بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلیٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضیات گسسته

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

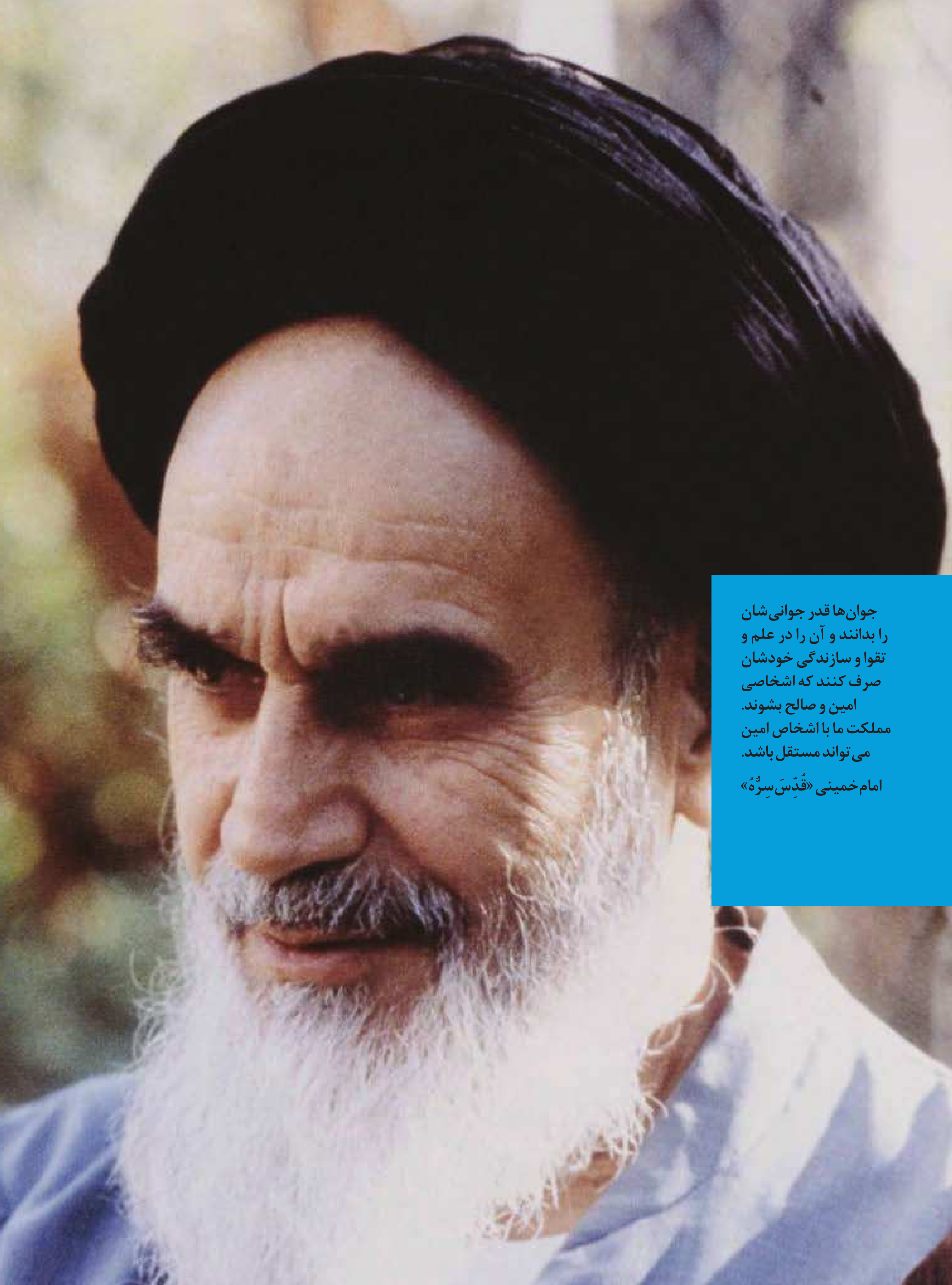
پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضیات گسسته ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۲۱۵
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سید محمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام‌صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سید صالحی و امید نقشینه ارجمند (اعضای گروه تألیف)
جعفر ربّانی (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی(مدیر امور فنی و چاپ)ـ جواد صفری (مدیر هنری)ـ زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا)ـ مریم کیوان (طراح جلد) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ سیده فاطمه طباطبایی، سید کیوان حسینی، علیرضا ملکان، زینت بهشتی‌شیرازی و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هفتم ۱۴۰۳

شابک ۲ـ۳۱۱۱ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3111-2



جوان‌ها قدر جوانی‌شان
را بدانند و آن را در علم و
تقوا و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست

فصل ۱. آشنایی با نظریهٔ اعداد ۱

درس ۱. استدلال ریاضی ۲

درس ۲. بخش‌پذیری در اعداد صحیح ۹

درس ۳. هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها ۱۸

فصل ۲. گراف و مدل‌سازی ۳۱

درس ۱. معرفی گراف ۳۲

درس ۲. مدل‌سازی با گراف ۴۳

فصل ۳. ترکیبیّات (شمارش) ۵۵

درس ۱. مباحثی در ترکیبیّات ۵۶

درس ۲. روش‌هایی برای شمارش ۷۳

منابع ۸۵

مقدمه

کتاب حاضر با عنوان «ریاضیات گسسته» در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. این کتاب بر خلاف درس‌هایی چون حسابان که بیشتر به مباحثی در ریاضیات پیوسته می‌پردازد، به درس‌هایی مانند گراف، ترکیبیات و روش‌های شمارشی و نظریهٔ اعداد می‌پردازد که در حیطهٔ ریاضیات گسسته قرار دارند و با مجموعه‌های متناهی و یا شمارا سر و کار دارند. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هرحال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

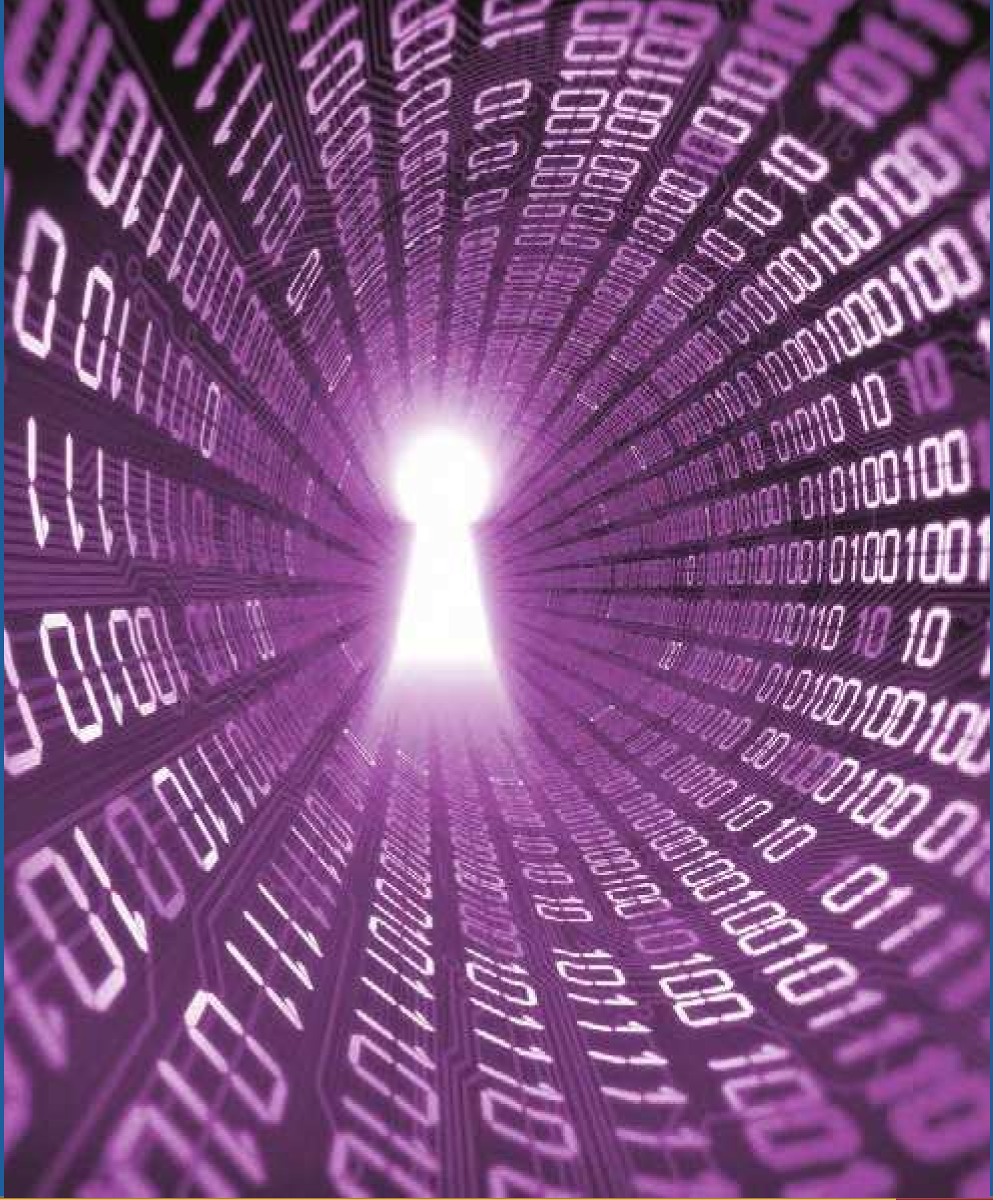
مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق رمزینه سریع پاسخ نظرسنجی کتاب‌های درسی دارد.

مؤلفان

نظرسنجی کتاب درسی

معلّمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب کتاب‌های درسی از طریق سامانه «نظرسنجی از محتوای کتاب درسی» به نشانی «nazar.roshd.ir» یا نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۴۸۷۴ ـ ۱۵۸۷۵ ارسال کنند.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی



۱ آشنایی با نظریهٔ اعداد

۱ استدلال ریاضی

۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۳ رابطهٔ هم‌نهشتی روی Z و کاربردهای آن

نظریه اعداد و به‌خصوص مبحث هم‌نهشتی‌ها کاربردهای بسیاری در علوم مربوط به رایانه، رمزنگاری و رمزگشایی، حساب با اعداد صحیح بزرگ، طراحی الگوریتم‌های سودمند برای حساب رایانه‌ای و ایجاد اعداد شبه تصادفی دارد.

درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همهٔ ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

حل : گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم :

$۱۰+۱۱+۱۲=۳۳$ $\qquad$ $۵+۶+۷=۱۸$

$۳۱+۳۲+۳۳=۹۶$ $\qquad$ $۲۵+۲۶+۲۷=۷۸$

در همه موارد حاصل جمع های به‌دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای $n=۱$, $n=۲$, $n=۳$ و $n=۴$ حاصل $۲^{۲^n}+۱$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد گزاره ب، اگر $n=۵$ آن‌گاه :

$$۲^{۲^n}+۱=۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷=۶۴۱\times۶۷۰۰۴۱۷$$

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به‌صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به‌کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، امّا درستی گزاره با ارائه مثال به‌دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با n، $n+۱$ و $n+۲$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n+n+۱+n+۲=۳n+۳=۳(n+۱)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست[1]. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$

ج) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

خواندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به‌طور مثال عبارت $۹۹۱n^۲+۱$ را برای n های طبیعی درنظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n=۱$، $n=۲$، ... و $n=۱۰۰۰$ به‌دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای n های طبیعی عبارت $۹۹۱n^۲+۱$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» پاسخ منفی است! سرپینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن $۹۹۱n^۲+۱$ مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد $n=۱۲۰۵۵۷۳۵۷۹۰۳۳۱۳۵۹۴۴۷۴۴۲۵۳۸۷۳۷$ مثال نقض موردنظر است.

---

[1]ــ طرح مسائل در ارزشیابی ها باید در سطح مطالب کتاب باشد. طرح مسائل پیچیده که نیاز به دانش محتوایی سطح بالا دارند مورد تأیید مؤلفین نیست.

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن درمورد مسئله را درنظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^{۲}-۵n+۷$ عددی فرد است.

حل : دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد :

الف) n زوج است، به‌عبارت دیگر $n=۲k$ $(k\in\mathbb{N})$؛ در این حالت داریم :

$$n^{۲}-۵n+۷=(۲k)^{۲}-۵(۲k)+۷=۴k^{۲}-۱۰k+۶+۱$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب) n فرد است، یعنی $n=۲k-۱$ $(k\in\mathbb{N})$؛ در این حالت هم داریم :

$$n^{۲}-۵n+۷=(۲k-۱)^{۲}-۵(۲k-۱)+۷=۴k^{۲}-۴k+۱-۱۰k+۵+۷$$
$$=۴k^{۲}-۱۴k+۱۳=۲(۲k^{۲}-۷k+۶)+۱$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n، فرد بودن $n^{۲}-۵n+۷$ را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^{۲}-۵n+۷$ را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p\vee q\Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم ارزی $p\vee q\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ شیوهٔ اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned}p\vee q\Rightarrow r&\equiv r\vee\sim(p\vee q)\\&\equiv r\vee(\sim p\wedge\sim q)\\&\equiv(r\vee\sim p)\wedge(r\vee\sim q)\\&\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\end{aligned}$$

به‌طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم :

$$P_{۱}\vee P_{۲}\vee\ldots P_{n}\Rightarrow r\equiv(P_{۱}\Rightarrow r)\wedge(P_{۲}\Rightarrow r)\wedge\ldots(P_{n}\Rightarrow r)$$

نوع دیگری از درنظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال : ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$ آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$.

حل : برای a دو حالت ممکن است رخ دهد :

الف) اگر $a=۰$، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟)

ب) اگر $a\neq۰$، در این حالت $a^{-۱}$ (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab=۰$ در $a^{-۱}$ داریم :

$$ab=۰\Rightarrow a^{-۱}(ab)=a^{-۱}\times۰$$
$$\Rightarrow\quad b=۰$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

کار در کلاس

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲ + b^۲$ زوج است.

ب) $A = \{۳, ۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{۱, ۲, ..., ۶\}$ است و $n \in S$ ، اگر $\frac{n^۲ (n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

اثبات غیرمستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال : ثابت کنید حاصل جمع یک عددگویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال : حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{۱}{r})(rx) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

مثال : a_1، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

حل : برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1، a_2 و a_3 را به‌ترتیب، ۵، ۸ و ۱ درنظر می‌گیریم و b_1، b_2 و b_3 را ۸، ۱ و ۵ درنظر می‌گیریم، داریم :

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=(۵-۸)(۸-۱)(۱-۵)=(-۳)(۷)(-۴)=۸۴$$

اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل a_1-b_1، a_2-b_2 و a_3-b_3 هم باید فرد باشند (چرا؟) و درنتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$ باید عددی فرد باشد. امّا مجموع این سه عبارت صفر است!

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P\Rightarrow Q$ و $Q\Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P\Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P\Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P، Q و R سه گزاره باشند و $Q\Leftrightarrow R$ و $P\Leftrightarrow Q$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به‌هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال : ترکیب دو شرطی $(a,b\in\mathbb{R})$ ، $a=b\Leftrightarrow a^۳=b^۳$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a=b\Leftrightarrow a^۲=b^۲$ درست نیست (چرا؟)

کار در کلاس

اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$ ب) $a < b \Leftrightarrow a^۳ < b^۳$

مثال : اگر $a > ۰$ ثابت کنید $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$

اگر $a > ۰$، داریم : $a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ اثبات کدام‌یک ساده‌تر است؟

همچنین $a^۲ + ۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰$

و درنهایت : $a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰ \Leftrightarrow (a - ۱)^۲ \geq ۰$

آخرین گزاره یعنی $(a - ۱)^۲ \geq ۰$ همواره برقرار است، به‌عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a > ۰$) به صورت زیر می توان خلاصه کرد :

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a$$
$$\Leftrightarrow a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a - ۱)^۲ \geq ۰ \text{ .همواره برقرار است}$$

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می کنیم و از عباراتی نظیر : آنچه که شما می گویید معادل این است که …، یا گفته شما به مثابه آن است که …، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال : ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل : اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود : $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲ \geq ۰ \text{ .گزاره همیشه درست}$$

مثال : اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید : $a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰$

حل : $a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow (a + \frac{b}{۲})^۲ + \frac{۳b^۲}{۴} \geq ۰$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

راه دوم :

$$a^۲+ab+b^۲\geq ۰ \Leftrightarrow ۲a^۲+۲ab+۲b^۲\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow a^۲+b^۲+۲ab+a^۲+b^۲\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^۲+a^۲+b^۲\geq ۰$$ گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به‌کار برد.

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن $n^۲$ هم‌ارزند؟

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

۱ نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۲ فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید :

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم علامت باشند داریم :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم :

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx$$

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم :

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$$

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^۳<x^۲$.

