

به نام خدایی که همین نزدیکی است ...

دوستای خوب و عزیزم، درود

من مؤلف کتابی هستم که الان دست شماست. این کتاب در واقع راه دوستی من و شماست. به من کمک می‌کنه که رفقای خوبی مثل شما پیدا کنم و به شما دوستای سال دهم ام کمک می‌کنه که بتونین درس ریاضی و آمار رو به خوبی یاد بگیرین و باهاش مواجه بشین.

می‌دونم که درس ریاضی دغدغه ذهنی (mental distrubance) خیلی از شماهاست، البته حق هم دارین، چون هم درس مهمیه، هم حالا حالاها باهاش سروکار دارین، هم اگه الان پایه‌اش رو قوی نکنین سال‌های بعد به مشکل می‌خورین (تو این مایه‌ها که خشت اول کج معمار و دیوار کج ثریا) و هم ... خوب درس شیرینیه دیگه! (از من معلم قبول کنین)

● توی این کتاب اول هر مبحث، به درسنامه خوشگل و مفصل آوردم همراه با کلی مثال متنوع تا درس رو به خوبی تفهیم مطلب کنه. بعدش هم در ادامه یه عالمه تمرین از تیپ‌های مختلفی که تو امتحانا و کتاب درسی و کنکور اومده بود گنجوندم که دیگه حق مطلب رو ادا کرده باشم و حجت رو بر شما تموم کنم که: رفقای خوبم، به هوش باشید که بعد از دیدن سؤالی این کتاب، همه سؤالی جهان تکراری می‌شود.

● یه کار خوب دیگه هم که کردیم اینه که سؤالا رو سطح بندی کردیم، یه سری سوال هست که در مرحله اول، بعد از خوندن درسنامه، باید و حتماً (must & definitely) حل اش کنید تا اصلاً بفهمین با خودتون چند چندین (سؤالات ستاره‌دار)، سری دوم سؤالات برای تمرین بیشتره تا خوب مطلب ملکه ذهنتون بشه! و یه سری سؤال هم هست که یه لول از سؤالات معمول سطح‌اش بالاتره (سؤالات بمب). این سؤالا برای ما بهتره تا بتونن قدرت (power) ریاضی خودشون رو محک بزنن و کلی باهاش کیف کنن. البته همه شماها باید باهاش آشنا بشین، چون در سال‌های اخیر طراحان سؤالی کنکور به سؤالی سخت علاقمند شدن و ما هم مجبوریم که با این تیپ سؤالا مواجه بشیم.

امیدوارم دوستای خوبی برای هم باشیم و آخر این رفاقت برای همه‌مون خیر و خوشی باشه. براتون آرزوی روزهای خوب و پر از آرامش دارم و ازتون می‌خوام که قدر روزها و لحظاتی که الان توش هستین رو بدونین، مراقب خودتون و مهم‌تر از اون، افکارتون باشین.

فهرست مطالب

۱ فصل اول: معادله درجه دوم

| | |
|----|---|
| ۸ | درس اول: معادله و مسائل توصیفی |
| ۱۳ | درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها |
| ۳۲ | درس سوم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا |

۲ فصل دوم: تابع

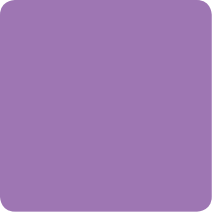
| | |
|----|-------------------------------|
| ۴۰ | درس اول: مفهوم تابع |
| ۴۸ | درس دوم: ضابطه جبری تابع |
| ۵۶ | درس سوم: نمودار تابع خطی |
| ۶۱ | درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲ |

۳ فصل سوم: کار با داده‌های آماری

| | |
|----|---------------------------------|
| ۷۲ | درس اول: گردآوری داده‌ها |
| ۸۱ | درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز |
| ۸۷ | درس سوم: معیارهای پراکندگی |

۴ فصل چهارم: نمایش داده‌ها

| | |
|-----|-------------------------------|
| ۱۰۰ | درس اول: نمودارهای یک متغیره |
| ۱۱۲ | درس دوم: نمودارهای چند متغیره |



تقديم به بچه‌های علوم انسانی



مجموعه کتاب‌های میکرو قرن جدید

ریاضی و آمار دهم



فصل اول

معادله درجه دوم

- درس ۱: معادله و مسائل توصیفی ۸
- درس ۲: حل معادله درجه ۲ و کاربردها ۱۳
- درس ۳: معادله‌های شامل عبارتهای گویا ۳۲

فصل اول

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

معادله درجه اول و کاربردها

معادله درجه اول و کاربردهای آن



به تساوی $2x - 1 = 3$ دقت کنید که شامل متغیر x است.

این تساوی به ازای بعضی از مقادیر به جای x درست است و به ازای بعضی مقادیر دیگر نادرست است. (مثلاً به ازای $x = 2$ درست و به ازای $x = 0$ نادرست) به تساوی‌های این چنینی که شامل متغیری (مجهولی) مانند x است، یک معادله می‌گوییم. هدف از حل معادله، یافتن مقادیر عددی برای مجهول است که به ازای آن‌ها، تساوی برقرار باشد. این مقدار یا مقادیر را جواب معادله یا ریشه معادله می‌گویند.

معادله درجه اول

به معادله‌هایی که در آن، مجهول دارای توان ۱ باشد و پس از ساده شدن به شکل $ax + b = 0$ درآید ($a \neq 0$) یک معادله درجه اول می‌گویند. (معادله‌های $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = \sqrt{2}$ و $-3x = \frac{1}{2}$ ، $2x - 1 = 0$ همگی معادله‌های درجه اول هستند.) برای حل معادله‌های درجه اول، همه عددهای معلوم را به یک طرف و همه جملات دارای متغیر (مجهول) را به سمت دیگر تساوی می‌بریم. فقط توجه کنید که هر جمله یا عبارتی را که جابه‌جا می‌کنید، علامت آن تغییر می‌کند. در نهایت مقدار مجهول برابر است با طرف معلوم تقسیم بر ضریب مجهول:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

ضریب مجهول
↑
طرف معلوم
↓
 می‌رود طرف دیگر تساوی

به طور مثال:

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 3 + 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

(هر معادله درجه اول به شکل $ax + b = 0$ با شرط $a \neq 0$ تماماً به جواب به صورت $x = \frac{-b}{a}$ درآید.)

