌نویسیم:

$$(fa+1)^2 = (2a+2)(8a-2) \Rightarrow 16a^2 + 8a + 1 = 16a^2 + 12a - 4$$

$$\Rightarrow 4a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

پس این اعداد به صورت  $\frac{9}{4}, 6, 8$  هستند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر

$$\frac{9}{4} + 6 + 8 = 18\frac{1}{4}$$

۱ ۲۲۶

چون  $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند:

$$(4\sqrt{2})^2 = (2^a) \times (2^b) \Rightarrow (2^2 \times 2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{a+b} \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b = 5$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \text{واسطه حسابی بین دو عدد } a \text{ و } b \text{ برابر است با:}$$

۲ ۲۲۷

چون  $a, 3, b$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی اند، پس  $2 \times 3 = a+b$  است.

در ضمن چون  $a, 2, b$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند، پس  $2^2 = a \times b$  است. حال با داشتن  $a+b=6$  و  $a \times b=4$  مقدار  $a^3 + b^3$  را به دست

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 6^3 - 3 \times 4 \times 6 = 144$$

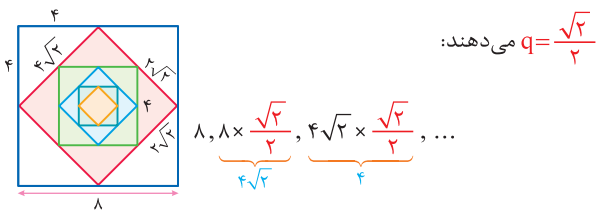
**تذکر** در سؤالاتی که صحبت از سه جمله متوالی یک دنباله هندسی است اما شماره جمله‌ها مشخص نیست، می‌توانیم آن‌ها را به صورت  $x, xq, xq^2$  در نظر بگیریم.

۲۳۹ ۴

دمای آب مخزن در ساعت‌های متوالی یک دنباله هندسی با جمله اول ۵۰ و قدرنسبت ۱/۸ ایجاد می‌کند. بنابراین دمای آب بعد از گذشت ۸ ساعت برابر  $t_8 = t_1 q^8 = 50 \times (1/8)^8 = 50 \times 2/14 = 107$  است با:

۲۴۰ ۳

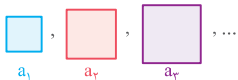
با کمک رابطه فیثاغورس، ابتدا طول ضلع مربع قرمز را به دست می‌آوریم و سپس سراغ مربع سبز می‌رویم. پس از محاسبه، مشاهده می‌کنیم که اندازه اضلاع این مربع‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول ۸ و قدرنسبت



پس طول ضلع پنجمین مربع، برابر  $t_5 = t_1 q^4 = 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 2$  و محیط آن برابر  $4 \times 2 = 8$  است.

۲۴۱ ۱

مساحت مربع‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول  $S_1 = a_1^2$  و قدرنسبت ۹ داده‌اند.



پس:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = 9 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = 3 \Rightarrow a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{a_3^2}{a_2^2} = 9 \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = 3$$

بنابراین دنباله محیط مربع‌ها به صورت  $4a_1, 4a_2, 4a_3, \dots$  است و قدرنسبت آن برابر است با:

۲۴۲ ۱

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$t_3 - t_5 = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, t_5 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$t_3 + t_5 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$q^2 = \frac{t_5}{t_3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۴۳ ۴

طبق اطلاعات داده شده در صورت سؤال داریم:

$$t_6 - t_1 = 5(t_1 + t_2 + t_3) \Rightarrow t_1 q^5 - t_1 = 5(t_1 + t_1 q + t_1 q^2)$$

$$\Rightarrow t_1(q^5 - 1) = 5t_1(1 + q + q^2) \Rightarrow q^5 - 1 = 5(1 + q + q^2) \Rightarrow q = 6$$

$$\Rightarrow \frac{t_7}{t_5} = q^{7-5} = q^2 = 36$$

۲۳۵ ۴

چون لگاریتم‌های داده شده سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند، پس  $\log_{\sqrt{5}} a$  واسطه هندسی جملات  $\log_{\sqrt{5}} 8$  و  $\log_{\sqrt{5}} 27$  است:

$$(\log_{\sqrt{5}} a)^2 = \log_{\sqrt{5}} 27 \times \log_{\sqrt{5}} 8 \Rightarrow (\log_{\sqrt{5}} a)^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{\sqrt{5}} a = 3 \Rightarrow a = (\sqrt{5})^3 = 5\sqrt{5} \\ \log_{\sqrt{5}} a = -3 \end{cases}$$

چون این دنباله صعودی است، پس  $a = 5\sqrt{5}$  قابل قبول است.

۲۳۶ ۱

با قرار دادن چهار عدد بین اعداد ۴ و ۹۷۲، دنباله هندسی به صورت زیر خواهد شد:

$$4, \dots, \dots, \dots, \dots, 972, \dots$$

بنابراین در این دنباله، جمله اول برابر ۴ و جمله ششم برابر ۹۷۲ می‌شود. پس با استفاده از رابطه جمله عمومی دنباله هندسی قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$t_6 = t_1 q^5 \Rightarrow 972 = 4q^5 \Rightarrow 243 = q^5 \Rightarrow q = 3$$

حال با داشتن قدرنسبت و جمله اول، می‌توان جملات این دنباله را به دست آورد:

$$4, 12, 36, 108, 324, 972 \Rightarrow 12 + 324 = 336$$

۲۳۷ ۲

وقتی بین دو عدد ۳ و ۴۸، سه واسطه هندسی قرار می‌دهیم، جمله اول برابر ۳ و جمله پنجم برابر ۴۸ است:

$$3, \dots, \dots, \dots, 48$$

$$t_5 = 48 \Rightarrow t_1 q^4 = 48 \Rightarrow 3q^4 = 48 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$$