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که

$$x^۲+y^۲=(x+y)^۲$$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که :

$$\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b} \qquad (a+b\neq ۰)$$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبتِ عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم ۱۲|۲ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش‌پذیر است (باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفرتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر تا کار بی‌معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $1|a$ و $a|a$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد برخودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری b بر a معادل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a، عدد b را می‌شمارد یا عدد a، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به‌کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد ۲۸- بر ۴ بخش‌پذیر است (زیرا، $(-7)\times 4=-28$ یا باقی‌مانده تقسیم ۲۸- بر عدد ۴ صفر است) پس در حالت کلّی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعهٔ اعداد صحیح عاد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح a، که مخالف صفر است[2]، شمارندهٔ عدد b است ــ یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است ــ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$.

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$

۱ــ در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲ــ اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

کار در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳= \cdots \times \cdots$

ب) $۹۱=۷\times \cdots \Leftrightarrow \cdots |۹۱$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow \cdots = \cdots \times (-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow \cdots = ۵ \times \cdots$

ث) $۰=۱۸\times \cdots \Leftrightarrow ۱۸| \cdots$

ج) $a|۱ \Rightarrow a=\cdots$ یا $a=\cdots$

چ) $۲۶=۲\times ۱۳ \Rightarrow ۲|\cdots$ و $\cdots|۲۶$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیمِ اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $۳^۵|۳^۹$ و سپس ثابت کنید :

$$\forall m,n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

$$(۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \overset{(۳^۴=q)}{\Rightarrow} ۳^۵ |\cdots)$$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی :

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶\times ۵\ ,\ ۳|۶\times ۴\ ,\ ۳|۶\times(-۷)\ ,\ \cdots$

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n \in \mathbb{N}$ است. یعنی :

$$\begin{cases} \text{الف)}\ a \mid b \Rightarrow a \mid b^۲ \\ \text{ب)}\ a \mid b \Rightarrow a \mid b^n \end{cases}$$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی با b فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m=b^{n-۱}$ فرض شود.

سؤال : آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید :

الف) $۳|۹$ و $۳|۶$ و $۳|۶\times ۹$

ب) $۳\nmid ۵$ و $۳|۶$ و $۳|۶\times ۵$

ج) $۶\nmid ۴$ و $۶\nmid ۳$ و $۶|۳\times ۴$

سؤال : آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟ $(k\in\mathbb{Z})$

$$a|b \Rightarrow b=\cdots \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\Rightarrow} kb=\cdots \Rightarrow \cdots$$

$$ka|kb \Rightarrow kb=\cdots \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\Rightarrow} b=\cdots \Rightarrow \cdots$$

ویژگی ۲ : اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c}$$

اثبات:
$$\begin{cases} a\,|\,b \Rightarrow b = aq_۱ \quad (۱) \\ b\,|\,c \Rightarrow c = bq_۲ \end{cases}$$

$$c = bq_۲ \overset{(۱)}{\Rightarrow} c = \cdots q_۲ \overset{q_۱q_۲=q}{\Rightarrow} c = a\cdots \Rightarrow a\,|\,c$$

این خاصیّت را «خاصیت تعدّی» برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

سؤال : با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطهٔ عاد کردن، نشان دهید که :

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

اثبات:
$$\left.\begin{array}{l} \text{طبق فرض: } a\,|\,b \\ \text{و می‌دانیم: } b\,|\,b^n \end{array}\right\} \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} \cdots|\cdots$$

ویژگی ۳ : هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c}$$

اثبات:
$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,b \Rightarrow b = \cdots \times q_۱ \\ a\,|\,c \Rightarrow \cdots = aq_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow b \pm c = \cdots \underbrace{(q_۱ \pm q_۲)}_{q} \Rightarrow a\,|\cdots$$

سؤال : آیا از اینکه $a|b + c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$؟

ویژگی ۴ : اگر $a|b$ و $b \neq ۰$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

اثبات : چون $a|b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \geq ۱$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$۱ \leq |q| \Rightarrow |a| \times ۱ \leq |a|\,|q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq \cdots$$

نتیجه : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

اثبات:
$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,b \overset{(۴)}{\Rightarrow} |\,a\,| \leq \cdots \\ b\,|\,a \overset{(۴)}{\Rightarrow} \cdots \leq |\,a\,| \end{array}\right\} \Rightarrow |\,a\,| = |\,b\,| \Rightarrow a = \pm b$$

کار در کلاس

۱ اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m+۶)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm ۱$.

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,۷m+۶ \Rightarrow a\,|\,۴۲m+\cdots \\ a\,|\,۶m+۵ \Rightarrow \cdots|\,۴۲m+\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow a\,|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$

$$\Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \ (\text{چرا؟})$$

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

اثبات: $a|b \Rightarrow b=aq \Rightarrow b^n = \cdots \overset{q^n=q'}{\Rightarrow} b^n = \cdots q' \Rightarrow a^n | b^n$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ c|d \Rightarrow \cdots = \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c)\underbrace{(q_1 q_2)}_{q}$$

$$\Rightarrow \cdots = a \times c \times q \Rightarrow \cdots | bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.

(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,\ldots\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر: با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=۱$ یا $a=p$.

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(۹k+۷)$ و $(۷k+۶)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$.

$$a | ۹k+۷ \Rightarrow a | ۷ \times (۹k+۷)$$

$$\Rightarrow a | ۶۳k + \cdots$$

$$a | ۷k+۶$$

$$\Rightarrow a | ۹ \times (۷k+۶) \Rightarrow a | \cdots + ۵۴$$

$$\Rightarrow a | (\cdots + ۵۴) - (۶۳k + \cdots)$$

$$\Rightarrow a | ۵ \Rightarrow a = \cdots \text{ یا } a = \cdots$$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد !۱۰ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلّی می‌توان نوشت: $\forall k \le n$ ، $k|n!$؛ بنابراین عدد ۲+!۱۰۰ و همین‌طور عدد ۳+!۱۰۰ و ... و بالاخره عدد ۱۰۰+!۱۰۰ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد (۲+!۱۰۰) و (۳+!۱۰۰) و ... (۱۰۰+!۱۰۰)، تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام اول نباشند.

(برای اینکه نشان دهیم عدد ۷+!۱۰۰ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد !۱۰۰ و ۷، فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم: ۷|!۱۰۰ و ۷|۷ ⇐ ۷|۷+!۱۰۰)

بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، مفاهیم ب م م (بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک) و ک م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$، یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $d=(a,b)$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>0 ; m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$

شرط (الف) مقسومٌ‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر است.

اگر داشته باشیم $(a,b)=1$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال : $(1,12)=1$, $(7,11)=1$, $(4,9)=1$, $(3,4)=1$

$(4,-6)=2$, $(0,6)=6$, $(8,16)=8$, $(6,9)=3$

تعریف : عدد طبیعی c را ک م م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $c=[a,b]$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد.

الف) $a|c$, $b|c$

ب) $\forall m>0$, $a|m$, $b|m \Rightarrow c \leq m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

مثال : $[-4,16]=16$, $[1,8]=8$, $[6,4]=12$, $[3,4]=12$

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید :

الف) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

راهنمایی : برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a|\,|a|$ و ... و نیز برای هر $m>0$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم ... $\leq m$ و همین‌طور برای اثبات (ب) ...

۲ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید، $(p,a) = ۱$

فرض کنیم $(p,a) = d$
$d \mid p \overset{p \text{ اول}}{\Rightarrow} d = ۱$ یا ...
$d \mid a$ ①

اگر $d = p \overset{①}{\Rightarrow} p \mid \cdots$ (و این با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد)

پس فقط $d = \cdots$ یا $(p,a) = \cdots$.

تذکر : توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلبِ کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد :

مثال: $۴ \nmid ۶$ ولی $(۴,۶) = ۲ \neq ۱$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش‌پذیر نباشد $(b \nmid a)$. در این‌صورت قضیهٔ تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم.

قضیه تقسیم : اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این‌صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \leq r < b$.

مثال : اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم : $q = ۳$ و $r = ۴$، و به عبارت دیگر $۲۵ = (۷ \times ۳) + ۴$. حال اگر ۲۵− را بر ۷ تقسیم کنیم و $q = -۳$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-۲۵ = ۷ \times (-۳) - ۴$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-۴) را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسومٌ‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم :

$$-۲۵ = ۷ \times (-۳) - ۴ = ۷ \times (-۳) - ۴ - ۷ + ۷$$

$$= ۷ \times (-۳) - ۷ + ۳ = ۷\underbrace{\left[(-۳) - ۱\right]}_{q} + ۳ = ۷q + ۳ \Rightarrow r = ۳$$

تذکر : همان‌طور که از دورهٔ ابتدایی به‌خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسومٌ‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید.

حل :

$$\begin{array}{l} \text{طبق فرض}: m = ۱۷q_۱ + ۵ \\ \text{طبق فرض}: n = ۱۷q_۲ + ۳ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} ۲m = ۲ \times ۱۷q_۱ + ۱۰ \\ -۵n = (-۵) \times ۱۷q_۲ - ۱۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷\,(۲q_۱ - ۵q_۲) - ۵$$

$$= ۱۷(۲q_۱ - ۵q_۲) - ۵ - ۱۷ + ۱۷$$

$$= ۱۷(\underbrace{۲q_۱ - ۵q_۲}_{q_۳} - ۱) + ۱۷ - ۵$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(\underbrace{q_۳ - ۱}_{q}) + ۱۲$$

$$= ۱۷q + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $۰ \le r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $r=۰$، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا . . . یا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، $a=۵k$ یا $a=۵k+۱$ یا $a=\cdots$ یا $a=۵k+۳$ یا $a=\cdots$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $۲k$ یا $۲k+۱$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل : کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$m=۲k+r \ , \ ۰ \le r < ۲ \Rightarrow m=\cdots$ یا $m=\cdots$

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p>۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$ نوشته می‌شود.

حل : کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$p=۶k$ (۱)

$p=۶k+۱$ (۲)

$p=۶k+۲$ (۳)

$p=۶k+۳$ (۴)

$p=۶k+۴$ (۵)

$p=۶k+۵$ (۶)

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودنِ آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم :

$p=۳(۲k+۱)$

یا $p=۳k'$ یا $۳|p$ که با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلّی برقرار نیست؛ مثلاً $(۶×۴+۱=۲۵)$ ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله۳ : ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(۸t+۱)$ نوشته می‌شود (باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

حل : فرض کنیم $a\in \mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$a=۴k$ (۱)

$a=۴k+۱$ (۲)

$a=۴k+۲$ (۳)

$a=۴k+۳$ (۴)

(چهار مجموعهٔ $A_۱=\{a\in \mathbb{Z} \mid a=۴k\}$ و $A_۲=\{a\in \mathbb{Z} \mid a=۴k+۱\}$ و $A_۳=\{a\in \mathbb{Z} \mid a=۴k+۲\}$ و $A_۴=\{a\in \mathbb{Z} \mid a=۴k+۳\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.)

حالت‌های ... و ... زوج بوده و لذا $a=۴k+۱$ یا $a=۴k+۳$

اگر $a=۴k+۱ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۸k+۱=۸\,(\underbrace{۲k^۲+k}_{k'})+۱=۸k'+۱$

اگر $a=۴k+۳ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۲۴k+۹=۱۶k^۲+۲۴k+۸+۱$

$\Rightarrow a^۲=۸(\underbrace{۲k^۲+۳k+۱}_{t})+۱=۸t+۱$

تمرین

۱ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید : $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(**راهنمایی :** فرض کنید $d=(m\,,m+۱)$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$).

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q)=۱$.

۸ اگر $m,n\in \mathbb{N}$ و $a,b\in \mathbb{Z}$ ثابت کنید :

$m\leq n\,,\,a|b \Rightarrow a^m|b^n$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳-n$

(**راهنمایی :** برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $۳|n^۳-n$).

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $\left([m^۲, m], m^۵\right)$

ب) $(۲m, ۶m^۳)$

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

ت) $\left[m^۷, (m^۲, m^۳)\right]$

ث) $\left[(۷۲, ۴۸), ۱۲۰\right]$

درس ۳ هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ یک مجموعه از اعداد درنظر بگیریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به‌ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم :

(مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد m، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_0=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=4k\}=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots,16,\cdots\}=[0]_4$$

$$A_1=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=4k+1\}=\{\cdots,-7,-3,1,5,\cdots,13,\cdots,21,\cdots\}=[1]_4$$

$$A_2=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=4k+2\}=\{\cdots,-6,\cdots,2,6,10,\cdots\}=[2]_4$$

$$A_3=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=4k+3\}=\{\cdots,-13,\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}=[3]_4$$

۱ دو عضو دلخواه از مجموعهٔ A_0 را درنظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟

۲ از مجموعهٔ A_1 دو عضو دلخواه را درنظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟

۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلّی برای هر دو عضو دلخواه از A_1 اثبات کنید.

فرض کنید $a,b\in A_1 \Rightarrow \begin{cases} a=4k_1+1 \\ b=\cdots \end{cases} \Rightarrow a-b=(\cdots\cdots\cdots)-(4k_2+1)$

$$\Rightarrow a-b=4\underbrace{(k_1-k_2)}_{k_3} \Rightarrow 4\,|\cdots-\cdots$$

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ A_2 همگی در تقسیم بر عدد ۴، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند؟ در مورد مجموعهٔ A_3 چه می‌توان گفت؟

می‌دانیم مجموعه‌های A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 یک افراز برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

واقع‌اند (A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند (باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم باقی‌مانده باشند) همواره $a-b$ |۴ و اگر این‌طور نباشد $4 \nmid a-b$.

تعریف : برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از :

$$\forall a,b\in \mathbb{Z}\ ,\ a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow m\,|\,a-b\ (m\in \mathbb{N})$$

مثال: $\begin{cases} ۱۲\overset{۵}{\equiv}۲\ ,\ -۱۱\overset{۶}{\equiv}۱ \\ -۲۹۵\overset{۱۰}{\equiv}-۵\ ,\ ۲۳\overset{۳}{\equiv}-۷ \end{cases}$

قرارداد : مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r=\{x\in \mathbb{Z}\,|\,x=mk+r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

برای استفاده از رابطهٔ هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطهٔ عاد کردن، ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی به‌راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a+c\overset{m}{\equiv}b+c \\ a-c\overset{m}{\equiv}b-c \end{cases}$$

ویژگی ۱ : به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات :

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m\,|\,a-b \Rightarrow m\,|\,a+c-b-c$$
$$\Rightarrow m\,|\,(a+c)-(\cdots+\cdots) \Rightarrow (\cdots+\cdots)\overset{m}{\equiv}(b+c)$$

مثال : با توجه به فعالیت قبل، $۷\overset{۴}{\equiv}-۱$ ($A_3 \ni [(-۱), ۷]$ یا $(۴\,|\,۷-(-۱))$) در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصلهٔ این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعدادحاصل یعنی ۱۲ = ۵ + ۷ و ۴ = ۵ + ۱- نیز هر دو در یکی از A_iها قرار خواهند گرفت.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

ویژگی ۲ : دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات :

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m\,|\cdots-\cdots \Rightarrow m\,|\cdots\times(a-b) \Rightarrow m\,|\,ac-\cdots$$
$$\Rightarrow \cdots\overset{m}{\equiv}bc$$

تذکر : عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a\overset{m}{\equiv}b$ (قانون حذف برای رابطهٔ هم‌نهشتی در حالت کلّی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

ویژگی ۳ : (دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) $(n\in\mathbb{N})$

مثال : $(۵\overset{۳}{\equiv}۲\Rightarrow ۵^۳\overset{۳}{\equiv}۲^۳)$

اثبات : (از اتحاد $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱})$ استفاده می‌کنیم)

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\ \Rightarrow\ m\,|\,(a-b)\underbrace{(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱})}_{c}(\ \equiv\ \Rightarrow\ \equiv\ )$$

$$\Rightarrow m\,|\,a^n-b^n\Rightarrow\cdots\overset{m}{\equiv}\cdots$$

تذکر : می‌دانیم $۳^۲\overset{۴}{\equiv}۵^۲$ ولی $۳\overset{۴}{\not\equiv}۵$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که . . .

$$a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow\begin{cases}ac\overset{m}{\equiv}bd & ۱\\ a+c\overset{m}{\equiv}b+d & ۲\\ a-c\overset{m}{\equiv}b-d & ۳\end{cases}$$

ویژگی ۴ : دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$$(۱۵\overset{۵}{\equiv}۱۰\ ,\ ۷\overset{۵}{\equiv}۲\Rightarrow ۱۵\times۷\overset{۵}{\equiv}۱۰\times۲\ \text{و}\ ۱۵\times۲\overset{۵}{\equiv}۱۰\times۷)$$

$$۱۵+۷\overset{۵}{\equiv}۱۰+۲\Rightarrow ۲۲\overset{۵}{\equiv}۱۲\ \text{و}$$

اثبات ۱:

$$\left.\begin{array}{l}a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\cdots-\cdots\overset{\times c}{\Rightarrow}m\,|\,ac-bc\\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow m\,|\cdots-\cdots\overset{\times b}{\Rightarrow}m\,|\,bc-\cdots\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}m\,|\,(ac-bc)+(\cdots-bd)$$

$$\Rightarrow m\,|\,ac-\cdots\Rightarrow\cdots\overset{m}{\equiv}bd$$

اثبات ۲ به عهدهٔ شما

ویژگی ۵ : $a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l}a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\\ b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow m\,|\,b-c\end{array}\right\}\Rightarrow m\,|\,(a-b)+(b-c)$$

$$\Rightarrow m\,|\,a-c\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$$

تذکر مهم : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a\overset{m}{\equiv}r$

$$a=mq+r\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$$

$$(۱۷۹=۱۱\times ۱۶+۳\Rightarrow ۱۷۹\overset{۱۱}{\equiv}۳)$$

اثبات :

$$a=mq+r\Rightarrow a-r=mq\Rightarrow m\,|\,a-r\Rightarrow \cdots\overset{m}{\equiv}\cdots$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانهٔ m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آوریم.