مثال جواب معادله‌های زیر را بیابید.

$$3x - 4 = 4x + 1 \quad (\text{آ})$$

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} = 1 \quad (\text{ب})$$

$$2x(-x+2) = x - 2x^2 + 3 \quad (\text{پ})$$

پاسخ آ همه معلوم‌ها یک طرف و همه مجهول‌ها را نیز در طرف دیگر تساوی نگاه می‌داریم:

$$3x - 4 = 4x + 1 \Rightarrow 3x - 4x = 1 + 4 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{-1} = -5$$

ب روش اول تک تک کسرها را تفکیک می‌کنیم:

طرف دیگر تساوی می‌روند

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x = \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3+2}{6}x = \frac{9-2}{6} \Rightarrow \frac{5}{6}x = \frac{7}{6} \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

دور در دور نزدیک در نزدیک

روش دوم برای این که از اول از سر مخرج‌ها خلاص شویم، دو طرف تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها (مخرج مشترک) ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} = 1 \xrightarrow{\times 6} 6\left(\frac{x-1}{2}\right) + 6\left(\frac{x+1}{3}\right) = 6$$

$$\Rightarrow 3(x-1) + 2(x+1) = 6 \Rightarrow 3x - 3 + 2x + 2 = 6$$

$$\Rightarrow 3x + 2x = 6 + 3 - 2 \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

ب. هتماً با خودتون می‌گین این که معادله درجه اول نیست، x^2 داریم. صبر کنین، اول معادله رو تا هر امکان ساده کنین:

$$2x(-x+2) = x - 2x^2 + 3 \Rightarrow -2x^2 + 4x = x - 2x^2 + 3$$

$$\Rightarrow \cancel{-2x^2} + 4x - x + \cancel{2x^2} = 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$$

۱ جواب معادله $\frac{1}{3}x - 2 = 3x + 2$ کدام است؟

-۶ (۴)

۶ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

$$\frac{1}{3}x - 2 = 3x + 2 \Rightarrow \frac{1}{3}x - 3x = 2 + 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} - 3\right)x = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1-9}{3}x = 4 \Rightarrow \frac{-8}{3}x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{\frac{-8}{3}} = \frac{4 \times 3}{-8} = -\frac{3}{2}$$

۲ اگر $x = 2$ جواب معادله $2ax + 1 = 2x + 3a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۳ (۴)

-۳ (۳)

-۵ (۲)

۵ (۱)

۴ نکته! جواب معادله یا ریشه معادله در معادله صدق می‌کند.

کافی است در معادله داده شده به جای x مقدار ۲ را جای‌گذاری کنیم:

$$2ax + 1 = 2x + 3a \xrightarrow{x=2} 2a(2) + 1 = 2(2) + 3a$$

$$\Rightarrow 4a + 1 = 4 + 3a \Rightarrow 4a - 3a = 4 - 1 \Rightarrow a = 3$$

کاربرد معادله درجه اول

مدل‌سازی ریاضی برخی از مسائل، در نهایت منجر به تولید یک معادله درجه اول می‌شود، به این شکل که مجهول مسئله را متغیری مثل x در نظر می‌گیریم، سپس با توجه به صورت مسئله، یک معادله برای آن می‌سازیم. با حل معادله، مقدار مجهول و جواب مسئله به دست می‌آید.

به طور مثال وقتی می‌گویید عددی بیابید که از ۲ برابرش ۳ واحد بیش‌تر باشد، آن عدد را x در نظر می‌گیریم؛ پس داریم:

عدد

$$x = 2x + 3 \xrightarrow{\text{حل معادله}} x - 2x = 3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$$

از دو برابرش سه واحد بیشتر

طول مستطیلی دو برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۲۴ واحد باشد، اختلاف طول و عرض مستطیل چه قدر است؟

$$4(1) \quad 2(2) \quad 8(3) \quad 6(4)$$

۱ عرض مستطیل را x در نظر می‌گیریم، پس طول آن با توجه به صورت مسئله برابر با $(2x)$ است و داریم:

$$\text{محیط مستطیل} = 2(\text{طول} + \text{عرض}) = 24 \Rightarrow 2(2x + x) = 24 \Rightarrow 2(3x) = 24$$

$$\Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow \text{عرض} = 4 \Rightarrow 2x = 8: \text{طول}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف طول و عرض} = 8 - 4 = 4$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱. جواب معادله $2(3 - 5x) = 8x - 4$ کدام است؟

$$\frac{5}{9}(1) \quad 5(2) \quad 1(3) \quad \frac{1}{9}(4)$$

۲. جواب معادله $1 = 5x - 4(x + 2(x - 1))$ کدام است؟

$$-1(1) \quad 1(2) \quad \frac{9}{7}(3) \quad -\frac{9}{7}(4)$$

۳. جواب معادله $\frac{2x+1}{3} - \frac{5-x}{2} = \frac{x}{12}$ کدام است؟

$$\frac{4}{3}(1) \quad 2(2) \quad \frac{5}{3}(3) \quad 3(4)$$

۴. جواب معادله $\frac{1}{12}(13x - \frac{2}{5}) = x - \frac{x}{12}$ کدام است؟

$$\frac{2}{5}(1) \quad \frac{1}{5}(2) \quad 5(3) \quad \frac{5}{2}(4)$$

۵. اگر معادله درجه اول $a(x^2 + 2b) - (bx + 5) = a - 1$ دارای جواب $x = -2$ باشد، مقدار $2a + b$ کدام است؟

$$4(1) \quad 2(2) \quad -2(3) \quad -4(4)$$

۶. اگر $x = -1$ جوابی برای معادله $\frac{1}{3}x + \frac{a}{4} = \frac{1}{3}x - \frac{a}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$1(1) \quad -1(2) \quad \frac{1}{5}(3) \quad -\frac{1}{5}(4)$$

۷. اگر جواب معادله $1 - bx + a = 1 - 5x$ برابر با ربع جواب معادله $1 - x + 7 = \frac{1}{4}x$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$a + 4b = 21(1) \quad a - 4b = 21(2) \quad a - 4b = 19(3) \quad a + 4b = 19(4)$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۸. سه برابر عددی از نصف آن، ۵ واحد بیش‌تر است. این عدد کدام است؟

$$2(1) \quad 1(2) \quad 6(3) \quad \frac{1}{2}(4)$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۹. دو برابر ثلث عددی از سه برابر نصف آن، ۲ واحد بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟

$$1/2(1) \quad 2/4(2) \quad -2/4(3) \quad -1/2(4)$$

۱۰. حاصل تقسیم عددی بر ۵ را از عدد (۳) کم کرده‌ایم. حاصل، مساوی با چهار برابر همان عدد شده است. آن عدد کدام است؟

$$-\frac{15}{19}(1) \quad \frac{15}{19}(2) \quad \frac{5}{7}(3) \quad -\frac{5}{7}(4)$$

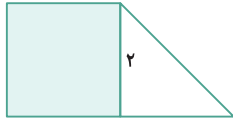
۱۱. مجموع ۴ عدد زوج متوالی، برابر با ۵۲ شده است. حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

$$160(1) \quad 180(2) \quad 64(3) \quad 128(4)$$

۱۲. اگر یک عدد زوج را از عدد فرد قبلی اش کم کنیم، حاصل از (-2) برابر عدد فرد، ۵ واحد بیش تر می شود. مجموع این دو عدد زوج و فرد کدام است؟

- ۷ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴)

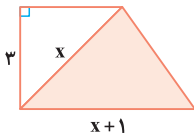
۱۳. در شکل مقابل، مساحت مربع از $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیش تر است. مساحت دوزنقه کدام است؟



(داخل ۱۴۰۱)

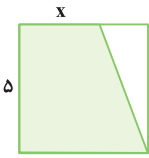
- ۵ (۱) ۵/۵ (۲) ۶/۵ (۳) ۷ (۴)

۱۴. اگر مساحت رنگی ۹ واحد مربع باشد، مساحت دوزنقه قائم الزاویه مقابل، چند واحد مربع است؟



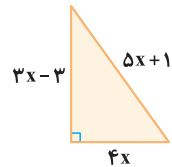
- ۱۰ (۱) ۱۵ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴)

