

گاج

وفاقی تعلیمی اداروں کے لیے
مطبوعہ

آمار و احتمال

پایہ یازدہم
رشتہ ریاضی و فیزیک

مؤلف

سید امیر سعید حسینی

فرمولہ
بکسٹ

فرمول بیست

۶
نمونه
امتحانی

۳۰۰
پرسش
تشریحی

۴۵
صفحه
درسنامه



+۶

ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان



9 786220 308348

تهران، میدان انقلاب

نیش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

پیشگفتار

ن و القلم و ما یسطرون

هدف اصلی مجموعه کتاب‌های **پیشگفتار** ارائه آموزش لازم برای تسلط به کتاب درسی و آمادگی برای امتحانات نهایی می‌باشد.

در این کتاب سعی کردم تمام زوایای کتاب درسی را موشکافانه بررسی کنم. از طرف دیگر، با ارائه سؤالات امتحانی طبقه‌بندی شده، انواع سؤالات متداول در امتحانات آورده شده است، تا دانش‌آموزان با شکل‌های مختلف سؤالات آشنا شده و بیش‌ترین بازدهی را برای امتحانات داشته باشند. توصیه‌ی ما به دانش‌آموزان عزیز این است که ابتدا خودشان به سؤالات پاسخ دهند سپس به پاسخ‌نامه رجوع کنند.

این کتاب دارای چهار فصل است که هر فصل شامل چندین درسنامه است تا تمام مطالب فصل با دقت و جزئیات آموزش داده شود و با ارائه مثال‌های لازم، مطالب عمیق‌تر تفهیم گردد. در ادامه در انتهای هر درسنامه تمام تمرینات و مثال‌های کتاب درسی شبیه‌سازی شده و یک مجموعه‌ی تمرین کامل گردآوری شده است.

در انتهای کتاب، چند امتحان تألیفی نوبت اول و دوم و نهایی گنجانده شده است تا شب امتحان کار ساده‌تری داشته باشند.

در ابتدای هر فصل فیلم‌هایی به صورت QR-Code قرار داده شده است که در آن مباحث نمونه و سؤالات مربوط به آن فصل را توضیح داده‌ایم. شما با تماشای این فیلم‌ها یک بار دیگر مباحث فصل را برای شب امتحان مرور می‌کنید و برای امتحانات آماده می‌شوید.

در پایان از همه دوستان و عزیزانی که بنده را در تهیه این کتاب همراهی نموده‌اند، سپاس فراوان دارم، همچنین از همسر عزیزم و فرزندانم سیداحسان و الناسادات که مرا صبورانه همراهی کرده‌اند، سپاسگزارم.

پیروز باشید

سید امیرسعید حسینی

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سؤالات
146 min	۶۸	۶ تا ۲۵
116 min	۸۱	۲۶ تا ۴۳
69 min	۹۴	۴۴ تا ۵۶
52 min	۱۰۳	۵۷ تا ۶۶

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

فصل دوم: احتمال

فصل سوم: آمار توصیفی

فصل چهارم: آمار استنباطی

امتحان نهایی



بارمبندی درس آمار و احتمال		
نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل
۴/۵	۱۲	اول
۵/۵	۸	تا صفحه ۵۱
	—	صفحه ۵۱ به بعد
۶	—	سوم
۴	—	چهارم
۲۰	۲۰	جمع

۱۱۲	آزمون ۱
۱۱۳	آزمون ۲
۱۱۴	آزمون ۳
۱۱۵	آزمون ۴
۱۱۶	آزمون ۵
۱۱۷	آزمون ۶: خرداد ماه ۱۴۰۳
۱۱۹	پاسخنامه تشریحی آزمون ۱ تا ۶

1

بخش



درستامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

فصل اول آمار و احتمال در امتحان نوبت اول ۱۲ نمره و در نوبت دوم ۴/۵ نمره و در شهریور و دی ۵ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون منطق ریاضی، نقیض یک گزاره و ترکیب گزاره‌ها، ترکیب شرطی و ترکیب دوشروطی، سورها، مجموعه و زیر مجموعه، تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی، قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها، جبر مجموعه‌ها و ضرب دکارتی بین دو مجموعه مطرح شده است.

بسته‌های ۵ تا ۸



بسته‌های ۱ تا ۴



برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

آشنایی با منطق ریاضی

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

بسته اول



منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی یا مطالعه و تحلیل ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

گزاره

تعریف گزاره: به جمله‌ای خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p, q, r و ... نمایش می‌دهیم.

ارزش گزاره: درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. مثلاً «۷ عددی اول است.» یک گزاره با ارزش درست است و «۹ عددی زوج است.» یک گزاره با ارزش نادرست است و «کتاب آمار و احتمال را مطالعه کن.» اصلاً گزاره نیست، چون ارزش آن معلوم نیست.

تذکر: جملات امری، پرسشی و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره نیستند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند، مانند:

چه روز خوبی! (ابراز احساسات)

لطفاً کتاب من را بدهید. (امری)

آیا جذر عدد $\sqrt{49}$ برابر ۷ است؟ (پرسشی)

توجه: ارزش یک گزاره نمی‌تواند هم درست باشد و هم نادرست، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است.

نکته! حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل‌نشده‌ای می‌گویند که پرونده آن‌ها در جهان علم باز است. این‌گونه مسائل علاوه بر این‌که درستی آن‌ها اثبات

نشده است، تاکنون هم برای آن‌ها مثال نقض پیدا نشده است، مانند حدس گلدباخ که در زیر آمده است.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.»



سؤال از بین جمله‌های زیر گزاره را مشخص کنید و ارزش آن را تعیین کنید.

- در پرتاب دو سکه احتمال آن که هر دو بار «رو» بیاید برابر با $\frac{1}{4}$ است.
- آیا حافظ شاعر خوبی است؟
- ۵۱ عددی اول است.
- به به چه گل زیبایی!

پاسخ ۱ یک گزاره است و ارزش گزاره درست است، زیرا: $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. گزاره نیست، زیرا یک جمله پرسشی است. ۳ یک گزاره است و ارزش گزاره نادرست است، زیرا عدد ۵۱ مضرب ۳ و ۱۷ می‌باشد. ۴ گزاره نیست، زیرا جمله عاطفی (ابراز احساسات) است.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را دارد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزاره p و q طبق جدول روبه‌رو دارای ۴ حالت است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نکته تعداد ارزش هر گزاره دو حالت است. بنابراین جدول ارزش‌های n گزاره با توجه به اصل ضرب دارای 2^n حالت می‌باشد. به عنوان مثال جدول ارزش ۴ گزاره $2^4 = 16$ حالت دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p را به صورت $\sim p$ می‌نویسیم و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. به علامت « \sim » ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود. مثلاً: «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع برابر 360° است.» یک گزاره است که نقیض آن برابر است با «چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع برابر 360° باشد.» که معادل است با «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع برابر 360° نیست.»

ارزش نقیض یک گزاره

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

اگر ارزش گزاره p درست باشد، در این صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که ارزش گزاره p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است.

گزاره‌های هم‌ارز منطقی

اگر دو گزاره p و q همواره ارزش یکسان داشته باشند، می‌گوییم این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم « P هم‌ارز است با q ». با توجه به جدول بالا، دو گزاره p و $(\sim p)$ هم‌ارز منطقی هستند، پس $p \equiv \sim(\sim p)$

سؤال گزاره « $2 < 5$ » را دو بار نقیض کنید:

پاسخ $p: (2 < 5) \Rightarrow \sim p: (2 \not< 5) \Rightarrow \sim p: (2 \geq 5) \Rightarrow \sim(\sim p): (2 \not\geq 5) \Rightarrow \sim(\sim p): (2 < 5)$

در نتیجه p هم‌ارز منطقی با $\sim(\sim p)$ است.

گزاره‌نما

تعریف گزاره‌نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم. مثلاً « $x + y < 2$ » یک گزاره‌نمای دو متغیره است.

