گاج

ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم

رشته ریاضی و فیزیک

فرمول بیست

مؤلف

سید امیرسعید حسینی

فرمول بیست

۶۰
صفحه درسنامه

۷۰۰
پرسش تشریحی

۹
نمونه امتحانی

۸+

ساعت فیلم آموزشی ویژه شب امتحان

9 786220 307587
تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

پیشگفتار

ن و القلم و ما یسطرون

هدف اصلی مجموعه کتاب‌های فرمول بیست ارائه آموزش لازم برای تسلط به کتاب درسی و آمادگی برای امتحانات نهایی می‌باشد.

در این کتاب سعی کردم تمام زوایای کتاب درسی را موشکافانه بررسی کنم. از طرف دیگر، با ارائه سؤالات امتحانی طبقه‌بندی شده، انواع سؤالات متداول در امتحانات آورده شده است، تا دانش‌آموزان با شکل‌های مختلف سؤالات آشنا شده و بیش‌ترین بازدهی را برای امتحانات داشته باشند. توصیهٔ ما به دانش‌آموزان عزیز این است که ابتدا خودشان به سؤالات پاسخ دهند سپس به پاسخ‌نامه رجوع کنند.

این کتاب دارای سه فصل است که هر فصل شامل چندین درسنامه است تا تمام مطالب فصل با دقت و جزئیات آموزش داده شود و با ارائهٔ مثال‌های لازم، مطالب عمیق‌تر تفهیم گردد.

در ادامه در انتهای هر درسنامه تمام تمرینات و مثال‌های کتاب درسی شبیه‌سازی شده و با گردآوری سؤالات امتحان نهایی، یک مجموعهٔ تمرین از جمله سؤالات پاسخ کوتاه و جای خالی و بانک سؤال خوب و کامل نیز طراحی شده است.

در این کتاب برخی تمرینات تحت عنوان سؤالات بمب، مشخص شده است، این سؤالات از سطح بالاتری نسبت به تمرینات کتاب برخوردار است. این سؤالات دانش‌پژوهان سخت‌کوش‌تر را به چالش می‌کشد تا با حل آن‌ها لذت حل مسائل را دو چندان کند. در انتهای کتاب، ۹ سری امتحان نهایی سال‌های اخیر گنجانده شده است تا شب امتحان کار ساده‌تری داشته باشند.

در ابتدای هر فصل یک فیلم به صورت QR-Code قرار داده شده است که در آن سؤالاتی شبیه به سؤالات امتحان نهایی را توضیح داده‌ایم که شما با تماشای این فیلم‌ها یک بار دیگر مباحث فصل را برای شب امتحان مرور کنید و برای امتحانات آماده شوید.

در پایان از همه دوستان و عزیزانی که بنده را در تهیه این کتاب همراهی نموده‌اند، سپاس فراوان دارم، همچنین از همسر عزیزم و فرزندانم سیداحسان و الناسادات که مرا صبورانه همراهی کرده‌اند، سپاسگزارم.

پیروز باشید

سیّد امیرسعید حسینی

فهرست

120 min امتحان نهایی

بارم‌بندی درس ریاضیات گسسته

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
اول		۱۵	۶
دوم	تا صفحه ۴۲	۵	۲
دوم	صفحه ۴۲ به بعد	-	۵
سوم		-	۷
جمع		۲۰	۲۰

بخش ۱

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

۱ آشنایی با نظریهٔ اعداد

ریاضیات گسسته **دوازدهم**

فصل اول ریاضیات گسسته دارای ۷ بسته است که در آن‌ها مباحثی همچون استدلال استنتاجی، مثال نقض، برهان خلف، اثبات بازگشتی، بخش‌پذیری، مقسوم‌علیه مشترک، هم‌نهشتی، باقیمانده تقسیم اعداد و معادلهٔ هم‌نهشتی مطرح شده است. از این فصل در نوبت اول ۱۵ نمره و در نوبت دوم ۶ نمره سؤال مطرح می‌شود.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم آموزشی شب امتحان این فصل QR-code مقابل را اسکن کنید.

فصل ۱

بسته اول

استدلال استنتاجی و مثال نقض و اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

استدلال ریاضی

استدلال و اثبات در ریاضیات جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال، امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و درک آن کمک می‌نماید.

حال به بررسی بعضی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات می‌پردازیم.

اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی)

اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد ولی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم.

نکته وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

سؤال **با استفاده از اثبات مستقیم نشان دهید مجموع هردو عدد فرد، عددی زوج است.**

پاسخ فرض می‌کنیم که دو عدد فرد به‌صورت $a = ۲k + ۱$ و $b = ۲k' + ۱$ که $k' \in \mathbb{Z}$ و k باشند.

مجموع دو عدد فرد: $a + b = (۲k + ۱) + (۲k' + ۱) = ۲k + ۲k' + ۲ = ۲(\underbrace{k + k' + ۱}_{k''}) = ۲k''$

$۲k''$ عددی زوج است.

سؤال **با استفاده از اثبات مستقیم نشان دهید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی، همواره مضرب ۶ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم a، $a + ۱$ و $a + ۲$ سه عدد متوالی باشند. از هردو عدد متوالی یکی به ۲ بخش‌پذیر است. بنابراین یکی از دو عدد a یا $a + ۱$ زوج است، بنابراین $a(a + ۱)(a + ۲)$ مضرب ۲ است. هم‌چنین از هر سه عدد صحیح متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین $a(a + ۱)(a + ۲)$ مضرب ۳ می‌باشد. عدد $a(a + ۱)(a + ۲)$ هم به ۲ و هم به ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین مضرب ۶ می‌باشد.

سؤال **با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد، یک واحد اضافه شود، عددی زوج به‌دست می‌آید.** خرداد ۹۴

پاسخ فرض می‌کنیم که $a = ۲k + ۱ , (k \in \mathbb{Z})$ عددی فرد است.

$$۳a + ۱ = ۳(۲k + ۱) + ۱ = ۶k + ۳ + ۱ = ۶k + ۴ = ۲(\underbrace{۳k + ۲}_{k'}) = ۲k'$$

بنابراین سه برابر عددی فرد به اضافهٔ یک، عددی زوج است.

مثال نقض

استدلال مستقیم به ما اطمینان می‌دهد که نتیجهٔ به‌دست آمده حتماً درست است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

مثال نقض: به مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گویند.

سؤال برای اثبات نادرستی هریک از گزاره‌های زیر یک مثال نقض ارائه دهید.

آ) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است.

ب) اگر x و y اعداد گنگی باشند، آن‌گاه x^y یک عدد گنگ است.

پاسخ آ) مثال نقض $x=\frac{1}{2}$ برای رد این گزاره کافی است، زیرا: $x^2=\frac{1}{4}\not> x=\frac{1}{2}$

ب) مثال نقض $x=2^{\sqrt{2}}$ و $y=\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم. $x^y=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^2=4\in\mathbb{Q}$ (اعداد گویا)

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است که همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم و هر حالت را به طور مستقیم اثبات کنیم. سپس با توجه به هم‌ارزی $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$، حکم کلی مسئله اثبات می‌شود.

سؤال با استفاده از روش اشباع نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، همواره عددی زوج است.

پاسخ فرض کنیم a و $a+1$ دو عدد صحیح متوالی باشند. دو حالت وجود دارد:

حالت اول a عددی زوج است، بنابراین داریم:

$$a=2k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow a(a+1)=2k(2k+1)=2(\underbrace{k(2k+1)}_{k'})=2k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

پس $a(a+1)$ زوج است.