۱۵. اگر مساحت رنگی ۷۵ درصد مساحت مربع باشد، مقدار x کدام است؟



- ۲/۵ (۱) ۲ (۲) ۱۲/۵ (۳) $2/5\sqrt{5}$ (۴)

۱۶. محیط مثلث قائم الزاویه مقابل چه قدر است؟



- $\frac{5}{y}$ (۱) $\frac{1}{y}$ (۲) $\frac{2}{y}$ (۳) $\frac{24}{y}$ (۴)

۱۷. طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۳۶ واحد باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- ۱۴۷ (۱) ۶۰/۷۵ (۲) ۱۲۱/۵ (۳) ۶۸/۷۵ (۴)

۱۸. سیامک از روز اول هفته تصمیم دارد هر روز ۲ برابر زمان روز قبل بدود. اگر در پایان روز ششم مجموعاً ۱۸۹ دقیقه دویده باشد، روز اول چند دقیقه دویده است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۹. زمان تولد منیژه، خواهرش دو سال سن داشت. اگر اکنون سن برادر آن‌ها برابر با حاصل ضرب سن منیژه و خواهرش باشد و ۷ سال دیگر، سن برادر با مجموع سن این دو خواهر برابر باشد، منیژه حالا چند سال دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۲۰. در یک مهمانی تعدادی هلو و سیب برای پذیرایی در نظر گرفته شده است. اگر به هر نفر ۶ میوه داده شود، ۳ نفر بدون میوه می ماند، اما وقتی به هر نفر ۳ میوه داده شود، ۲ سیب و یک هلو باقی می ماند. تعداد میهمانان چند نفر است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۲۱. سارا برای دو نفر از دوستانش یک جعبه شیرینی خرید. او به یکی از دوستانش $\frac{1}{5}$ از شیرینی‌ها را داد و به دوست دیگرش نصف باقی مانده شیرینی‌ها را داد و ۶ تا شیرینی هم برای خودش ماند. تعداد شیرینی‌های داخل جعبه چند تا بوده است؟

- ۱۵ (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۱۲ (۴)

۲۲. چند گوی به رنگ‌های قرمز، سبز و آبی در اختیار داریم. اگر وزن ۳ گوی آبی از وزن یک گوی قرمز، ۱۰۰ گرم کم تر باشد و وزن هر گوی سبز با مجموع وزن یک گوی قرمز و ۲ گوی آبی برابر باشد و مجموع وزن ۱ گوی سبز، ۲ گوی قرمز و ۴ گوی آبی برابر با ۱/۵ کیلوگرم باشد، وزن هر گوی آبی چند گرم است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- ۵۰۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۳۴۰ (۳) ۸۰ (۴)

۲۳. پدری باغ بزرگی دارد که می خواهد آن را بین سه فرزندش تقسیم کند. اگر سهم ساسان، $\frac{2}{3}$ سامان و ۳ برابر ماهان باشد و اختلاف مساحت مربوط به سهم باغ ساسان و سامان، ۵۰۰ مترمربع بیش تر از مساحت مربوط به ماهان باشد، مساحت کل باغ چه قدر است؟

- ۴۰۰۰ (۱) ۹۵۰۰ (۲) ۳۰۰۰ (۳) ۸۵۰۰ (۴)

۲۴ ☆

قیمت ۳ قوطی شیر با قیمت ۲ بسته ماکارونی و قیمت یک کیلو گوشت با مجموع قیمت ۴ قوطی شیر و ۳ بسته ماکارونی برابر است. اگر جمع فاکتور خریدی شامل ۱ قوطی شیر، ۳ بسته ماکارونی و ۲ کیلو گوشت، برابر با ۴۵۰ هزار تومان شده باشد، قیمت هر بسته ماکارونی چند هزار تومان است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۲۵

پژمان سه بسته مختلف داشت. وزن بسته اول، ۳ برابر وزن بسته دوم و نصف وزن بسته سوم است. او برای یافتن وزن بسته‌ها، بسته‌های اول و دوم را به همراه یک وزنه ۲ کیلوگرمی در یک کفه ترازو و بسته سوم را در کفه دیگر قرار داد تا ترازو به حالت تعادل درآید. مجموع وزن بسته‌های اول و سوم چند کیلوگرم بوده است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۷

۲۶ ☆

به طور متوسط وزن یک پرتقال دو برابر وزن یک آلو و ثلث وزن طالبی است. سبزی شامل ۳ پرتقال و ۸ آلو و یک طالبی، ۲ کیلوگرم وزن دارد. وزن هر آلو به طور متوسط چند گرم است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۵۰

۲۷

در یک پارکینگ تعدادی موتور و ماشین پارک شده است. اگر ورود ۲۵ پلاک ثبت شده باشد و تعداد کل چرخ‌های موجود ۷۰ تا باشد، حاصل ضرب تعداد موتورها و ماشین‌ها چه قدر است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۲۰۰

۲۸ ☆

یک قالی ۶ متری به ابعاد $(\frac{2}{10} \times \frac{2}{80})$ مترمربع شامل ۳,۵۲۸,۰۰۰ گره است. اگر تعداد گره‌های قالی در ۷ سانتی‌متر طول یا عرض را چرخ بنامیم، این قالی شامل چند رج است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- (۱) ۵۴۰ (۲) ۳۵۰ (۳) ۴۲۰ (۴) ۴۹۰

۲۹ ☆

در مسئله قبل اگر هزینه ثابت کارگاه قالی‌بافی، روزانه ۱۰۰ هزار تومان باشد و برای هر گره ۱ سانتی‌متر نخ استفاده شود و قیمت هر متر نخ، ۲ هزار تومان باشد، قالی‌بافی که هر روز بتواند ۹۰۰۰ گره بپافد، باید قالی را به چه قیمتی بفروشد تا ضرر نکند؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- (۱) ۱۱۰ میلیون (۲) ۱۰۰ میلیون (۳) ۹۰ میلیون (۴) ۱۰۹ میلیون

۳۰ ☆

هر یک از حروف الفبای فارسی را به صورت (ax^n) رمزنگاری می‌کنیم که در آن a شماره آن حرف (از ۱ تا ۳۲) و n تعداد نقاط حروف مورد نظر است. کدام گزینه معادل $(14x^3 + 32x^2 + 31x)$ است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- (۱) نوشابه (۲) بیژن (۳) منیژه (۴) پیمایش

۳۱ 🌐

رضا و علی به ترتیب در دو شهر A و B ساکن هستند. رضا برای رفتن به شهر B در مسیر اول ۱۴ کیلومتر را در جهتی می‌پیماید که با طی کردن ۷ کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اولی به نقطه C می‌رسد. نهایتاً با پیمایش ۹ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. علی برای رفتن به شهر A تصمیم دارد ابتدا a کیلومتر به سمت شمال و به همان اندازه به سمت غرب بپیماید. در مجموع دو نفر کم‌ترین مسافت را طی می‌کنند. مقدار a کدام است؟

(خارج ۱۴۰۲)

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۷ (۳) ۲۱ (۴) ۲۳

۳۲ 🌐

حسن و امیر در شهر A ساکن هستند. حسن برای رفتن به شهر B، ابتدا ۱۵ کیلومتر در جهت جنوب و سپس ۱۵ کیلومتر در جهت شرق می‌پیماید. امیر برای رفتن به شهر B در مسیر اول ۱۴ کیلومتر را در جهتی می‌پیماید که با طی کردن a کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۷ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. در مجموع دو نفر کم‌ترین مسیر را طی می‌کنند. کدام فرد و چند کیلومتر کم‌تر مسافت را برای رسیدن به شهر B طی می‌کند؟