سؤال کدام یک از جمله‌های زیر گزاره‌نما است؟ در صورتی که جمله گزاره‌نما باشد، چند متغیره بودن آن را مشخص کنید.

۱ x عددی زوج است.

۲ تنها عدد زوج اول است.

۳ حاصل جمع دو برابر عددی با عدد دیگری برابر با ۷ است.

پاسخ ۱ x عددی زوج است. اگر به جای x عدد ۲ قرار بگیرد، ارزش جمله خبری درست است و اگر به جای x عدد ۳ قرار بگیرد، ارزش جمله خبری نادرست است. پس این جمله یک گزاره‌نماست که دارای یک متغیر x است، پس یک گزاره‌نمای یک متغیره می‌باشد.

۲ این جمله متغیر ندارد و گزاره‌نما نیست، بلکه گزاره‌ای با ارزش درست است.

۳ عدد اول را x و عدد دوم را y در نظر می‌گیریم، در این صورت «حاصل جمع دو برابر عددی با عدد دیگری برابر ۷ است.» به صورت $2x + y = 7$ می‌باشد. در این جمله مثلاً می‌توانیم x را مساوی یک قرار دهیم. حال اگر $y = 5$ ، آن‌گاه $2(1) + 5 = 7$ ، ارزش جمله خبری درست است؛ اما اگر $y = 2$ ، آن‌گاه $2(1) + 2 \neq 7$ ، ارزش جمله خبری نادرست است. پس این جمله یک گزاره‌نما می‌باشد که به دلیل وجود دو متغیر x و y در جمله، یک گزاره‌نما با دو متغیره است.

دامنه متغیر گزاره‌نما و مجموعه جواب گزاره‌نما

دامنه متغیر گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا این که گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نمایش می‌دهیم.

مجموعه جواب گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست می‌شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم و همواره داریم $S \subseteq D$

سؤال دامنه متغیر و مجموعه جواب را در گزاره‌نماهای زیر مشخص کنید.

۱ a عددی فرد است. ۲ $5x^2 + 7x - 12 = 0$

پاسخ ۱ دامنه متغیر گزاره‌نما مجموعه اعداد صحیح است ($D = \mathbb{Z}$) و مجموعه جواب آن اعداد فرد صحیح $\{1, 3, 5, \dots\}$ است. $S = \{1, 3, 5, \dots\}$

۲ دامنه متغیر گزاره‌نما اعداد حقیقی است ($D = \mathbb{R}$) و مجموعه جواب آن $S = \{1, -\frac{12}{5}\}$ است. (دقت کنید که دامنه همه معادله‌ها مجموعه اعداد حقیقی است، مگر آن‌که در صورت سؤال محدود شده باشد.)

آشنایی با منطق ریاضی

پرسش‌های تشریحی

بسته
۱

۱. جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱ منطق ریاضی که عده‌ای آن را منطق نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی، یا جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود.

۲ گزاره جمله‌ای است که یا است یا

۳ هر جمله خبری که شامل یک یا چند است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک تبدیل شود، نامیده می‌شود.

۴ از بین جمله‌های زیر گزاره‌ها را مشخص کنید و در صورت امکان ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

۱ پروفیسور سمیعی یک ریاضی‌دان ایرانی است. ۲ تالس یک ریاضی‌دان است.

۳ چه هوای سردی است! ۴ لطفاً از کلاس خارج شوید.

۵ عدد $8 + 3^9$ عددی اول است. ۶ به امید دیدار دوباره!

۷ $9 < 1 - 2^3$ ۸ در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو هم‌اندازه نمی‌باشند.

۹ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ۱۰ $\{5\} \in \{2, 3, 5\}$

۱۱ هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

۱۲ آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۳. در جاهای خالی عددی یا علامت مناسب قرار دهید. به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند. (مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

$15 \square 3 = 18$ **آ** $5 \square \{3, 4, 5\}$ **ت** $\frac{\square}{\sqrt{3}} = 0$ **پ** $6(\square - 5) = 24$ **ب**
 $7 + \square \notin \mathbb{N}$ **ث** $17 \div \square \in \mathbb{Z}$ **ج** $\frac{9 \times 4}{3} \square 6 \times 2$ **چ** $\frac{6 \times 4}{3} \square 9 \times 2$ **ح**

۴. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

$3 \in \{1, 2, 5\}$ **پ** $\frac{15}{3} \leq 3$ **ب** $\sqrt{10} < 10$ **آ**
 3 عددی فرد است یا عدد $\sqrt{2}$ گویا است. **ج** $2^2 + 2^3 = 2^5$ **ت**
 $3 \in \{1, 2, 5\}$ **پ** 1971 عددی اول است. **ج** $2 < 2^{-1}$ **ح** $15 < 5$ **ح**

۵. ارزش‌های سه گزاره p و q و r طبق جدول زیر است. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	
	د	ن
د		د
	ن	
ن	د	
ن		
	ن	
ن		ن

۶. در هر قسمت، گزاره‌ها را مشخص کنید و چند متغیره بودن آن را بنویسید.

آ $x + 1$ عددی زوج است. **ب** فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه {پ, ر} است. $S = \{r, p\}$ است.

پ حاصل ضرب دو عدد برابر ۱۲ است. $(a \times b = 12)$

۷. گزاره‌های با ارزش درست و گزاره‌های با ارزش نادرست را با قرار دادن چهار مقدار برای هر کدام از گزاره‌های زیر بنویسید.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۴ کتاب درسی)

آ $3a + 4$ عددی زوج است. **ب** تفاضل دو عدد برابر ۷ است. **پ** مجموع سه عدد برابر ۱۰ است.

۸. دامنه متغیر هر یک از گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد طبیعی است. مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

$\frac{1}{x-1} < 1$ **آ** $\sqrt{x} = 8$ **ب** $\{2k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$ **پ**

۹. دامنه متغیر گزاره‌ها و مجموعه جواب آن‌ها را بنویسید.

آ x عددی اول است. **ب** x عددی مضرب ۳ به اضافه یک است. $x = 3k + 1; k \in \mathbb{Z}$

پ $x^2 + 3x - 4 = 0$

ترکیب گزاره‌ها

صفحه ۴ تا ۷ کتاب درسی

بسته دوم



رابطه‌های گزاره‌ای

رابطه‌های گزاره‌ای عبارتند از «و»، «یا»، «اگر - آن‌گاه»، «اگر و فقط اگر» که گزاره‌های ساده را به هم مربوط می‌کنند.

ترکیب گزاره‌ها

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره‌های مرکب به دست می‌آید. (دقت کنید که در گزاره مرکب، تعداد گزاره‌ها باید محدود باشد). به عنوان مثال جمله «عدد ۳ فرد است و عدد ۱۴ زوج است.» یک گزاره مرکب است و جمله «عدد ۳ فرد است و عدد ۵ فرد است و عدد ۷ فرد است و ...» گزاره مرکب نیست، زیرا تعداد گزاره‌ها محدود نیست.

ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p یا q » را به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسند و به آن ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در این جا به رابط منطقی « \vee » فاصل گفته می‌شود.

ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دوی p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. یا به عبارتی در ترکیب فصلی، اگر حداقل ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش ترکیب فصلی درست است.

جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

توجه هرگاه گزاره مرکب همواره درست باشد، ارزش منطقی آن « T » و اگر همواره نادرست باشد، ارزش منطقی آن « F » است.

سؤال ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۲ $(\frac{1}{3} \neq \frac{2}{6}) \vee (\frac{36}{18} = 2)$

۱ $(-3 \in \mathbb{Z}) \vee (2 \in \mathbb{Q})$

۴ $(A \not\subseteq A \vee \emptyset \not\subseteq A)$

۳ « 4 یک عدد اول یا 4 عدد مرکب است.»

پاسخ ۱ ارزش گزاره $(2 \in \mathbb{Q})$ درست و ارزش گزاره $(-3 \in \mathbb{Z})$ نیز درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها نیز درست است.