حالت دوم a عددی فرد است، بنابراین داریم:

$$a=2k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow a(a+1)=(2k+1)\underbrace{(2k+2)}_{2(k+1)}=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k'}=2k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

پس $a(a+1)$ زوج است.

اگر زوج بودن a را با p و فرد بودن a را با q و زوج بودن $a(a+1)$ را با r نمایش دهیم، در بالا ثابت کردیم که $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ و با توجه به هم‌ارزی $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\equiv p\vee q\Rightarrow r$ حکم ثابت می‌شود.

سؤال برای هر عدد طبیعی n، n^2+7n-5 عددی فرد است.

پاسخ هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول n زوج است، بنابراین داریم:

$$n=2k\ ,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow n^2+7n-5=(2k)^2+7(2k)-5=4k^2+14k-5=4k^2+14k-6+1$$

$$\xlongequal{\text{فاکتور}}2\underbrace{(2k^2+7k-3)}_{k'}+1=2k'+1\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

که حاصل n^2+7n-5 یک عدد فرد است.

حالت دوم n فرد است، بنابراین داریم:

$$n=2k-1\ ,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow n^2+7n-5=(2k-1)^2+7(2k-1)-5$$

$$=4k^2-4k+1+14k-7-5=4k^2+10k\underbrace{-11}_{-12+1}\xlongequal{\text{فاکتور}}2\underbrace{(2k^2+5k-6)}_{k'}+1=2k'+1\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

که حاصل n^2+7n-5 باز هم یک عدد فرد است.

لذا در دو حالت برای هر عدد طبیعی n، n^2+7n-5 عددی فرد است.

بسته ۱ **پرسش‌های تشریحی** استدلال استنتاجی و مثال نقض و اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

● **جاهای خالی را با کلمات مناسب پرکنید.**

۱. عبارت «مربع هر عدد گنگ، عددی گویا است.» نادرست است و مثال نقض آن عدد .... می‌باشد. (خرداد ۹۶)

۲. مثال نقض، مثالی است که نشان می‌دهد نتیجهٔ کلی .... است.

۳. هنگامی از استدلال .... استفاده می‌کنیم که مطمئن هستیم، نتیجهٔ مسئله همیشه درست است.

● **درستی یا نادرستی عبارات درسؤال‌های ۴ تا ۱۶ را مشخص کنید.**

۴. حاصل‌ضرب هرسه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیراست. (خرداد ۱۴۰۰)

۵. مجموع هردو عدد فرد، عددی زوج است. (شهریور ۹۸)

۶. برای هرعدد طبیعی n بزرگ‌تراز ۱، $۲^{n}-۱$ اول است. (شهریور ۹۸ و دی ۹۹)

۷. مربع هرعدد حقیقی مثبت است.

۸. اگراز مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، یک عدد زوج حاصل می‌شود.

۹. با اضافه کردن یک واحد به حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است. (دی ۱۴۰۲)

۱۰. عدد $۳^{n}+۴$ برای هرعدد طبیعی n، عدد اول است.

۱۱. اگر $|a|=|b|$ باشد، آن‌گاه $a=b$

۱۲. برای هردو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (شهریور ۹۹)

۱۳. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$، آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$. (شهریور ۹۹)

۱۴. اگر $a,b\in\mathbb{R}$، داریم: $a<b \Leftrightarrow a^{۲}<b^{۲}$ (شهریور ۹۹)

۱۵. حاصل جمع هردو عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۹۹ و شهریور ۹۹)

۱۶. اگراز مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیراست. (خرداد ۹۹)

۱۷. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است. (دی ۹۵)

۱۸. کدام‌یک از احکام زیردرست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید. (شهریور ۹۳)

آ) توان دوم یک عدد، همیشه از آن عدد بزرگ‌تر است.

ب) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۱۹. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است. (خرداد ۹۳)

۲۰. با استدلال استنتاجی ثابت کنید:

آ) تفاضل مربعات دو عدد فرد، همواره مضرب ۴ است. (دی ۹۰)

ب) اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $x(x+۳)$ مضرب ۱۸ است. (شهریور ۹۱)

۲۱. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع سه عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ است.

۲۲. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر P و $P+۲$، $(P\geq ۵)$ دو عدد اول باشند، آن‌گاه $P+۱$ مضرب ۶ است.

۲۳. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب چهار عدد صحیح متوالی به اضافهٔ یک، مربع کامل است.

۲۴. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n ؛ (مشابه مثال صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

آ) $n^{۲}+۵n-۹$ یک عدد فرد است.

ب) $۲n^{۲}+۶n-۱۲$ عددی زوج است.

۲۵. ثابت کنید برای هرعدد طبیعی زوج n، $n^{2} - 5n + 7$ عددی فرد است. (خرداد ۱۴۰۱)

۲۶. $A = \{2,3,5\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S = \{1,2,3,4,5\}$ است و $n \in S$، اگر $\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{3}$ یک عدد زوج باشد، ثابت کنید $n \in A$ (مشابه تمرین کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۲۷. اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^{2} + b^{2} + 4$ زوج است. (مشابه تمرین کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۲۸. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $8k + 1$ است که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

۲۹. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب هردو عدد به‌صورت $6q + 5$، عددی به‌صورت $6q + 1$ است. $(q \in \mathbb{Z})$

۳۰. آیا هرعدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت؟

● برای اثبات نادرستی هریک از احکام سؤالات ۳۱ تا ۴۲ یک مثال نقض ارائه دهید.

۳۱. مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گنگ، گنگ است.

۳۲. همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد.

۳۳. اگر $(a-1)(b-1) = 0$ آن‌گاه $a = 1 \wedge b = 1$ می‌باشد.

۳۴. برای هرعدد حقیقی مثبت x، داریم $3^{x} \geq 3$.

۳۵. اگر x و y دو عدد گنگ باشند، آن‌گاه $\frac{2x+y}{2x-y}$ نیز عدد گنگ است.

۳۶. به ازای هرعدد طبیعی n، $n^{2} + n + 41$ عددی اول است.

۳۷. اگر a، b و c سه عدد گنگ باشند، آن‌گاه abc^{3} یک عدد گنگ است.

۳۸. محیط دایره همواره عددی گنگ است.

۳۹. مجموع هردو عدد گنگ، عددی گنگ است. (دی ۹۲)

۴۰. برای هرعدد طبیعی n، عدد $3^{n} + 2$ اول است. (دی ۹۲)

۴۱. حاصل‌ضرب هرعدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است. (دی ۱۴۰۲)

۴۲. اگر a، b و c اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است. (خرداد ۹۱)

۴۳. هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

آ برای هر عدد طبیعی n، عدد $2^{n} + 1$ اول است.

ب مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

۴۴. کدام‌یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید. (شهریور ۹۴)

آ اگر $x > 2$، آن‌گاه $x > \frac{5}{2}$

ب اگر x و y هر دو گویا باشند، آن گاه $x + y$ گویا است.

۴۵. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید. (خرداد ۹۰)

آ به ازای هیچ دو عدد اول a و b، عدد $a + b$ اول نیست.

ب اگر x فرد باشد، آن‌گاه $x(x+2)$ هم فرد است.

بستهٔ دوم

برهان خلف و اثبات بازگشتی

صفحه ۵ تا ۸ کتاب درسی

الف اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

همان‌طور که در دو سال گذشته و در هندسه (۱) با اثبات غیرمستقیم آشنا شدید، گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد (فرض خلف)، آن‌گاه با استفاده از روش اثبات مستقیم به یک تناقض می‌رسیم. از این تناقض معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست بوده است و در نتیجه حکم اولیه درست است. این روش استدلال را برهان خلف می‌گوییم.