مثال: $۲۹۶\overset{۱۱}{\equiv}?\to\cdots$

نتیجه ۲ : اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقی‌مانده باشند در این صورت $a\overset{m}{\equiv}b$.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۲۷)^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷=۱۳\times ۲+۱\Rightarrow ۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱\Rightarrow \underbrace{(۲۷)^{۷}\overset{۱۳}{\equiv}۱^{۷}=۱}_{۱}\quad \text{و}\quad ۱۹=۱۳\times ۱+۶$$

$$\Rightarrow \underbrace{۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۶}_{۲}\xrightarrow{\text{با توجه به ۱ و ۲}}(۲۷)^{۷}+۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۱+۶\xrightarrow{\text{با توجه به ۱}}A\overset{۱۳}{\equiv}۷\Rightarrow r=۷$$

پس باقی‌ماندهٔ A بر ۱۳، برابر با ۷ می‌باشد.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰=۷\times ۱۴۲+۶\Rightarrow ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶\text{ و }۶\overset{۷}{\equiv}-۱\Rightarrow ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}-۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۱۳}=-۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲\overset{۷}{\equiv}(-۱)\times ۱۲=-۱۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰\overset{۷}{\equiv}(-۱۲)+۱۰=-۲\text{ و }-۲\overset{۷}{\equiv}۵$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰\overset{۷}{\equiv}۵\Rightarrow r=۵$$

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow\begin{cases}a+mt\overset{m}{\equiv}b+mk\\ a-mt\overset{m}{\equiv}b-mk\end{cases}$$

ویژگی ۶ : می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

طبق فرض: $a\overset{m}{\equiv}b$

می‌دانیم: $mt\overset{m}{\equiv}mk$

$$\overset{\pm}{\Rightarrow}a\pm mt\overset{m}{\equiv}b\pm mk$$

مثال : می‌دانیم $۲\overset{۵}{\equiv}۷$ اگر به سمت چپ رابطه ۱۵=۵×۳ و به سمت راست آن ۲۵=۵×۵ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $۲۵+۲\overset{۵}{\equiv}۱۵+۷$ یا $۲۷\overset{۵}{\equiv}۲۲$ که این رابطه برقرار است.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\ ,\ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

ویژگی ۷ : اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم : اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m)=1$ در این‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال : واضح است که $۳\times۴ \overset{۳}{\equiv} ۶\times۴$ و چون $(۴,۳)=۱$ پس $۳ \overset{۳}{\equiv} ۶$.

فعالیت

همان‌طور که در دورهٔ ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا درنظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد :

$$۱۳۹۷ = ۱\times۱۰۰۰+۳\times۱۰۰+۹\times۱۰+۷$$
$$\Rightarrow ۱۳۹۷ = ۱\times۱۰^۳+۳\times۱۰^۲+۹\times۱۰+۷$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید :

$$۱۳۸۸۱۰۹ = ۱\times۱۰^۶+\cdots$$
$$۱۳۵۷۱۱۲۲ =$$

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A=۱۳۵۸۱۱۲ را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم $۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱$ و بنابر ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی $۱۰^n \overset{۹}{\equiv} ۱$ و داریم :

$$A=۱\times۱۰^۶+۳\times۱۰^۵+\cdots+\cdots+\cdots+۱\times۱۰+۲$$

$$۱۰^۶ \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۱}{\Rightarrow} ۱\times۱۰^۶ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۱۰^۵ \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۳}{\Rightarrow} ۳\times۱۰^۵ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

$$۱۰^۴ \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۵}{\Rightarrow} \cdots \overset{۹}{\equiv} \cdots$$

$$۱۰^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow \cdots\times۱۰^۳ \overset{۹}{\equiv} \cdots$$

$$۱۰^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱\times۱۰^۲ \overset{۹}{\equiv} \cdots$$

$$۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱\times۱۰ \overset{۹}{\equiv} \cdots$$

$$۲ \overset{۹}{\equiv} ۲$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم :

$$A \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۵+۸+۱+۱+۲$$

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهشتیِ اخیر مجموعِ ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌ماندۀ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندۀ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\dots a_2a_1a_0}$ را بسط دهید و در هم‌نهشتی به پیمانۀ ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلّی بررسی کنید.

$$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\dots+\dots+\dots+10^2a_2+10\,a_1+10^0a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}1\times a_{n-1}+\dots+1\times a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}\dots$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $10\overset{3}{\equiv}1$، نتیجه می‌گیریم، $10^k\overset{3}{\equiv}1\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}$، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندۀ تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $10\overset{11}{\equiv}-1$؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n\overset{11}{\equiv}1$ و برای هر n فرد، $10^n\overset{11}{\equiv}-1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانۀ ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (-1) قرار دهیم باقی‌ماندۀ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=4\times10^6+9\times10^5+8\times10^4+\dots+2\times10+7$$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4\times\dots+\dots\times(-1)+\dots\times1+\dots+2\times(-1)+7$$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}7-2+3-5+8-9+4=6\Rightarrow r=\dots$$

۳ می‌دانیم $10\overset{2}{\equiv}0$ و $10\overset{5}{\equiv}0$ و $10\overset{10}{\equiv}\dots$ در این‌صورت:

$$\forall k\in\mathbb{N}\,;\,10^k\overset{2}{\equiv}\dots \text{ و } 10^k\overset{5}{\equiv}\dots \text{ و } 10^k\overset{10}{\equiv}0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-1}\ a_{n-2}\cdots a_2\ a_1\ a_0}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانۀ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\dots+10^2a_2+10\,a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}0\times a_{n-1}+\dots+\dots+\dots\times a_2+\dots+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}\dots \text{ و } A\overset{5}{\equiv}\dots \text{ و } A\overset{10}{\equiv}a_0$$

نتیجۀ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندۀ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده است. به‌عنوان مثال : اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این‌صورت ۱۹=۱۲+۷ فروردین و ۲۶=۱۹+۷ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اولِ سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه[1] یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی‌ماه چند شنبه است؟

با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز ... می‌رسیم.

حال اگر فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم (۱۹=۹−۲۸) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $۱۹\overset{۷}{\equiv}۵$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصلهٔ ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $d=۲۹+۳\times۳۰+۱۲=۱۳۱$

از طرفی $۱۳۱\overset{۷}{\equiv}...$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

معادلهٔ هم‌نهشتی

تعریف : یک رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax\overset{m}{\equiv}b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_\circ\in\mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_\circ\overset{m}{\equiv}b$. $(a,b\in\mathbb{Z})$

---

[1] ــ ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

به‌عنوان مثال، معادلهٔ $x \overset{۳}{\equiv} ۲$ را درنظر بگیرید. در این معادله x می‌تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب‌های این معادله یا جواب‌های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم‌نهشتی استفاده کنیم،

$$x \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳ \mid x-۲ \Rightarrow (x-۲)=۳k \Rightarrow x=۳k+۲$$

که اگر k را به‌ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب‌های $x_\circ=۲$ و $x_\circ=۵$ و $x_\circ=۸$ را به‌دست می‌آوریم و برای هر $k \in \mathbb{Z}$، جوابی برای معادله به‌دست می‌آید. در معادلهٔ فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند.

مثال : جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به‌دست آورید.

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷\ ,\ ۱۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲$$
$$\overset{\text{ویژگی ۵}}{\Rightarrow} ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲+(۲\times۵)$$
$$\Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \overset{(۴,۵)=۱}{\Rightarrow} \cancel{۴}x \overset{۵}{\equiv} \cancel{۴}\times۳$$
$$\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۵k+۳$$
$$(۵|x-۳ \Rightarrow x-۳=۵k \Rightarrow x=۵k+۳)$$

مثال : همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

حل : اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $۷|۳x-۱۳$ یا $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$

$$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳-۷=۶$$
$$\overset{(۳,۷)=۱}{\Rightarrow} \cancel{۳}x \overset{۷}{\equiv} \cancel{۳}\times۲ \Rightarrow x=۷k+۲$$

قضیه : معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

نتیجه : اگر $(a,m)=۱$ چون برای هر b، همواره $۱|b$ پس معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره دارای جواب است.

مثال : معادلهٔ $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ دارای جواب نیست زیرا، $(۶,۹)=۳$ و $۳ \nmid ۱۱$ و معادلهٔ $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸$ دارای جواب است. چرا؟

این معادله را حل کنید :

$$۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸ \Rightarrow ۲\times۲x \overset{۶}{\equiv} ۲\times۹\ ,\ (۲,۶)=۲$$
$$\overset{\text{ویژگی ۶}}{\Rightarrow} ۲x \overset{\frac{۶}{۲}}{\equiv} ۹$$
$$\Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۹$$
$$\Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۹+۳=۱۲$$
$$\Rightarrow \cancel{۲}x \overset{۳}{\equiv} \cancel{۲}\times۶ \Rightarrow x=۳k+۶$$

حل معادلات سیّاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنهٔ ۴ کیلویی و یک وزنهٔ ۳ کیلویی است.

$۴\times\cdots+۱\times۳=\cdots$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$۱\times\cdots+\cdots\times ۵=۱۹$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادلهٔ $۴\times x+۳\times y=۱۹$ هستید.

(x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به‌کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به‌کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون $y\in W$ و x بیابیم که $\cdots\times x+\cdots\times y=\cdots$ چون مجموع دو عدد زوج همواره ... است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعریف : هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c\in\mathbb{Z}$ و b و a در این صورت معادلهٔ مذکور ($ax+by=c$) را یک معادلهٔ سیّاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادلهٔ سیّاله به معادلهٔ هم‌نهشتی

معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دوصورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود :

$$ax+by=c\Rightarrow ax-c=(-b)y\Rightarrow -b|ax-c\Rightarrow b|ax-c$$

$$\Rightarrow ax\overset{b}{\equiv}c\ (b>۰)\ \text{و}\ ax\overset{-b}{\equiv}c\ (b<۰)\ \text{یا}\ ax\overset{|b|}{\equiv}c$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نوشت :

$$by\overset{-a}{\equiv}c\ \text{و}\ by\overset{a}{\equiv}c$$

تذکر : با توجه به قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a,b)\mid c$

کار در کلاس

۱ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ $۴x+۵y=۹$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادلهٔ سیاله را بیابید.

$$۴x+۵y=۹ \Rightarrow ۴x \overset{\cdots}{\equiv} \cdots$$
$$\Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۹-\cdots \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۴$$
$$\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} \cdots \Rightarrow \underline{x=۵k+\cdots}|$$
$$\Rightarrow ۴(۵k+۱)+۵y=۹$$
$$\Rightarrow ۲۰k+۴+۵y=۹$$
$$\Rightarrow ۲۰k+۵y=۵$$
$$\Rightarrow ۴k+y=۱ \Rightarrow \underline{y=\cdots k+۱}|$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.
کافی است جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x+۳y=۱۹$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k\in\mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم:

$$۴x+۳y=۱۹ \Rightarrow ۴x \overset{\cdots}{\equiv} \cdots$$
$$\Rightarrow ۴x \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴x \overset{۳}{\equiv} ۱+\cdots$$
$$\Rightarrow \cancel{۴}x \overset{۳}{\equiv} \cancel{۴}\times ۱ \Rightarrow \underline{x=۳k+۱}$$
$$\Rightarrow ۴(۳k+۱)+۳y=۱۹$$
$$\Rightarrow ۱۲k+۴+۳y=۱۹$$
$$\Rightarrow ۱۲k+۳y=\cdots \Rightarrow \cdots+y=۵$$
$$\Rightarrow \underline{y=-۴k+۵}$$
$$k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۵ \end{cases} \quad \text{و} \quad k=\cdots \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ y=۱ \end{cases}$$

به‌ازای $k=۲$ و بیشتر از آن $y<۰$ و به‌ازای $k=-۱$ و کمتر از آن $x<۰$ که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دوصورت فوق می‌توان این کیسهٔ ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل: اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب‌های نامنفی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۱۸۰۰۰$

$$۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۱۸۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۲x+۵y=\cdots$$

$$\Rightarrow ۲x\overset{۵}{\equiv}۱۸ \text{ و } ۱۸\overset{۵}{\equiv}\cdots$$

$$\Rightarrow \cancel{۲}x\overset{۵}{\equiv}\cancel{۲}\times ۴$$

$$\Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}\cdots\Rightarrow \underline{x=۵k+۴}$$

$$\Rightarrow ۲(۵k+۴)+۵y=۱۸$$

$$\Rightarrow ۱۰k+۸+۵y=۱۸$$

$$\Rightarrow ۱۰k+۵y=۱۰\Rightarrow \underline{y=-۲k+۲}$$

$k=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۴\\y=۲\end{cases}$ و $k=۱\Rightarrow\begin{cases}x=۹\\y=۰\end{cases}$ (فقط به‌ازای ۱ و ۰ =k برای x و y جواب‌ها نامنفی هستند)

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

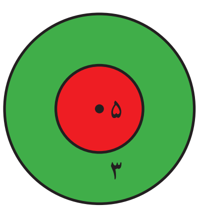
مثال : در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل : اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمهٔ سفارش داده شده را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت :

$$x+y=۵\Rightarrow x\overset{۱}{\equiv}۵\Rightarrow \underline{x=k+\cdots}$$

$$\Rightarrow k+\cancel{۵}+y=\cancel{۵}\Rightarrow \underline{y=\cdots}$$

چون y و x اعدادی نامنفی هستند پس باید $k\in\{۰,-۱,-۲,-۳,-۴,-۵\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال : تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایرهٔ هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر و خارج دایرهٔ کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همهٔ تیرها به داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم :

$$۵x+۳y=۴۲\Rightarrow ۵x\overset{۳}{\equiv}۴۲$$

$$\Rightarrow ۵x\overset{۳}{\equiv}۴۲+۳\Rightarrow \cancel{۵}x\overset{۳}{\equiv}\cancel{۵}\times ۹$$

$$\Rightarrow \underline{x=۳k+۹}$$

$$۵(۳k+۹)+۳y=۴۲$$

$$\Rightarrow ۱۵k+۴۵+۳y=۴۲$$

$$\Rightarrow ۱۵k+۳y=-۳ \Rightarrow \underline{y=-۵k-۱}$$

$$x,y \in W \Rightarrow k \in \{-۱,-۲,-۳\} \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ y=۴ \end{cases}, \begin{cases} x=۳ \\ y=۹ \end{cases}, \begin{cases} x=۰ \\ y=۱۴ \end{cases}$$

($x=۶$ و $y=۴$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایرهٔ کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایرهٔ بزرگ‌تر زده است).

تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$$k \overset{۳}{\equiv} ۰ \text{ یا } k \overset{۳}{\equiv} ۱ \text{ یا } k \overset{۳}{\equiv} ۲$$

(به عبارت دیگر، $k \in [۰]_۳$ یا $k \in [۱]_۳$ یا $k \in [۲]_۳$)

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۴ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰} \times a^n + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^۳ + \cdots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۲^{۱۱}+۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد $(۳a-۵)$ و $(۴a-۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a+۶)$ را به‌دست آورید.

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=۱!+۲!+۳!+\ldots+۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x+۵y=۱۱$ را به‌دست آورید.

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

الف) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ب) $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$

ج) $۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

۱۵ اگر اوّل مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شاملِ ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

بخشی از نقشه شهر مشهد مقدس

۲ گراف و مدل‌سازی

نظریهٔ گراف یکی از موضوع‌های مهم در ریاضیات گسسته است که به مطالعهٔ مدل‌سازی مسائل به‌وسیلهٔ گراف‌ها و مطالعهٔ آنها می‌پردازد. در واقع گراف مدلی ریاضی برای یک مجموعهٔ گسسته است که اعضای آن به طریقی به هم مرتبط هستند. اعضای این مجموعه می‌توانند انسان‌ها، شهرها، اتم‌ها و... باشند و در هر مورد نوعی از ارتباط بین اعضا مدنظر است و با توجه به آن ارتباط مسئلهٔ مورد نظر با گراف مدل‌سازی شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد.