۲ ارزش گزاره $(\frac{36}{18} = 2)$ درست و ارزش گزاره $(\frac{1}{3} \neq \frac{2}{6})$ نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

۳ ارزش گزاره « 4 یک عدد اول است.» نادرست است و ارزش گزاره « 4 یک عدد مرکب است.» درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

۴ ارزش گزاره « $\emptyset \not\subseteq A$ » نادرست است و ارزش گزاره « $A \not\subseteq A$ » نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها نادرست است.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p و q » را که خوانده می‌شود « $p \wedge q$ » ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در این جا به رابط منطقی « \wedge » عطف گفته می‌شود.

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد و در بقیه حالات، ارزش گزاره $p \wedge q$ نادرست است. یا به عبارتی در گزاره عطفی اگر حداقل ارزش یک گزاره نادرست باشد، ارزش گزاره عطفی نیز نادرست است.

جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

سؤال ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۲ $(\frac{4}{16} = \frac{1}{4}) \wedge (\frac{5}{3} < \frac{7}{4})$

۱ $\sqrt{2}$ عددی گویا و $\sqrt{7}$ عددی گنگ است.

پاسخ ۱ ارزش گزاره « $\sqrt{2}$ عددی گویا است.» نادرست است و ارزش گزاره « $\sqrt{7}$ عددی گنگ است.» درست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی آن‌ها نادرست است.

۲ ارزش گزاره $(\frac{5}{3} < \frac{7}{4})$ درست است و ارزش گزاره $(\frac{4}{16} = \frac{1}{4})$ درست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی آن‌ها نیز درست است.

$$|x-1| + (x+2y)^2 = 0$$

سؤال مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم:

پاسخ چون $(x+2y)^2 \geq 0$ و $|x-1| \geq 0$ ، بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x+2y)^2 = 0) \wedge (|x-1| = 0) \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \wedge \\ x+2y=0 \Rightarrow 1+2y=0 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

در نتیجه رابطه بالا وقتی درست است که $x=1$ و $y=-\frac{1}{2}$ باشد.

تذکره به دو هم‌ارزی زیر قانون دموگن در منطق ریاضی گفته می‌شود:

$$\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q) \\ \sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q) \end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

مثلاً نقیض گزاره $(a < b) \vee (a = b)$ برابر است با $(a \not< b) \wedge (a \neq b)$ ، به عبارتی نقیض گزاره $(a \leq b)$ برابر $(a > b)$ می‌باشد. یعنی:

$$\sim(a \leq b) \Rightarrow (a \neq b) \wedge (a \not< b) \Rightarrow (a \neq b) \wedge (a \geq b) \Rightarrow a > b$$

هم‌ارزی منطقی بین گزاره‌های مرکب

۱ قوانین جابجایی

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

۲ قوانین شرکت‌پذیری

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

۳ قوانین توزیع‌پذیری (پخش)

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

مثلاً در ترکیب فعلی «۶ عددی زوج است» \vee «۶ عددی مرکب است» اگر دو گزاره را جابه‌جا کنیم، گزاره‌ای هم‌ارز گزاره اول به دست می‌آید.

یعنی «۶ عددی مرکب است» \vee «۶ عددی زوج است» هم‌ارز گزاره اول است.

ترکیب گزاره‌ها

پریش‌های تشریحی

بسته
۲

۱۰ با داشتن چهار گزاره p, q, r, s در ترکیب عطفی تعداد حالت‌های نادرست چقدر است؟

۱۱ جدول زیر را کامل کنید:

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
مهر اولین ماه فصل پاییز است.	تهران پایتخت ایران است.	د			
۵ عددی اول است.			ن		
۲ عددی زوج نیست.			د		
				ن	

۱۲ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

آ $(-3)^2 = 9 \vee (5 < 7)$

ب 93 عددی فرد یا عددی اول است.

پ $(2^9 = 512) \vee (5^4 = 125)$

ت $(\sqrt{3^2 + 5^2} = 3 + 5) \vee (3 + 5)! = 3! + 5!$

۱۳ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

آ عدد ۱۴۴ بر ۱۲ و ۳۶ بخش پذیر است.

ب مسکو پایتخت روسیه و یکی از شهرهای ایران است.

پ $(3 < 5) \wedge (-3 < -5)$

ت $((2^3)^2 > 2^{3^2}) \wedge (\sqrt{0/01} > \sqrt{0/04})$

۱۴ کدام یک از جمله‌های زیر گزاره مرکب است؟ ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کنید.

آ $(11 > 3 + 1) \vee (3^3 = 81)$

ب $(-4 < -5) \wedge (4 > 5)$

پ مجموع زوایای داخلی هر مثلث، 180° است.

ت $(\mathbb{W} \not\subseteq \mathbb{Z}) \vee (\{2\} \in \{2, 3\})$

ث $((3^2)^2 = 81) \wedge (2^{2^2} = 16)$

ج $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

۱۵. جدول ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید گزاره‌های زیر همواره نادرست هستند.

$$p \wedge \sim(p \vee q) \equiv F \quad \sim p \wedge (p \wedge q) \equiv F \quad p \wedge \sim p \equiv F$$

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۱۶. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید هم‌ارزی‌های منطقی زیر برقرار است.

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad \text{قوانین جابه‌جایی}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{قوانین توزیع‌پذیری}$$

۱۷. با جدول ارزش‌ها نشان دهید که هم‌ارزی قانون دمورگان در منطق ریاضی برقرار است.

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

(مشابه مثال صفحه ۵ کتاب درسی)

۱۸. مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$|2x - 1| + |x + y| = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 0$$

ترکیب شرطی و ترکیب دوشروطی

صفحه ۷ تا ۱۱ کتاب درسی

بسته سوم

ترکیب شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q)$ را که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q »، ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » وقتی نادرست است که ارزش p (مقدم) درست باشد و ارزش q (تالی) نادرست باشد. در بقیه حالت‌ها ارزش « $p \Rightarrow q$ » درست است.

به عبارتی می‌توان گفت هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » درست است، در این حالت می‌گوییم ارزش گزاره $(p \Rightarrow q)$ به انتفای مقدم درست است. هم‌چنین می‌توان گفت هر ترکیب شرطی که ارزش q (تالی) آن درست باشد، مستقل از ارزش مقدم آن همواره درست است.

سؤال کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱ اگر ۴۰۰ بر ۱۰ بخش پذیر باشد، آن‌گاه ۴۰۰ بر ۵ نیز بخش پذیر است. ۲ $(\frac{1}{4}) < (\frac{1}{4}) \Rightarrow (\frac{1}{4})^2 > (\frac{1}{4})^2$

۳ $\sqrt{0.15} > \sqrt{0.17} \Rightarrow 0.15 < 0.17$ ۴ $2^5 = 64 \Rightarrow 2^6 = 128$

پاسخ ۱ در این ترکیب شرطی، مقدم درست است و تالی نیز درست است، لذا گزاره شرطی نیز درست است.

۲ مقدم درست و تالی نادرست است، بنابراین گزاره شرطی نادرست است.

۳ با توجه به این‌که مقدم نادرست و تالی درست است، بنا به انتفای مقدم، ترکیب شرطی درست است.

۴ با توجه به این‌که مقدم نادرست و تالی نادرست است، بنا به انتفای مقدم، ترکیب شرطی درست است.

صورت‌های مختلف بیان ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$

می‌توانیم گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ را به صورت‌های زیر بیان کنیم:

۱ «اگر p آن‌گاه q »

۲ « p شرط کافی برای q است.» یا «شرط کافی برای q آن است که p »

۳ « q شرط لازم برای p است.» یا «شرط لازم برای p آن است که q »

سؤال گزاره شرطی «اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه دو قطرش مساویند.» را به دو شکل مختلف دیگر بنویسید.

پاسخ ۱ مستطیل بودن یک چهارضلعی شرط کافی برای مساوی بودن قطرهای آن است.

۲ مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

نکته ۱ گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم‌ارز منطقی هستند.