بنابراین با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی،  $A$  برابر است با:

$$A = t_5 = t_1 q^4 = 3(\pm 2)^4 = 12$$

حال با قرار دادن چهار واسطه حسابی بین اعداد ۳ و ۴۸ نمای کلی جملات به صورت مقابل خواهد بود:

$$3, \dots, \dots, \dots, 48$$

$$t_6 = 48 \Rightarrow t_1 + 5d = 48 \Rightarrow 3 + 5d = 48 \Rightarrow d = 9$$

بنابراین جمله پنجم یعنی  $B$  [دقت کنید که از مثبت بودن  $d$  نتیجه گرفتیم دنباله مذکور صعودی است و بزرگترین واسطه، جمله پنجم است.] برابر

$$B = t_5 = t_1 + 4d = 3 + (4 \times 9) = 39$$

است با:

$$\text{بنابراین } A \times B = 12 \times 39 = 468 \text{ است.}$$

۲۳۸ ۲

حاصل ضرب سه جمله متوالی از دنباله هندسی برابر ۲۱۶ است. بنابراین آن‌ها را به صورت  $x, xq, xq^2$  در نظر می‌گیریم:

$$\left(\frac{x}{q}\right)(x)(xq) = 216 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$$

پس جملات دنباله  $\frac{6}{q}, 6, 6q, \dots$  هستند. حال مجموع آن‌ها ۱۹ است، پس:

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 13 \xrightarrow{\times q} 6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ q = \frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر  $q = \frac{2}{3}$  باشد، جملات دنباله به صورت ۹، ۶، ۴ و اگر  $q = \frac{3}{2}$  باشد، جملات به صورت ۴، ۶، ۹ هستند که در هر دو حالت بزرگ‌ترین جمله برابر ۹ است.



حال با فرض  $A = q^3$  به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$4A = 1 + A^2 \Rightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} = q^3$$

با فرض  $q^3 = 2 + \sqrt{3}$  نسبت بزرگ‌ترین جمله یعنی  $t_8$  به کوچک‌ترین جمله یعنی  $t_1$  برابر است با:

$$\frac{t_8}{t_1} = \frac{t_1 q^7}{t_1} = q^7 = (q^3)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

**تذکر** توجه کنید با فرض  $q^3 = 2 - \sqrt{3}$  چون مقدار قدرنسبت کوچک‌تر از

یک می‌شود، ترتیب جملات عوض می‌شود و باز هم به همین جواب می‌رسیم.

۲۵۰

در دنباله هندسی  $a_1 = a_1 r^0, a_2 = a_1 r^1, a_3 = a_1 r^2, a_4 = a_1 r^3$  است. با توجه به گفته سؤال جمله پنجم واسطه حسابی جملات سوم و هفتم است. پس  $a_5, a_3, a_7$  تشکیل دنباله حسابی می‌دهند و می‌توانیم شرط تشکیل دنباله حسابی را بنویسیم.

$$a_5 = \frac{a_3 + a_7}{2} \Rightarrow 2(a_1 r^4) = (a_1 r^2) + (a_1 r^6) \Rightarrow 2a_1 r^4 = a_1 r^2(1 + r^4)$$

$$\frac{a_1 \neq 0}{r \neq 0} \Rightarrow 2r^2 = 1 + r^4 \Rightarrow r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \xrightarrow{r^2 = A} A^2 - 2A + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (A - 1)^2 = 0 \Rightarrow A = 1 \xrightarrow{A = r^2} r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$$

با توجه به غیر ثابت بودن دنباله هندسی فقط  $r = -1$  قابل قبول است؛ از طرفی  $a_1 = 5$  است، بنابراین:

$$a_1 = 5 \Rightarrow a_1 r^1 = 5 \xrightarrow{r = -1} a_1(-1)^1 = 5 \Rightarrow a_1 = -5$$

پس دنباله به صورت  $5, -5, 5, -5, \dots$  است، پس  $a_1 + a_2 + a_3 = -5$  می‌باشد.

۲۵۱

جمله عمومی دنباله حسابی را با  $a_n$  و جمله عمومی دنباله هندسی را با  $b_n$  نمایش می‌دهیم. با توجه به صورت سؤال داریم:

$$a_9 = 3b_7 \Rightarrow b_7 = 3b_7 \xrightarrow{b_7 = b_7 \times r} b_7 \cdot r = 3b_7 \xrightarrow{b_7 \neq 0} r = 3$$

هم چنین  $b_4 = 135$  است، بنابراین:

$$b_4 = 135 \Rightarrow b_1 \cdot r^3 = 135 \xrightarrow{r = 3} b_1 \cdot (3)^3 = 135 \Rightarrow b_1 = 5$$

چون  $a_4 = 4b_1$  و  $a_9 = 3b_7$  می‌باشد، داریم:

$$a_4 = 4b_1 = 20 \Rightarrow a_1 + 3d = 20$$

$$a_9 = 3b_7 = 3(b_1 \cdot r) = 45 \Rightarrow a_1 + 8d = 45$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 20 \\ a_1 + 8d = 45 \end{cases} \Rightarrow d = 5$$

پس  $d + r = 5 + 3 = 8$  می‌باشد.

۲۵۲

ابتدا مقدار قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$$

چون دنباله غیرنزولی است پس  $q = -\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$  قابل قبول است، بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_6 = \frac{2(1 - (-\frac{1}{2})^6)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{64}) \Rightarrow S_6 = \frac{21}{16}$$

۲۴۴

چون دنباله هم حسابی و هم هندسی است، پس دنباله ثابت بوده و تمام جملات آن برابرند، پس:

$$\frac{3t_5 + 5t_7}{t_8} = \frac{3t_7 + 5t_7}{t_7} = \frac{8t_7}{t_7} = 8$$

۲۴۵

چون دنباله داده شده هم حسابی است و هم هندسی، پس همه جمله‌های آن با هم برابر هستند. پس:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2 = 4 \\ 3x + 2y - 4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 10 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x^y = 2$$

۲۴۶

اگر همه جملات یک دنباله هندسی را نصف کنیم، دنباله حاصل یک دنباله هندسی است. از طرفی با توجه به صورت سؤال، دنباله حاصل، یک دنباله حسابی هم هست. پس این دنباله، یک دنباله ثابت است و در نتیجه  $r = 1$  و  $d = 0$  است، پس  $r + d = 1$  است.