سؤال نشان دهید که با فرض صحیح بودن n، اگر n^2 فرد باشد، n نیز فرد است.

پاسخ فرض می‌کنیم که n یک عدد صحیح و n^2 عددی فرد است. اگر n عدد فرد نباشد، یک عدد زوج است (فرض خلف). یعنی $n=2k\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$

$$n^2=(2k)^2=4k^2=2(\underbrace{2k^2}_{k'})=2k'$$

n^2 یک عدد صحیح زوج است.

بنابراین با فرض مسئله در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مراحل اثبات به روش برهان خلف

۱ فرض می‌کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد (فرض خلف).

۲ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به‌دست می‌دهد که حقایق دانسته‌شده را نقض می‌کند.

۳ حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست است. بنابراین نتیجهٔ مطلوب درست است.

سؤال ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $x-y$ گنگ است.

پاسخ فرض کنیم که x گویا و y گنگ است. نشان می‌دهیم $x-y$ یک عدد گنگ است.

فرض خلف: فرض کنیم $x-y$ گویا باشد (گنگ نباشد). چون تفاضل دو عدد گویا نیز گویا است، پس $x-y-x\in\mathbb{Q}$ یعنی $-y\in\mathbb{Q}$ و $y\in\mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن y تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

سؤال می‌دانیم $\sqrt{3}$ یک عدد گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ یک عدد گنگ است.

پاسخ فرض می‌کنیم که $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ یک عدد گنگ نباشد، بنابراین یک عدد گویا است (فرض خلف).

$$\text{عدد گویا}\ a=\sqrt{\sqrt{3}+2}\xrightarrow[\text{عددی گویا است.}]{\text{مربع عدد گویا}}a^2=\left(\sqrt{\sqrt{3}+2}\right)^2=\sqrt{3}+2\Rightarrow a^2-2=\sqrt{3}\Rightarrow \text{گویا}=\text{گنگ}$$

چون تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است و طبق فرض مسئله $\sqrt{3}$ گنگ است پس در این تساوی به تناقض می‌رسیم و فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

سؤال با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی، $x\neq 3$ و $x+4y^2=7$ آن‌گاه $y\neq -1$ است. شهریور ۹۳

پاسخ ابتدا حکم مسئله را نقض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $y=-1$ باشد (فرض خلف).

$$y=-1\Rightarrow x+4(-1)^2=7\Rightarrow x=3$$

که با فرض مسئله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم $y\neq -1$ برقرار است.

سؤال با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5}$ عددی گنگ است. خرداد ۹۶

پاسخ فرض کنیم $\sqrt{5}$ گنگ نباشد، یعنی گویا باشد (فرض خلف). در این صورت اعداد صحیح a و b وجود دارند به طوری‌که a و b نسبت به هم اول هستند و داریم:

$$\sqrt{5}=\frac{a}{b}\ ,\ (a,b)=1\ ,\ a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}5=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=5b^2\Rightarrow \text{مضرب ۵ است.}\ a^2\Rightarrow \text{مضرب ۵ است.}\ a$$

$$\Rightarrow a=5k\ ,\ a^2=5b^2\Rightarrow 25k^2=5b^2\Rightarrow b^2=5k^2\Rightarrow \text{مضرب ۵ است.}\ b^2\Rightarrow \text{مضرب ۵ است.}\ b$$

لذا a و b هر دو مضرب ۵ هستند که با فرض اول بودن a و b نسبت به هم، در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست است، یعنی $\sqrt{5}$ عددی گنگ است.

نکته البته توجه کنید که گاهی اوقات برای رد ادعایی فرض می‌کنیم که آن ادعا درست است و با استفاده از دانسته‌ها به مطالب نادرست می‌رسیم، در این حالت نیز از فرض خلف استفاده کرده‌ایم.

ب اثبات بازگشتی ـ گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم. اگر P و Q دو گزارهٔ هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزارهٔ درست است.

برعکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزارهٔ هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود.

به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم، به طوری‌که اگر P، Q و R سه گزاره باشند و $R \Leftrightarrow Q$ و $Q \Leftrightarrow P$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک تکلیف دو گزارهٔ دیگر را معلوم خواهد کرد. با تکرار این کار و با استفاده از درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی و یا فرض مسئله می‌رسیم.

در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن روش بازگشتی هم می‌گویند)، توانایی ارائهٔ ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال $(a+b)^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲+۲ab+b^۲ \geq ۰$ یک ترکیب دو شرطی درست است. ولی $a^۲ = b^۲ \Leftrightarrow a = b$ یک ترکیب دو شرطی درست نیست، زیرا:

$a^۲ = b^۲ \Rightarrow a = \pm b$

سؤال اگر a و b دو عدد مثبت باشند، به روش بازگشتی ثابت کنید:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq ۲$$

پاسخ فرض کنیم که حکم درست است، پس باید به یک رابطهٔ بدیهی برسیم.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq ۲ \xleftrightarrow[ab>۰]{\times ab} a^۲+b^۲ \geq ۲ab \Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲ab \geq ۰ \Leftrightarrow (a-b)^۲ \geq ۰ \quad \text{(بدیهی است.)}$$

آخرین گزاره یعنی $(a-b)^۲ \geq ۰$ همواره برقرار است، به عبارت دیگر حکم، هم‌ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است.

سؤال اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $a^۲+b^۲+c^۲+۳ \geq ۲(a+b+c)$ **خرداد ۹۱**

پاسخ

$$a^۲+b^۲+c^۲+۳ \geq ۲(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۳-۲a-۲b-۲c \geq ۰ \Leftrightarrow (a^۲-۲a+۱)+(b^۲-۲b+۱)+(c^۲-۲c+۱) \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲ \geq ۰$$

نامساوی اخیر بدیهی است.

سؤال اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنید: **خرداد ۹۴**

$$a^۲+۱ \geq b(۲-b)$$

پاسخ نامساوی اخیر بدیهی است.

$$a^۲+۱ \geq b(۲-b) \Leftrightarrow a^۲+۱ \geq ۲b-b^۲ \Leftrightarrow a^۲+(b^۲-۲b+۱) \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲+(b-۱)^۲ \geq ۰$$

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی

برهان خلف و اثبات بازگشتی

● **جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.**

۴۶. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم .... باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های .... و مبتنی بر فرض به یک نتیجهٔ .... با فرض می‌رسیم و از آن‌جا معلوم می‌شود که فرضِ .... بودنِ حکم باطل است و .... حکم ثابت می‌گردد.

۴۷. حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی .... است.

۴۸. حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی .... (گنگ، گویا) است. (دی ۱۴۰۰)

۴۹. اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های .... می‌نامند.

۵۰. میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها .... نیست.

● **درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.**

۵۱. حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۱۴۰۲)

۵۲. حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (شهریور ۱۴۰۲)

۵۳. اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عدد گنگ است. (دی ۱۴۰۱)

۵۴. برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a+b \neq 0$، تساوی $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{a+b}$ برقرار است. (دی ۱۴۰۱)

۵۵. اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارز هستند.

۵۶. اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، آن‌گاه $\alpha-\beta$ گویا است.

۵۷. اگر $y \neq 1$ و $x^3+2y=10$، آن‌گاه $x \neq 2$ است.

۵۸. اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند، آن‌گاه $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}<2$ است.