۲ گزاره « $p \Rightarrow q$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است، به طوری که « $p \Rightarrow q$ » هم‌ارز منطقی « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

۳ قانون ادخال فاصل:

$$(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$$

یعنی به هر گزاره شرطی می‌توانیم با ترکیب فصلی هر تعداد گزاره را به تالی اضافه (ترکیب) کنیم.

$$(p \wedge q \Rightarrow q) \equiv T \text{ یا } (p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$$

۴ قانون حذف عاطف:

یعنی از ترکیب عطفی دو یا چند گزاره می‌توانیم هر کدام را به دلخواه نتیجه بگیریم.

(اثبات در تمرین‌ها آمده است.)

سؤال ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی زوج باشد، آن‌گاه a نیز عددی زوج است.

پاسخ به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

(a^2 عددی فرد است. $a \Rightarrow$ عددی فرد است.) \equiv (a عددی زوج است. $\Rightarrow a^2$ عددی زوج است.)

اگر a عددی فرد باشد، آن را به صورت $a = 2k + 1$, ($k \in \mathbb{Z}$) در نظر می‌گیریم و سپس طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$a^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k) + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k' \in \mathbb{Z}}) + 1 = 2k' + 1$$

در نتیجه a^2 نیز عددی فرد است. عکس نقیض گزاره خواسته شده را ثابت کردیم، بنابراین گزاره اصلی درست است.

ترکیب دوشروطی

هرگاه p و q گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دوشروطی p و q می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱ «اگر p آن‌گاه q و برعکس»

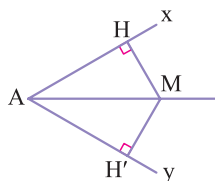
۲ « p شرط لازم و کافی برای q است.»

۳ « q شرط لازم و کافی برای p است.»

۴ « p اگر و تنها اگر q » یا « q اگر و فقط اگر p »

به عنوان مثال گزاره‌های زیر نمونه‌ای از ترکیب دوشروطی گزاره‌ها هستند:

$$(x = 4 \Rightarrow 3x = 12) \wedge (3x = 12 \Rightarrow x = 4) \equiv (x = 4 \Leftrightarrow 3x = 12)$$



ب) شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای روی نیمساز زاویه A قرار داشته باشد آن است که فاصله آن تا دو ضلع زاویه برابر باشد.

$$M \text{ روی نیمساز زاویه } A \text{ قرار دارد.} \Leftrightarrow MH = MH'$$

جدول ارزش ترکیب دوشروطی

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

طبق تعریف هم‌ارزی $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ برقرار است؛ زیرا در دو ستون آخر جدول، ارزش آن‌ها یکسان است، بنابراین اگر دو گزاره p و q ، هم‌ارز باشند یعنی هر دو دارای ارزش درست یا هر دو دارای ارزش نادرست باشند، ارزش گزاره دوشروطی درست است. در بقیه حالت‌ها ارزش گزاره دوشروطی نادرست است.

مثلاً ارزش گزاره $(3 > 12 \Leftrightarrow 3 + 1 > 12 + 1)$ درست است، زیرا هر دو گزاره نادرست هستند.

نکته نقیض گزاره شرطی و دوشروطی به صورت زیر می‌باشد:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

(اثبات در تمرین‌ها آمده است.)

سؤال نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

- ۱ اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه مربع آن مثبت است.
 ۲ یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

پاسخ ۱ نقیض گزاره برابر است با « a عددی منفی است و مربع a مثبت نیست».

۲ نقیض گزاره برابر است با: «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع نیست اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.»
 یا «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر نباشند.»

ترکیب شرطی و ترکیب دوشروطی

پریش‌های تشریحی

بیسته
س

۱۹. جاهای خالی را با عبارتهای «لازم»، «کافی»، یا «لازم و کافی» پر کنید.

- آ شرط برای آن‌که نقطه‌ای از دو سربیک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن است که روی عمودمنصف آن پاره‌خط باشد.
 ب شرط برای آن‌که $ab = 0$ باشد آن است که $a = 0$ و $b = 0$ ، $(a, b \in \mathbb{R})$
 پ شرط برای آن‌که عددی مثبت باشد آن است که مربع آن عدد مثبت باشد.
 ت شرط برای آن‌که $ab = 0$ باشد آن است که $a = 0$ یا $b = 0$ ، $(a, b \in \mathbb{R})$
 ث شرط برای آن‌که عددی زوج باشد آن است که مربع آن زوج باشد.

(دی ۹۳)

۲۰. قضیه شرطی «اگر a و b دو عدد گویا باشند، آن‌گاه $a + b$ گویا است.» را در نظر بگیرید.

آ عکس قضیه شرطی را بنویسید.
 ب آیا عکس آن نیز یک قضیه شرطی است؟ چرا؟

۲۱. ارزش گزاره‌های شرطی و دوشروطی زیر را مشخص کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

- آ اگر a عددی فرد باشد، آن‌گاه a^2 فرد است.
 ب π عددی گویا است اگر و تنها اگر $\pi = 3/14$ باشد.
 پ اگر دو مثلث دارای مساحت‌های برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.
 ت اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن‌گاه دو مثلث دارای مساحت‌های برابر می‌باشند.
 ث اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آن‌گاه قطرهای آن با هم برابرند.
 ج $(2^2 = 4) \Leftrightarrow (2^0 = 2)$
 چ اگر a بر b بخش پذیر باشد، آن‌گاه a^n بر b^n بخش پذیر است.

۲۲. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، قانون ادخال فاصل و قانون حذف عاطف را نشان دهید.

۲۳. جدول‌های ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره‌ها همواره درست هستند.

$$p \Rightarrow p \equiv T \quad \text{آ}$$

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T \quad \text{ب}$$

(تمرین ۵ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

$$p \vee (q \wedge p) \equiv p \quad \text{ب}$$

$$p \vee F \equiv p \quad \text{آ}$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \quad \text{ت}$$

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \quad \text{ب}$$

۲۴. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \quad \text{ب}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad \text{آ}$$

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q \quad \text{ت}$$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad \text{ب}$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad \text{ج}$$

$$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r \quad \text{ث}$$

(مشابه شهریور ۹۲)

۲۶. نشان دهید اگر n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۲۷. ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و n^2 مضرب ۵ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۵ است.



سور

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند.

این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر» یا «به ازای جميع مقادیر» از نماد \forall (از حرف اول کلمه All گرفته شده است) و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists (از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است) استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.

گزاره‌های با سور عمومی

گزاره‌هایی مانند «هر عدد طبیعی، یک عدد مثبت است.» و «هر مستطیلی یک متوازی‌الاضلاع است.» که خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت می‌دهند، سور عمومی هستند.

اگر $P(x)$ را گزاره‌نمایی فرض کنیم که خاصیتی را برای متغیر x بیان می‌کند، در این صورت گزاره «هر x ای خاصیت P را دارا می‌باشد.» را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\forall x : P(x)$$

گزاره‌های با سور عمومی وقتی درست می‌باشند که مجموعه جواب آن‌ها با دامنه متغیر آن‌ها یکسان باشد. به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشند.

سؤال گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

- ۱ مربع هر عدد حقیقی، نامنفی است. ۲ نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچک‌تر است.

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

پاسخ ۱ این گزاره درست است.

زیرا گزاره‌نمایی شامل متغیر x که با سور عمومی بیان می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند و هیچ مثال نقضی نداشته باشد و این عبارت این شرایط را دارد و درست می‌باشد.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2} < x$$

پاسخ ۲ این گزاره نادرست است، زیرا $x = -1$ یک مثال نقض برای این گزاره محسوب می‌شود. $(-\frac{1}{2} < -1)$

یادآوری مجموعه اعداد زوج را با E ، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش می‌دهیم.

$$\forall a \in O : a = 2k + 1, (k \in \mathbb{Z})$$

سؤال عبارت روبه‌رو را با زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن را مشخص کنید.

$$a = 2k + 1, (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ برای هر عدد صحیح فرد داریم:

ارزش این گزاره درست است، زیرا اگر به جای k اعداد صحیح را قرار دهیم، تمام اعداد فرد به دست می‌آیند و هیچ مثال نقضی نیز ندارد.