۲۴۷

در دنباله حسابی  $t_6 = t_1 + 5d, t_7 = t_1 + 6d, t_8 = t_1 + 7d$  حال چون این جمله‌ها، تشکیل دنباله هندسی داده‌اند، شرط تشکیل دنباله هندسی را می‌نویسیم:

$$t_7^2 = t_6 \times t_8 \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 7d)(t_1 + 5d)$$

$$t_1^2 + 12t_1d + 36d^2 = t_1^2 + 12t_1d + 35d^2$$

$$6d^2 = 5t_1d \Rightarrow 6d = 5t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{6}{5}d$$

بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با نسبت دو جمله متوالی:

$$q = \frac{t_7}{t_6} = \frac{t_1 + 6d}{t_1 + 5d} = \frac{\frac{6}{5}d + 6d}{\frac{6}{5}d + 5d} = \frac{\frac{36}{5}d}{\frac{31}{5}d} = \frac{36}{31}$$

**میانبر** اگر جملات  $t_m, t_n, t_k$  از یک دنباله حسابی ( $m > n > k$ )

جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی از

رابطه  $q = \frac{m - n}{n - k}$  به دست می‌آید. پس در این سؤال قدرنسبت دنباله

هندسی برابر است با:  $q = \frac{16 - 7}{7 - 3} = \frac{9}{4}$

۲۴۸

چون جملات  $t_4 = t_1 + 3d, t_7 = t_1 + 6d$  و  $4t_7 = 4(t_1 + 6d)$  از دنباله حسابی، سه جمله متوالی از دنباله هندسی هستند، پس شرط تشکیل دنباله هندسی را برای آن‌ها می‌نویسیم:

$$(2t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 3d)(4t_1 + 24d) \Rightarrow 12d^2 = 4t_1d \Rightarrow t_1 = 3d$$

$$4t_1^2 + 24t_1d + 36d^2 = 4t_1^2 + 24t_1d + 24d^2$$

با جایگذاری  $t_1 = 3d$ ، اعضای دنباله را بر حسب  $d$  می‌نویسیم و داریم:

$$4d, 12d, 36d \Rightarrow q = \frac{12d}{4d} = 3$$

۲۴۹

در دنباله هندسی  $t_8 = t_1 q^7, t_5 = t_1 q^4, t_7 = t_1 q^6$  است. پس با توجه به گفته‌های سؤال چون جمله‌های  $t_8, 2t_5, t_7$  تشکیل دنباله حسابی داده‌اند، می‌توانیم شرط تشکیل دنباله حسابی را بنویسیم:

$$2t_5 = \frac{t_7 + t_8}{2} \Rightarrow 4t_1 q^4 = t_1 q + t_1 q^7 \xrightarrow{+t_1 q} 4q^3 = 1 + q^6$$

۲۶۰ ۳

بايد  $S_n$  را بزرگ‌تر از ۵۰۰ قرار دهيم. چون  $t_1 = 1$  و  $q = 3$  است:

$$\frac{(1)(1-3^n)}{1-3} > 500 \Rightarrow \frac{1-3^n}{-2} > 500 \Rightarrow 1-3^n < -1000 \Rightarrow 1001 < 3^n$$

با جاگذاری هر يك از گزینه‌ها در رابطه  $1001 < 3^n$ ، حداقل  $n$  عدد ۷ است:

$$3^n > 1001 \Rightarrow 3^7 > 1001 \Rightarrow 2187 > 1001$$

۲۶۱ ۴

توان‌های عبارت داده شده، تشکیل يك دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{1}{4}$  و

قدرنسبت  $\frac{1}{4}$  داده‌اند. حال بايد مشخص كنيم  $\frac{1}{256}$  چندمین جمله این دنباله است:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{256} \xrightarrow{t_n = t_1 q^{n-1}} \frac{1}{256} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 7$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \times \dots \times \frac{1}{256} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{256}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(1 - (\frac{1}{4})^7)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \times \frac{255}{256} = \frac{255}{256}$$

۲۶۲ ۳

$$\begin{cases} t_1 + t_7 = 1 \\ t_1 + t_7 + t_7 + t_7 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_7 = 1 \\ t_1 + t_7 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_1 q^6 = 1 \\ t_1 q + t_1 q^7 = 2 \Rightarrow q(t_1 + t_1 q^6) = 2 \Rightarrow q = 2 \end{cases}$$

با جایگذاری  $q = 2$  در معادله  $t_1 + t_1 q^6 = 1$  داریم:

$$t_1 + t_1 (2)^6 = 1 \Rightarrow 65t_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{65}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{t_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{\frac{1}{65} \times (1-2^6)}{1-2} = \frac{63}{65} = 12/6$$

۲۶۳ ۳

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\frac{a_1 + a_7 + a_7 + a_7 + a_7 + a_7 + \dots}{a_1 + a_7 + a_7 + \dots} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_7 + a_7 + \dots}{a_1 + a_7 + a_7 + \dots} + \frac{a_7 + a_7 + a_7 + \dots}{a_1 + a_7 + a_7 + \dots} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{aq + aq^7 + aq^7 + \dots}{a + aq^7 + aq^7 + \dots} = \frac{q(a + aq^7 + aq^7 + \dots)}{a + aq^7 + aq^7 + \dots} = 2 \Rightarrow q = 2$$