۵۹. هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطهٔ $x^2+y^2=(x+y)^2$ برقرار باشد. (خرداد ۱۴۰۰)

۶۰. با استفاده از استدلال برهان خلف، ثابت کنید که با فرض صحیح بودن n، اگر n^2 زوج باشد، n نیز زوج است. (شهریور ۹۴)

۶۱. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{5}$ گنگ باشد، $3+\sqrt{5}$ هم گنگ است. (دی ۹۵)

۶۲. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f-g$ در $x=a$ ناپیوسته است. (برهان خلف)
(مشابه تمرین کار در کلاس قسمت (ب) صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۶۳. با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $5n+3$ زوج باشد، آن‌گاه n یک عدد فرد است. (خرداد ۹۱ و مشابه شهریور ۹۰)

۶۴. می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ نیز گنگ می‌باشد. (شهریور ۹۱)

۶۵. ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (شهریور ۱۴۰۰)

۶۶. می‌دانیم $\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ اعداد گنگ هستند، با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ نیز گنگ است. (دی ۹۰)

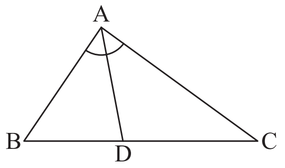
۶۷. با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. (خرداد ۹۹ خارج)

۶۸. a_1، a_2 و a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است. (شهریور ۱۴۰۱)

۶۹. a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2، b_3، b_4 و b_5 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)(a_4-b_4)(a_5-b_5)$ عددی زوج است. (مشابه مثال صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۷۰. ثابت کنید عدد حقیقی مانند x وجود دارد که $x^3<x^2$. (تمرین ۲ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۷۱. اگر n^3 مضرب ۵ باشد، نشان دهید n نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)



۷۲. فرض کنید AD نیمساز زاویهٔ $\widehat{A}$ در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد. اگر $BD \neq DC$، ثابت کنید $AB \neq AC$.

۷۳. اگر x یک عدد گویا و $\sqrt{3}$ یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ یک عدد گنگ است.

۷۴. می‌دانیم $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ اعدادی گنگ هستند، با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ نیز گنگ است.

۷۵. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\log_{۲} ۵$ عددی گنگ است.

۷۶. اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و هم‌چنین $۲\alpha+\beta$ گنگ هستند.

(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۸ کتاب درسی، دی ۹۹ و ۱۴۰۰)

۷۷. با استفاده از برهان خلف و با فرض صحیح بودن n ، نشان دهید اگر $n^۲$ مضربی از ۶ باشد، آن‌گاه n نیز مضربی از ۶ است.

۷۸. با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، ثابت کنید:

آ) از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

ب) اگر سه خط راست d ، d' و d'' دوبه‌دو متمایز باشند و $d \parallel d'$ و $d' \parallel d''$ ، آن‌گاه $d \parallel d''$.

۷۹. آیا اعداد صحیح مانند a و b وجود دارند که $a^۲+b^۲=(a-b)^۲$. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۸۰. با استفاده از اثبات بازگشتی برای هردو عدد حقیقی مثبت x و y نشان دهید $x+y \geq ۲\sqrt{xy}$. (شهریور ۹۵)

۸۱. به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a>۰$ آن‌گاه $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$. (دی ۹۸)

۸۲. اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq ۲$. (خرداد ۹۹)

۸۳. ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ (شهریور ۹۹)

۸۴. ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست. (خرداد ۹۸)

۸۵. با استفاده از استدلال بازگشتی، ثابت کنید حاصل‌ضرب هردو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌ها است.

(شهریور ۹۴ و خرداد ۱۴۰۰)

۸۶. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید $a^۲+b^۲ \geq ۲(b-۱)$. (شهریور ۹۳)

۸۷. آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $(a+b \neq ۰)$, $\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$. (تمرین ۵ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۸۸. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید $ab \leq (\frac{a+b}{۲})^۲$. (خرداد ۹۳)

۸۹. اگر x و y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $x^۲+y^۲+۱ \geq ۲xy-z^۲$. (خرداد ۱۴۰۲)

۹۰. برای هردو عدد حقیقی x و y به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $۲x^۲+۲xy+y^۲ \geq ۴x-۴$ (شهریور ۱۴۰۲)

۹۱. گزارهٔ زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: (دی ۱۴۰۱)

«برای هردو عدد حقیقی x و y داریم: $y^۲+۱ \geq -۲x(y+x+۱)$ »

۹۲. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید $x^۲+y^۲+۱ \geq xy+x+y$. (خرداد ۹۲ و خارج دی ۹۸)

۹۳. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$. (دی ۹۲)

۹۴. اگر x ، y و z سه عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ثابت کنید: $x^۲+y^۲+z^۲ \geq xy+xz+yz$. (شهریور ۹۸)

۹۵. ثابت کنید مجموع مربعات هردو عدد حقیقی همواره از قرینهٔ حاصل‌ضرب آن‌ها کم‌تر نیست. (دی ۱۴۰۲)

۹۶. اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطهٔ $x^۴+y^۴ \geq x^۳y+xy^۳$ را ثابت کنید. (دی ۹۰)

۹۷. با اثبات بازگشتی نشان دهید: $(a,b \in \mathbb{R}^+)$, $\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲} \geq \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ (شهریور ۸۹)

۹۸. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، به روش بازگشتی ثابت کنید $\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}} \geq \frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (خرداد ۸۷)

۹۹. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$y^۲+۱ \geq ۲x(y-x+۱)$$

۱۰۰. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$x^۲+y^۲-xy \geq x+y-۱$$

۱۰۱. اگر x ، y و z سه عدد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x} \geq x+y+z$$

۲

بخش

پاسخ‌نامه

فصل ۱ آشنایی با نظریهٔ اعداد

۱ | عددی مانند $1+\sqrt{3}$ یا $1+\sqrt{2}$

۲ | نادرست

۳ | استنتاجی (اثبات مستقیم)

۴ | درست، زیرا حاصل‌ضرب سه عدد متوالی هم بر عدد ۲ بخش‌پذیر است و هم بر عدد ۳ بخش‌پذیر است، در نتیجه به عدد ۶ بخش‌پذیر است.

۵ | درست، (استدلال استنتاجی)

هر دو عدد فرد $\begin{cases}a=2k+1\\ b=2k'+1\end{cases}\Rightarrow a+b=2k+1+2k'+1$

$=2k+2k'+2=2(\underbrace{k+k'+1}_{k''})=2k''$ عدد زوج

۶ | نادرست، مثال نقض: $2^n-1\xrightarrow{(n=4)}2^4-1=16-1=15$

۱۵ عدد اول نیست.

۷ | نادرست، مثال نقض: $x=0$

۸ | درست

۹ | درست

$(2k)\times(2k+2)+1=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$

۱۰ | نادرست، مثال نقض: $n=4$ که $3^4+4=85$ عدد اول نیست.

۱۱ | نادرست، چون $|a|=|b|\Rightarrow a=\pm b$

۱۲ | نادرست، مثال نقض:

$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=9\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{4+9}\neq\sqrt{4}+\sqrt{9}\Rightarrow\sqrt{13}\neq 5$

۱۳ | درست، زیرا برای a دو حالت ممکن است، رخ دهد:

حالت اول اگر $a=0$ در این حالت حکم برقرار است، زیرا $a\times b=0$

حالت دوم اگر $a\neq 0$ در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab=0$ در a^{-1} داریم:

$ab=0\Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}\times 0\Rightarrow b=0$

بنابراین در دو حالت حکم برقرار است.