گزاره‌های با سور وجودی

گزاره‌ای با سور وجودی، گزاره‌ای است که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت دهد.

گزاره « $\exists x : P(x)$ » به این معنی است که حداقل یک x وجود دارد که خاصیت P را دارا می‌باشد. به عنوان مثال:

«بعضی از اعداد اول، زوج هستند.» و «بعضی از اعداد با توان زوج، فرد هستند.» گزاره‌هایی با سور وجودی می‌باشند.

گزاره‌های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها تهی نباشد.

سؤال گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

- ۱ معکوس بعضی از اعداد صحیح، یک عدد صحیح است.
۲ جذر بعضی از اعداد طبیعی از خود عدد طبیعی بزرگ‌تر است.

پاسخ ۱ این گزاره درست است، زیرا به ازای $x = 1$ گزاره درست است، پس حداقل یک عضو وجود دارد که به ازای آن، این گزاره‌نما به گزاره‌ای

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$$

با ارزش درست تبدیل می‌شود.

$$\exists x \in \mathbb{N} : \sqrt{x} > x$$

پاسخ ۲ این گزاره نادرست است، زیرا هیچ عضوی از اعداد طبیعی وجود ندارد که به ازای آن، این گزاره‌نما به یک گزاره درست تبدیل شود.

نقیض گزاره‌های با سور عمومی

گزاره $\forall x : P(x)$ وقتی درست است که تمام اعضای دامنه، خاصیت $P(x)$ را داشته باشند. بنابراین می‌توان گفت این گزاره وقتی نادرست است که حداقل یک عضو پیدا شود که خاصیت $P(x)$ را نداشته باشد.

$$\forall x \in \mathbb{N} : x + 3 \geq 4$$

سؤال ارزش و نقیض گزاره مقابل را به دست آورید.

پاسخ ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای تمام اعداد طبیعی، نامساوی ارائه شده برقرار است.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{N} : x + 3 \geq 4) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x + 3 < 4) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x + 3 < 4)$$

نقیض گزاره‌های با سور وجودی

گزاره $\exists x : P(x)$ وقتی درست است که مجموعه جوابش ناتهی باشد. پس این گزاره وقتی نادرست است که مجموعه جوابش تهی باشد، یعنی هیچ عضوی از دامنه در رابطه $P(x)$ صدق نکند.

سؤال نقیض گزاره «بعضی از اعداد اول زوج هستند» را بیان کنید.

پاسخ نقیض این گزاره به صورت «هر عدد اولی فرد است.» یا «تمام اعداد اول فردند.» می‌باشد.

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x^4 = 0$$

سؤال ارزش و نقیض گزاره مقابل را به دست آورید.

پاسخ ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای $x = 0$ معادله برقرار است، پس مجموعه جواب معادله $x^2 + x^4 = 0$ ناتهی است.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x^4 = 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x^4 \neq 0$$

سورها

پرسش‌های تشریحی

بسته
۴

۲۸. با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

آ در آمار، هر متغیر گسسته یک متغیر کمی است. آ در آمار، هر متغیر کمی یک متغیر گسسته است.

پ در آمار، بعضی از متغیرهای گسسته یک متغیر کیفی هستند. ت در آمار، بعضی از متغیرهای کمی یک متغیر گسسته هستند.

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۲۹. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

آ $\forall x \in \mathbb{N} : x(x+1) = 2k, (k \in \mathbb{N})$ ب $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = 1$

پ $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + 3x = 0$ ت $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0$

ث $\forall x \in P : x = 2k + 1, (k \in \mathbb{N})$ (P اعداد اول است). ج $\exists x \in \mathbb{Z} : x^5 + 1 = 0$

(مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۳۰. هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 2\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

آ $\forall x \in A : x + 3 \leq 4$ ب $\forall x \in A : 2x + 1 > -3$

پ $\exists x \in A : \sqrt{x^2 + 3} = 2$ ت $\exists x \in A : \frac{x-1}{2} \geq 1$

(مشابه تمرین ۸ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۳۱. گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

آ مربع هر عدد حقیقی، مثبت است. ب مجذور هر عدد حقیقی منفی، منفی است.

پ هر عدد صحیحی، گویا است. ت مجذور بعضی از اعداد صحیح با خود آن عدد صحیح مساوی است.

ث وجود دارد عدد طبیعی مانند a به طوری که $-2a + 1 > 0$. ج بعضی از اعداد حقیقی، گویا نیستند.

۳۲. گزاره‌های زیر را به زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن‌ها را مشخص کنید.

آ $\forall x \in \mathbb{N} : (x)(x+1)(x+2) = 3k, (k \in \mathbb{N})$

ب $\forall y \in P : 2y + 1 > 5$ (P اعداد اول است).

پ $\exists x \in \mathbb{N} : n^2 + n < 3$

۴
بخش



پاسخنامه

۱ | آ | نمادین - مطالعه ساختار

ب | خبری - راست (درست) - دروغ (نادرست)

پ | متغیر - گزاره - گزاره نما

۲ | آ | گزاره است و ارزش آن نادرست است.

ب | گزاره است و ارزش آن درست است.

پ | گزاره نیست.

ت | گزاره نیست.

ث | گزاره است. $(4 + 2 \times 3^3 - 3^6)(3^3 + 2) = 3^3 + 8 = 3^9$ این عبارت اتحاد چاق و لاغر است و عدد اول نیست، ارزش نادرست.

ج | گزاره نیست.

چ | $9 < 7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$ گزاره است و ارزش آن درست است.

ح | گزاره است و ارزش آن نادرست است.

خ | گزاره است و ارزش آن درست است.

د | گزاره است و ارزش آن نادرست است.

ذ | گزاره است. حدس گلدباخ است و ارزش آن مشخص نیست.

ر | گزاره است. ارزش درست.

۳ | آ | $3 + 15 = 18$ ، چون تساوی است فقط با قرار دادن علامت جمع ارزش گزاره درست می شود.

ب | $24 = (9 - 5)$ ، چون تساوی است با قرار دادن عدد ۹ معادله $24 = 4 \times 6$ برقرار است و ارزش گزاره درست می شود.

پ | $\frac{0}{\sqrt{3}} = 0$ ، فقط صفر تقسیم بر هر عددی برابر صفر می شود، پس با قرار دادن صفر ارزش گزاره درست می شود.

ت | $5 \in \{3, 4, 5\}$ ، چون ۵ عضوی از مجموعه است، پس از نماد عضویت استفاده می کنیم، تا ارزش گزاره درست باشد.

ث | $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ ، به ازای هر عدد غیر صحیح و اعداد صحیح کوچک تر از (-) این رابطه برقرار می شود و ارزش گزاره درست خواهد شد.

ج | $9 \times 2 < \frac{6 \times 4}{3}$ ، چون $18 = 9 \times 2 < 8 = \frac{6 \times 4}{3}$ ، از علامت (<) برای ارزش درست استفاده می کنیم.

چ | $6 \times 2 = \frac{9 \times 4}{3}$ ، در این گزاره حاصل دو طرف برابر ۱۲ می باشد؛ که از نماد تساوی برای ارزش درست استفاده می کنیم.

ح | $17 \div 17 \in \mathbb{Z}$ ، می توانیم از عددهای 17 ± 1 یا 17 ± 1 نیز استفاده کنیم تا حاصل یک عدد صحیح باشد و ارزش گزاره درست شود.

۴ | آ |

$p: (\sqrt{10} < 10) \Rightarrow \sim p: \sim (\sqrt{10} < 10) \equiv (\sqrt{10} \not< 10) \equiv (\sqrt{10} \geq 10)$

ب | $p: (\frac{15}{3} \leq 3) \Rightarrow \sim p: \sim (\frac{15}{3} \leq 3) \equiv (\frac{15}{3} \not\leq 3) \equiv (\frac{15}{3} > 3)$

پ | $p: (3 \in \{1, 2, 5\}) \Rightarrow \sim p: \sim (3 \in \{1, 2, 5\}) \equiv (3 \notin \{1, 2, 5\})$

ت | $p: (2^2 + 2^3 = 2^5) \Rightarrow \sim p: \sim (2^2 + 2^3 = 2^5) \equiv (2^2 + 2^3 \neq 2^5)$

یا می توانیم آن را به صورت $(2^2 + 2^3 < 2^5) \vee (2^2 + 2^3 > 2^5)$ بنویسیم.