**میانبر** چون تعداد جملات زوج است، فرض کنیم این دنباله دو جمله دارد:

$$\frac{a_1 + a_7}{a_1} = 3 \Rightarrow a_1 + a_7 = 3a_1 \Rightarrow a_7 = 2a_1 \Rightarrow a_1 q = 2a_1 \Rightarrow q = 2$$

۲۵۳ ۴

می‌دانیم  $S_n = 1 + q^n$  است و مقدار  $q = 2$  است، پس:

$$\frac{S_{14}}{S_7} = 1 + q^7 = 1 + (2)^7 = 1 + 128 = 129$$

۲۵۴ ۴

می‌دانیم  $S_n = 1 + q^n$  است. پس:

$$\frac{S_8}{S_7} = \frac{153}{136} \Rightarrow 1 + q^8 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^8 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_8} = \frac{1}{q^7} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^7} = 128$$

۲۵۵ ۲

می‌دانیم  $S_n = 1 + q^n$  است. پس:

$$\frac{S_8}{S_7} = 10 \Rightarrow 1 + q^8 = 10 \Rightarrow q^8 = 9 \Rightarrow \frac{a_8}{a_1} = \frac{a_1 q^8}{a_1} = (q^8)^2 = 9^2 = 81$$

۲۵۶ ۲

می‌دانیم در هر دنباله همواره تساوی  $a_n = S_n - S_{n-1}$  برقرار است، پس:

$$a_5 = S_5 - S_4 = \frac{5(3^5 - 2)}{2} - \frac{5(3^4 - 2)}{2} = \frac{5 \times 241}{2} - \frac{5 \times 79}{2} = 405$$

۲۵۷ ۴

اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی يك دنباله هندسی باشند، آن‌گاه حاصل ضرب جمله‌های اول و سوم برابر مربع جمله وسط است. یعنی:

$$b^2 = ac$$

چون  $2 - 2x, 2x, x^2 - 4$  جملات متوالی دنباله هندسی اند، پس:

$$(2x)^2 = (x^2 - 4)(x^2 - 2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

چون دنباله نزولی است، پس  $x = 2$  قابل قبول است و دنباله به صورت  $8, 4, 2, \dots$  است. بنابراین مجموع ۷ جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_7 = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^7)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8(1 - \frac{1}{128})}{\frac{1}{2}} = 16 \left(\frac{127}{128}\right) = \frac{127}{8}$$

۲۵۸ ۲

وقتی بین دو عدد ۴ و ۳۲۴، سه واسطه هندسی قرار می‌دهیم، جمله اول برابر ۴ و جمله پنجم برابر ۳۲۴ است:

$$q^4 = \frac{t_5}{t_1} \Rightarrow q^4 = \frac{324}{4} = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

از آنجایی که این ۵ عدد مثبت هستند، پس  $q = 3$  قابل قبول است و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$S_5 = \frac{t_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{4(1-3^5)}{1-3} = \frac{4(1-243)}{-2} = -2 \times (-242) = 484$$

۲۵۹ ۳

با توجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$1) t_5 - t_1 = 20 \Rightarrow t_1 q^4 - t_1 = 20 \Rightarrow t_1(q^4 - 1) = 20$$

$$2) S_4 = \frac{t_1(1-q^4)}{1-q} = 10 \xrightarrow{(1)} \frac{-20}{1-q} = 10 \Rightarrow q = 3$$



۲ ۲۶۹

۱  $S_6 - S_3 = 4 \Rightarrow a_4 + a_5 + a_6 = 4 \Rightarrow a_1 q^3 (1 + q + q^2) = 4$   
 ۲  $S_9 - S_6 = 32 \Rightarrow a_7 + a_8 + a_9 = 32 \Rightarrow a_1 q^6 (1 + q + q^2) = 32$

۲  $\frac{a_1 q^6 (1 + q + q^2)}{a_1 q^3 (1 + q + q^2)} = \frac{32}{4} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

۳ ۲۷۰

از آن جایی که بعد از هر برخورد ۵۰ درصد از اندازه شعاع کاسته می‌شود، پس اندازه شعاع هر بار در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌شود، بنابراین جمله اول این دنباله برابر ۳۲ و قدرنسبت آن برابر  $\frac{1}{2}$  است، پس:

$S = 32 \left( \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 32 \left( \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} \right) = 62$

توان‌های گویا و عبارتهای جبری

فصل دوم

۲ ۲۷۱

$\sqrt[3]{2 + \sqrt{31 + \sqrt{28 - \sqrt{27}}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{31 + \sqrt{25}}}$   
 $= \sqrt[3]{2 + \sqrt{31 + 5}} = \sqrt[3]{2 + 6} = \sqrt[3]{8} = 2$

۲ ۲۷۲

$a^4 = 16 \Rightarrow a = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$  ریشه چهارم ۱۶ است، پس:  
 از طرفی با توجه به صورت سؤال داریم:  $b = \sqrt[4]{16} = 2$

۱ ۲۷۳

چون  $a$  ریشه سوم ۲ و  $b$  ریشه پنجم ۳ است، پس:

$a^3 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2}$  ,  $b^5 = 3 \Rightarrow b = \sqrt[5]{3}$

۱ ۲۷۴

ریشه سوم عدد ۵۱۲ برابر است با:  $\sqrt[3]{512} = 8$   
 حال تک تک عبارات را بررسی می‌کنیم:

$\sqrt[3]{64} = 4$      $\sqrt[3]{8} = 2$      $\sqrt[3]{128} = 5$      $\sqrt[3]{64} = 4$

۲ ۲۷۵

ابتدا نامعادله  $a^2 - a < 0$  را حل می‌کنیم:

$a^2 - a < 0 \Rightarrow a(a-1) < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$

چون  $a$  عددی بین صفر و یک است، پس رابطه‌های  $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$  و  $\frac{1}{a} < \frac{1}{a^5}$  برقرار هستند. بنابراین  $\text{ب}$  و  $\text{پ}$  نادرست هستند.