۱۴ | نادرست، مثال نقض:

$a<b\Leftrightarrow a^2<b^2$

$\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow -2<1 \not\Leftrightarrow (-2)^2<(1)^2$

۱۵ | نادرست، مثال نقض:

دو عدد گنگ $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow a+b=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$ عددی گویا

۱۶ | درست، $a=2k+1$ را به‌عنوان یک عدد فرد در نظر می‌گیریم و طرفین را به توان ۲ رسانده و از آن یک واحد کم می‌کنیم، حاصل باید مضرب ۸ باشد.

عدد فرد $a=2k+1\Rightarrow a^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1$

$=4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}=4\times 2k'=8k'$

(دقت کنید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی مضرب ۲ است.)

$k(k+1)=2k'$

۱۷ | فرض می‌کنیم که سه عدد زوج متوالی به‌صورت $c=2k+4\ (k\in\mathbb{Z})$ و $b=2k+2$ و $a=2k$ باشد.

$a\times b\times c=(2k)\times(2k+2)\times(2k+4)$

$=2(k)\times 2(k+1)\times 2(k+2)=8\underbrace{(k)(k+1)(k+2)}_{k'}=8k'$

پس حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۸ | آ) این حکم نادرست است. زیرا اگر $x=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $x^2=\frac{1}{4}<x=\frac{1}{2}$

ب) حکم درست است. زیرا اگر فرض کنیم $2k$ و $2k+2$ دو عدد صحیح زوج متوالی باشند، آن‌گاه:

$2k(2k+2)=2k(2(k+1))=4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}=8k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$

۱۹ | فرض کنیم $2k+1$ و $2k'+1$، $(k,k'\in\mathbb{Z})$ دو عدد صحیح فرد باشند، داریم:

$(2k+1)^2+(2k'+1)^2=(4k^2+4k+1)+(4k'^2+4k'+1)$

$=4k^2+4k'^2+4k+4k'+2$

$=2(\underbrace{2k^2+2k'^2+2k+2k'+1}_{k''\in\mathbb{Z}})=2k''$ (عدد زوج)

۲۰ | آ) فرض کنیم دو عدد فرد به‌صورت $2k+1$ و $2k'+1$ باشند $(k,k'\in\mathbb{Z})$. در این‌صورت داریم:

$(2k+1)^2-(2k'+1)^2=(4k^2+4k+1)-(4k'^2+4k'+1)$

$=4(\underbrace{k^2+k-k'^2-k'}_{k''})=4k''\ ,\ k''\in\mathbb{Z}$

ب) فرض کنیم x عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، در این‌صورت:

$x=3k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x(x+3)=3k(3k+3)$

$=9\underbrace{k(k+1)}_{\text{زوج}}=9(2k')=18k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$

۲۱ | فرض کنیم a، $a+1$ و $a+2$ سه عدد صحیح متوالی باشند، داریم:

$a+(a+1)+(a+2)=3a+3=3\underbrace{(a+1)}_{a'\in\mathbb{Z}}=3a'$

بنابراین حاصل‌جمع سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

۲۲ | از هر دو عدد متوالی یکی زوج است. دو عدد P و $P+1$ متوالی می‌باشند و P زوج نمی‌باشد، (زیرا P اول و $P\geq 5$ است.) بنابراین $P+1$ زوج است. از طرفی از هر سه عدد متوالی یکی مضرب ۳ می‌باشد، P و $P+1$ و $P+2$ سه عدد متوالی می‌باشند و چون P و $P+2$ مضرب ۳ نمی‌باشند، لذا $P+1$ مضرب ۳ است. $P+1$ هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ می‌باشد و در نتیجه مضرب ۶ است.

۲۳ | چهار عدد صحیح متوالی را به ترتیب $k, k+1, k+2, k+3$ در نظر می‌گیریم و حاصل‌ضرب آن‌ها به اضافهٔ یک را می‌نویسیم.

$$(k)(k+1)(k+2)(k+3)+1=(k^2+3k)(k^2+3k+2)+1$$

در هم ضرب می‌کنیم. در دو جمله ضرب می‌کنیم.

$$=(k^2+3k)^2+2(k^2+3k)+1 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع کامل}} (k^2+3k+1)^2$$ مربع کامل

۲۴ | آ) برای اثبات دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول n زوج است. به عبارت دیگر $n=2k, (k\in\mathbb{N})$ در این حالت داریم:

$$n^2+5n-9=(2k)^2+5(2k)-9=4k^2+10k-9$$

$$=4k^2+10k-10+1=2(\underbrace{2k^2+5k-5}_{k'})+1=2k'+1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

حالت دوم n فرد است. به عبارت دیگر $n=2k-1, (k\in\mathbb{N})$ در این حالت داریم:

$$n^2+5n-9=(2k-1)^2+5(2k-1)-9$$

$$=4k^2-4k+1+10k-5-9$$

$$=4k^2+6k-14+1=2(\underbrace{2k^2+3k-7}_{k'})+1=2k'+1$$

باز هم حاصل یک عدد فرد است.

در هر دو حالت n^2+5n-9 یک عدد فرد می‌باشد.

ب) **روش اول** برای اثبات دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول n زوج است. به عبارت دیگر $n=2k, (k\in\mathbb{N})$ در این حالت داریم:

$$2n^2+6n-12=2(2k)^2+6(2k)-12$$

$$=8k^2+12k-12=2(\underbrace{4k^2+6k-6}_{k'})=2k'$$

که حاصل یک عدد زوج است.

حالت دوم n فرد است. به عبارت دیگر $n=2k-1, (k\in\mathbb{N})$ در این حالت داریم:

$$2n^2+6n-12=2(2k-1)^2+6(2k-1)-12$$

$$=8k^2-8k+2+12k-6-12$$

$$=8k^2+4k-16=2(\underbrace{4k^2+2k-8}_{k'})=2k'$$

باز هم حاصل یک عدد زوج است.

در هر دو حالت $2n^2+6n-12$ یک عدد زوج می‌باشد.

روش دوم توجه کنید که به‌صورت مستقیم هم می‌توانیم اثبات کنیم، برای این کار داریم:

$$2n^2+6n-12=2(\underbrace{n^2+3n-6}_{k})=2k\Rightarrow$$ همواره زوج است.

۲۵ | عدد زوج $n=2k (k\in\mathbb{Z})$ را در نظر می‌گیریم.

$$n=2k\Rightarrow n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7$$

$$=4k^2-10k+6+1=2(\underbrace{2k^2-5k+3}_{k'})+1=2k'+1$$

در نتیجه n^2-5n+7 عددی فرد است.

۲۶ | هر یک از حالت‌های اعداد مجموعهٔ S را بررسی می‌کنیم:

$\frac{n^2(n+1)^2}{3}$

$\xrightarrow{n=1} \frac{1^2(1+1)^2}{3}=\frac{4}{3}$ زوج نیست.

$\xrightarrow{n=2} \frac{2^2(2+1)^2}{3}=\frac{4\times 9}{3}=4\times 3=12$ زوج است.

$\xrightarrow{n=3} \frac{3^2(3+1)^2}{3}=\frac{9\times 16}{3}=3\times 16=48$ زوج است.

$\xrightarrow{n=4} \frac{4^2(4+1)^2}{3}=\frac{16\times 25}{3}=\frac{400}{3}$ زوج نیست.

$\xrightarrow{n=5} \frac{5^2(5+1)^2}{3}=\frac{25\times 36}{3}=25\times 12=300$ زوج است.