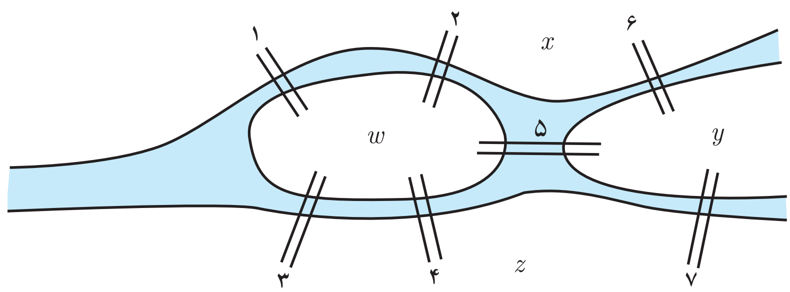
۱ معرفی گراف

۲ مدل‌سازی با گراف

درس ۱ معرفی گراف

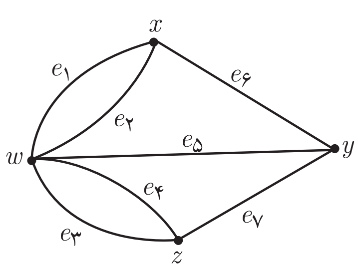
در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانهٔ این شهر که از میان شهر عبور می‌کرد مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می‌کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها، به نقطهٔ شروع حرکت بازگشت؟



شکل ۱

لئونارد اویلر[1] (۱۷۸۳ ــ ۱۷۰۷)، ریاضی‌دان برجستهٔ سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می‌گوییم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان‌پذیر نیست.



شکل ۲

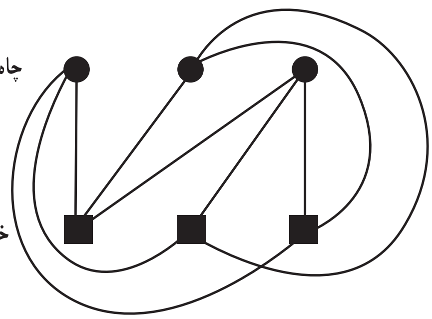
اگر چهار ناحیهٔ x و y و z و w را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه‌ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به‌دست می‌آید که گرافِ حاصل از مدل‌سازی مسئلهٔ مذکور است. مدل‌سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته‌بندی منظم و تفکر منطقی دربارهٔ آنها را آسان‌تر می‌نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئلهٔ اویلر می‌دانند، اما نمی‌توان

۱ــ Leonhard Euler

مطمئن بود که متفکران و دانشمندان دیگری پیش از آن تاریخ برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره نگرفته باشند. به‌طور مثال در حدود ۱۰۰۰ سال پیش از آن شیخ‌بهایی، ریاضی‌دان ایرانی[۱] (۱۰۰۰ــ۹۲۵ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد :

سه خانه و سه چاه آب، مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟



شکل ۳

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال‌ها را با خط‌ها یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعهٔ مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعهٔ اوّل به تک‌تک نقاط مجموعهٔ دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لااقل دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.

حال به مثالی از تحلیل یک وضعیت به کمک گراف می‌پردازیم.

مثال : ۵ تیم فوتبال a، b، c، d و e در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دوبه‌دو با هم بازی می‌کنند و برخی از این بازی‌ها انجام شده است و اطلاعات زیر را داریم :

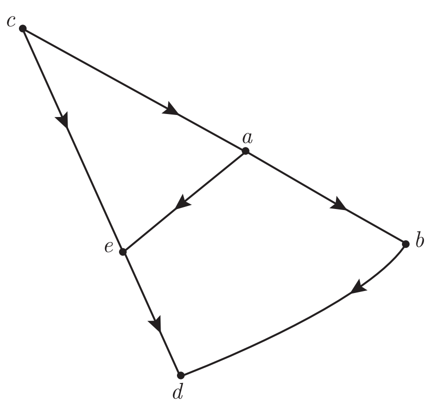
تیم a تیم‌های b و e را برده و به c باخته است.

تیم b به a باخته و از d برده است.

تیم c از تیم‌های a و e برده است.

تیم d به تیم‌های b و e باخته است.

تیم e به a و c باخته و از تیم d برده است.



شکل ۴

برای نمایش تمام اطلاعات بالا به‌صورت خلاصه، از نموداری به شکل ۴ استفاده می‌کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌گذاریم و هر دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند؛ و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند باید از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

حال با یک نگاه به نمودار رسم شده، علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سؤال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

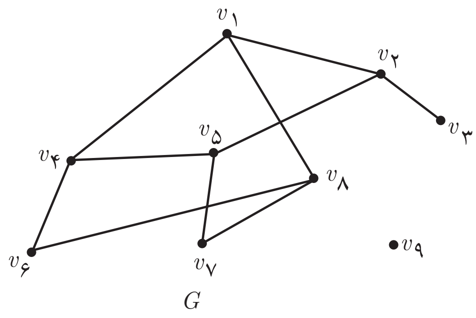
ــ مشخص کنید هر تیم با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

ــ اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟

۱ــ دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، ریاضی‌دان مشهور ایرانی، یکی از پیشگامانِ نظریه گراف در ایران است. بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه او را پدر علم گراف در ایران می‌دانند.

مسئله : سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گرافِ مثال قبل بتوان به آن جواب داد.

همان‌طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها، که به هر یک از این نقاط **رأس** و به هر یک از پاره‌خط‌ها **یال** می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً پاره‌خط راست باشند و می‌توانند به‌صورت منحنی نیز باشند و در هر سرِ یال باید رأسی قرار داشته باشد. همان‌طور که دیدیم یک گراف را می‌توان با رسم نمودارِ آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوهٔ نمایش یک گراف را بررسی می‌کنیم.



شکل ۵

گراف G را با ۹ رأس و ۱۰ یال، مانند شکل ۵، در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم.

با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس[1] و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا، با نمادهای ریاضی مجموعهٔ یال‌ها و رئوس آن را به‌صورت زیر نمایش داد.

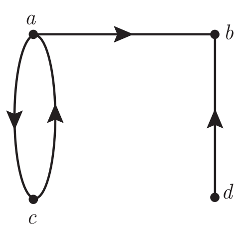
$V(G)=\{v_1 , v_2 , \dots , v_8 , v_9\}$ [2] مجموعهٔ رأس‌های گراف G

$E(G)=\{v_1v_2 , v_1v_4 , v_1v_8 , v_2v_3 , v_2v_5 , v_4v_5 , v_4v_6 , v_5v_7 , v_6v_8 , v_7v_8\}$ [3] مجموعهٔ یال‌های گراف G

به‌وضوح، با داشتن شکلِ گراف، شما می‌توانید مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ می‌توانید ابتدا به تعداد $n(V(G))$ (تعداد اعضای مجموعهٔ $V(G)$ که آن را با $|V(G)|$ نیز نمایش می‌دهیم) نقطه (رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به $E(G)$ رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.

همان‌طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی‌اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم.

به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار شکل ۶ را این‌گونه نمایش می‌دهیم.



شکل ۶

$V=\{a , b , c , d\} \quad E\{(a,b),(a,c),(c,a)(d,b)\}$

کار در کلاس

ــ دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

الف) $V(G)=\{v_1 , v_2 , \dots , v_6\}$
$E(G)=\{v_1v_4 , v_2v_5 , v_6v_1 , v_5v_1\}$

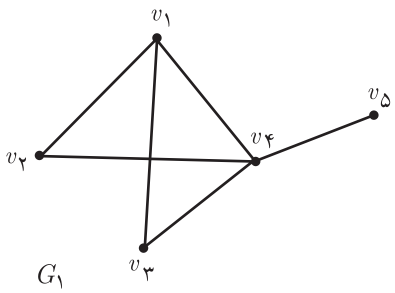
ب) $V(G)=\{a , b , c , d\}$
$E(G)=\{(a,b) , (b,c) , (c,b) , (c,d) , (d,a)\}$

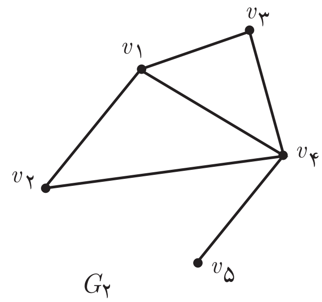
۱ــ مجموعه رئوس گراف همواره ناتهی در نظر گرفته می‌شود.

۲ــ Vertex

۳ــ Edge

توجه : برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی مدنظر نیست. آنچه مهم است این است که باید مشخص باشد که گراف مورد نظر چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. به طور مثال با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.





شکل ۷

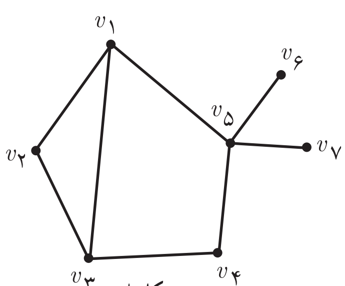
$V(G_1) = \{ \qquad \}$ $\qquad$ $V(G_2) = \{ \qquad \}$

$E(G_1) = \{ \qquad \}$ $\qquad$ $E(G_2) = \{ \qquad \}$

■ **مرتبه و اندازهٔ یک گراف** : تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ آن گراف می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای $p(G)$ از p و به جای $q(G)$ از q استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل ۷ از مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۶ هستند. بنابراین $p = ۵$ و $q = ۶$.

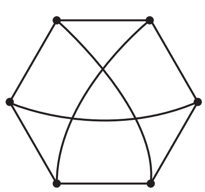
■ **درجهٔ یک رأس** : درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $deg_G(v)$ یا به‌طور ساده‌تر با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم. به‌طور مثال در شکل مقابل داریم :

$deg(v_1) = ۳ \quad , \quad deg(v_5) = ۴$



شکل ۸

■ **گراف K ـ منتظم** : گرافی را که درجهٔ تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k – منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف شکل ۹ یک گراف ۶ رأسیِ ۳ – منتظم است.



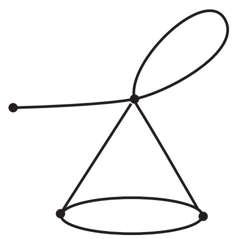
شکل ۹

■ **رأس تنها** : به رأسی که درجهٔ آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم.

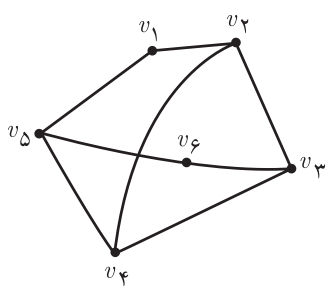
■ گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، **گراف تهی** می‌نامیم. بنابراین منظور از گراف تهیِ n رأسی، گرافی شامل n رأسِ تنها و بدون یال است.

کار در کلاس

درجهٔ سایر رئوسِ گرافِ شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج‌اند.


شکل ۱۰

بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خودِ آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال **طوقه**[۱] گفته می‌شود. این دو مورد در شکل ۱۰ نمایش داده شده‌اند. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می‌گوییم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب فقط گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



شکل ۱۱

■ **دو رأس مجاور (همسایه)** : دو رأس u و v را دو رأسِ همسایه یا مجاور گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی $uv \in E(G)$. به طور مثال در گراف شکل ۱۱، رأس v_1 با رئوس v_2 و v_5 همسایه است و رأس v_2 با رئوس v_1 و v_3 و v_4 همسایه است.

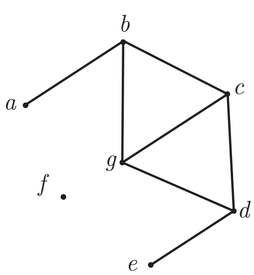
توجه : در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

■ **مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس** : فرض کنیم $v \in V(G)$، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردنِ خودِ رأسِ v به $N_G(v)$ «همسایگی بستهٔ رأس v» را به‌دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد :

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

به‌طور مثال در گراف شکل ۱۲ داریم :



شکل ۱۲

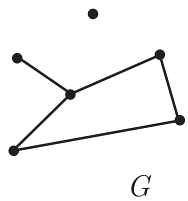
$N_G(a) = \{b\}$ $\qquad$ $N_G[a] = \{a , b\}$

$N_G(c) = \{b , d , g\}$ $\qquad$ $N_G[c] = \{b , c , d , g\}$

$N_G(f) = \varnothing$ $\qquad$ $N_G[f] = \{f\}$

■ **دو یال مجاور** : دو یال را مجاور گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۱۲، یال‌های bc و cd مجاوراند.

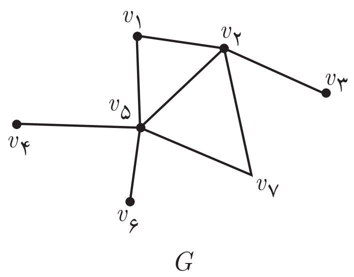
۱ــ Loop



شکل ۱۳

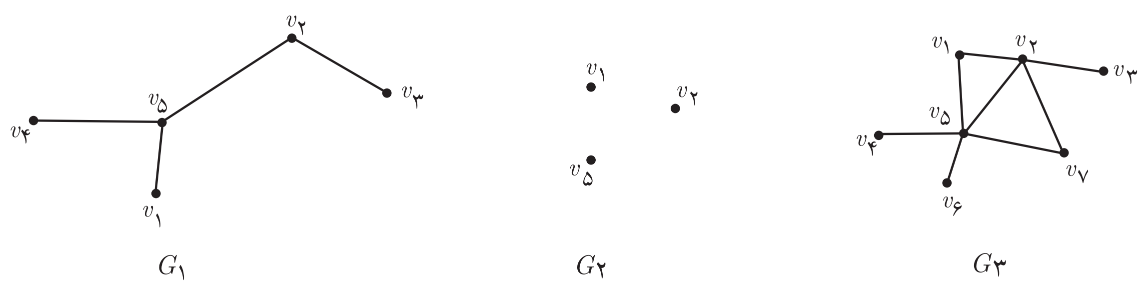
■ **بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف :** بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترینِ آنها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم :

$$\Delta(G)=۳ \qquad , \qquad \delta(G)=۰$$



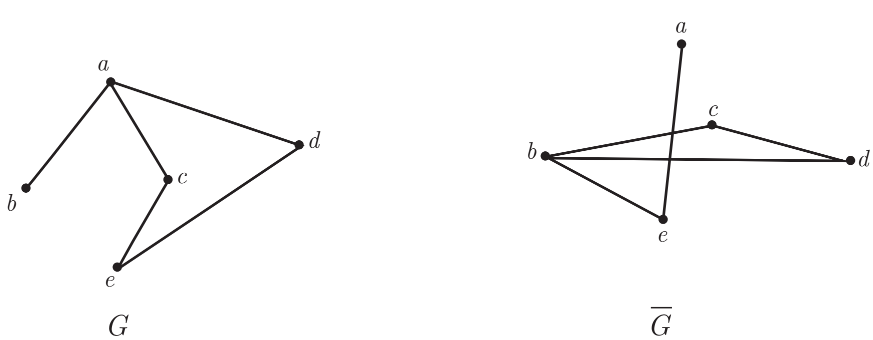
شکل ۱۴

■ **زیرگراف :** یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G، و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد. به طور مثال گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ و $G_۳$ که در شکل ۱۵ آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف G در شکل ۱۴ هستند.



شکل ۱۵

■ **مکمل یک گراف :** مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. در شکل ۱۶ یک گراف و مکملش نمایش داده شده است.



شکل ۱۶

مسئله ۱ : اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأسِ آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\overline{G}}(v)$ به ترتیب درجهٔ رأس v در گراف‌های G و $\overline{G}$ باشند، مقدار $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)$ را به‌دست آورید.

مسئله ۲ : یک گراف n رأسی حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

مسئله ۳ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ را به‌دست آورید.

■ **گراف کامل :** گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوسِ دیگر، مجاور باشد گراف کامل می‌نامیم. گراف کاملِ n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-۱$–منتظم است.

مسئله ۱ : یک گراف کامل p رأسی چند یال دارد؟

مسئله ۲ : اگر G یک گراف p رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف‌های G، $\overline{G}$ و K_p وجود دارد؟

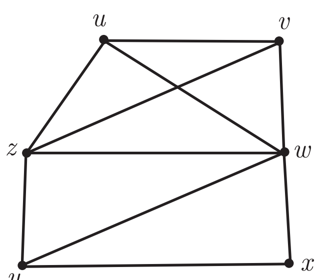
مسئله ۳ : مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟

■ **مسیر :** اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک v ــ u مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأسِ v، یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش.

مثال

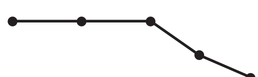
uwv یک v ــ u مسیر به طول ۲ است.

$uzywv$ یک v ــ u مسیر به طول ۴ است.



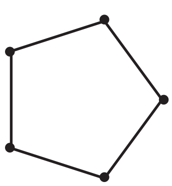
شکل ۱۷

■ گرافی را که تنها از یک **مسیرِ n رأسی** تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال P_5 در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.


شکل ۱۸

■ **دور :** دنبالهٔ $v_1\ v_2\ v_3\ \ldots\ v_n\ v_1$ $(n \geq ۳)$ از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم. به‌طور مثال در گراف شکل ۱۷ $uvwu$، $ywuzy$، $xwvuzyx$ دورهایی به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.

■ گرافی را که تنها از یک **دورِ n رأسی** تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال C_5 در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.


شکل ۱۹

مسئله : در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید.

■ **همبندی و ناهمبندی یک گراف :** گراف G را **همبند** می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأسِ آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را **ناهمبند** می‌نامیم. به‌طور مثال گراف H در شکل ۲۰ همبند و گراف G ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس v و w هیچ مسیری وجود ندارد.

شکل ۲۰

فعالیت

۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.

۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.

۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.

۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.

۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

فعالیت

۱ یک گراف دلخواه مانند G با n رأسِ $v_1, v_2, \dots$ و v_n و m یال $e_1, e_2, \dots$ و e_m در نظر بگیرید.

۲ تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ تعداد یال‌های گراف حاصل چند است و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟

۴ یال e_1 را در جای خود (بین همان دو رأسی که e_1 قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید.

۵ تمام یال‌های $e_2, e_3, \dots$ و e_m را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیهٔ G برسید و پس از اضافه‌کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید.

۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

۷ برای تساوی $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=\deg(v_1)+\deg(v_2)+\cdots+\deg(v_n)=2m$ استدلال خود را بیان نمایید.

با توجه به آنچه در این فعالیت به‌دست آوردیم، می‌توان قضیهٔ زیر را بیان نمود.

قضیه : اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و اندازهٔ q و $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعهٔ رئوس آن باشند، آنگاه :

$$\sum_{i=1}^{p}\deg v_i = 2q$$

نتیجه : تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات : فرض کنیم G یک گراف و A مجموعهٔ همهٔ رئوسِ فردِ گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوجِ گراف G باشد. در این صورت داریم $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in A} \deg(v) + \sum_{v\in B} \deg(v)$.

از طرفی $\sum_{v\in V(G)} \deg(v)$ و $\sum_{v\in B} \deg(v)$ زوج‌اند. (چرا؟) بنابراین $\sum_{v\in A} \deg(v)$ نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد که $n(A)$ عددی زوج است. (چرا؟)

فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطهٔ دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون :

الف) گرافِ ۷ رأسی G را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیهٔ قبل نشان دهید که امکان ندارد درجهٔ تمام رئوسِ گرافِ حاصل برابر با ۳ باشد.

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

فعالیت

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq ۴$. می‌خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

۱ رأس دلخواه $v_۱$ را در G در نظر می‌گیریم. حتماً $v_۱$ به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس $v_۲$ باشد.

۲ حتماً $v_۲$ به رأسی به جز رأس $v_۱$ متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۳$ باشد.

۳ حتماً $v_۳$ به رأسی از مجموعهٔ $V(G) - \{v_۱ , v_۲\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۴$ باشد.

۴ حتماً $v_۴$ به رأسی از مجموعهٔ $V(G) - \{v_۱ , v_۲ , v_۳\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس $v_۵$ باشد.

۵ مسیر $v_۱ v_۲ v_۳ v_۴ v_۵$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

کار در کلاس

در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف G را به‌دست آورید.

الف) G یک گراف n رأسی K ـ منتظم است.

ب) G یک گراف n رأسی کامل است. $(G = K_n)$

تمرین

۱ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ab,ac,cd,ef,db,cf,be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) درجهٔ رأس‌های G را مشخص نمایید.

پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

ت) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(H)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (پ) در مورد گراف H پاسخ دهید.

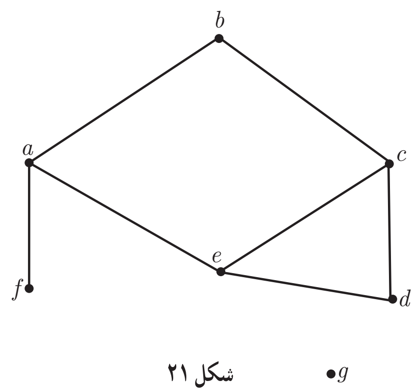
۲ گراف G (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

پ) مجموعهٔ همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

ت) اگر $N_G(x)=\{a, c\}$، آنگاه x کدام رأس است؟



شکل ۲۱

۳ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 6$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

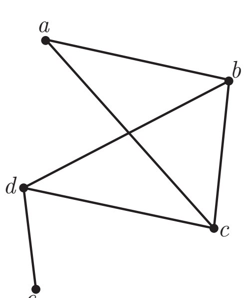
۴ در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:

$N_G(c)=\{a, b\}$ $\quad$ $N_G(b)=\{a, c\}$ $\quad$ $N_G(a)=\{b, c, d\}$

$N_G(f)=\{d\}$ $\quad$ $N_G(e)=\{\ \}$ $\quad$ $N_G(d)=\{a, f\}$

گراف G را رسم و اندازهٔ آن را مشخص کنید.

۵ گراف G (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\overline{G}$ را تعیین نمایید.



شکل ۲۲

۶ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

۷ گراف‌های کامل از مرتبهٔ ۱ تا ۵ را رسم کنید.

۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r- منتظم از مرتبهٔ n رسم کنید.

الف) $n = ۴$ $\quad r = ۱$

ب) $n = ۴$ $\quad r = ۲$

پ) $n = ۵$ $\quad r = ۲$

ت) $n = ۵$ $\quad r = ۳$

ث) $n = ۶$ $\quad r = ۴$

ج) $n = ۷$ $\quad r = ۳$

۹ برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که :

الف) یک رأس تنها داشته باشد.

ب) دو رأس تنها داشته باشد.

پ) سه رأس تنها داشته باشد.

ت) چهار رأس تنها داشته باشد.

ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفرِ دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دونفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱۲ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که :

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

۱۳ فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K + ۱$ است.

۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیرتهیِ K- منتظم بکشید که :

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۵ یک گراف ۵ رأسِی غیرتهیِ K- منتظم بکشید که :

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

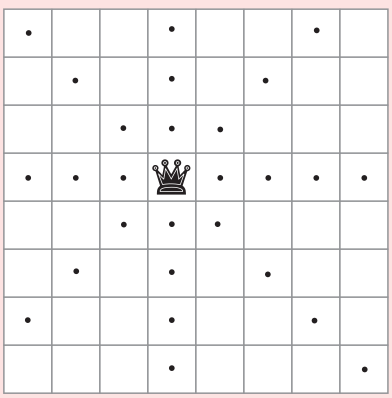
ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

درس ۲ مدل‌سازی با گراف

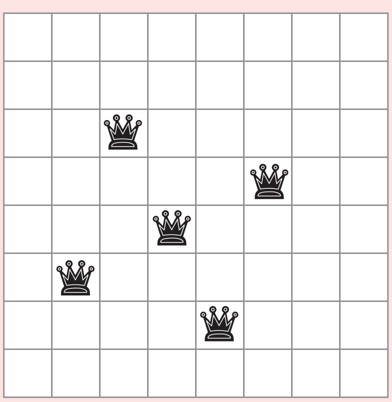
برخی از مسائل روزمرهٔ زندگی را می‌توان به کمک مدل‌سازی نخست به یک مسئلهٔ ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئلهٔ اصلی را نیز حل کرد. به‌طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «**احاطه‌گری**» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

تاریخچه

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهرهٔ وزیری که می‌توانند با چینش مناسب تمام صفحهٔ شطرنج را بپوشانند» (یعنی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.



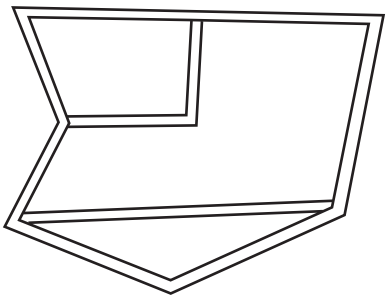
تفکر دربارهٔ پرسش‌هایی از این دست باعث به‌وجود آمدن مفهومی در شاخهٔ گراف در ریاضیات با نام **احاطه‌گری** شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئلهٔ بعد دقت کنید.

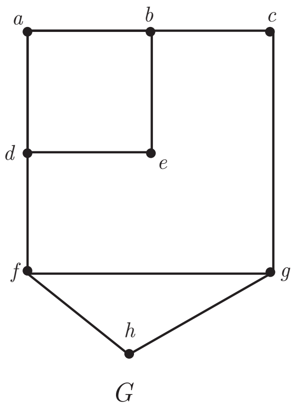


شکل مقابل نقشهٔ منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به‌گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.


شکل ۱



شکل ۲

حال فرض کنید منطقهٔ مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم.

الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعهٔ **احاطه‌گر** برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعهٔ شامل همه رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

تعریف: زیر مجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.[1]

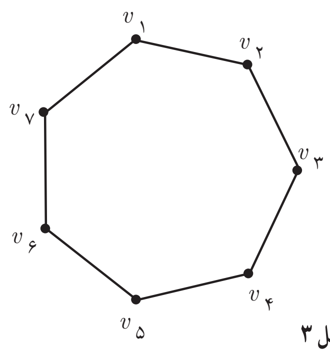
معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئلهٔ بالا صدق خواهد کرد.

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری گراف G** می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک γـ مجموعه می‌گوییم.

۱ـ از آنجا که عدد احاطه‌گری یک گراف ناهمبند، به سادگی و با استفاده از یک عمل جمع به‌دست می‌آید، لذا در این کتاب عدد احاطه‌گری گراف‌های همبند مد نظر است مگر اینکه مستقیماً به ناهمبندی گراف اشاره شود.

مثال : برای گراف شکل ۳ که دور $C_۷$ است، مجموعهٔ $\{v_۱ , v_۳ , v_۵ , v_۷\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر و مجموعه‌های $\{v_۱ , v_۴ , v_۷\}$ و $\{v_۱ , v_۲ , v_۵\}$ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γــ‌مجموعه‌اند؛ و داریم $\gamma(G) = ۳$.



شکل ۳

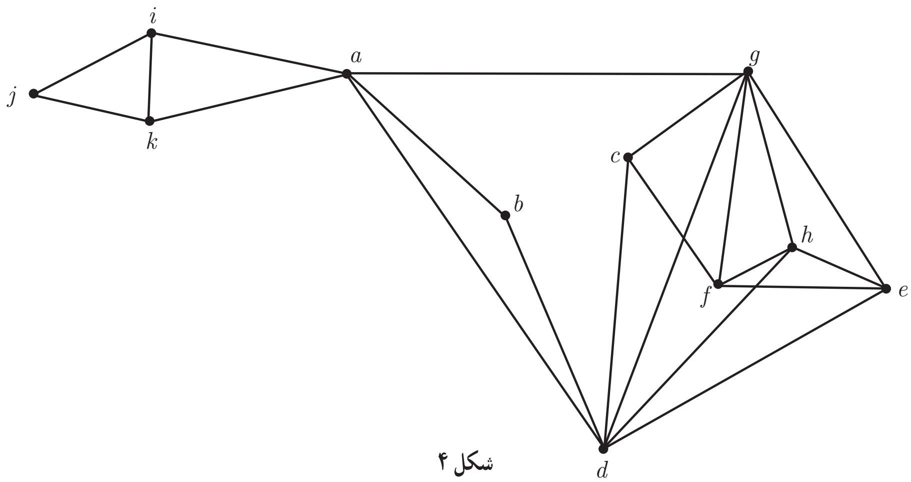
مثال : فرض کنید a، b، c، d، e، f، g، h، i، j و k شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
b	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
c	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
d	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
e	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵	۶۰	۵۵	۵۵
f	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
g	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵	۷۰	۶۵	۶۰
h	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵	۴۵	۵	۰	۶۵	۶۰	۵۵
i	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵	۱۰
j	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵	۰	۵
k	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵	۰

می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به‌طوری که همهٔ شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه‌ها می‌خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل : برای مدل‌سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصلهٔ مستقیم آن دو شهر از ۵۰ کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

با توجه به آنچه گفته شد گرافِ زیر، گرافِ حاصل از مدل‌سازی برای این مسئله است.

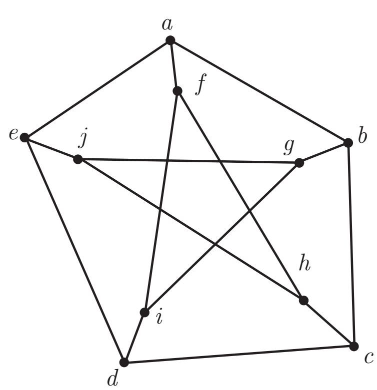


شکل ۴

حال کافی است یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه‌های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه‌گرِ مینیمم مستقر کنیم. یافتن یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک ازمجموعه‌های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه‌گر هست و کدام نیست؟



شکل ۵

الف) $A=\{a,b,c,d,e\}$

ب) $B=\{f,g,h,i,j\}$

پ) $C=\{a,b,j,h,g\}$

ت) $D=\{a,i,h\}$

ث) $E=\{f,g,h,e,d\}$

ج) $F=\{f,g,h,e\}$

چ) $H=\{g,h,e\}$

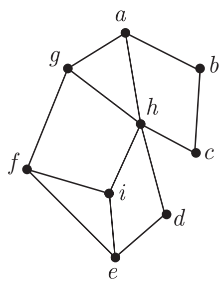
۲ از مجموعه‌های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه‌گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس‌هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد؟

تعریف : یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر **مینیمال** می‌نامیم.

۳ مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۴ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۵ آیا می‌توان هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟(استدلال کنید)

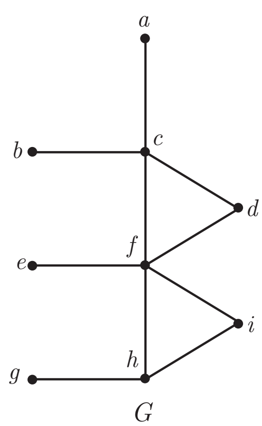


شکل ۶

مثال : در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.

حل : مجموعه $\{a , b , c , d , e , f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه‌گر خواهد بود، لذا احاطه‌گر مینیمال نیست.
حال با حذف سه رأس a، c و e از آن، مجموعهٔ $\{b,d,f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه‌گراست اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نخواهد بود لذا احاطه‌گر مینیمال است.

کار در کلاس



شکل ۷

در گراف شکل ۷ :

۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشد.

۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشد.

۳ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید.

۴ آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس b، e و g را احاطه کند؟

۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتاست؟ ($\gamma(G)$ چند است؟)

معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح[1] یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر x یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود x است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x]=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

۱ــ گاهی اوقات به جزء صحیح یک عدد، کفِ آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کفِ a می‌گویند.

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به‌دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به‌کار برد.

در صورتی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیحِ بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقفِ x می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

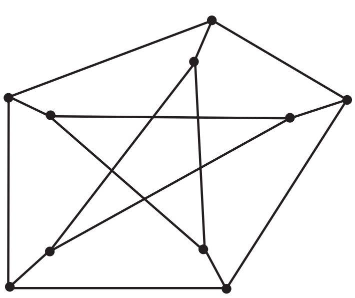
بنابراین :

[۳/۵] = ۳   [۳] = ۳

⌈۳/۵⌉ = ۴   ⌈۳⌉ = ۳

■ سؤال : برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟

فعالیت



G

شکل ۸

می‌دانیم در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

۱ در گراف مقابل Δ چند است؟

۲ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟

۳ آیا ۲ رأس می‌توانند همهٔ رئوس گراف G را احاطه کنند؟

۴ حداقل $\left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است. چرا؟

۵ $\gamma(G)$ چند است؟

۶ در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجهٔ Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

۷ تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأسِ یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

بنابراین :

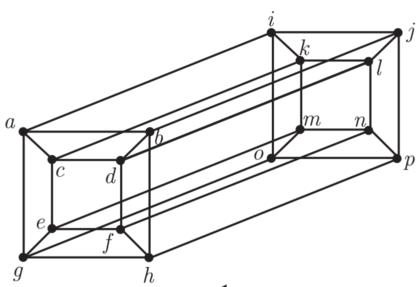
اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq |D|$

و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود

در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$ ؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ رایانه را در نظر بگیرید که در آن هر رایانه، مطابق شکل ۹ به چند رایانه دیگر متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک رایانه است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که رایانه‌های نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از رایانه‌ها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به‌طوری که توسط این مجموعه از رایانه‌ها به تمام رایانه‌های این شبکه وصل باشیم. مجموعهٔ انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟



شکل ۹

۲ با توجه به رابطهٔ $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟

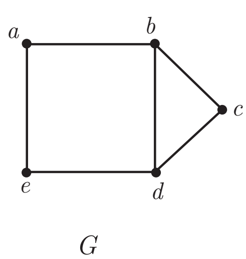
۳ گراف‌های P_{10} , P_9 , C_{10} و C_9 را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

حل : به سادگی می‌توان دید که مجموعهٔ دو عضوی $\{a,c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.
بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq 2$.
اما اگر $\gamma(G)=1$، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجهٔ ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G)>1$. بنابراین $1<\gamma(G)\leq 2$ و لذا $\gamma(G)=2$.