۲ ۲۷۶

چون  $x$  عددی بین صفر و یک است، پس  $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$  و  $x < \sqrt[3]{x}$  بنابراین  $\text{ب}$  و  $\text{پ}$  نادرست هستند. پس دارای ۲ ریشه چهارم قرینه است، پس  $a = -\sqrt[4]{x}$  است.

۲ ۲۷۷

با توجه به این که  $-1 < x < 0$  است، پس عبارتهای  $\text{ب}$  و  $\text{پ}$  درست هستند.

$\text{ب}$   $\begin{cases} x^2 < |x| \Rightarrow -x^2 > x \Rightarrow a = -x^2 \\ \sqrt[3]{x} < x \Rightarrow b = \sqrt[3]{x} \end{cases}$

$\text{پ}$   $\begin{cases} x < x^3 \Rightarrow a = x^3 \\ |x| < \sqrt{|x|} \Rightarrow x > -\sqrt{|x|} \Rightarrow b = -\sqrt{|x|} \end{cases}$

۴ ۲۶۴

تعداد جملات دنباله را  $n$  و قدرنسبت آن را  $q$  در نظر می‌گیریم. در این صورت تعداد جملات شماره فرد  $\frac{n}{2}$  و قدرنسبت  $q^2$  خواهد بود. حال با توجه به صورت سؤال داریم:

$S_n = \Delta S_{\frac{n}{2}} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \Delta \times \frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}$

$\Rightarrow \frac{1-q^2}{1-q} = \Delta \Rightarrow 1+q = \Delta \Rightarrow q = 4$

$\Rightarrow \frac{t_5}{t_3} = \frac{t_1 q^4}{t_1 q^2} = q^2 = 4^2 = 16$

۳ ۲۶۵

عبارت داده شده، مجموع ۱۰ جمله از یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت  $x$  است:

$A = 1 + x + x^2 + \dots + x^9 = \frac{1 \times (1-x^{10})}{1-x} = \frac{1 - (\sqrt{2})^{10}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - 32}{1 - \sqrt{2}}$

$= \frac{-31}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 31(1 + \sqrt{2})$

۳ ۲۶۶

در طرف اول معادله، مجموع جملات یک دنباله هندسی با جمله اول  $4x$  و قدرنسبت  $\frac{1}{2}$  داریم. بنابراین باید ابتدا تعداد جملات را مشخص کنیم:

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow \frac{x}{4} = (4x) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{32} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow n = 6$

$\Rightarrow 4x + 2x + x + \dots + \frac{x}{8} = 4x \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^6}{1 - \frac{1}{2}} = 4x \times \frac{63}{1} = \frac{63x}{1}$

$\Rightarrow \frac{63x}{8} = 126 \Rightarrow x = 16$

۱ ۲۶۷

صورت و مخارج کسرها به کمک فرمول مجموع جملات دنباله هندسی، ساده می‌کنیم:

۱  $1 + t + t^2 + \dots + t^9 + t^{10} + t^{11} \xrightarrow{\frac{q=t}{a_1=1}} S_{12} = (1) \left(\frac{1-t^{12}}{1-t}\right)$

۲  $1 + t^3 + t^6 + t^9 \xrightarrow{\frac{q=t^3}{a_1=1}} S'_4 = (1) \left(\frac{1-(t^3)^4}{1-t^3}\right)$

با تقسیم رابطه ۱ بر ۲ خواهیم داشت:

$\frac{S_{12}}{S'_4} = \frac{1-t^{12}}{1-t} \Rightarrow \frac{S_{12}}{S'_4} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)} = 1+t+t^2$

$= (t + \frac{1}{t})^2 + \frac{3}{4}$

حال با جایگذاری  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  داریم:

حاصل  $= \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 2$

۳ ۲۶۸

۱  $a + b + c = 12 \Rightarrow a + aq + aq^2 = 12 \Rightarrow a(1+q+q^2) = 12$

۲  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{q^2 + q + 1}{aq^2} = \frac{1}{3}$

$\xrightarrow{\times a} \frac{a(1+q+q^2)}{aq^2} = \frac{a}{3} \xrightarrow{\text{۱}} \frac{12}{aq^2} = \frac{a}{3} \Rightarrow a^2 q^2 = 36$

$\Rightarrow aq = \pm 6 \xrightarrow{b > 0} b = 6$

۵۴۱ ۳

نمودار  $y = -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$  بالاتر از نمودار  $y = 2x + |x|$  می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$-x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} > 2x + |x| \Rightarrow -x^2 - |x| - \frac{5}{4}x + \frac{9}{4} > 0$$

$$\times (-2) \rightarrow 2x^2 + 2|x| + 5x - 9 < 0$$

$$\textcircled{1} x \geq 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 7x - 9}{(2x+9)(x-1)} < 0 \Rightarrow -\frac{9}{4} < x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 1$$

اجتماع بازه‌های  $\textcircled{1}$  و  $\textcircled{2}$ ، بازه  $(-3, 1)$  و نقطه وسط این بازه  $-1$  خواهد بود.

۵۴۲ ۱

نمودار تابع بالای محور  $x$ ها است. یعنی  $y > 0$ ، پس:

$$\textcircled{1} x \geq 0: x + (x-2) \cdot x > 0 \Rightarrow x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

اشتراک  $x \geq 0$  و بازه به دست آمده،  $x > 1$  می‌باشد.

$$\textcircled{2} x < 0: x + (x-2) \cdot (-x) > 0 \Rightarrow -x^2 + 3x > 0 \Rightarrow 0 < x < 3$$

بازه به دست آمده در شرط  $x < 0$  صدق نمی‌کند.

بنابراین جواب نامعادله بازه  $(1, +\infty)$  می‌باشد و کم‌ترین مقدار  $a$  برابر ۱ است.