بنابراین حاصل به ازای اعداد مجموعهٔ A زوج است و $n\in A$ می‌باشد.

۲۷ | a و b دو عدد صحیح است و چون ab عددی فرد است، بنابراین هر دو عدد a و b باید فرد باشد. فرض کنیم.

$$a=2k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$b=2k'+1 \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$a^2+b^2+4=(2k+1)^2+(2k'+1)^2+4$$

$$=4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1+4$$

$$=4k^2+4k+4k'^2+4k'+6=2(\underbrace{2k^2+2k+2k'^2+2k'+3}_{k''})=2k''$$

بنابراین a^2+b^2+4 یک عدد زوج است.

۲۸ | فرض کنیم a یک عدد صحیح فرد باشد، در این‌صورت:

$$a=2m+1\ ,\ m\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4m(m+1)+1 \quad (1)$$

حاصل‌ضرب $m(m+1)$ دو عدد صحیح متوالی است، بنابراین عددی زوج است، پس:

$$m(m+1)=2k \xrightarrow{(1)} a^2=4(2k)+1=8k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۲۹ | فرض کنیم $6q+5$ و $6q'+5$ دو عدد دلخواه باشند، در این‌صورت:

$$(6q+5)(6q'+5)=36qq'+30q+30q'+25$$

$$=(36qq'+30q+30q'+24)+1$$

$$=6(\underbrace{6qq'+5q+5q'+4}_{k})+1=6k+1$$

درواقع ثابت کرده‌ایم که اگر حاصل‌ضرب دو عددی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۶ برابر ۵ است را بر ۶ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر ۱ می‌شود.

۳۰ | بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع اعداد متوالی نوشت. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$15=1+2+3+4+5\ ,\ 74=17+18+19+20$$

$$100=18+19+20+21+22$$

اما عدد ۸ را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد متوالی نوشت. در واقع عدد ۸ مثال نقضی است که نشان می‌دهد هر عدد طبیعی را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد متوالی نوشت.

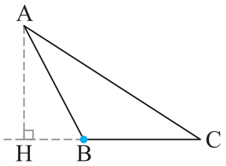
۳۱ | اگر مثال نقض را $y=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$x+y=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$$

$$xy=(-\sqrt{2})(\sqrt{2})=-2\in\mathbb{Q}\ ,\ \frac{x}{y}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1\in\mathbb{Q}$$

و اگر $x=1+\sqrt{2}$ و $y=\sqrt{2}$ آن‌گاه $x-y=1+\sqrt{2}-\sqrt{2}=1\in\mathbb{Q}$

۳۲ | مثال نقض: در مثلث منفرجه‌الزاویهٔ مقابل، ارتفاع AH خارج مثلث واقع می‌شود:



۳۳ | نادرست. $a=1$ یا $b=1$ درست است، زیرا:

$$(a-1)(b-1)=0\Rightarrow a-1=0 \text{ یا } b-1=0\Rightarrow a=1 \text{ یا } b=1$$

پس به عنوان مثال نقض اگر $a=1$ و $b=4$ باشد، آن‌گاه:

$$(a-1)(b-1)=0$$

۳۴ | مثال نقض $x=\frac{1}{2}$، پس:

$$3^{\frac{1}{2}}\not\geq 3\Rightarrow \sqrt{3}\not\geq 3$$

۳۵ | مثال نقض $x=\sqrt{2}$ و $y=-2\sqrt{2}$،

$$\frac{2x+y}{2x-y}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=\frac{0}{4\sqrt{2}}=0\in\mathbb{Q}$$

۳۶ | با قرار دادن $n=41$، عدد n^2+n+41 بر ۴۱ بخش‌پذیر است زیرا $41^2+41+41=41(41+1+1)=41\times 43$ (مثال نقض)، بنابراین عدد غیراول می‌باشد. (توجه کنید تمام اعداد طبیعی مضرب ۴۱، مثال نقض خواهند بود.)

۳۷ | مثال نقض: اگر $a=\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{8}$ و $c=\sqrt[3]{3}$ باشد، آن‌گاه:

$$abc^3=(\sqrt{2})(\sqrt{8})(\sqrt[3]{3})^3=\sqrt{16}\times 3=4\times 3=12\in\mathbb{Q}$$

۳۸ | مثال نقض: اگر $R=\frac{1}{\pi}$ (شعاع دایره) قرار دهیم، آن‌گاه:

$$\text{محیط دایره}=2\pi R=2\pi\left(\frac{1}{\pi}\right)=2\in\mathbb{Q}$$

۳۹ | اگر $x=\sqrt{2}$ و $y=-\sqrt{2}$، آن‌گاه: $x+y=0\in\mathbb{Q}$

۴۰ | اگر $n=5$، آن‌گاه عدد $3^n+2=3^5+2=245$ یک عدد مرکب است (۲۴۵ بر ۵ بخش‌پذیر است.)

۴۱ | با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل‌ضرب صفر است که عدد صفر گویا است.

۴۲ | اگر $a=c=2$ و $b=1$، آن‌گاه $b\sqrt{ac}=2$ یک عدد گویا است.

۴۳ | آ) نادرست است. زیرا طبق مثال نقض $n=3$ عدد $2^n+1=2^3+1=9$ عددی اول نیست.

ب) درست است، عدد $a=2k+1$ را یک عدد فرد در نظر می‌گیریم.

$$a=2k+1\Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$$

$$=2(\underbrace{2k^2+2k}_{k'})+1\Rightarrow a^2=2k'+1$$

مربع هر عدد فرد، عددی فرداست.

۴۴ | آ) نادرست است. مثال نقض $x=۲/۱$، در فرض صدق می‌کند ولی در حکم صدق نمی‌کند.

ب) درست است، بنابراین با استفاده از اثبات مستقیم، حکم را ثابت می‌کنیم.

فرض: $x=\frac{a}{b}\ ,\ y=\frac{c}{d}\ (a,b,c,d\in\mathbb{Z}\ ,\ b,d\neq 0)$

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\in\mathbb{Q}$$

صورت و مخرج کسر عددی صحیح است و $bd\neq 0$ در نتیجه $x+y$ گویا است.

۴۵ | آ) نادرست است، زیرا اگر $a=3$ و $b=2$، آن‌گاه $a+b=5$ عدد اول است.

ب) درست است، زیرا اگر $x=2k+1$ (عدد فرد) باشد که در آن $k\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه:

$$x(x+2)=(2k+1)(2k+3)=4k^2+\underbrace{6k+2k}_{8k}+3$$

$$=2(\underbrace{2k^2+4k+1}_{k'})+1=2k'+1$$

بنابراین $x(x+2)$ یک عدد فرد است.

۴۶ | آ) طبق تعریف برهان خلف، در جاهای خالی به ترتیب داریم:
نادرست - درست - غیرممکن (متضاد) - نادرست - درستی

۴۷ | طبق برهان خلف، ثابت می‌شود که حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی **گنگ** است.

اثبات: فرض کنیم که a یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $a+x$ یک عدد گنگ است. اگر $a+x$ گنگ نباشد (فرض خلف)، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $a+x$ و a باید عددی گویا باشد، یعنی:

$$\cancel{a}+x-\cancel{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$$

که $x\in\mathbb{Q}$ با فرض مسأله تناقض دارد و در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۴۸ | طبق برهان خلف، ثابت می‌شود که حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی **گنگ** است.

اثبات: فرض کنیم a یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی ax عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه‌بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویا است. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{\cancel{a}}(\cancel{a}x)\in\mathbb{Q}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$$

که با فرض در تناقض است.