شکل ۱۰

روش دیگر برای حل : نوع دیگری از استدلال به این صورت است که باتوجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G)=۳$ داریم :

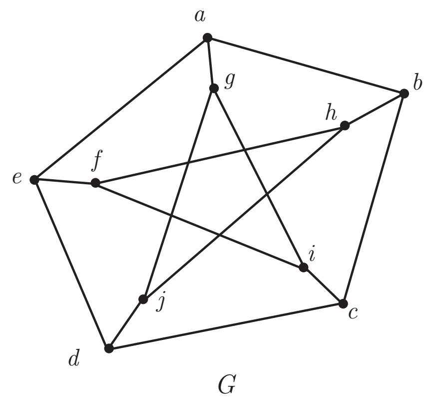
$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۵}{۴} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

بنابراین $\gamma(G) \geq ۲$ و با توجه به مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G) \leq ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

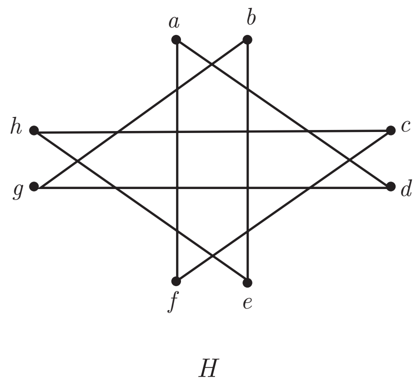
کار در کلاس

۱ تمام γــ مجموعه‌هایِ (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

۲ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.



الف)

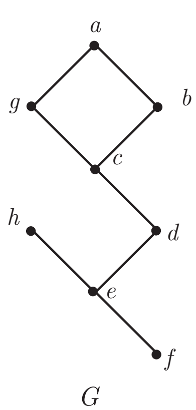


ب)

شکل ۱۱

فعالیت

۱ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.



شکل ۱۲

الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ برای $\gamma(G)$ حداقل $۲=\left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطهٔ تمام رئوس این گراف کافی نیست.

ب) برای احاطه‌کردن رأس h حداقل یکی از رئوس e یا h باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند و با بودن هر کدام از آنها در مجموعهٔ احاطه‌گر، رئوس g,c,b,a کماکان احاطه نشده باقی می‌مانند.

پ) برای احاطه‌کردن رئوس g,c,b,a حداقل دو رأس دیگر نیاز هست، زیرا هیچ رأسی به تنهایی نمی‌تواند هر چهارتای آنها را احاطه کند.

ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعهٔ احاطه‌گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G)\geq ۳$.

ث) از طرفی چون $\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، $\gamma(G)\leq ۳$. پس $\gamma(G)=۳$.

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.

الف) ابتدا کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $\left\lceil \frac{۱۴}{۶} \right\rceil = ۳$ را می‌دهد. پس $\gamma(G) \geq ۳$.

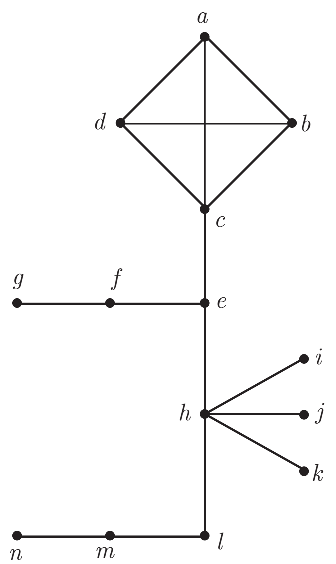
ب) اما حداقل یکی از رئوس a، b، c و d باید انتخاب شود. چرا؟

پ) حداقل یکی از رئوس f و g باید انتخاب شود. چرا؟

ت) حداقل یکی از رئوس i و h باید انتخاب شود. چرا؟

ث) حداقل یکی از رئوس m و n باید انتخاب شود. چرا؟

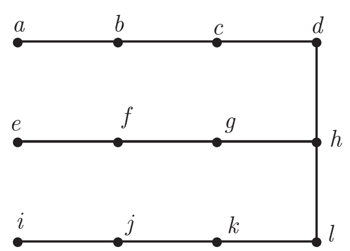
ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعهٔ احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq ۴$ و با توجه به اینکه $\{c,f,h,m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq ۴$ بنابراین $\gamma(G) = ۴$.



شکل ۱۳

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۴ را به‌دست آورید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن ارائه کنید.

حل : برای احاطه‌کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند. به همین صورت یکی از رئوس e و f و نیز یکی از رئوس i و j نیز باید در هر مجموعه احاطه‌گر باشند. اما این سه رأس انتخاب شده در هر حالت نمی‌توانند رئوس l,h,d را احاطه کنند. لذا حداقل یک رأس دیگر یعنی حداقل ۴ رأس برای احاطهٔ رئوس این گراف لازم است: یعنی $\gamma(G) \geq ۴$ از طرفی $\{b,f,j,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گراست و لذا $\gamma(G) \leq ۴$. بنابراین داریم $\gamma(G) = ۴$.



شکل ۱۴

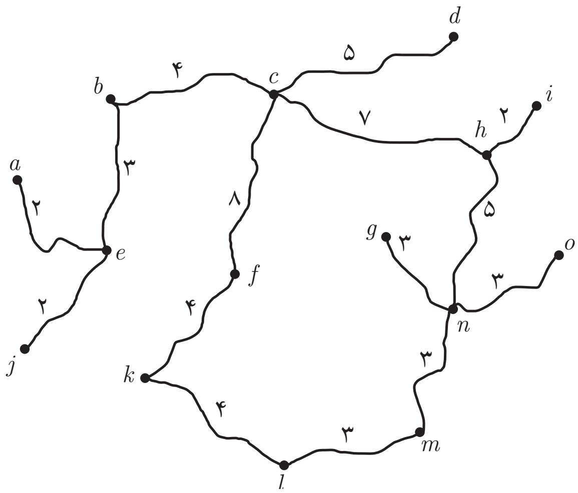
تمرین

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید.

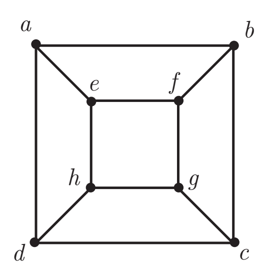
ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

۲ نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به‌گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشهٔ فوق، مسئلهٔ مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

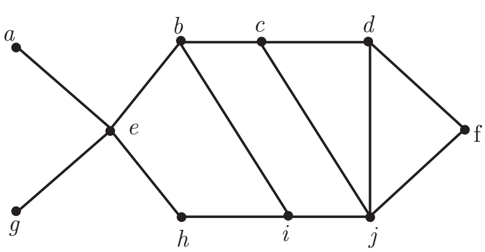


شکل ۱۵

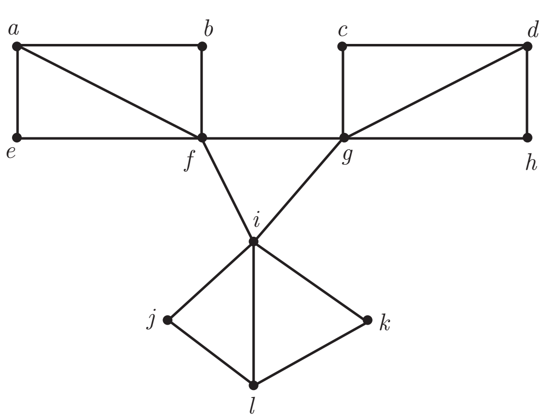
۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



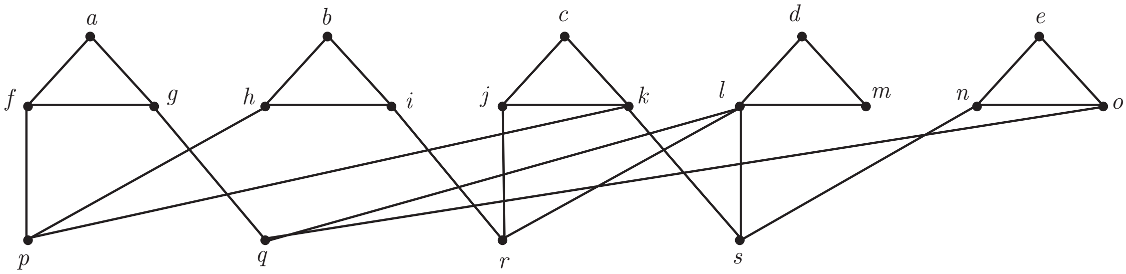
(الف)



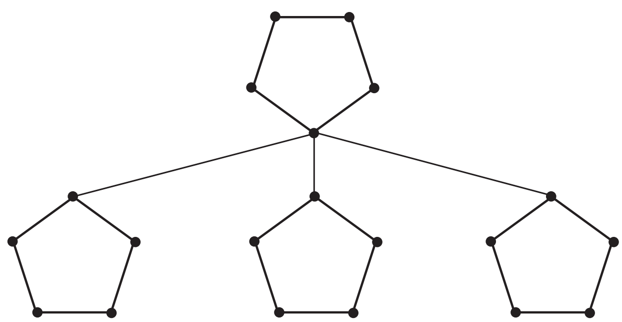
(ب)



(پ)



(ت)



(ث)

۴ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G)=۱$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی‌برد؟ ($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)

۵ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ مشخص کنید.

۶ اگر G یک گراف k- منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\left\lceil \frac{n}{k+۱} \right\rceil \leq \gamma(G)$

۷ یک گراف ۲ــ منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعهٔ آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعهٔ آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k\leq\frac{n}{۲}$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

۱۰ برای هر $n\in \mathbb{N}$ $(n\geq ۴)$ دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۱ گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.

الف) یک γ ــ مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

۳ ترکیبیّات (شمارش)

۱ مباحثی در ترکیبیّات

۲ روش‌هایی برای شمارش

مسائل ترکیبیّات در بخش‌های زیادی از ریاضیات مانند جبر، نظریه احتمالات و هندسه به‌وجود می‌آیند. ترکیبیّات در علوم رایانه، بهینه‌سازی، فیزیک آماری و ... کاربردهای فراوان دارد. ساختارهای ترکیبیّاتی یکی از مهم‌ترین مباحث ترکیبیّات است. مربع‌های لاتین یکی از ساختارهای مهم ترکیبیّاتی‌اند و دارای کاربردهای بسیاری هستند. یکی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری است.

درس ۱ مباحثی در ترکیبیّات

یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل[۱] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب[۲] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم.

در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال : فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «چ»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است :

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل :

الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به !۷ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء درنظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این‌صورت !۵ جایگشت دارند؛ در هر جایگشت، سه حرفِ داده شده هم در عین

۱ـ $(n)_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

۲ـ $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

حال که کنار هم هستند ۳! جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای موردنظر برابر است با ۵!×۳!

$$\boxed{۲}\ \boxed{۳}\ \underbrace{\boxed{چ}\ \boxed{پ}\ \boxed{ژ}}_{\text{۳! جایگشت}}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}$$

پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می‌کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و ۴! جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده هم ۴! در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از ۴!×۴!

$$\boxed{پ}\ \underbrace{\boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}}_{\text{۴! جایگشت}}\ \boxed{ژ}\ \boxed{چ}$$

ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می‌کنیم که روی هم دو شیء شده و ۳! حروف در کنار هم و ۴! نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای موردنظر عبارت‌است از ۲!×۳!×۴!

$$\underbrace{\boxed{۲}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۵}}_{\text{۴! جایگشت}}\ \underbrace{\boxed{پ}\ \boxed{ژ}\ \boxed{چ}}_{\text{۳! جایگشت}}$$

ما برای حل این مثال از دسته‌بندی اشیا استفاده کردیم.

حال مسئله‌ای را طرح و حل می‌کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی‌دهیم تا شما خودتان راه‌حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال : ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم :

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به‌صورت یک‌درمیان قرار داد؟

الف) $5!\times4!\times2!$

ب) $\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1} \longrightarrow 5\times4\times4\times3\times3\times2\times2=5!\times4!$

پ) $2\times(5!\times5!)$

جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف a ، b و c برابر با ۶=!۳ است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف a و a و b برابر با ۳ است (baa , aba , aab) درواقع چون جابه‌جایی دو حرف a حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کلّ جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی !۲ تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال $\frac{۳!}{۲!}=۳$ است.

چون دو حرف a به !۲ طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه‌جایی به صورت ضربی در !۳ محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم !۳ بر !۲ از عملیات ضربی خارج شود.

کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام ۲، ۱، ۱ و ۱ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟

اگر ۴ رقم متمایز بودند جواب این سؤال !۴ بود ولی چون در این !۴ و به‌صورت ضربی، !۳ حالتِ ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز ۴ رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ، $\frac{۴!}{\cdots}=\cdots$ است.

اعداد ۴ رقمی ممکن $\underbrace{۱۱۱۲,۱۱۲۱,۱۲۱۱,۲۱۱۱}_{\text{۴ رمز ممکن}}$

تذکر : هرگاه n شیء مفروض باشند و در بین آنها k شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های این n شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیای تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با : $\frac{n!}{k!}$.

با همین استدلال می‌توان قضیهٔ زیر را، که به آن قضیهٔ جایگشت با تکرار می‌گوییم، بیان کرد :

قضیهٔ جایگشت با تکرار : اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که $n_۱$ تای آنها از نوع اول و یکسان و $n_۲$ تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با :

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\cdots\times n_k!}$$

مثال : با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

حل : طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار

$$\frac{۹!}{\underset{\text{تعداد یک‌ها}}{۲!}\times\underset{\text{تعداد دوها}}{۳!}\times\underset{\text{تعداد چهارها}}{۲!}}$$

مثال : ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

حل : کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از $۹!$ است که چون دونفری که در اتاق دونفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه‌نفره و چهارنفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به‌ترتیب $۲!$، $۳!$ و $۴!$ است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با $\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}$. این مثال به روشی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جابه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست) :

$$\binom{۹}{۲}\times\binom{۷}{۳}\times\binom{۴}{۴}=\frac{۹!}{۲!\times \cancel{۷!}}\times\frac{\cancel{۷!}}{۳!\times ۴!}\times ۱=\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}$$

انتخاب دو نفر برای اتاق دونفره

انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی برای اتاق سه‌نفره

فعالیت

شخصی وارد یک گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.

	دسته‌گل انتخابی	مریم	رُز	میخک
۱	یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*
۲	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*		**
۳	سه شاخه گل رُز	...	***	...
۴	....	...	**	*
۵	....	***	...	...
۶	....	**	...	*
۷	دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	...	...	...
۸	سه شاخه گل میخک	...	...	...
۹	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	...	...	...
۱۰	....	...	...	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از * استفاده شده است.

۲ آیا در هر حالت از حالت‌های ۱ تا ۱۰ جابه‌جایی ستاره‌ها با هم دسته گل جدیدی تولید می‌کند؟ جابه‌جایی دو خط عمودی با هم چطور؟

۳ با توجه به قضیهٔ جایگشت با تکرار تعداد کلّ جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به‌دست آورید.

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{5!}{\cdots \times \cdots} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$

۴ این مسئله را در حالت کلّی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

n = تعداد ستاره‌ها = تعداد شاخه گل‌های انتخابی

..... = تعداد خط‌های عمودی برای جدا کردن k نوع گل

..... = تعداد کل اشیا (شامل ستاره‌ها و خط‌های عمودی)

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{[n+(k-1)]!}{n! \times \cdots} = \binom{n+(k-1)}{k-1}$$

جابه‌جایی ستاره‌ها باهم، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند.

....

مثال : به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل :

$k = 4 =$ انواع گل

$n = 8 =$ تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه

$$\xRightarrow{\text{فعالیت قبل}} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!}$$

مثال : به چند طریق می‌توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل : ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی‌داریم. ۵=۴−۹ شاخه گل باقی‌مانده را به‌دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم :

$k = 4$

تعداد انتخاب‌های دلخواه $\leftarrow n = 9 - 4 = 5$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{3}$$

فعالیت

می‌خواهیم تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم x_1 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول و x_2 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم و x_3 تعداد .... باشد، در این صورت می‌بایست جمع انتخاب‌ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $x_1+x_2+\cdots=\cdots$ با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان‌دهندهٔ یک انتخاب هفت‌تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب هفت‌تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح ونامنفی برای این معادله است جدول صفحه بعد را کامل کرده و سپس تعداد جواب‌های معادله را به‌دست آورید.

$x_1+x_2+x_3=۷$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم x_3	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم x_2	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول x_1
۱+۰+۶=۷	۶	۰	۱
۱+۱+۵=۷	۵	۱	۱
۴+۲+۱=۷	…	…	…
……………	…	۷	…
……………	۲	۴	…
……………	…	…	…

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=۷$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل یعنی، $\cdots=\binom{\cdots}{\cdots}=\binom{n+k-1}{k-1}$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل یعنی برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

کار در کلاس

۱ معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=۷$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟
(**راهنمایی**: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.
(**راهنمایی**: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و…)

۳ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_5=۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1>۱$ و $x_2>۳$[1] باشد؟

۴ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_5=۱۱$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ $(x_i\geq ۱ ،۱\leq i\leq ۵)$

۵ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_6=۱۲$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3=۴$ و $x_5>۲$ باشد؟

۱ــ طرح سؤال‌هایی برای معادلات سیّاله که شرط‌هایی برای x_iها به‌صورت $a\leq x_i\leq b$ در آن لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.

مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰ــ۸، ۱۲ــ۱۰ و ۴ــ۲ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسهٔ درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس‌ها دقیقاً یک‌بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

جلسات / کلاس‌ها	۱۰ــ۸	۱۲ــ۱۰	۴ــ۲
A			
B			
C			

فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول ۳ × ۳ از اعداد به‌دست آورید.

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.
ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.
پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.
ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است.

a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.
b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.
c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.
d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.