(داخل ۱۴۰۲)

- (۱) حسن، ۶ (۲) امیر، ۶ (۳) حسن، ۳ (۴) امیر، ۳

فصل اول

درس دوم:

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

1

بخش اول: آشنایی با معادله های درجه دوم
 بخش دوم: حل معادله درجه دوم به روش تجزیه
 بخش سوم: حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل (ریشه گیری) بخش ششم: مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم
 بخش چهارم: حل معادله درجه دوم به روش کلی (دلتا)
 بخش پنجم: حل معادله درجه دوم در حالت های خاص
 بخش ششم: مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم
 بخش هفتم: کاربردهایی از معادله درجه دوم

آشنایی با معادله های درجه دوم

هر معادله ای که پس از ساده کردن، در نهایت به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ (با $a \neq 0$) (یعنی بزرگ ترین توان x برابر با ۲ باشد)، یک معادله درجه دوم است. مثل:
 $2x^2 - x + 1 = 0$ یا $\frac{1}{3}x^2 = 3 - x$ یا $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0$ یا $x^2 - \frac{1}{3}x = 0$
 یک معادله درجه دوم، حداکثر ۲ ریشه (جواب) دارد. (یعنی صفر یا ۱ یا ۲ جواب)

❓ اگر $(a-1)x^3 + bx^2 = x^2 - x + 1$ یک معادله درجه دوم باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۴) $ab \neq 0$

(۳) $a = 1 \neq b$

(۲) $a = b = 1$

(۱) $a = 0 \neq b$

۳ معادله را تا حد امکان ساده می کنیم:

چون معادله، درجه دوم است باید بزرگ ترین توان x ، ۲ باشد. پس جمله $(a-1)x^3$ باید حذف شود. برای این کار ضرب x^3 را برابر با صفر قرار می دهیم:

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

$b - 1 \neq 0 \Rightarrow b \neq 1$

از طرفی باید جمله شامل x^2 حذف نشود، پس ضرب x^2 مخالف صفر است:

❓ اگر $x = -1$ جواب معادله $\frac{1}{3}x(a-x) = x^2 + \frac{a}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

(۴) -3

(۳) 3

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

$\frac{1}{3}x(a-x) = x^2 + \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}ax - \frac{1}{3}x^2 = x^2 + \frac{a}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}ax - x^2 - \frac{a}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}ax - \frac{a}{3} = 0$

$\xrightarrow{x=-1} -\frac{4}{3}(-1)^2 + \frac{1}{3}a(-1) - \frac{a}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = 0 \Rightarrow -a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$

پرسش های چهارگزینه ای

?

۳۳ ☆ کدام گزینه در مورد تعداد جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ صحیح است؟

(۴) حداکثر ۲

(۳) دقیقاً ۲

(۲) حداقل ۲

(۱) حداقل یک

۳۴ اگر معادله $(m^2 - 1)x^3 + (m+1)x^2 = mx + 1$ یک معادله درجه دوم باشد، مقدار m کدام است؟

(۴) $m \neq 0$

(۳) $m = 1$

(۲) $m = \pm 1$

(۱) $m \neq -1$

- ☆ ۳۵. اگر $x = -\frac{1}{4}$ جوابی از معادله $ax^2 - 2ax = \frac{1}{4}a - x + 3$ باشد، مقدار a کدام است؟
- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{14}{3}$ (۳) $\frac{3}{14}$ (۴) $\frac{3}{7}$
- ☆ ۳۶. دو معادله $2(x+1) = 3x - 1$ و $\frac{1}{4}(x-a) = 2x^2 + a$ دارای جواب مشترک می‌باشند. مقدار a کدام است؟
- (۱) -11 (۲) 11 (۳) 13 (۴) -13
- ☆ ۳۷. معادله درجه دوم $x^2 + mx + n = 0$ دارای جواب‌های -2 و 3 است. $m+n$ کدام است؟
- (۱) 5 (۲) -5 (۳) -7 (۴) 7
- ☆ ۳۸. اگر اعداد $x = \frac{1}{4}$ و $x = -2$ جواب‌های معادله $2x^2 + ax + b = 0$ باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟
- (۱) 5 (۲) -1 (۳) 1 (۴) -5
- ☆ ۳۹. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 = 3x - 2$ باشد، حاصل $(\alpha + \frac{1}{\alpha})$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$
- ☆ ۴۰. اگر $x = \alpha$ ریشه‌ای از معادله $3x^2 + 4x - 2 = 0$ باشد، حاصل $6\alpha^2 + 8(\alpha - 1)$ چه قدر است؟
- (۱) 4 (۲) -4 (۳) 8 (۴) صفر

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

مقدمه (یادآوری اتحادها)

قبل از آموزش حل معادله‌های درجه دوم به روش تجزیه، لازم می‌دانم که مرور مختصری بر اتحادها داشته باشیم، زیرا این روش کاملاً بر پایه اتحادها و تجزیه عبارت‌ها به کمک آن‌ها، انجام می‌شود.

اتحاد مربع دوجمله‌ای: اتحاد مربع مجموع و تفاضل دوجمله‌ای به صورت زیر است:

$$(a \oplus b)^2 = a^2 + b^2 \oplus 2ab \quad , \quad (a \ominus b)^2 = a^2 + b^2 \ominus 2ab$$

↑ اولی به توان ۲ دو برابر اولی در دومی
↓ دومی به توان ۲

به طور مثال: $(x+2)^2 = x^2 + 4 + 4x$

$(2x-1)^2 = (2x)^2 + 1^2 - 2(2x)(1) = 4x^2 + 1 - 4x$

$$(a-b)(a+b) = a^2 \ominus b^2$$

↑ اولی به توان ۲
↓ دومی به توان ۲

اتحاد مزدوج:

به طور مثال: $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ یا $(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

اتحاد جمله مشترک: از این اتحاد بیش‌تر از بقیه برای تجزیه عبارت‌های درجه دوم، کمک می‌گیریم:

$$(\bigcirc + a)(\bigcirc + b) = \bigcirc^2 + \overbrace{(a+b)\bigcirc}^{\text{مجموع غیر مشترک‌ها}} + \underbrace{ab}_{\text{ضرب غیر مشترک‌ها}}$$

↑ مشترک
↓ جمله مشترک مشترک به توان ۲

به طور مثال:

$(x-1)(x+2) = x^2 + (-1+2)x + (-1)(2) = x^2 + x - 2$

$(2x+1)(2x+\frac{1}{4}) = (2x)^2 + (1+\frac{1}{4})(2x) + (1)(\frac{1}{4})$

$= 4x^2 + \frac{3}{4}(2x) + \frac{1}{4} = 4x^2 + 3x + \frac{1}{4}$

تجزیه عبارت‌ها

برای تجزیه عبارت‌های جبری، در واقع آن‌ها را به شکل حاصل ضرب دو یا چند عامل با درجه کم‌تر می‌نویسیم. برای تجزیه عبارت‌های جبری می‌توان از فاکتورگیری یا اتحادها کمک گرفت. به طور مثال:

$$\text{ا} \quad \underbrace{12x^2y^3}_{3x^2y^2} - \underbrace{15x^2y^2}_{3x^2y^2} = 3x^2y^2(4y - 5x)$$

$$\text{ب} \quad 4x^2 - 4x + 1 = \underbrace{(2x)^2}_{a^2} - \underbrace{2(2x)(1)}_{2ab} + \underbrace{(1)^2}_{b^2} = \underbrace{(2x-1)^2}_{(a-b)^2}$$

$$\text{پ} \quad \underbrace{2x^2 - \frac{1}{8}}_{\text{فاکتور از 2}} = 2\left(x^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{ت} \quad x^2 - 5x + 6 = \underbrace{x^2}_{\text{مشترک به توان 2}} + \underbrace{(-2-3)x}_{\text{جمع غیر مشترک‌ها}} + \underbrace{(-2)(-3)}_{\text{ضرب غیر مشترک‌ها}} = (x-2)(x-3)$$

توجه کنید که معمولاً عبارت‌های درجه دومی که جمله مربع کامل دارند به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌شوند و نیز اون جمله مربع کامل، همون جمله مشترک‌مونه. با مشخص شدن جمله مشترک و جمع و ضرب غیرمشترک‌ها، عملیات غیرمشترک رو پیدا می‌کنیم و عبارت رو تجزیه می‌کنیم.

$$\text{ث} \quad 4x^3 + 4x^2 - 3x \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(4x^2 + 4x - 3)$$

اگر عبارت داخل پرانتز 2 تا جمله مربع کامل داشت از اتحاد مربع دو جمله‌ای کمک می‌گرفتیم اما این‌جا فقط یک جمله مربع کامل داریم: $4x^2 = (2x)^2$ پس احتمالاً $2x$ می‌شه جمله مشترک‌مون.

$$\underbrace{(2x)^2}_{\text{ضرب غیر مشترک‌ها}} + \underbrace{4x - 3}_{\text{جمع غیر مشترک‌ها}} = (2x)^2 + 2(2x) - 3 = (2x+3)(2x-1)$$

(دو تا عدد باید پیدا کنیم که جمعشون بشه 2 و ضربشون بشه (-3) ! درسته می‌شه: 3 و -1)

$$x(2x+3)(2x-1)$$

پس تجزیه شده عبارت (ث) برابر است با:

نکته! اگر عبارت درجه دومی شامل هیچ جمله مربع کاملی نبود (ضریب x^2 مربع کامل نبود)، برای تجزیه این عبارت به کمک اتحاد یک جمله

$$2x^2 - 5x + 3$$

مشترک به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{4x^2 - 5(2x) + 6}{2}$$

1 عبارت را در ضریب x^2 ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(2x-3)(2x-2)}{2}$$

2 سه جمله‌ای حاصل در صورت را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(x-1)(2x-3)}{2}$$

3 یکی از دو پرانتز حاصل، ضریبی از مخرب است که آن‌ها را ساده می‌کنیم:

$$(2x-3)(x-1)$$

4 عبارت حاصل تجزیه شده است:

حل معادله درجه دوم به کمک تجزیه

در این روش به کمک فاکتورگیری یا اتحادها، معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را تجزیه می‌کنیم تا به صورت حاصل ضرب 2 عبارت درجه اول نوشته شود. سپس به کمک خاصیت عامل صفر، ریشه‌های هر یک از معادله‌های درجه اول را می‌یابیم. ریشه‌های حاصل، همان جواب‌های معادله درجه دوم می‌باشند. خاصیت عامل صفر: $A \times B = 0 \Rightarrow A = 0$ یا $B = 0$.

یادآوری

$$\text{ا} \quad 2x^2 - x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

به طور مثال:

پس معادله دارای 2 ریشه $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ است.

$$\text{ب} \quad x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$\text{پ} \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

مثال

هر یک از معادلات زیر را به کمک روش تجزیه حل کنید.

(آ) $3x^2 - 12x = 0$ (ب) $(x-1)^2 = 4$ (پ) $x^2 + x - 3 = 0$

(ت) $x(x-2) = -1$ (ث) $4x^2 + 8x - 5 = 0$ (ج) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

پاسخ

(آ) $3x^2 - 12x = 0 \xrightarrow{\text{فکتور از } 3x} 3x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

(ب) $(x-1)^2 - 2^2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-1+2)(x-1-2) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

(پ) $x^2 + x - 3 = 0 \xrightarrow[\text{مجموع}]{\text{حاصل ضرب}} \text{اتحاد جمله مشترک} \rightarrow (x-5)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ x+6 = 0 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$

(ت) $x(x-2) = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ این معادله یک ریشه دارد.

(ث) $4x^2 + 8x - 5 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + 4(2x) - 5 = 0 \Rightarrow (2x+5)(2x-1) = 0$
 حاصل ضرب مجموع جمله مشترک

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+5=0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \\ 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(ج) $2x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow[\text{می‌کنیم.}]{\text{در } 2 \text{ ضرب و تقسیم}} \frac{4x^2 + 6x - 4}{2} = 0 \Rightarrow \frac{(2x)^2 + 3(2x) - 4}{2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{(2x-1)(2x+4)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{(2x-1) \times 2(x+2)}{2} = 0 \Rightarrow (2x-1)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x+2=0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

(برای حل معادله‌های این شکلی، چون اون طرف تساوی صفره دیگه لازم نیست بر ضریب x^2 تقسیم کنی، کافیه دو طرف تساوی رو در ضریب x^2 فقط ضرب کنی! یعنی می‌تونستیم اون مخرج ۲ رو اصلاً از اول ننویسیم.)

؟ مجموع ریشه‌های معادله $9 = 8(x-1) + (x-1)^2$ کدام است؟

۶ (۱) -۶ (۲) ۱۶ (۳) -۱۶ (۴)

اتحاد مربع جمله‌ای

$$(x-1)^2 + 8(x-1) - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 8x - 8 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 2 + (-8) = -6$$

اما راه ساده‌تری هم برای حل این‌طور معادله‌ها هست، اونم تغییر متغیره! یعنی عبارتی که تکرار شده رو به متغیر جدید در نظر می‌گیریم و بر اساس اون، معادله رو حل می‌کنیم و در نهایت با جای‌گذاری، x ها رو پیدا می‌کنیم. ببینید:

$$x-1 = t \Rightarrow t^2 + 8t - 9 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t-1)(t+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -9 \end{cases}$$

روش دوم

 حالا به جای t مقدار $x-1$ را قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{t=x-1} \begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=1+1=2 \\ x-1=-9 \Rightarrow x=-9+1=-8 \end{cases}$$

بر اساس روش تجزیه برای حل معادله‌های درجه دوم می‌تونیم این نکته رو نتیجه بگیریم که:

 معادله درجه دومی که ریشه‌هایش α و β باشد، به صورت $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ است.