۴۹ | طبق تعریف اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (**هم‌ارزش**) می‌نامند.

۵۰ | طبق اثبات بازگشتی، ثابت می‌شود که میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها **کم‌تر** نیست.

اثبات: اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

پس:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

این گزاره همیشه درست است.

---

۵۱ | درست، زیرا ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ می‌باشد.

---

۵۲ | نادرست، زیرا اگر عدد گویا را صفر در نظر بگیریم در هر عدد گنگ برابر صفر است که یک عدد گویا می‌باشد.

---

۵۳ | درست، اثبات با استفاده از برهان خلف

---

۵۴ | نادرست، زیرا به ازای $a=1$ و $b=2$ برقرار نیست.

---

۵۵ | آ) درست است، زیرا اگر n زوج باشد، آن‌گاه n^2 زوج است و اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n زوج است.

زوج $n=2k \Rightarrow n^2=(2k)^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)}_{k'}=2k'$

در نتیجه n^2 زوج است.

برای اثبات عکس قضیهٔ شرطی یعنی اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n زوج است از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

برهان خلف: فرض می‌کنیم که n زوج نباشد، پس n فرد است.

فرد $n=2k+1 \Rightarrow n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

$$=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{k'}+1=2k'+1$$

با فرض تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. بنابراین زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارز هستند.

---

۵۶ | نادرست است. زیرا می‌توانیم برای رد کردن این حکم از مثال نقض استفاده کنیم.

$$\alpha=1+\sqrt{2}\ ,\ \beta=1-\sqrt{2}$$

گویا $\Rightarrow \alpha+\beta=1+\cancel{\sqrt{2}}+1-\cancel{\sqrt{2}}=2\in\mathbb{Q}$

ولی $\alpha-\beta=1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})=\cancel{1}+\sqrt{2}-\cancel{1}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

---

۵۷ | درست است، زیرا طبق برهان خلف می‌توانیم ثابت کنیم.

فرض می‌کنیم که $x=2$ (فرض خلف).

$$x^3+2y=10 \xrightarrow{x=2} 2^3+2y=10 \Rightarrow 2y=10-8$$

$$\Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{2}=1$$

که با فرض مسأله در تناقض است. فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

---

۵۸ | نادرست است، زیرا طبق اثبات بازگشتی داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}<2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}<2 \Leftrightarrow x^2+y^2<2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2<0$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2<0$ به ازای هیچ x و y برقرار نیست.

---

۵۹ | نادرست است. زیرا:

$$x^2+y^2=(x+y)^2 \Rightarrow x^2+y^2=x^2+2xy+y^2$$

$$\Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ y=0 \end{cases}$$

پس اعداد صحیح مانند $x=0$ و $y=2$ وجود دارد که رابطه برقرار است.

---

۶۰ | ابتدا حکم مسأله را نقیض می‌کنیم. فرض کنیم n فرد باشد، $n=2k+1\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$ یک عدد صحیح فرد است (فرض خلف).

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{k'}+1=2k'+1$$

n^2 یک عدد فرد می‌شود که با فرض مسأله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

---

۶۱ | ابتدا حکم مسأله را نقیض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $3+\sqrt{5}$ گنگ نباشد یعنی $3+\sqrt{5}$ گویا است (فرض خلف). پس آن را به‌صورت کسر گویای زیر در نظر می‌گیریم.

$$3+\sqrt{5}=\frac{a}{b}\ ,\ (b\neq 0) \Rightarrow \underbrace{\sqrt{5}}_{\text{گنگ}}=\frac{a}{b}-3=\underbrace{\frac{a-3b}{b}}_{\text{گویا}}\in\mathbb{Q}$$

به تناقض در یک تساوی رسیدیم، بنابراین فرض خلف باطل و حکم که $3+\sqrt{5}$ عدد گنگ است، ثابت می‌شود.

---

۶۲ | ابتدا حکم مسأله را نقیض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $h=f-g$ در $x=a$ پیوسته است (فرض خلف).

$$(f-g)(x)=h(x)$$

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=h(x) \Rightarrow g(x)=f(x)-h(x)$$

تفاضل دو تابع پیوسته نیز پیوسته است. پس:

$$\underbrace{g(x)}_{\text{در } x=a \text{ ناپیوسته}}=\underbrace{f(x)-h(x)}_{\text{در } x=a \text{ پیوسته}}$$

به تناقض در تساوی رسیدیم بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

---

۶۳ | فرض کنیم n فرد نباشد، پس n یک عدد زوج است (فرض خلف)، داریم:

$$n=2k\ ,\ k\in\mathbb{N} \Rightarrow 5n+3=5(2k)+3=10k+3$$

$$=2\underbrace{(5k+1)}_{k'}+1=2k'+1\ ,\ k'\in\mathbb{N}$$

یعنی $5n+3$ یک عدد فرد است که با فرض در تناقض است، لذا فرض خلف باطل و حکم صحیح است.

ویراست جدید

منطبق بر امتحان‌های «خرداد ۱۴۰۲»

گاج

پاسخ تمرین‌های کتاب درسی

ریاضیات گسسته

فرمول بیست

هدیه رایگان

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.
از آن‌جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان
حاضر شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

فهرست

فصل ۱
آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱ استدلال ریاضی

کار در کلاس | ص ۳ کتاب درسی

هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

فرض می‌کنیم $a=2k+1$ و $b=2k'+1$ اعداد فرد باشند، پس:

$$a+b=2k+1+2k'+1=2k+2k'+2=2(\underbrace{k+k'+1}_{q})=2q$$

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$x=1$ و $y=3$؛

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=\sqrt{1+3}=2\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1}+\sqrt{3}\simeq 2/7\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}\neq\sqrt{x+y}$$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.

$n=4$ ، در این صورت 2^n-1 برابر ۱۵ می‌شود که عددی اول نیست.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

اثبات فرض کنید $x=\frac{a}{b}$ و $y=\frac{c}{d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ و $b,d\neq 0)$ دو عدد گویا باشند، در این صورت داریم:

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

می‌دانیم مجموع و حاصل‌ضرب اعداد صحیح، عددی صحیح است پس $ad+bc$ و bd صحیح هستند و از طرفی چون $d\neq 0$ و b پس $bd\neq 0$ است و این یعنی $\frac{ad+bc}{bd}$ عددی گویا است.

ث) اگر برای هر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم، $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$.

$A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ، $B=\{2,5,6,7\}$ و $C=\{3,5,6,7\}$

در این‌صورت $A\cup B=A\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ، اما B و C مساوی نیستند.

ج) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

فرض می‌کنیم دو عدد طبیعی متوالی n و $n+1$ باشند، پس:

$$k=n(n+1)\Rightarrow 4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

کاردرکلاس | ص ۵ کتاب درسی

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ زوج است.

ابتدا حالات مختلف برای a و b را در نظر می‌گیریم تا ببینیم ab در چه صورتی فرد می‌شود:

$$a=۲k, b=۲k' \Rightarrow ab=۴kk'=۲\underbrace{(۲kk')}_{q}=۲q \quad \times$$

$$a=۲k\ ,\ b=۲k'+۱ \Rightarrow ab=۴kk'+۲k=۲\underbrace{(۲kk'+k)}_{q}=۲q \quad \times$$

$$a=۲k+۱\ ,\ b=۲k' \Rightarrow ab=۴kk'+۲k'=۲\underbrace{(۲kk'+k')}_{q}=۲q \quad \times$$

$$a=۲k+۱, b=۲k'+۱ \Rightarrow ab=۴kk'+۲k+۲k'+۱=۲\underbrace{(۲kk'+k+k')}_{q}+۱=۲q+۱ \quad \checkmark$$

بنابراین a و b باید فرد باشند، پس:

$$a^۲+b^۲=(۲k+۱)^۲+(۲k'+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱+۴k'^۲+۴k'+۱$$

$$=۴k^۲+۴k'^۲+۴k+۴k'+۲=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k'^۲+۲k+۲k'+۱)}_{q}=۲q$$

ب) $A=\{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,\dots,۶\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n\in A$.