۵۴۳ ۴

باید نامعادله  $|x-1| + |x-3| < 4$  را حل کنیم، پس:

$$\textcircled{1} x \leq 1: -x + 1 - x + 3 < 4 \Rightarrow 0 < 2x \Rightarrow 0 < x \xrightarrow{\text{اشتراک با } x \leq 1} 0 < x \leq 1$$

$$\textcircled{2} 1 < x < 3: x - 1 - x + 3 < 4 \Rightarrow 2 < 4 \Rightarrow 1 < x < 3$$

$$\textcircled{3} x \geq 3: x - 1 + x - 3 < 4 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4 \xrightarrow{\text{اشتراک با } x \geq 3} 3 \leq x < 4$$

با اجتماع بازه‌های به دست آمده، جواب نامعادله به صورت  $(0, 4)$  است و بیش‌ترین مقدار  $b-a$  برابر  $4-0=4$  است.

۵۴۴ ۳

از آن جایی که  $-a=|a|$  است، می‌توانیم به جای  $|x-1|$  بنویسیم  $|1-x|$  تا بتوانیم از نامساوی مثلثی در حالت تساوی استفاده کنیم:

$$\frac{|3x+4|}{a} + \frac{|1-x|}{b} = \frac{|2x+5|}{a+b} \xrightarrow{ab \geq 0} (3x+4)(1-x) \geq 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq 1$$

بنابراین اعداد  $1.0$  و  $-1$  جواب‌های صحیح این معادله هستند.

**تذکر** اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند. طبق نامساوی مثلث

همواره  $|a| + |b|$  بزرگ‌تر یا مساوی  $|a+b|$  است:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

در نامساوی مثلث، اگر  $a$  و  $b$  هم‌علامت نباشد،  $|a| + |b|$  بزرگ‌تر از  $|a+b|$  است. اما اگر  $a$  و  $b$  هم‌علامت باشند،  $|a| + |b|$  برابر  $|a+b|$  است.

۵۴۵ ۱

وسط بازه  $-3 \leq x \leq 5$  برابر  $\frac{(-3)+(5)}{2} = 1$  است. حال برای این که بتوانیم از ویژگی‌های قدرمطلق استفاده کنیم و این بازه را به صورت قدرمطلق نمایش دهیم. از طرفین آن ۱ واحد کم می‌کنیم تا بازه متقارن شود:

$$-3 \leq x \leq 5 \xrightarrow{-1} -4 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow |x-1| \leq 4$$

**میانبر** چون  $x=1$  و  $x=\frac{1}{4}$  در نامعادله صدق نمی‌کنند، پس گزینه‌های  $\textcircled{1}$  و  $\textcircled{2}$  و  $\textcircled{4}$  حذف می‌شوند.

۵۳۷ ۴

با فرض  $A = f^2(x) - xf(x)$  داریم:

$$f^2(x) - xf(x) < 0 \Rightarrow f(x)(f(x)-x) < 0$$

$x$	$-2$	$0$	$2$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)-x$	$+$	$-$	$-$
$A$	$-$	$+$	$-$

پس عبارت  $f^2(x) - xf(x)$  در بازه  $\mathbb{R} - [-2, 2]$  منفی است؛ بنابراین  $a = -2$ ،  $b = 2$ ،  $a - b = -4$  است.

۵۳۸ ۳

باتوجه به این که  $x^2 + 1 \geq 1$  است، پس  $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$  است، پس ۱ یا

$\frac{1}{x^2+1} = 0$  می‌باشد. از طرفی زمانی  $\frac{1}{x^2+1} = 1$  است که  $x = 0$  باشد که

در این صورت نمودار  $f(x)$  پایین‌تر از خط  $y = 2x + 2.5$  می‌باشد پس  $x = 0$

یک جواب معادله است؛ حال با فرض  $\frac{1}{x^2+1} = 0$  ضابطه تابع  $f$  به صورت

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ می‌باشد، بنابراین:}$$

$$x^2 + 1 < 2x + 2.5 \Rightarrow x^2 - 2x - 2.4 < 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+4) < 0 \Rightarrow -4 < x < 6$$

چون  $x \in (-4, 6)$  شامل  $x = 0$  نیز هست، پس جواب نهایی بازه  $(-4, 6)$  می‌باشد، پس حداکثر  $b-a$  برابر ۱۰ می‌باشد.

۵۳۹ ۴

برای این که مشخص کنیم در کدام بازه نمودار تابع  $y_1 = |x| + 1$  بالاتر از نمودار تابع  $y_2 = |2x-3|$  قرار دارد، باید نامعادله  $|x| + 1 > |2x-3|$  را حل کنیم:

$$\textcircled{1} x < 0: -x + 1 > -2x + 3 \Rightarrow x > 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با } x < 0} \emptyset$$

$$\textcircled{2} 0 \leq x \leq \frac{3}{2}: x + 1 > -2x + 3 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با } 0 \leq x \leq \frac{3}{2}} \frac{2}{3} < x \leq \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{3} x > \frac{3}{2}: x + 1 > 2x - 3 \Rightarrow 4 > x \xrightarrow{\text{اشتراک با } x > \frac{3}{2}} \frac{3}{2} < x < 4$$

از اجتماع بازه‌های به دست آمده جواب نامعادله به صورت بازه  $(\frac{2}{3}, 4)$  است

و طول وسط این بازه برابر است با:

$$\frac{2}{3} + 4 = \frac{2+12}{3} = \frac{14}{3} = \frac{14}{3}$$

۵۴۰ ۱

چون می‌خواهیم نمودار  $y_1 = |2x^2 - 4|$  در زیر خط  $y_2 = 2x$  قرار گیرد باید نامعادله  $y_1 < y_2$  را حل کنیم:

$$|2x^2 - 4| < 2x \Rightarrow |x^2 - 2| < x \Rightarrow -x < x^2 - 2 < x$$

$$\textcircled{1} 0 < x^2 + x - 2 \Rightarrow 0 < (x-1)(x+2) \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1$$

$$\textcircled{2} x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده، جواب نامعادله برابر بازه  $(1, 2)$  است و بیش‌ترین مقدار  $b-a$  برابر ۱ است:

۱ ۵۴۶

شرط جواب داشتن معادله این است که  $x-3$  بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$|3x-1|=x-3 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=x-3 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \times \\ 3x-1=-(x-3) \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1 \times \end{cases}$$

هر دو جواب باعث منفی شدن  $x-3$  می‌شوند؛ پس معادله جواب ندارد.