ث | نقیض این گزاره را می توان به صورت «چنین نیست که سعدی شاعر ایرانی باشد.» یا به صورت «سعدی شاعر ایرانی نیست.» نوشت.

ج | نقیض این گزاره را می توان به صورت «چنین نیست که ۱۹۷۱ عددی اول باشد.» یا به صورت «۱۹۷۱ عددی اول نیست.» نوشت.

چ | نقیض گزاره: «۳ عددی فرد نیست و عدد $\sqrt{2}$ گویا نیست.»

ح | نقیض گزاره به صورت $(1^5 < 5) \vee (2 < 2^{-1})$ می باشد که معادل $(1^5 \geq 5) \vee (2 \geq 2^{-1})$ است.

۵ |

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

۶ | آ | گزاره نما است، چون یک جمله خبری داریم که دارای متغیر X است و با جایگذاری اعداد به یک گزاره تبدیل می شود. هم چنین به دلیل داشتن فقط یک متغیر X به آن گزاره نمای یک متغیره می گوییم.

ب | چون متغیر ندارد، گزاره نما نیست. پس یک گزاره است.

پ | گزاره نما است، زیرا با قرار دادن عدد به جای دو متغیر a و b به یک گزاره با ارزش درست یا نادرست تبدیل می شود و به دلیل داشتن دو متغیر آن را گزاره نمای دو متغیره می نامیم.

۷ | آ | اگر به جای متغیر a در عبارت $3a + 4$ ، به طور مثال اعداد ۲، ۴، ۶ یا ۸ را قرار دهیم، ارزش گزاره حاصل درست است اما اگر اعدادی مثل ۱، ۳، ۵، ۷ را قرار دهیم ارزش گزاره حاصل نادرست است.

ب | هرگاه دو عدد را X و Y در نظر بگیریم و «تفاضل دو عدد برابر ۷ است.» را به صورت « $X - Y = 7$ » بنویسیم و اگر به جای متغیر X و Y به صورت زوج مرتب (X, Y) زوج مرتب های $(11, 4)$ ، $(10, 3)$ ، $(9, 2)$ یا $(8, 1)$ را قرار دهیم ارزش گزاره حاصل درست است و اگر زوج مرتب های $(10, 2)$ ، $(19, 13)$ ، $(6, 3)$ یا $(5, 1)$ را قرار دهیم، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

۱۲ | آ) ارزش گزاره $(5 < 7)$ درست است و ارزش گزاره $9 = (-3)^2$ نیز درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.
 ب) ارزش گزاره «۹۳ عددی فرد است.» درست و ارزش گزاره «۹۳ عددی اول است.» نادرست است. پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.
 پ) ارزش گزاره « $5^4 = 125$ » نادرست است و ارزش گزاره « $2^9 = 512$ » درست است. پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.
 ت) ارزش گزاره « $3! + 5! = 3! + 5!$ » نادرست است، زیرا:

$$8! \neq 6 + 120 \Rightarrow 40320 \neq 126$$

و ارزش گزاره $8 = \sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{34} = 3 + 5$ نیز نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی نیز نادرست است.

۱۳ | آ) گزاره اول یعنی «۱۴۴ بر ۱۲ بخش پذیر است.» درست و گزاره دوم یعنی «۱۴۴ بر ۳۶ بخش پذیر است.» نیز درست است، در نتیجه ارزش گزاره ترکیب عطفی نیز درست است.

ب) گزاره اول «مسکو پایتخت روسیه است.» درست و گزاره دوم «مسکو یکی از شهرهای ایران است.» نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی نادرست است.
 پ) ارزش گزاره « $-3 < -5$ » نادرست و ارزش گزاره « $3 < 5$ » درست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی نادرست است.

ت) گزاره $0/1 > 0/2 \Rightarrow \sqrt{0/1} > \sqrt{0/2}$ دارای ارزش نادرست است و گزاره $64 > 512 \Rightarrow 2^6 > 2^9 \Rightarrow 8^2 > 2^9$ نیز دارای ارزش نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی نادرست است.

۱۴ | آ) چون از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزاره مرکب است. این جمله مرکب به صورت ترکیب فصلی است که برای درست بودن باید حداقل یکی از دو گزاره درست باشد و به دلیل آن که $11 > 4$ است، ارزش این گزاره مرکب درست است.

ب) چون از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزاره مرکب است. این گزاره مرکب به صورت ترکیب عطفی است که چون ارزش هر دو گزاره نادرست است، پس ارزش این گزاره مرکب نیز نادرست است.

پ) چون دارای یک گزاره می‌باشد، بنابراین گزاره مرکب نیست.
 ت) به دلیل آن که از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزاره مرکب است. دو گزاره به صورت ترکیب فصلی است و ارزش هر دو گزاره نادرست است، پس ارزش گزاره مرکب نیز نادرست است.

ث) به دلیل آن که از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزاره مرکب است این جمله مرکب به صورت ترکیب عطفی است که چون ارزش هر دو گزاره درست است پس ارزش این گزاره مرکب نیز درست است.
 ج) چون دارای یک گزاره می‌باشد، بنابراین گزاره مرکب نیست.

۱۵ | آ)

p	~p	p ∧ ~p
د	ن	ن
ن	د	ن

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

در نتیجه:

پس ارزش منطقی $p \wedge \sim p$ همواره نادرست است.

پ) هرگاه سه عدد X, Y, Z را در نظر بگیریم و «مجموع سه عدد برابر ۱۰ است.» را به صورت $(X + Y + Z = 10)$ بنویسیم و اگر به جای متغیرهای X و Y و Z در سه تایی (X, Y, Z) ، سه تایی‌های $(1, 4, 5)$ ، $(2, 3, 5)$ ، $(1, 3, 6)$ یا $(1, 2, 7)$ را قرار دهیم، ارزش گزاره حاصل درست است اما اگر سه تایی‌های $(1, 2, 6)$ ، $(1, 2, 5)$ ، $(1, 2, 4)$ یا $(1, 2, 3)$ را قرار دهیم، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

۸ | آ) به جز عدد ۱ و ۲ که در نامساوی صدق نمی‌کنند، بقیه اعداد در نامساوی برقرار هستند، پس مجموعه جواب برابر است با:

$$S = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$$

ب) مجموعه جواب:

$$\sqrt{x} = 8 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 8^2 \Rightarrow x = 64 \Rightarrow S = \{64\}$$

پ) به ازای $k = 1, 2, 3, \dots$ داریم: $S = \{4, 12, 24, \dots\}$

۹ | آ) دامنه متغیر گزاره‌نمای « X عددی اول است.» مجموعه اعداد طبیعی است و مجموعه جواب آن $S = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ است.

ب) دامنه متغیر گزاره‌نمای « X عددی مضرب ۳ به اضافه یک است.» مجموعه اعداد صحیح است و مجموعه جواب آن $S = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$ است.

پ) دامنه متغیر گزاره‌نمای « $X^2 + 3X - 4 = 0$ » مجموعه اعداد حقیقی است و مجموعه جواب آن برابر است با:

$$X^2 + 3X - 4 = 0 \Rightarrow (X + 4)(X - 1) = 0 \Rightarrow X = 1, X = -4$$

$$\Rightarrow S = \{1, -4\}$$

۱۰ | ترکیب عطفی زمانی درست است که تمام گزاره‌ها درست باشد؛ در بقیه حالت‌ها نادرست است. در نتیجه چون چهار گزاره داریم، بنابراین $2^4 = 16$ حالت وجود دارد که فقط یک حالت درست می‌باشد؛ در نتیجه در $16 - 1 = 15$ حالت نادرست است.