 به طور مثال معادله درجه دومی که ریشه‌هایش -2 و 3 باشد، برابر است با: $(x-3)(x-(-2)) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۴۱ ☆ برای حل معادله درجه دوم $2x^2 + mx - 5 = 0$ آن را به صورت $(ax-1)(x-c) = 0$ تجزیه کرده‌ایم. m کدام است؟

- (۱) -۱۱ (۲) ۹ (۳) -10 (۴) ۸

۴۲ ☆ جواب بزرگ‌تر معادله $x^2 + 28 = 11x$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۱۲

۴۳ مجموع جواب‌های معادله $x(x-2) - 3(x-2) = 0$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -5 (۳) ۵ (۴) -6

۴۴ ☆ قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله $2x^2 - 7x - 4 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) $\frac{9}{2}$

۴۵ جواب بزرگ‌تر معادله $9x^2 + 3x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

۴۶ ☆ عدد طبیعی که مربع آن از دو برابر خود عدد 36 واحد بیش‌تر باشد، کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۳۰ (۴) ۱۲

۴۷ عددی مثبت از نصف مربع آن ۴ واحد کم‌تر است. آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۴

۴۸ ☆ اگر $x = \frac{1}{p}$ یکی از جواب‌های معادله $2x^2 + mx + 2 = m$ باشد، جواب دیگر کدام است؟

- (۱) $x = -\frac{1}{p}$ (۲) $x = 3$ (۳) $x = -3$ (۴) $x = \frac{1}{3}$

۴۹ اگر یکی از جواب‌های معادله $3x^2 + 3ax + a^2 = 3$ برابر با (-2) باشد، جواب دیگر کدام است؟

- (۱) -3 (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) -1

۵۰ ☆ ریشه‌ی کدام یک از معادله‌های زیر $\frac{1}{p} \pm$ است؟

- (۱) $9x^2 + 1 = 0$ (۲) $9x^2 - 1 = 0$ (۳) $x^2 - 9 = 0$ (۴) $x^2 + 9 = 0$

۵۱ اگر ریشه‌های معادله $x^2 - ax + 8 = 0$ منفی باشند و یکی از ریشه‌ها نصف ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -2 (۲) ۲ (۳) -6 (۴) ۶

۵۲ ☆ تعداد جواب‌های معادله $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۵۳ بزرگ‌ترین ریشه‌ی معادله $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) ۱

۵۴ 🌐 مثلثی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای به عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد

(داخل ۱۴۰۲)

را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد مقدار c کدام است؟ ($c \neq 0$)

- (۱) $1/75$ (۲) $2/75$ (۳) $-1/75$ (۴) $-2/75$

۵۵ 🌐 مثلثی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $-x^2 + 2x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد

(خارج ۱۴۰۲)

را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) $0/75$ (۲) $-1/8$ (۳) $1/2$ (۴) $1/25$

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل (ریشه‌گیری)



حل معادله به روش ریشه‌گیری: اگر دو طرف یک تساوی (معادله) را بتوان به صورت دو عبارت مربع کامل نوشت، در این صورت با جذر گرفتن از طرفین تساوی می‌توان ریشه‌های معادله را پیدا کرد:

$$A^2 = B^2 \Rightarrow A = \pm B \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

به‌طور مثال: $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 = 5^2 \Rightarrow x = \pm 5 (x = 5, x = -5)$

(توجه کنید که معادله بالا رو به روش تجزیه و اتحاد مزدوج هم می‌تونستیم حل کنیم. فوراً تون حل کنید تا متوجه درستی‌اش بشین.)

مثال هر یک از معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

$$(x+2)^2 = 9 \quad (x-1)^2 = 9(x^2 + 4x + 4) \quad (پ) \quad 4x^2 + 18 = 0 \quad (ب) \quad (x+2)^2 = 9 \quad (آ)$$

پاسخ

$$\begin{cases} (x+2)^2 = 3^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \begin{cases} x+2 = 3 \Rightarrow x = 3-2 = 1 \\ x+2 = -3 \Rightarrow x = -3-2 = -5 \end{cases} \\ (ب) \quad 4x^2 + 18 = 0 \Rightarrow 4x^2 = -18 \Rightarrow \underbrace{(2x)^2}_{\text{نامنفی}} = \underbrace{-18}_{\text{منفی}} \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

(توجه کنید که وقتی عبارت به شکل $A^2 = B^2$ باشد، تماماً B^2 نامنفی، پس آنگه طرف دوم تساوی منفی باشد، نمی‌شود اون رو به صورت B^2 نوشت و تو این حالت معادله درجه دوم جواب نداره.)

پ $(x-1)^2 = 9(x^2 + 4x + 4) \Rightarrow (x-1)^2 = 3^2(x+2)^2$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x-1 = \pm 3(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 3x+6 \Rightarrow x-3x = 6+1 \Rightarrow -2x = 7 \Rightarrow x = \frac{-7}{2} \\ x-1 = -3x-6 \Rightarrow x+3x = -6+1 \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

حال طبق این روش (ریشه‌گیری) می‌خواهیم روش دیگری برای حل معادله‌های درجه دوم معرفی کنیم و آن هم روش مربع کامل است.

روش مربع کامل

گاهی برای استفاده از ریشه‌گیری در حل معادله‌های درجه دوم، ابتدا باید عبارت مربع کامل را بسازیم تا در مرحله بعد با ریشه‌گیری، جواب‌های معادله را بیابیم. برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به روش مربع کامل مراحل زیر را طی می‌کنیم:

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

۱ اگر ضریب x^2 یک نباشد، معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{2}$$

۲ مقدار ثابت را به سمت دیگر تساوی می‌بریم:

$$\xrightarrow{+(\frac{-2}{2})^2 = 1} x^2 - 2x + 1 = \frac{-1}{2} + 1$$

۳ نصف ضریب x را به توان ۲ می‌رسانیم و به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:

۴ عبارت درجه دوم، یک عبارت مربع کامل است، آن را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای مشخص می‌کنیم. طرف دیگر معادله یک عدد است.

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

۵ حال به کمک ریشه‌گیری، ریشه‌های معادله را می‌یابیم:

$$x-1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

مجموعه کتاب‌های میکرو قرن جدید

ریاضی و آمار دهم



پاسخنامه تشریحی



۲ ۱۶

ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس مقدار x را می‌یابیم:

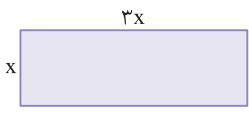
$$\begin{aligned} (\Delta x + 1)^2 &= (3x - 3)^2 + (4x)^2 \\ \Rightarrow 25x^2 + 10x + 1 &= 9(x-1)^2 + 16x^2 \\ \Rightarrow 25x^2 + 10x + 1 &= 9(x^2 - 2x + 1) + 16x^2 \\ \Rightarrow 25x^2 + 10x + 1 &= 25x^2 - 18x + 9 \\ \Rightarrow 10x + 18x &= 9 - 1 \Rightarrow 28x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{28} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{محیط مثلث} &= \Delta x + 1 + 3x - 3 + 4x = 12x - 2 = 12 \times \frac{2}{7} - 2 \\ &= \frac{24 - 14}{7} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

۲ ۱۷

عرض مستطیل را x و طول آن را $3x$ در نظر می‌گیریم:



$$\begin{aligned} \text{محیط مستطیل} &= 2(x + 3x) = 36 \\ \Rightarrow 2 \times 4x &= 36 \\ \Rightarrow x &= \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \\ \text{عرض} &= \frac{9}{2} \Rightarrow 3x = 3 \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2} \\ \text{مساحت مستطیل} &= \frac{9}{2} \times \frac{27}{2} = \frac{243}{4} = 60.75 \end{aligned}$$