۱ ۵۴۷

جواب‌های معادله  $|f(x)|=|g(x)|$  از دو معادله  $f(x)=\pm g(x)$  به دست

می‌آید. پس برای حل معادله  $|\frac{1}{x-2}|=|2x-3|$  داریم:

$$\begin{cases} 2x-3=\frac{1}{x-2} \Rightarrow 2x^2-7x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \checkmark \\ x=\frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \end{cases} \\ 2x-3=-\frac{1}{x-2} \Rightarrow 2x^2-7x+7=0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

۲ ۵۴۸

$$||x-2|-3|=4 \Rightarrow \begin{cases} |x-2|-3=4 \Rightarrow |x-2|=7 \checkmark \\ |x-2|-3=-4 \Rightarrow |x-2|=-1 \times \end{cases}$$

$$|x-2|=7 \Rightarrow \begin{cases} x-2=7 \Rightarrow x=9 \\ x-2=-7 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

۱ ۵۴۹

معادله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱  $x > 3$ :  $\frac{2-x}{x-3}=1 \Rightarrow 2-x=x-3 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \times$

جواب به دست آمده در شرط  $x > 3$  صدق نمی‌کند.

۲  $x < 3$ :  $\frac{2-x}{3-x}=1 \Rightarrow 2-x=3-x \Rightarrow 2=3 \times$

این تساوی متناقض بوده و در نتیجه در بازه  $x < 3$  نیز برای  $x$  جوابی وجود ندارد.

۲ ۵۵۰

ریشه عبارت داخل قدرمطلقها  $x=\frac{1}{3}$  و  $x=-2$  است. بنابراین معادله را در سه ناحیه حل می‌کنیم:

۱  $x < -2$ :  $-(2x-1)-(x+2)=3 \Rightarrow -3x=4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3} \times$

۲  $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ :  $-(2x-1)+(x+2)=3 \Rightarrow -x+3=3 \Rightarrow x=0 \checkmark$

۳  $x > \frac{1}{3}$ :  $(2x-1)+(x+2)=3 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \checkmark$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$  است.

۴ ۵۵۱

ریشه‌های داخل قدرمطلقها  $x=1$  و  $x=-2$  هستند، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)-(2x+4)-4; & x < -2 \\ -(x-1)+(2x+4)-4; & -2 \leq x \leq 1 \\ (x-1)+(2x+4)-4; & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -3x-7; & x < -2 \\ x+1; & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x-1; & x > 1 \end{cases}$$



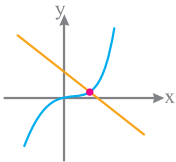
۲ ۵۵۲

ابتدا معادله را به صورت  $x^2=1-x$  مرتب می‌کنیم. سپس نمودار دو تابع

$$f(x)=x^2 \text{ و } g(x)=1-x \text{ را در یک دستگاه مختصات رسم و تعداد نقاط}$$

تلاقی آن‌ها را مشخص می‌کنیم. چون دو نمودار در

یک نقطه متقاطع‌اند، پس معادله یک جواب دارد.



۲ ۵۵۳

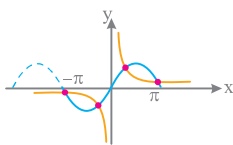
معادله را به صورت  $\sin x = \frac{1}{x}$  مرتب می‌کنیم

و نمودار توابع  $y = \sin x$  و  $y = \frac{1}{x}$  را در

یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. چون

دو نمودار در چهار نقطه در بازه مورد نظر

متقاطع‌اند، پس معادله چهار جواب دارد.

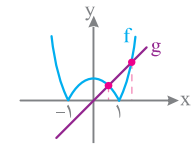


۳ ۵۵۴

نمودار توابع  $f(x)=|x^2-1|$  و  $g(x)=x$  را

در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه

به شکل، معادله داده شده دو جواب مثبت دارد.



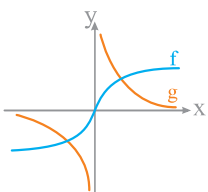
۲ ۵۵۵

ابتدا معادله را به صورت  $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{x}$  مرتب

کرده و سپس نمودار دو تابع  $f(x)=\sqrt[3]{x}$  و

$g(x)=\frac{1}{x}$  را در یک دستگاه مختصات رسم

می‌کنیم تا نقاط تلاقی آن‌ها مشخص شود.



با توجه به این‌که نمودار دو تابع در دو نقطه متقاطع‌اند پس معادله دو جواب دارد.

۱ ۵۵۶

معادله را به صورت  $x^2-x-6=\sqrt{x^2}$  تغییر داده و سپس نمودار توابع

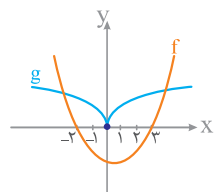
$$f(x)=x^2-x-6=(x-3)(x+2) \text{ و } g(x)=\sqrt{x^2}$$

را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم با توجه به این

که نمودار دو تابع دارای یک محل تلاقی

با طول مثبت و یکی با طول منفی است

پس معادله یک ریشه حقیقی مثبت دارد.