۱۱ |

گزاره q	گزاره p
تهران پایتخت ایران است.	مهر اولین ماه فصل پاییز است.
۵ عددی اول نیست.	۵ عددی اول است.
۴ مربع کامل است.	۲ عددی زوج نیست.
$4 + 3 = 8$	۳ عددی زوج است.

ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

(پ)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ و $p \wedge (q \vee r)$ یکسان است پس هم‌ارزی $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ برقرار است.

آ | ۱۷

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

همه حالت‌های ارزش دو گزاره $\sim(p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ یکسان است، پس هم‌ارزی $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ برقرار است.

(ب)

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

همه حالت‌های ارزش دو گزاره $\sim(p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ یکسان است، پس هم‌ارزی $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ برقرار است.

آ | ۱۸

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$$

چون $(x-2)^2 \geq 0$ و $(y+1)^2 \geq 0$ ، پس تساوی بالا وقتی برقرار است

$$((x-2)^2 = 0) \wedge ((y+1)^2 = 0) \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ y+1=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=2$ و $y=-1$ باشد.

(ب) چون $|x+y| \geq 0$ و $|2x-1| \geq 0$ ، پس این تساوی وقتی برقرار است که:

$$(|2x-1|=0) \wedge (|x+y|=0) \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ x+y=0 \Rightarrow \frac{1}{2}+y=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

(ب)

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge (p \wedge q)$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن

در نتیجه: $\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv F$
پس ارزش منطقی $\sim p \wedge (p \wedge q)$ همواره نادرست است.

(پ)

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$p \wedge \sim(p \vee q)$
د	د	د	ن	ن
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن

در نتیجه: $p \wedge \sim(p \vee q) \equiv F$
پس ارزش منطقی $p \wedge \sim(p \vee q)$ همواره نادرست است.

آ | ۱۶

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $p \vee q$ و $q \vee p$ یکسان است، پس هم‌ارزی $p \vee q \equiv q \vee p$ برقرار است.

(ب)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $(p \vee q) \vee r$ و $p \vee (q \vee r)$ یکسان است پس هم‌ارزی $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ برقرار است.

ت) در این گزاره شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزاره شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره: «دو مثلث همنهشت هستند و دو مثلث دارای مساحت برابر نیستند.»

ث) در این گزاره شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزاره شرطی درست است.

نقیض گزاره: «یک چهارضلعی مربع است و قطرهای آن با هم برابر نیستند.»
ج) در این گزاره دوشروطی ارزش گزاره « $2^2 = 4$ » درست و ارزش گزاره « $2 = 2$ » نادرست است، پس ارزش گزاره دوشروطی نادرست است.

نقیض گزاره: « $(2 \neq 2) \Leftrightarrow (2^2 = 4)$ یا « $(2 = 2) \Leftrightarrow (2^2 \neq 4)$ »

چ) در این گزاره شرطی به دلیل آن‌که مقدم و تالی درست است، ارزش گزاره شرطی درست است.

نقیض گزاره: « a بر b بخش پذیر است و a^n بر b^n بخش پذیر نیست.»

۲۲ | قانون ادخال فاصل: $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$ یا $(p \wedge q \Rightarrow q) \equiv T$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p \wedge q \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د

۲۳ | آ

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

$p \Rightarrow p \equiv T$

در نتیجه:

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$
د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د

$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

در نتیجه:

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x = \frac{1}{p}$ و $y = -\frac{1}{p}$ باشد.

پ) $x^2 + 2x + 1 + y^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 0$

چون $y^2 \geq 0$ و $(x+1)^2 \geq 0$ ، پس تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x+1)^2 = 0) \wedge (y^2 = 0) \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ \wedge \\ y=0 \end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x = -1$ و $y = 0$ باشد.

۱۹ | آ) «هر نقطه‌ای از دو سربیک پاره‌خط به یک فاصله می‌باشد اگر

و تنها اگر روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار داشته باشد»، یک ترکیب دوشروطی است (یعنی از هر کدام دیگری را می‌توانیم نتیجه بگیریم). پس عبارت «لازم و کافی» در جای خالی قرار می‌گیرد.

ب) گزاره $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$ درست است. بنابراین در جای خالی کلمه «کافی» قرار می‌گیرد.

پ) گزاره «اگر عددی مثبت باشد، آن‌گاه مربع آن مثبت است»، همواره درست است. پس کلمه «لازم» در جای خالی قرار می‌گیرد.

ت) گزاره دوشروطی $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$ درست است (زیرا از هر یک دیگری را می‌توانیم نتیجه بگیریم). لذا در جای خالی عبارت «لازم و کافی» قرار می‌گیرد.

ث) «اگر عددی زوج باشد، مربع عدد نیز زوج است و برعکس». بنابراین این گزاره یک ترکیب دوشروطی همیشه درست است. پس عبارت «لازم و کافی» در جای خالی قرار می‌گیرد.

۲۰ | آ) عکس قضیه: اگر $a + b$ گویا باشد، آن‌گاه a و b دو عدد گویا هستند.

ب) خیر، مثال نقض:

عدد 2 گویا است. $a + b = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$

در نتیجه $a + b = 2$ گویا است ولی اعداد $a = 1 + \sqrt{2}$ و $b = 1 - \sqrt{2}$ گنگ هستند.

۲۱ | آ) در این گزاره شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش

گزاره شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره: « a عددی فرد است و a^2 عددی فرد نیست.»

ب) در این گزاره دوشروطی ارزش گزاره « π عددی گویا است.» و گزاره « $\pi = 3/14$ » نادرست است، پس ارزش گزاره دوشروطی درست است.

نقیض گزاره: « π عددی گویا نیست، اگر و تنها اگر $\pi = 3/14$ باشد.» یا « π عددی گویا است، اگر و تنها اگر $\pi \neq 3/14$ باشد.»

پ) در این گزاره شرطی ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست است. بنابراین ارزش گزاره شرطی نادرست است.

نقیض گزاره: «دو مثلث دارای مساحت‌های برابر می‌باشند و دو مثلث همنهشت نیستند.»

آ | ۲۵

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د



گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.
 $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

(ب)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د



گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (یعنی هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.)

(پ)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن



گزاره‌های $\sim(p \Rightarrow q)$ و $p \wedge \sim q$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.
 $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

(ت)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن



گزاره‌های $\sim(p \Leftrightarrow q)$ ، $\sim p \Leftrightarrow q$ ، و $p \Leftrightarrow \sim q$ هم‌ارز منطقی هستند. زیرا ارزش ستون آن‌ها یکسان است.

$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

(پ)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$

در نتیجه:

آ | ۲۴

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن



$p \vee F \equiv p$

ارزش دو ستون یکسان است، پس:

(ب)

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن



$p \vee (q \wedge p) \equiv p$

ارزش دو ستون یکسان است، پس:

(پ)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن



$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

ارزش دو ستون یکسان است، پس:

(ت)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د



ارزش دو ستون یکسان است، پس: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

«مطالعه و آشنایی با»
«فرهنگ و هنر»
«سازمان اسناد و کتابخانه ملی»
«جمهوری اسلامی ایران»

گنج

پاسخ
نمونه‌های
کتاب
دررسی

آمار و احتمال

فرمول
بیست



فرمول بیست

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.

از آن جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان
حاضر شوید.

تهران، میدان انقلاب
نیش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

فهرست

آشنایی با مبانی ریاضیات

۳

فصل اول

احتمال

۲۱

فصل دوم

آمار توصیفی

۴۳

فصل سوم

آمار استنباطی

۶۲

فصل چهارم

فصل

آشنایی با مبانی ریاضیات

درس ۱ آشنایی با منطق ریاضی

تمرین ۱ | ص ۱۴ و ۱۵ کتاب درسی

۱ | در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید. به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $(0/1)^3 < (0/1)^5$

ب) اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، $\sin \alpha < \cos \alpha$

پ) نمودار تابع $y = x^2$ از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد.