۱ ۱۸

اگر روز اول x دقیقه دویده باشد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x &= 189 \\ \Rightarrow 63x &= 189 \Rightarrow x = \frac{189}{63} = 3 \end{aligned}$$

۱ ۱۹

سن کنونی منیژه را x در نظر می‌گیریم، پس خواهرش $x + 2$ سال دارد

و داریم:

$$\begin{aligned} \text{سن برادر} &= x(x+2) = x^2 + 2x \\ \text{۷ سال دیگر منیژه} &(x+7), \text{خواهرش} (x+9), \text{وبرادرش} x^2 + 2x + 7 \\ \text{سال دارد و داریم:} & \\ x^2 + 2x + 7 &= (x+7) + (x+9) \\ \Rightarrow x^2 + 2x + 7 &= 2x + 16 \Rightarrow x^2 = 16 - 7 = 9 \xrightarrow{x>0} x = 3 \end{aligned}$$

۳ ۲۰

اگر تعداد مهمان‌ها را n در نظر بگیریم، تعداد میوه‌ها برابر است با:

۳ میوه باقی‌مانده ۳ نفر بدون میوه

$$\begin{aligned} 6 \times (n-3) &= 3n + 3 \\ \Rightarrow 6n - 18 &= 3n + 3 \Rightarrow 6n - 3n = 3 + 18 \\ \Rightarrow 3n &= 21 \Rightarrow n = \frac{21}{3} = 7 \end{aligned}$$

۱ ۱۱

آن چهار عدد را به صورت $x + 6$ و $x + 4$ و $x + 2$ و x در نظر می‌گیریم، زیرا اعداد زوج متوالی تا ۲ تا با هم فاصله دارند، پس داریم:

$$\begin{aligned} x + x + 2 + x + 4 + x + 6 &= 52 \\ \Rightarrow 4x + 12 &= 52 \Rightarrow 4x = 52 - 12 = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{4} = 10 \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{بزرگ‌ترین عدد} = x + 6 = 16 \\ \text{کوچک‌ترین عدد} = x = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{حاصل ضرب}} 16 \times 10 = 160 \end{aligned}$$

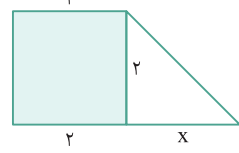
۱ ۱۲

عدد زوج را x در نظر می‌گیریم، پس عدد فرد قبلی $(x-1)$ است. و داریم:

$$\begin{aligned} (x-1) - x &= -2(x-1) + 5 \\ \Rightarrow x - 1 - x &= -2x + 2 + 5 \\ \Rightarrow -1 &= -2x + 7 \Rightarrow 2x = 7 + 1 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \\ \Rightarrow 3, 4 &\Rightarrow \text{مجموع} = 3 + 4 = 7 \end{aligned}$$

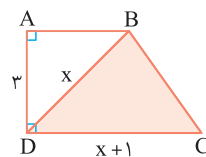
۴ ۱۳

طول ضلع قائم دیگر مثلث را x در نظر می‌گیریم. بنا به فرض داریم:



$$\begin{aligned} \text{مساحت مربع} &= 2 \times 2 = 4 \\ \text{مساحت مثلث} &= \frac{1}{2} \times x \times 2 = x \\ \Rightarrow 4 &= \frac{1}{2}x + 3 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}x &= 4 - 3 = 1 \Rightarrow x = 2 \\ \Rightarrow \text{مساحت دوزنقه} &= \frac{(2 + (2+x)) \times 2}{2} = 4 + x \xrightarrow{x=2} 4 + 2 = 7 \end{aligned}$$

۲ ۱۴



$$\begin{aligned} \text{مساحت رنگی} &= \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{3(x+1)}{2} = 9 \\ \Rightarrow 3(x+1) &= 2 \times 9 \Rightarrow 3x + 3 = 18 \\ \Rightarrow 3x &= 18 - 3 = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5 \\ \Rightarrow BD &= x = 5, \quad CD = x + 1 = 6 \end{aligned}$$

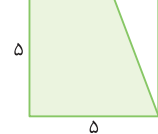
$$\Delta ABD \text{ فیثاغورس در } AB^2 = BD^2 - AD^2 = x^2 - 3^2$$

$$\xrightarrow{x=5} AB^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AB = 4$$

$$S_{ABCD} = \frac{(\text{مجموع دو قاعده}) \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{(4+6) \times 3}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

۱ ۱۵

شکل رنگی، یک دوزنقه با قاعده‌های x و ۵ است:



$$\begin{aligned} \text{مساحت مربع} &= \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2} \\ \Rightarrow \frac{(x+5) \times 5}{2} &= \frac{75}{2} \Rightarrow (x+5) \times 5 = 75 \\ \Rightarrow \frac{5}{2}(x+5) &= \frac{75}{2} \Rightarrow 5(x+5) = 75 \\ \Rightarrow 5x + 25 &= 75 \Rightarrow 5x = 75 - 25 = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{5} = 10 \end{aligned}$$

حال جمع فاکتور را بر حسب x می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
 1 \times y + 3 \times x + 2 \times z &= 450 \xrightarrow{(2), (1)} \frac{2}{3}x + 3x + 2 \times \frac{17}{3}x = 450 \\
 \Rightarrow \frac{2}{3}x + 3x + \frac{34}{3}x &= 450 \xrightarrow{\times 3} 2x + 9x + 34x = 3 \times 450 \\
 \Rightarrow 45x &= 3 \times 450 \Rightarrow x = \frac{3 \times 450}{45} = 30 \text{ (هزار تومان)}
 \end{aligned}$$

۳ ۲۵

$$\begin{cases}
 \text{بسته اول} = x \\
 \text{بسته دوم} = y \\
 \text{بسته سوم} = z
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3y = \frac{1}{3}z \Rightarrow y = \frac{1}{3}x, z = 2x \quad (*)$$

$$\text{ترازوی: } x + y + z = 2x \xrightarrow{(*)} x + \frac{1}{3}x + 2x = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}x + 2 = 2x \Rightarrow \frac{4}{3}x - 2x = -2$$

$$\xrightarrow{\times 3} 4x - 6x = -6 \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{وزن بسته اول} = x = 3 \\ \text{مجموع وزن بسته سوم} = z = 2x = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع وزن بسته اول و سوم} = 3 + 6 = 9$$

۲ ۲۶

$$\begin{cases}
 \text{پرتقال} = x \\
 \text{آلو} = y \\
 \text{طالبی} = z
 \end{cases}
 \Rightarrow x = 2y = \frac{1}{3}z \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x & (1) \\ z = 3x & (2) \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$3x + 8y + z = 2 \text{ کیلوگرم}$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} 3x + 8(\frac{1}{2}x) + 3x = 2000 \text{ گرم}$$

$$\Rightarrow 3x + 4x + 3x = 2000 \Rightarrow 10x = 2000 \Rightarrow x = 200 \text{ گرم}$$

$$\Rightarrow \text{وزن آلو} = y = \frac{1}{2}x = 100 \text{ گرم}$$

۳ ۲۷

$$\begin{cases}
 \text{تعداد موتور} = x \\
 \text{تعداد ماشین} = y
 \end{cases}
 \Rightarrow x + y = 25 \quad (1)$$