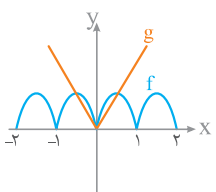


۲ ۵۵۷

ابتدا با شرط  $x \neq 0$  معادله را به فرم

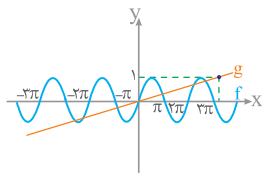
$|\sin \pi x| = |2x|$  نوشته و سپس نمودار

توابع  $f(x)=|\sin \pi x|$  و  $g(x)=|2x|$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، نمودار دو تابع در سه نقطه متقاطع‌اند ولی با توجه به شرط

$x \neq 0$  معادله دارای دو جواب است.



معادله را به صورت  $\sin x = \frac{x}{10}$  مرتب کرده و نمودار دو تابع  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \frac{x}{10}$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم؛ با توجه به نمودارها، توابع دارای ۷ محل برخورد و معادله و مخرج کسر دارای هفت ریشه می‌باشند. پس دامنه شامل ۷ عدد حقیقی نمی‌باشد.

## فصل چهارم تابع و معادله درجه دوم

۲ ۵۶۴

$$2k(2k-1) = 3 - 2k \Rightarrow 4k^2 - 2k = 3 - 2k$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 3 \Rightarrow k^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |k_1 - k_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

۱ ۵۶۵

معادله  $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$  را با روش  $\Delta$  حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{2})^2 - 4(1)(-4) = 18 \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \\ x_2 = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \end{cases}$$

۲ ۵۶۶

ابتدا پیرانتزها را با کمک اتحاد مربع کامل باز می‌کنیم:

$$(x-3)^2 + (2x+1)^2 - 11 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x^2 + 4x + 1 - 11 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 20 = 24 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}$$

بنابراین ریشه کوچکتر معادله برابر  $\frac{1-\sqrt{6}}{5}$  است.

۲ ۵۶۷

چون  $x=2$  یکی از ریشه‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x^2 + mx - 10 = 0 \xrightarrow{x=2} 2^2 + 2m - 10 = 0 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

بنابراین معادله به صورت  $x^2 + 3x - 10 = 0$  بوده و داریم:

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$$

۲ ۵۶۸

اگر این دو عدد فرد متوالی را  $2x-1$  و  $2x+1$  در نظر بگیریم، داریم:

$$(2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 290 \Rightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (4x^2 + 4x + 1) = 290$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 2 = 290 \Rightarrow 8x^2 = 288 \Rightarrow x^2 = 36 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 6$$

بنابراین عدد کوچک‌تر برابر  $(2(6)-1) = 11$  است.

۲ ۵۶۹

اگر سن برادر کوچک را  $x$  در نظر بگیریم، چون اختلاف سنی دو برادر ۴ سال است، پس سن برادر بزرگ‌تر برابر  $x+4$  است، بنابراین ۴ سال بعد سن آن‌ها برابر  $x+4$  و  $x+8$  خواهد بود، حال با توجه به صورت سؤال:

$$\underbrace{(x+4)(x+8)}_{x^2+12x+32} = 60 \Rightarrow \underbrace{x^2+12x-28}_{(x+14)(x-2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \checkmark \\ x = -14 \times \end{cases}$$

بنابراین سن برادر کوچک‌تر در حال حاضر ۲ سال است.

۲ ۵۵۸

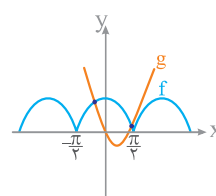
ابتدا معادله را به صورت  $\log_{\delta} x = \frac{1}{x}$  می‌نویسیم و نمودار توابع  $y = \log_{\delta} x$  و  $y = \frac{1}{x}$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، معادله یک جواب دارد.

۲ ۵۵۹

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$2|\cos x| = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-x^2} \Rightarrow 2|\cos x| = 2^{x^2-x} \Rightarrow |\cos x| = x^2 - x$$

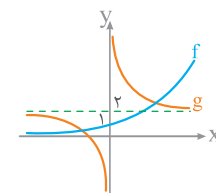


حال نمودار دو تابع  $f(x) = |\cos x|$  و  $g(x) = x^2 - x = x(x-1)$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار تابع دارای دو محل برخورد است، پس معادله دو جواب دارد.

۲ ۵۶۰

ابتدا معادله را به فرم  $2^x = \frac{2x+1}{x}$  می‌نویسیم و سپس دو تابع  $f(x) = 2^x$  و  $g(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



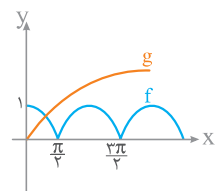
توابع  $f$  و  $g$  دارای دو محل تقاطع هستند، پس معادله دو جواب دارد.

۱ ۵۶۱

از طرفین معادله جذر می‌گیریم تا معادله به فرم

$$|\cos x| = \sqrt{x}$$

توابع  $f(x) = |\cos x|$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا تعداد محل تقاطع آن‌ها مشخص شود:



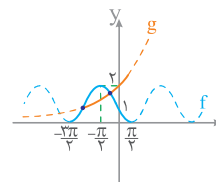
نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  دارای یک محل تقاطع هستند، بنابراین معادله یک جواب دارد.

۲ ۵۶۲

ابتدا معادله را به صورت  $1 - \sin x = 2^{x+1}$  می‌نویسیم و سپس دو تابع

$$f(x) = 1 - \sin x \text{ و } g(x) = 2^{x+1}$$

را در بازه  $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به این‌که نمودار این دو تابع در بازه مورد نظر در دو نقطه متقاطع‌اند، پس معادله دو جواب دارد.

۳ ۵۶۳

با توجه به اینکه دامنه توابع کسری شامل ریشه‌های مخرج نمی‌باشد باید تعداد ریشه‌های معادله  $10 \sin x - x = 0$  را به دست آوریم.