ت) $-(x-4)^2 \leq 0$

ث) $y^2 = x^2$ تابع نیست

ج) اگر $x^2 = a$ آن‌گاه $x = \pm\sqrt{a}$

۲ | نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $0 < x < 1 \wedge x^2 \geq x$

الف) اگر $0 < x < 1$ ، آن‌گاه $x^2 < x$

ب) ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان است.

نقیض: ابوالوفا محمد بوزجانی ریاضی‌دان نیست.

$p: a \in \{b, c, d\} \Rightarrow \sim p: a \notin \{b, c, d\}$

الف) $a \in \{b, c, d\}$

$\sim p$ را به شکل $a \in \{b, c, d\}$ نیز می‌توان نوشت.

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

نقیض: ۲ عددی زوج نیست و π عددی گویاست.

نقیض را به صورت «۲ عددی زوج نیست و π عددی گنگ است» نیز می‌توان نوشت. توجه کنید عدد حقیقی که زوج نباشد، لزوماً فرد نیست ولی عدد حقیقی که گویا نباشد، لزوماً گنگ است.

۳ | ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$: این گزاره مرکب از دو گزاره $2 < 3$ و $4 + 3 = 10$ با ترکیب

عطفی (\wedge)، تشکیل شده است، پس گزاره مرکب وقتی درست است که p و q هر دو درست

باشند. اما واضح است که q نادرست است؛ بنابراین گزاره مرکب نیز، نادرست خواهد بود.

ب) $(0 = 1 + (-1)^2) \vee (3 > 5)$: این گزاره مرکب از دو گزاره $p: 5 > 3$ و $q: (-1)^2 + 1 = 0$ با ترکیب فصلی (\vee) تشکیل شده است، پس وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p و q درست باشند. چون p درست است؛ بنابراین گزاره مرکب، درست خواهد بود.

پ) $(1 \in \{2, 3, 4\}) \vee (\frac{1}{4} \neq \frac{3}{6})$: این گزاره مرکب از دو گزاره $p: \frac{1}{4} \neq \frac{3}{6}$ و $q: 1 \in \{2, 3, 4\}$ با ترکیب فصلی (\vee) تشکیل شده است. چون هر دو گزاره نادرست هستند؛ بنابراین گزاره مرکب نیز نادرست خواهد بود.

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه ۴ مربع کامل نیست. این گزاره، شرطی ($p \Rightarrow q$) است که در آن، ۴ عدد فرد است؛ p و ۴ مربع کامل نیست؛ q است که هر دو نادرست هستند؛ بنابراین گزاره مرکب درست خواهد بود.

ث) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است. این گزاره، دوشروطی ($p \Leftrightarrow q$) است که در آن، ۲ عدد اول نیست؛ p و ۲ مربع کامل است؛ q است که هر دو نادرست هستند. توجه به اینکه گزاره $q \Leftrightarrow p$ فقط وقتی درست است که p و q ارزش یکسان داشته باشند؛ بنابراین گزاره مرکب درست خواهد بود.

ج) $3 < -2 \Leftrightarrow 2 > 3$: این گزاره نیز دوشروطی ($p \Leftrightarrow q$) است که در آن $2 > 3$ و $3 < -2$ است که هر دو نادرست هستند؛ بنابراین، گزاره مرکب درست خواهد بود.

چ) اگر $a \in \{b\}$ آنگاه $a = b$ و برعکس. عبارت داده شده، ترکیب دوشروطی دو گزاره‌نمای $p: a \in \{b\}$ و $q: a = b$ است. بنابراین، برای مقادیر مختلف a و b ، دو گزاره‌نمای p و q ، ممکن است به گزاره‌های درست یا نادرست تبدیل شوند. اما با کمی دقت متوجه می‌شویم که p و q ، برای مقادیر مختلف a و b ، یا هر دو درست هستند یا هر دو نادرست. زیرا a و b یا با هم برابرند یا برابر نیستند. بنابراین، دو حالت ممکن است رخ دهد:

حالت ۱: فرض کنید $a = b$ (و a و b دو عدد حقیقی دلخواه هستند) بنابراین برای مقادیر مختلف a و b ، گزاره‌نمای q به یک گزاره درست تبدیل می‌شود. از طرفی $a = b$ است، پس $a \in \{b\}$ یعنی $a \in \{a\}$ که درست است. پس p نیز به یک گزاره درست تبدیل می‌شود.

حالت ۲: فرض کنید $a \neq b$ (و a و b دو عدد حقیقی دلخواه هستند) بنابراین برای مقادیر مختلف a و b ، گزاره‌نمای q به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود. از طرفی $a \neq b$ است، پس $a \in \{b\}$ نیز نادرست خواهد بود، یعنی p نیز به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود.

نتیجه گزاره‌نمای مرکب $p \Leftrightarrow q$ که در قسمت (ح) داده شده است، برای مقادیر مختلف a و b به گزاره‌های دوشروطی تبدیل می‌شود که در آنها، هر دو طرف علامت (\Leftrightarrow) گزاره‌های درست یا هر دو طرف آن، گزاره‌های نادرست هستند. بنابراین، این گزاره‌نمای مرکب برای تمامی مقادیر متفاوت a و b ، همواره درست است. ($S = D = IR$)

۴ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۲ زوج است.	عدد ۳ اول است.	د	د	د	د
عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.	۱ ۲	د	ن	ن	ن
$2 \in \{1, 2\}$	$\emptyset \in \{1, 2\}$	د	ن	ن	ن
عدد ۶ مرکب است.	عدد ۷ اول است.	د	د	د	د

در سطر اول جدول، $p \wedge q$ درست است؛ بنابراین p و q هر دو باید گزاره‌هایی درست باشند. در سطر دوم جدول، $p \Rightarrow q$ نادرست است؛ بنابراین p باید درست و q باید نادرست باشد. در سطر سوم جدول، $p \wedge q$ نادرست است؛ بنابراین p یا q یا هر دو باید نادرست باشند. چون p درست است، پس لازم است که q نادرست باشد. در سطر چهارم جدول، $p \Rightarrow q$ درست است. با توجه به اینکه q درست است، پس p می‌تواند درست یا نادرست باشد. اما توجه کنیم که اگر p، یک گزاره درست باشد آنگاه $p \wedge q$ نیز گزاره‌ای درست خواهد بود. در غیر این صورت، $p \wedge q$ گزاره‌ای نادرست خواهد بود.

۵ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

ب) $\sim p \wedge p$

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
ن	د	ن

بنابراین، $\sim p \wedge p$ گزاره‌ای همواره نادرست یعنی «F» است.

پ) $\sim p \vee p$

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
ن	د	د

بنابراین، $\sim p \vee p$ گزاره‌ای همواره درست یعنی «T» است.

ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که:

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$

p	$p \Rightarrow p$	T
د	د	د
ن	د	د

بنابراین، به ازای ارزش‌های مختلف گزاره p ، گزاره $p \Rightarrow p$ همواره درست است، پس هم‌ارز منطقی با «T» است.

$$p \vee F \equiv p \text{ (ب)}$$

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

بنابراین، به ازای ارزش‌های مختلف گزاره p ، گزاره $p \vee F$ ، دارای ارزش یکسان با گزاره p است، پس این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند.

$$p \wedge T \equiv p \text{ (پ)}$$

p	T	$p \wedge T$
د	د	د
ن	د	ن

بنابراین، به ازای ارزش‌های مختلف گزاره p ، گزاره $p \wedge T$ ، دارای ارزش یکسان با گزاره p است، پس این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند.

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \text{ (ت)}$$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین، به ازای ارزش‌های مختلف گزاره‌های p و q ، گزاره $\sim(p \Rightarrow q)$ دارای ارزش یکسان با گزاره $p \wedge \sim q$ است، پس این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند.

$$p \wedge (q \vee p) \equiv p \text{ (ث)}$$

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین، به ازای تمام ارزش‌های مختلف گزاره‌های p و q ، دو گزاره p و $p \wedge (q \vee p)$ دارای ارزش‌های یکسانی هستند، پس هم‌ارز منطقی هستند.