هر ماشین ۴ چرخ و هر موتور ۲ چرخ دارد:

$$2x + 4y = 70 \xrightarrow{\div 2} x + 2y = 35 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} x + 2y - x - y = 35 - 25 \Rightarrow y = 10$$

$$\xrightarrow{x+y=25} x = 25 - 10 = 15$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب تعداد موتورها و ماشینها} = xy = 15 \times 10 = 150$$

۳ ۲۸

فرض می‌کنیم این قالی شامل x ریج باشد، پس ۷ سانتی متر طول دارای

x گره است و ۱ سانتی متر شامل $\frac{x}{7}$ گره می‌باشد.

$$\text{تعداد کل گرهها} = \text{مساحت قالی} \times \frac{x}{7} = 280 \times 210 \times \frac{x}{7}$$

$$\Rightarrow 8400x = 3,528,000 \Rightarrow x = \frac{3,528,000}{8400} = 420$$

۱ ۲۱

اگر تعداد شیرینی‌ها را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}(\frac{4}{5}x) + 6 &= x \\
 \text{دوست اول} \quad \text{دوست دوم} \quad \text{تعداد شیرینی‌ها} \\
 \text{خودش باقی مانده}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}x + 6 = x$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}x + 6 = x \Rightarrow x - \frac{3}{5}x = 6 \Rightarrow \frac{2}{5}x = 6$$

$$\xrightarrow{\times 5} 2x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{2} = 15$$

۴ ۲۲

وزن هر گوی آبی، قرمز و سبز را به ترتیب x ، y و z در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases}
 3x = y - 100 \Rightarrow y = 3x + 100 & (1) \\
 z = y + 2x
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 3x + 100 + 2x = 5x + 100 \quad (2)$$

حال بنا به فرض داریم:

$$\begin{aligned}
 &2 \text{ تا قرمز} \\
 &4 \text{ تا آبی} \\
 &1 \text{ یک سبز} \\
 &z + 2y + 4x = 1/5 \text{ کیلوگرم}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} 5x + 100 + 2(3x + 100) + 4x = 1500 \text{ گرم}$$

$$\Rightarrow (5x + 6x + 4x) + 100 + 200 = 1500 \Rightarrow 15x = 1500 - 300 = 1200$$

$$\Rightarrow x = \frac{1200}{15} = \frac{400}{5} = 80 \text{ گرم آبی}$$

۴ ۲۳

$$x = \text{ساسان}$$

$$y = \text{سامان}$$

$$z = \text{ماهان}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y = 2z \Rightarrow y = \frac{3}{2}x, z = \frac{1}{3}x \\ x < y \Rightarrow y - x = 500 + z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x - x = 500 + \frac{1}{3}x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = 500 \xrightarrow{\times 6} 3x - 2x = 3000 \Rightarrow x = 3000$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2} \times 3000 = 4500, z = \frac{1}{3} \times 3000 = 1000$$

$$\text{مساحت کل باغ} = x + y + z = 3000 + 4500 + 1000 = 8500$$

۲ ۲۴

$$x = \text{ماکارونی}$$

$$y = \text{شیر}$$

$$z = \text{گوشت}$$

حالا قیمت گوشت و شیر را بر حسب قیمت ماکارونی (x) به دست می‌آوریم:

$$3y = 2x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 4y + 3x \Rightarrow z = 4(\frac{2}{3}x) + 3x \\ = \frac{8}{3}x + 3x = \frac{17}{3}x \end{cases} \quad (2)$$

۲ ۴۱

با توجه به صورت مسئله، تجزیه شده عبارت $2x^2 + mx - 5$ ، برابر با $(ax-1)(x-c)$ است:

$$2x^2 + mx - 5 = (ax-1)(x-c) = ax^2 - acx - x + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ m = -ac - 1 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = -(2)(-5) - 1 = +10 - 1 = 9$$

۲ ۴۲

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

حاصل ضرب مجموع

برای تجزیه عبارت بالا (به کمک اتحاد جمله مشترک) به دنبال دو عدد هستیم که مجموع آن‌ها (-11) و حاصل ضرب آن‌ها $(+28)$ باشد، آن دو عدد -7 و -4 می‌باشند:

$$(x-4)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x-7=0 \Rightarrow x=7 \end{cases}$$

ریشه بزرگ‌تر: $x=7$

۳ ۴۳

روش اول معادله را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها $\rightarrow 2+3=5$

۴ ۴۴

مجموع دو عدد

$$2x^2 - 7x - 4 = 0 \xrightarrow{\times 2} 4x^2 - 7(2x) - 8 = 0$$

ضرب دو عدد

$$\Rightarrow (2x+1)(2x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \\ 2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{8}{2}=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تفاضل جواب‌ها} = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

۱ ۴۵

حاصل ضرب مجموع

$$9x^2 + 3x - 20 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 1(3x) - 20 = 0$$

جمله مشترک

$$\Rightarrow (3x-4)(3x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \\ 3x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

ریشه بزرگ‌تر: $x=\frac{4}{3}$

۳ ۳۷

جواب‌های معادله در معادله صدق می‌کنند:

$$x^2 + mx + n = 0 \begin{cases} \xrightarrow{x=-2} (-2)^2 + m(-2) + n = 0 \\ \xrightarrow{x=3} 3^2 + m(3) + n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 - 2m + n = 0 \Rightarrow 2m - n = 4 \quad (1) \\ 9 + 3m + n = 0 \Rightarrow 3m + n = -9 \quad (2) \end{cases}$$

دو رابطه (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$2m - n + 3m + n = 4 - 9 \Rightarrow 5m = -5 \Rightarrow m = -1$$

$$\xrightarrow{2m-n=4} 2(-1) - n = 4 \Rightarrow -2 - n = 4 \Rightarrow -2 - 4 = n$$

$$\Rightarrow n = -6 \Rightarrow m + n = (-1) + (-6) = -7$$

۳ ۳۸

$$2x^2 + ax + b = 0 \begin{cases} \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0 \\ \xrightarrow{x=-2} 2(-2)^2 + a(-2) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + b = 0 \quad (1) \\ \lambda - 2a + b = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \lambda - 2a + b - \frac{1}{2} - \frac{a}{2} - b = 0$$

$$\Rightarrow -2a - \frac{a}{2} = -\lambda + \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2}a = \frac{-15}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} -5a = -15 \Rightarrow a = \frac{-15}{-5} = 3$$

$$\xrightarrow{\lambda - 2a + b = 0} \lambda - 2(3) + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow a + b = 3 + (-2) = 1$$

۴ ۳۹

جواب معادله در معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$2\alpha^2 = 3\alpha - 2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{3}{2}\alpha - 1 \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{3}{2}\alpha - 1 + 1}{\alpha} = \frac{\frac{3}{2}\alpha}{\alpha} = \frac{3}{2}$$

۲ ۴۰

ریشه معادله در معادله صدق می‌کند:

$$3x^2 + 4x - 2 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} 3\alpha^2 + 4\alpha = 2 \quad (*)$$

حال داریم:

$$6\alpha^2 + 8(\alpha - 1) = 6\alpha^2 + 8\alpha - 8 = 2(3\alpha^2 + 4\alpha) - 8$$

فاکتور از ۲

$$= 2(2) - 8 = 4 - 8 = -4$$