تعریف: یک جدول مربعی از اعدادِ ۱، ۲، ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «**مربع لاتین**[۱]» می‌نامیم. (به هر یک از اعدادِ درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

۱ــ اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.

مثال : دو مربع لاتین ۳ × ۳ و دو مربع لاتین ۴ × ۴ در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین ۵ × ۵ بنویسید.

۲ با استدلال کلامی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن **«مربع لاتین چرخشی»** می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟

$$\begin{array}{|cccccccc|}
\hline
1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & n-1 & n \\
n & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n-2 & n-1 \\
n-1 & n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-3 & n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
3 & 4 & 5 & & & & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & \dots & \dots & \dots & n & 1 \\
\hline
\end{array}$$

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱ , ۲ , ۳ , ... , n یک مربع جدید به‌دست آورده‌ایم. خواهیم دید که مربع به دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مربع اوّل نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

۱ → ۳
۲ → ۲
۳ → ۴
۴ → ۱

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳، ۲، ۴ و ۱ جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع‌های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت‌ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به‌دست آورید.

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

دو مربع لاتین متعامد

تعریف : فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «**متعامدند**» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

به‌طور مثال برای دو مربع A و B به‌صورت زیر داریم :

$A =$

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

$B =$

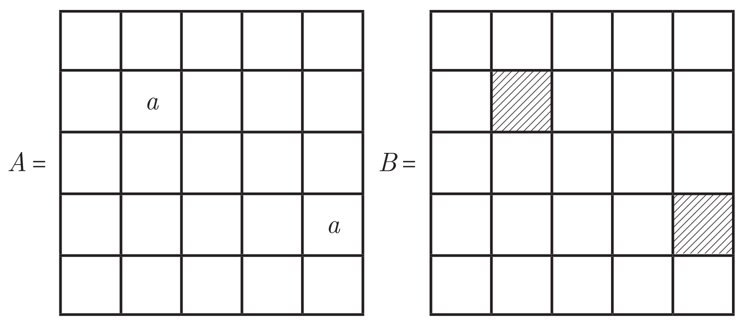
۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

$\Rightarrow$

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درایه) در یکی از مربع‌ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه‌های (درایه‌های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می‌خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند به کار می‌رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایهٔ یکسان پیدا کنیم به‌طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه‌های مربع اوّل) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتینِ A دو عدد یکسان (مانند a در شکل) به گونه‌ای بیابیم که در جایگاه‌های متناظر با آنها در مربع لاتینِ B (جایگاه‌های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه‌های هاشور خورده هر دو حاوی عدد b باشند در این صورت دو مربع A و B متعامد نیستند.



مثال : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

(الف)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

(ب)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

(پ)

حل : الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۳		
	۳	

۱		
	۱	

پ) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین ۱ × ۱ وجود دارد؟

۲ آیا دو مربع لاتین ۲ × ۲ متعامد وجود دارد؟

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین ۳ × ۳ روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۴ آیا دو مربع لاتینِ ۴ × ۴ زیر متعامدند؟

$A =$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$B =$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

دیدیم که برای ۲ و ۱ = n، دو مربع لاتین متعامد $n \times n$ وجود ندارد. ثابت شده است[1] که اگر ۶ و ۲ و ۱ ≠ n، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد و برای ۶ و ۲ و ۱ = n دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B، مربع لاتین جدیدی به‌دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

$B' =$

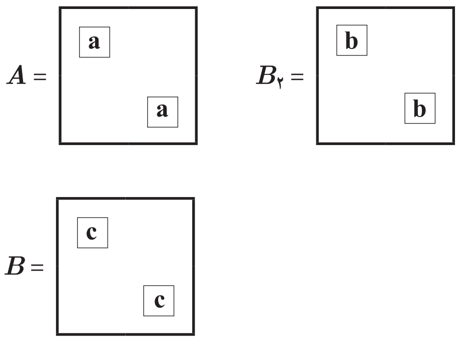
خواندنی

اویلر[2] در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی n به صورت ۲ + ۴k = n، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. در واقع اویلر پس از بررسی‌های زیاد بر روی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری[3] ثابت کرد که ادعای اویلر برای ۶ = n درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای ۱۰ = n و اعداد بزرگ‌تر کسی جواب را نمی‌دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام پارکر[4] و دو ریاضی‌دان هندی به نام‌های بوس[5] و شریخاند[6] ثابت کردند که حدس اویلر به جز برای حالت ۶ = n برای سایر ۲ + ۴k = n درست نیست؛ یعنی برای هر عدد ۶ و ۲ و ۱ ≠ n حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

۱ــ اثبات این مطلب در این کتاب مد نظر نیست.

۲ــ Euler
۳ــ Tarry
۴ــ Parker
۵ــ Bose
۶ــ Shrikhande

مثال : نشان دهید اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به‌دست می‌آید نیز با مربع لاتینِ دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و $B_۲$ مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و $B_۲$ نیز متعامدند.



حل : فرض کنیم A و $B_۲$ متعامد نباشند. لذا دو جایگاه در مربع A وجود دارد که اعداد یکسانی (مثلاً a) در آنها قرار دارد و در جایگاه‌های نظیر آنها در مربع $B_۲$ نیز دو درایهٔ یکسان (مثلاً b) قرار دارند.
حال با توجه به تعریف جایگشت در همین دو جایگاه در مربع B نیز باید دو درایه یکسان مانند c باشد که در $B_۲$ با اعمال جایگشت به درایهٔ b تبدیل شده‌اند و در این صورت دو مربع A و B نیز متعامد نخواهند بود و این با فرض مسئله در تناقض است. لذا A و $B_۲$ هم نمی‌توانند متعامد نباشند.

مثال : قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برای کارِ ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد.
برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین ۵×۵ استفاده کنیم. فرض کنید هر **ستون** نشان‌دهندهٔ یک **کارگر** و هر **سطر** نشان‌دهندهٔ یک **روز هفته** و هر کدام از **اعدادِ** ۱ و ۲ و ... و ۵ که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از **ماشین‌های ریسندگی** باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر $W_۱$ با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$	$W_۴$	$W_۵$
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

$= A$

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت (الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک‌بار استفاده کند.
برای این کار مانند قسمت (الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر **ستون** را نشان‌دهندهٔ یک **کارگر** و هر **سطر** را نشان‌دهندهٔ یک **روز هفته** و هر کدام از **اعداد** ۱ و ۲ و ... و ۵ را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$	$W_۴$	$W_۵$
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

$= B$

نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شمارهٔ ۴ با الیاف شمارهٔ ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع ۵ × ۵ به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به‌طور مثال کارگر شمارهٔ ۴ در روز یکشنبه با ماشین شمارهٔ ۳ و الیاف شمارهٔ ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین A و B متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع A و B به این معناست که مربع دو رنگِ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شمارهٔ ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شمارهٔ الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به کار رفته است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

کار در کلاس

۱ در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده است؟

۲ در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک‌بار کار می‌کند.

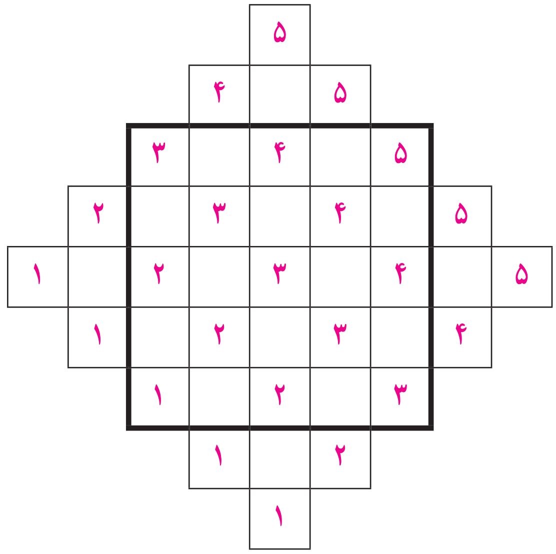
۳ در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شده است؟

۴ اگر سه برادرِ تقریباً هم‌سن‌و‌سال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اوّل هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

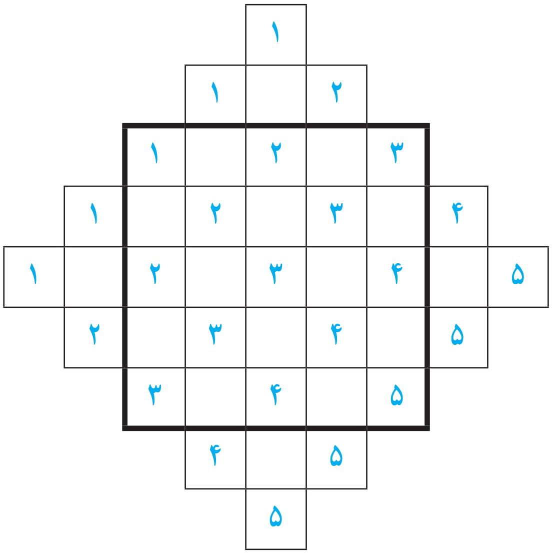
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ یک عدد فرد[1]

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین 5×5 متعامد به‌دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، . . . و ۵ با نظمی خاص (به نحوهٔ چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.



(الف)



(ب)

۲ حال مربع‌های پررنگِ 5×5 وسط را در نظر بگیرید و با انتقال اعداد خارج از این مربع‌ها به داخل آنها با روش زیر، مربع‌ها را پر کرده، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ به‌دست آورید.

الف) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت چپ آن واقع است را ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

ب) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت راست آن واقع است را ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

پ) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در بالای مربع واقع است را ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

ت) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در پایین مربع واقع است را ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۳ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n به‌دست آورید.

۱ــ از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ غیرفرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.

تمرین

۱ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۲ اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر :

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضیِ خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $۷!\times۴!$ باشد.

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولید شدهٔ خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شاملِ ۹ حرفِ a,a,b,a,c,c,d,d,d، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۷ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم :

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده :

الف) $x_1+x_2+\cdots+x_5=10$ $\quad$ $x_i>0\ ,\ 2\leq i\leq 5$

ب) $x_1+x_2+\cdots+x_6=12$ $\quad$ $x_1>2\ ,\ x_5\geq 4$

پ) $x_1+x_2+\cdots+x_5=11$ $\quad$ $x_i\geq 1\ ,\ 1\leq i\leq 5$

ت) $x_1+3x_2+x_3+x_4=7$ $\quad$ $x_i\geq 0\ ,\ 1\leq i\leq 4$

ث) $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3$ $\quad$ $x_i\geq 0\ ,\ 1\leq i\leq 4$

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۱۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۲ آیا مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

۱۳ مربع لاتین ۳ × ۳ مقابل را در نظر بگیرید.

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

الف) سطر دوم و سومِ مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۱$ بنامید. آیا A و $A_۱$ متعامدند؟

ب) ابتدا سطرِ اول و سطرِ سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۲$ بنامید. آیا A و $A_۲$ متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۱۴ قرار است شش مدرس $T_۱$ ، $T_۲$ و . . . و $T_۶$ در شش جلسهٔ متوالی در شش کلاسِ $C_۱$ ، $C_۲$ و . . . و $C_۶$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ بنویسید.

۱۶ در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی قرار است ۷ راننده در هفت روزِ هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد :

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود.

ــ برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

درس ۲ روش‌هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبهٔ تعداد اعضای $(A\cup B)$ یعنی $|A\cup B|$ چون اعضای $(A\cap B)$ هم در A و هم در B هستند، اگر اعضای A و B را روی هم حساب کنیم اعضای $(A\cap B)$ دو بار محاسبه شده‌اند و می‌بایست یک‌بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت :

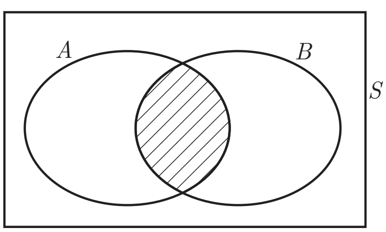
$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

این تساوی به **اصل شمول** و **عدم شمول** برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را **اصل شمول** می‌نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر S مجموعهٔ مرجع A و B باشد، داریم :

$$|(A\cup B)'|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$$

این تساوی نتیجهٔ اصل شمول است.



شکل ۱

نتیجهٔ مهم : اگر S مجموعه‌ای متناهی و A و B زیرمجموعه‌های S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند. برابر است با :

$$|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

مثال : در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل : ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشتهٔ ورزشی بازی می‌کنند مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به‌دست می‌آوریم.

اگر مجموعهٔ افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می‌کنند به‌ترتیب F و V بنامیم در این‌صورت خواهیم داشت :

$$|F\cup V|=|F|+\cdots-\cdots\cdots\cdots\Rightarrow |F\cup V|=\cdots$$

$$\Rightarrow \text{تعداد افرادی که نه در } F \text{ و نه در } V \text{ هستند} = |\overline{F\cup V}|=|S|-|F\cup V|=۲۵-\cdots=\cdots$$

اصل شمول را می‌توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسائلی را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

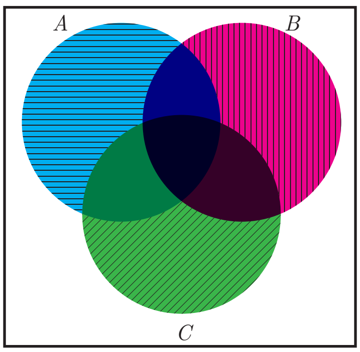
اصل شمول برای سه مجموعه : اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع S باشند، در این‌صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است :

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

(توضیح دهید چرا اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

با استفاده از تعریف متمم، نتیجهٔ اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می‌شود :

(تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B و C قرار ندارند) $|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$



شکل ۲

فعالیت

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱\leq n\leq ۴۰۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، بر ۴ بخش‌پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک موردنظر می‌باشند؟

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد موردنظر است؟

۳ اگر مجموعهٔ اعدادی را که بر ۳ بخش‌پذیرند A و اعداد بخش‌پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش‌پذیر بر ۵ را C بنامیم، $\overline{A}$، $\overline{B}$ و $\overline{C}$ را تعریف کنید. آیا مجموعهٔ $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ همه اعداد موردنظر را شامل می‌شود؟

۴ آیا تساوی $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=(\overline{A\cup B\cup C})$ برقرار است؟

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجهٔ اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [ ] جزء صحیح است).

$$A=\{۱\leq n\leq ۴۰۰ \mid ۳\mid n\}\rightarrow |A|=\left[\frac{۴۰۰}{۳}\right]=\cdots$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر سه بخش‌پذیرند برابر است با $\left[\frac{k}{۳}\right]$).

$$B=\{۱\leq n\leq ۴۰۰ \mid \cdots\mid n\}\rightarrow |B|=\left[\frac{\cdots}{\cdots}\right]=\cdots$$

$$C=\{۱\leq n\leq ۴۰۰ \mid \cdots\mid n\}\rightarrow |C|=\left[\frac{\cdots}{\cdots}\right]=\cdots$$

$(A\cap B)$ یعنی مجموعهٔ اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش‌پذیرند و با توجه به قضیه‌ای در نظریه اعداد، «مجموعهٔ اعدادی که بر a و بر b بخش‌پذیر باشد با مجموعهٔ اعدادی که بر «ک‌م‌م» آن دو عدد یعنی بر $[a,b]$ بخش‌پذیرند، برابر می‌باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A\cap B|=\left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۲}\right]=\cdots$$

$$|A\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{\cdots}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۵}\right]=\cdots$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{\cdots}{\cdots}\right]=\left[\frac{\cdots}{۲۰}\right]=\cdots$$

$$|A\cap B\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{۶۰}\right]=\cdots\ ([۳,۴,۵]=[[۳,۴],۵]=[۱۲,۵]=۶۰)$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$

$$=۴۰۰-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$

$$=۴۰۰-(۱۳۳+\cdots+\cdots-۳۳-\cdots-۲۰+۶)=\cdots$$

کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱\leq n\leq ۳۵۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش‌پذیر نباشند؟
(توجه داشته باشید که $[۵,۶]=۳۰$, $[۴,۶]=۱۲$, $[۵,۴,۶]=۶۰$)

مثال : اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی‌هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد.)

حل : یک رمز ۴ رقمی را به‌صورت $\overline{abcd}$ نمایش می‌دهیم که در آن a، b، c و d ارقام صفر تا ۹ می‌باشند. محاسبهٔ تعداد چنین ارقامی به‌صورت مستقیم کاری وقت‌گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می‌کنیم.