برای مقادیر مختلف n داریم:

$$n=۱ \Rightarrow \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۱\times۴}{۴}=۱ \quad \times$$

$$n=۲ \Rightarrow \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۴\times۹}{۴}=۹ \quad \times$$

$$n=۳ \Rightarrow \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۹\times۱۶}{۴}=۳۶ \quad \checkmark$$

$$n=۴ \Rightarrow \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۱۶\times۲۵}{۴}=۱۰۰ \quad \checkmark$$

$$n=۵ \Rightarrow \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۲۵\times۳۶}{۴}=۲۲۵ \quad \times$$

$$n=۶ \Rightarrow \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۳۶\times۴۹}{۴}=۳۴۱ \quad \times$$

فقط به ازای $n=۳$ و $n=۴$ حاصل $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ عددی زوج است.

مثال ✤ ص ۶ کتاب درسی

اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $a_۱-b_۱$، $a_۲-b_۲$ و $a_۳-b_۳$ هم باید فرد باشند (چرا؟)

زیرا حاصل‌ضرب چند عدد صحیح، زمانی فرد است که تک‌تک آن اعداد فرد باشند.

کار در کلاس | ص ۶ کتاب درسی

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد، پس عددی گویا است (فرض خلف). با توجه به اینکه $\frac{1}{x}$ غیرصفر است و معکوس هر عدد گویای غیرصفر عددی گویاست، $x = \frac{x}{1}$ گویا است و این با فرض گنگ بودن x در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

فرض می‌کنیم تابع $f + g$ در $x = a$ پیوسته باشد (فرض خلف)، می‌دانیم تفاضل دو تابع پیوسته در $x = a$ پیوسته است، پس $(f+g) - f = g$ در $x = a$ پیوسته است. و پیوسته بودن g در $x = a$ با فرض ناپیوسته بودن g در $x = a$ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال ✤ ص ۶ کتاب درسی

ترکیب دوشرطی $(a , b \in \mathbb{R})$، $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$ درست است ولی ترکیب دوشرطی $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ درست نیست (چرا؟)

از $a = b$، واضح است که می‌توان نتیجه گرفت که $a^3 = b^3$ است. حال باید از $a^3 = b^3$ نتیجه بگیریم که $a = b$ است:

$$a^3 = b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 = 0 \Rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

دقت کنید اگر $a^2 + ab + b^2$ را یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب a در نظر بگیریم، دلتای معادله منفی است، پس هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. $\Delta = b^2 - 4(1)(b^2) = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$

از $a = b$ می‌توان نتیجه گرفت $a^2 = b^2$ است و از $a^2 = b^2$ نمی‌توان گفت که لزوماً $a = b$ است، زیرا $2^2 = (-2)^2$ است در حالی‌که $2 \neq -2$ می‌باشد.

کار در کلاس | ص ۷ کتاب درسی

اگر $a , b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

نادرست، از $a < b$ لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت $a^2 < b^2$. مثلاً $-4 < 2$ است در حالی‌که $(-4)^2 = 16$ از $2^2 = 4$ کوچک‌تر نیست.

ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

درست، از $a < b$ طبق ویژگی نامساوی‌ها می‌توان نتیجه گرفت $a^3 < b^3$ است. حال از $a^3 < b^3$ باید نتیجه بگیریم $a < b$ است:

$$a^3 < b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 < 0 \Rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) < 0$$

اگر عبارت $a^2 + ab + b^2$ را یک عبارت درجه دوم برحسب a در نظر بگیریم، ضریب a^2 مثبت و دلتای عبارت منفی است $(\Delta = -3b^2)$، پس همواره مثبت است و داریم:

$$a - b < 0 \Rightarrow a < b$$

کاردرکلاس | ص ۸ کتاب درسی

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟ بله. ابتدا نشان می‌دهیم اگر n زوج باشد، n^2 نیز زوج است. داریم:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{q} \Rightarrow n^2 = 2q$$

حال نشان می‌دهیم اگر n^2 زوج باشد، n نیز زوج است. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم n زوج نباشد، بنابراین فرد است. (فرض خلف)، پس:

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{q}+1 = 2q+1$$

یعنی n^2 فرد است که در تناقض با زوج بودن n^2 است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) آیا دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند؟

۱- نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۲- فاصلهٔ نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

بله، طبق ویژگی عمودمنصف که در هندسه خوانده‌ایم، دو گزاره هم‌ارزند.

تمرین | ص ۸ کتاب درسی

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید.

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (همواره درست است.)

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2) \geq 0$$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-y)^2}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(x-z)^2}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(y-z)^2}_{\text{نامنفی}} \geq 0$ (همواره درست است.)

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+1-xy-x-y \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) \geq 0$$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-y)^2}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(x-1)^2}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{(y-1)^2}_{\text{نامنفی}} \geq 0$ (همواره درست است.)

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$.

$x=\frac{1}{2}$ ، $x=-2$ و ... .

با توجه به رابطهٔ بازگشتی زیر، به ازای هر $x<1$ که مخالف صفر باشد، نامساوی $x^3<x^2$ برقرار است.

$$x^3<x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2<0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2}_{\text{نامنفی}}(x-1)<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$$

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

الف) فرض می‌کنیم $\alpha-\beta$ گنگ نباشد، بنابراین گویا است (فرض خلف). می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است پس $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=2\beta$ عددی گویا و در نتیجه β عددی گویا است که در تناقض با فرض گنگ بودن β است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) فرض می‌کنیم $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد، بنابراین گویا است (فرض خلف). می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است پس $(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\beta$ عددی گویا است که در تناقض با فرض گنگ بودن β است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که: $x^2+y^2=(x+y)^2$

$$x^2+y^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow 2xy=0 \Leftrightarrow xy=0 \Leftrightarrow (x=0)\vee(y=0)$$

بنابراین تساوی زمانی برقرار است که حداقل یکی از دو عدد x یا y صفر باشد. مانند: $(x=0, y=1)$ یا $(x=-1, y=0)$ یا...

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $(a+b\neq 0)$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow ab=(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow ab=a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow a^2+ab+b^2=0$$

از قبل می‌دانیم که $a^2+ab+b^2\geq 0$ است و تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $a=b=0$ باشد و چون $a, b\neq 0$ در نتیجه $a^2+ab+b^2=0$ جواب ندارد. پس هیچ دو عددی مانند a و b با شرایط مسئله وجود ندارد که $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ باشد.

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

فرض می‌کنیم عدد فرد، $2k+1$ باشد، پس:

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(\underbrace{2k^2+2k}_{q})+1=2q+1 \ (\text{عددی فرد})$$

$$(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1=2(\underbrace{4k^3+6k^2+3k}_{q})+1=2q+1 \ (\text{عددی فرد})$$

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

اثبات فرض می‌کنیم $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ پنج عدد طبیعی متوالی باشند، پس:

$$\text{میانگین}=\frac{(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)}{5}=\frac{5n}{5}=n$$

همان‌طور که دیده می‌شود، میانگین همان عدد وسطی است.