ابتدا مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر و مخالف با آنچه موردنظر مسئله است تعریف می‌کنیم!

$$A=\left\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۷\right\}\rightarrow |A|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$B=\left\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq \cdots\right\}\rightarrow |B|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$(A\cap B)=\left\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۷,۸\right\}\rightarrow |A\cap B|=۸\times۸\times۸\times۸$$

واضح است که منظور از $\overline{A}$ مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به‌کار رفته است و منظور از $\overline{B}$

اعداد ۴ رقمی است که در آنها عدد ۸ به‌کار رفته است. البته $(\overline{A}\cap\overline{B})$ یعنی مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به‌کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

$|S| = ۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰ = ۱۰۰۰۰$ = تعداد کل ۴ رقمی‌ها $\longrightarrow$ ۱۰ ۱۰ ۱۰ ۱۰

رقم اول رقم دوم رقم سوم رقم چهارم

$|\overline{A}\cap\overline{B}| = |\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B|$

$= ۱۰۰۰۰ - (۹^۴ + ۹^۴ - ۸^۴) = \cdots$

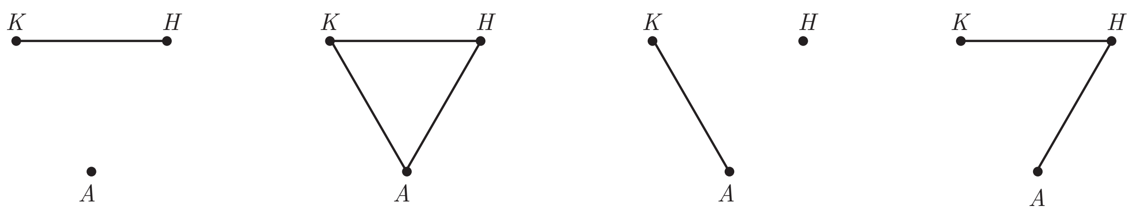
$\cdots = ۵\times\cdots$ = زمان لازم برحسب ثانیه

کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورهه، آبگرم و حاجی‌آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به‌طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K، A و H می‌توان تعریف کرد به‌طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف سادهٔ زیر کدام‌ها موردنظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟



شکل ۳

۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با :

$|S| = ۲^{\binom{۳}{۲}} = \cdots$

(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده درنظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحیِ ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر A_k را مجموعهٔ راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_a و A_h را تعریف کنید و با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $|A_k| = |A_a| = |A_h| = ۲$

ب) $|A_k\cap A_a| = |A_k\cap A_h| = |A_a\cap A_h| = ۱$

پ) $|A_k\cap A_a\cap A_h| = ۱$

فعالیت

اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $۱\leq i\leq m$ می‌توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد ($f(a_i)=b_۱$ یا $f(a_i)=b_۲$ یا . . . یا $f(a_i)=b_n$) و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با : $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=۵$ و $|B|=۳$، در این‌صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به‌طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع‌هایی، تابع پوشا گفته می‌شود.)

۱ اگر فرض کنیم $B=\{b_۱ , b_۲ , b_۳\}$ و $A=\{a_۱ , a_۲ , a_۳ , a_۴ , a_۵\}$ و تعریف کنیم،

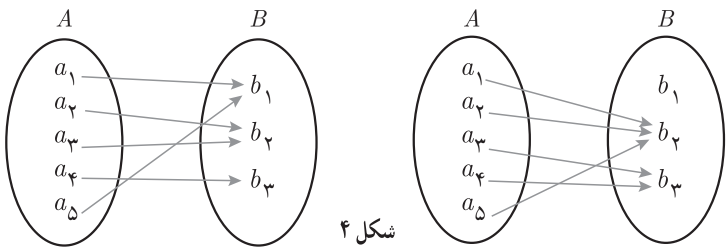
$$A_۱=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq b_۱ ;\ ۱\leq i\leq ۵\}$$

$$A_۲=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq \cdots ;\ ۱\leq i\leq ۵\}$$

$$A_۳=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq \cdots ;\ ۱\leq i\leq ۵\}$$

در این صورت $\overline{A_۱}$ مجموعه‌ای شامل همه تابع‌هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی $b_۱$ می‌آورند.

یکی از تابع‌های موجود در مجموعهٔ $A_۱$



یکی از تابع‌های موجود در مجموعهٔ $\overline{A_۱}$

شکل ۴

۲ مجموعهٔ $(\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳})=(\overline{A_۱\cup A_۲\cup A_۳})$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

$$|S|=۳^{\cdots}=\cdots ,\ |A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^{\cdots}=\cdots$$

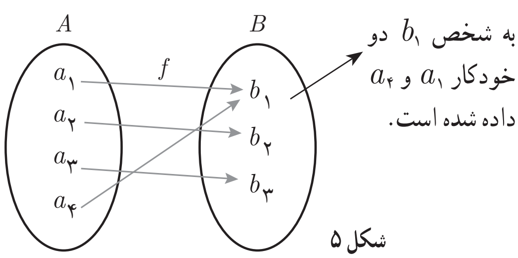
$$|A_۱\cap A_۲|=|A_۱\cap A_۳|=|A_۲\cap A_۳|=\cdots ,\ |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$$

$$(\overline{A_۱\cup A_۲\cup A_۳})=|S|-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|$$

$$=۲۴۳-(\cdots+\cdots+\cdots-\cdots-\cdots-\cdots+\cdots)=\cdots$$

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های از یک مجموعهٔ ۴ عضوی مانند A به یک مجموعهٔ ۳ عضوی مانند B، به طوری که بُرد این توابع همهٔ اعضای B باشد. (به هر عضو B حداقل ۱ عضو از A نسبت داده شود.)



شکل ۵

$$A_j=\{f:A\to B \mid f(a_i)\neq b_j ,۱\leq i\leq ۴\},۱\leq j\leq ۳$$

$$|S|=|B|^{|A|}=۳^۴=۸۱$$

$$|A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^۴=۱۶$$

$$|A_۱\cap A_۲|=|A_۱\cap A_۳|=|A_۲\cap A_۳|=۱^۴=۱ ,\ |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=۸۱-(۳\times۱۶-۳\times۱+۰)=۳۶$$

تذکر : تعداد تابع‌هایی چون $f: A\to B$ با فرض $|A|=m\geq ۳$ و $|B|=۳$ به‌طوری که $R_f=B$، از رابطهٔ $۳^m-(۳\times۲^m-۳)$ به‌دست می‌آید.

مثال : ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل : حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی که برابر است با $۸^۴=۴۰۹۶$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۶ عضوی را شمارش کنیم.

۱ اگر فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ و $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$، چند راه انتخاب داریم؟

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به‌یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_1)$، برای تعریف f روی a_2 چند راه انتخاب داریم؟

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_1)$ را تعریف کرد $\to f(a_1)=b_1$ یا b_2 یا $\cdots$ یا b_6

به ۵ طریق می‌توان $f(a_2)$ را تعریف کرد $\to f(a_2)\neq f(a_1) \Leftarrow f$ یک‌به‌یک است

$\cdots \Leftarrow f(a_3)\neq f(a_1)\ ,\ f(a_3)\neq f(a_2) \Leftarrow f$ یک‌به‌یک است

....

طبق اصل ضرب $\Leftarrow$ تعداد کل تابع‌های یک‌به‌یک $= ۶\times۵\times\cdots\times\cdots=\dfrac{۶!}{\cdots}=(۶)_۴$

در حالت کلّی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m\leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با تعداد انتخاب‌های m شیء از بین k شیء یا $(k)_m=\dfrac{k!}{(k-m)!}$.


شکل ۶

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴عضوی به مجموعه‌ای ... عضوی یعنی، $(8)_4=\frac{\cdots}{\cdots}=\cdots$.

اصل لانه کبوتری[1]

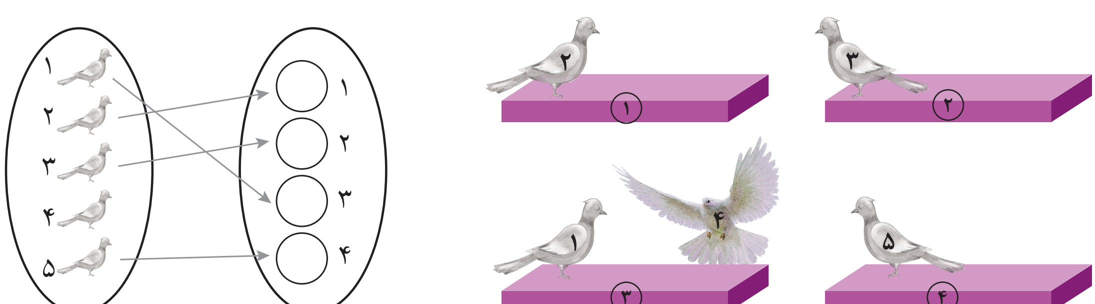
اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولّدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به‌دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دونفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

شکل ۷

اصل لانه کبوتری : اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

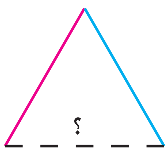


الف   ب

شکل ۸

۱ــ اصل لانه کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.

مثال : نشان دهید اگر بخواهیم ضلع های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.



حل : اگر ضلع های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

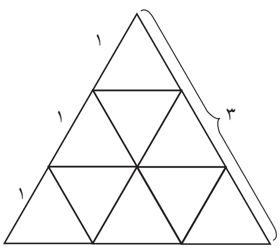
مثال : ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانهٔ ۴ هم‌نهشت می‌باشند.

حل : می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعهٔ $R=\{۰,۱,۲,۳\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهشتی باید $a \overset{۴}{\equiv} b$ و حکم به‌دست می‌آید.

تمرین :در حالت کلّی ثابت کنید در بین هر $(n+۱)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانهٔ n هم‌نهشت‌اند).

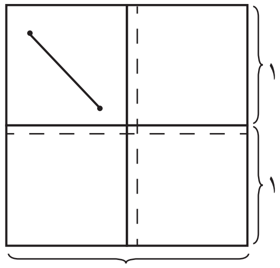
کار در کلاس

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



شکل ۹

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.



شکل ۱۰

۳ نشان دهید در یک خانوادهٔ حداقل ۵ نفری، دست‌کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

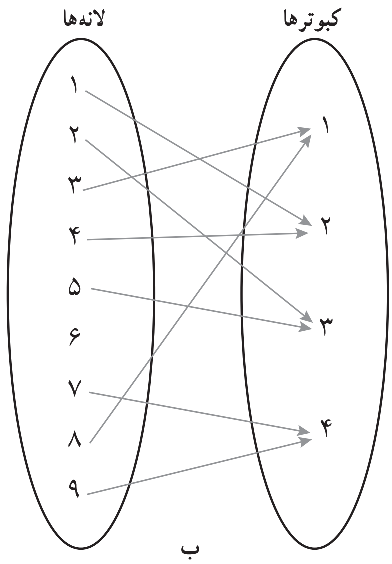
۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبهٔ $P \geq ۲$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (**راهنمایی** : مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این‌صورت درجات رئوس از ۱ تا $n-۱$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیهٔ رئوس از ۱ تا $n-۲$ تغییر می‌کند) آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

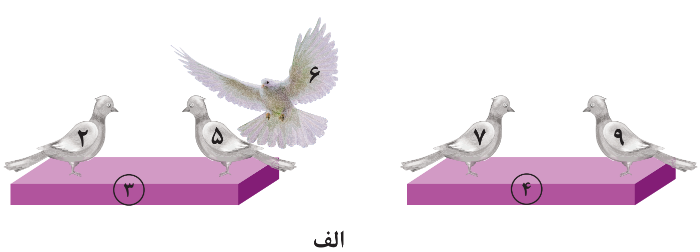
فعالیت

جدول زیر را (با توجه به قراردادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه‌گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر	تعداد کبوترها $(kn+1)$	تعداد لانه‌ها (n)
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر	$1 \times n + 1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ... کبوتر	$2 \times n + 1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر	.... +۱	n
⋮	⋮	⋮
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ...... کبوتر	.... +۱	n

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به‌ازای $n=4$ و $k=2$ تعداد کبوترها $9=1+4\times2$ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی‌مانده مجدّد در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همهٔ کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه‌ای دیگر یا ...).





شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کبوتری : هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال : در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل : در این مسئله $k+۱=۷$ یعنی $k=۶$ است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=۱۲$ است، پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn+۱=۶×۱۲+۱=۷۳$ باشد.

کار در کلاس

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفتهٔ تولدشان یکی است؟

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$k+۱=\cdots \Rightarrow k=\cdots$

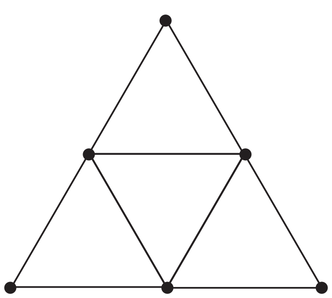
$kn+۱=۵۴ \Rightarrow ۴n=\ldots \Rightarrow n=[\frac{\cdots}{۴}]=\cdots$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و مثل هم است؟

(فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی موردنظر است).

مثال : حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل : کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست‌کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصلهٔ این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.



شکل ۱۲

مثال : نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز $(n\geq۲)$ حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل : قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطهٔ دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

تمرین

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ $(1 \leq n \leq 90)$ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(1 \leq n \leq 200)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند مشخص کنید :

الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

۵ چه تعداد تابع چون $f: A \to B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=5$ و $|B|=4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

۶ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

۷ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

۱۲ مجموعهٔ اعداد $A=\{1, 2, \ldots, 84\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۱۳ مجموعهٔ اعداد $A=\{۱, ۵, ۹, ۱۳, \ldots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری‌که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

منابع

۱ امیری، حمیدرضا. (۱۳۸۶). ورودی به نظریه اعداد. انتشارات مدرسه.

۲ بهزاد، مهدی؛ رجالی، علی؛ عمیدی، علی و محمودیان، عباداالله. (۱۳۹۶). کتاب درسی ریاضیات گسسته. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش.

۳ D.B. West (2001). Introduction to graph theory.

۴ H.M.Edgar. (2004). A first corse in number theory.

۵ J.A. Bondy, U.S.R.Murty. (2008). Graph theory.

۶ J.H.Van Lint, R.M.Wilson. (2003). A course in Combinatorics.

۷ K.H.Rosen. (2016). Handbook of Discrete and combinatorial Mathematics. CRC Press.

۸ S.S. Epp (2011). Discrete Mathematics an Introduction to Mathematics Reasoning, Cengage Learning.

۹ S.S. Epp (2011). Discrete Mathematics with Applications.

۱۰ T.Koshy. (2007). Elementary Number Theory with Applications. ELSEVIER.

۱۱ T.W. Haynes, S.T.Hedetniemi, P.J.Slater. (1998). Fundamentals of domination in graph.

۱۲ T. Sundstrom (2016). Mathematical Reasoning: Writing and proof, Grand valley state university.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارۀ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانۀ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائۀ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضیات گسسته با کد ۱۱۲۲۱۵

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	امین مجیدی	گیلان	۲۸	فرود نجفی	فارس
۲	خلیل تیموری	ایلام	۲۹	نرجس زنگارکی	مرکزی
۳	نرگس اصلانی گرمی	آذربایجان شرقی	۳۰	عباسعلی ایزدی قصبه	گیلان
۴	آسیه رضائی گرجی	البرز	۳۱	علی اصغر بسطامی	ایلام
۵	آزاده قنادیان	همدان	۳۲	رسول حاجی زاده	شهرتهران
۶	طاهره جعفری	شهرتهران	۳۳	زهره محمدی	چهارمحال وبختیاری
۷	پرویز رضایی	فارس	۳۴	علیرضا محمدی	بوشهر
۸	عادل محمدی	خوزستان	۳۵	فرزانه کد خدایی	لرستان
۹	فرزانه منصوری	خراسان شمالی	۳۶	شفیع ملایی	کردستان
۱۰	سهیلا چناری	کرمانشاه	۳۷	مریم فرهادپور	خراسان جنوبی
۱۱	محمد درویش زاده	اصفهان	۳۸	زهرا درویش توانگر	شهرستانهای تهران
۱۲	کامران کبیری	چهارمحال وبختیاری	۳۹	مرتضی جعفری	سیستان وبلوچستان
۱۳	مهران قاسمی	آذربایجان غربی	۴۰	نجمه یزدان بخش	هرمزگان
۱۴	جواد بهرامی	البرز	۴۱	هوشنگ افشین	خوزستان
۱۵	مهناز رحیمی	اصفهان	۴۲	رضا صیادی	کرمانشاه
۱۶	سید عیسی حسینی	قزوین	۴۳	فیروزه شاهین شالکوهی	گیلان
۱۷	لقمان حسینی	کردستان	۴۴	سکینه حبیبی	لرستان
۱۸	حمیده عبدالهی	مازندران	۴۵	مهدی قسوره	خراسان جنوبی
۱۹	رضا زید آبادی	خراسان رضوی	۴۶	علی عبدالمحمد	قم
۲۰	ام البنین ربیعی	سمنان	۴۷	سیدحسین باقرنژاد	خراسان شمالی
۲۱	علی جعفری	همدان	۴۸	آذر کرمیان	قم
۲۲	سمیه پورجواران	کرمان	۴۹	مریم امیدیان	سمنان
۲۳	فاطمه سقائیان	خوزستان	۵۰	وحید سجادپور	کهگیلویه وبویراحمد
۲۴	جمال نوین	یزد	۵۱	مسعودرضا عرب یارمحمدی	گلستان
۲۵	محبوبه رمضانی	شهرستانهای تهران	۵۲	جلال سرحدی	مازندران
۲۶	سید رضا پرپینچی	قزوین	۵۳	فرزاد جوادی	آذربایجان غربی
۲۷	محمد کارامد	کرمان	۵۴	سیما حقیقی اذر	گلستان