گاج
انتشارات بین‌المللی

مجموعه کتاب‌های آی‌کیو قرن جدید

• ویژه کنکور ۱۴۰۴ •

IQ

جامع کنکور

ریاضیات تجربی

دهم | یازدهم | دوازدهم

+ کنکور ۱۴۰۳

مطابق با سبک جدید سؤالات کنکور

مؤلف: مهندس سجاد عظمتی

مجموعه کتاب های **فرمول بیست**

ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی

9 786220 308683

مقدمه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

برای تویی که میخوای آینده‌ات رو خودت بسازی...

برای اینکه بتونی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

سطح‌بندی تست‌ها

تست‌های آبی

در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبه. تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.

تست‌های قرمز

تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای تسلط بر زوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.

تست‌های چالشی

IQ

بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و میخوای بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های IQ بری. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه.

دقت کنید! تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.

تست‌های جنجالی

TNT

این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های TNT بسیار سخت، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشد. سؤالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم با دیدن این کتاب لذت ببرن.

معرفی ویژگی‌های کتاب

۱

سرنخ

تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت سرنخ دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرنخ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی

۲

هایلایت

درسنامه‌های کاربردی

درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب، هایلایت کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن این‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جداول و کادربندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.

۳

یه جوره دیگه !

طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنن و در کنکورهای جدید ازش استفاده میکنن! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.

۴

روش سریع‌تر

در حل برخی از سوال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از روش سریع‌تر سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبُر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.

۵

دام تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمن روی مباحث مسلطی یا نه، میلن در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنن که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون دام تستی براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.

تشکر و قدردانی:

- تشکر ویژه می‌کنیم از اساتید عزیزی که در مراحل تالیف، همراه ما بودن به خصوص آقای علی احمدی قزل‌دشت و آقای نریمان فتح‌اللهی که تک‌تک تست‌ها رو با حوصله بررسی کردن. و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنیم از اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشون، باعث شدند کتاب بهتری تالیف بشه.
- اساتید: معین کرمی، مجید رفعتی، آرش عمید، علی مقدم‌نیا، محمد مصطفی ابراهیمی، عزیزالله علی اصغری، امید شیری‌نژاد.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی

sajad.azemati

فهرست

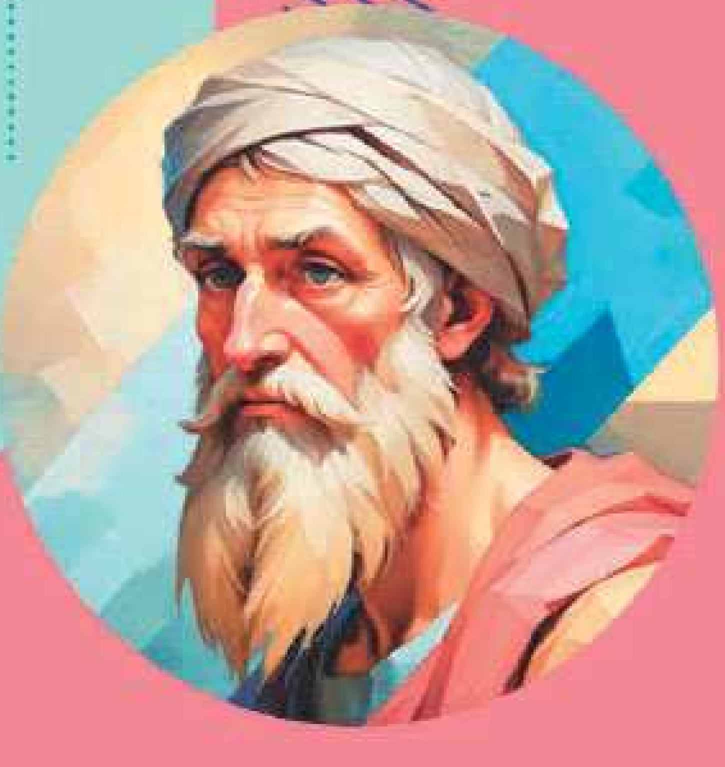
. فصل اول .

ریاضیات تجربی جامع

تابع

Chapter One

Function



Pythagoras

فصل اول

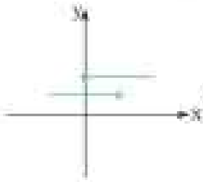
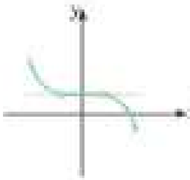
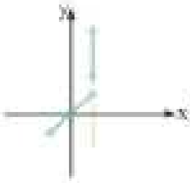
۱ درس اول: مفاهیم تابع

CHAPTER 1

شناسایی تابع

سلام، به اولین بخش تابع خوش اومدید. بخش اول رو با شناسایی تابع شروع می‌کنیم.

۱ کدام نمودار زیر مربوط به یک تابع است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

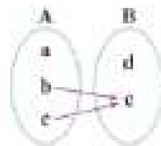
۲ اگر رابطهٔ $f = \{(۵, a - ۲b), (۴, a + b), (۴, -۲), (۵, ۴a - b)\}$ نمایش یک تابع باشد $a - b$ کدام است؟

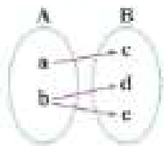
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

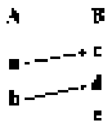
۳ اگر رابطهٔ $f = \{(۱, ۴), (۲, ۴), (۳, ۵), (۴, ۹), (k+۱, (k+۲)^۲)\}$ یک تابع نباشد، مجموع مقادیر k کدام است؟

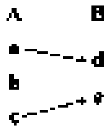
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ چه تعداد از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع نیست؟

الف) 

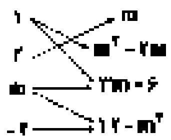
ب) 

پ) 

ت) 

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ به ازای چند مقدار قابل قبول m، نمودار پیکانی مقابل تابع خواهد بود؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۶ چه تعداد از موارد زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت ریشهٔ چهارم آن را نسبت دهد.

ب) رابطه‌ای که هر عدد را به عددی نسبت می‌دهد که ۳ واحد با آن اختلاف دارد.

پ) رابطه‌ای که به هر عدد فرد اول، مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت دهد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷ کدام رابطهٔ زیر تابع نیست؟

۱) $y^۲ + |x| = ۰$ ۲) $|x + ۳| + |y - ۱| = ۰$ ۳) $[x] + [y] = ۰$ ۴) $y = \sqrt{[x]^۲ + ۲[x] + ۱}$

۸ با فرض $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ چند تابع می‌توان از A به B نوشت که شامل زوج مرتب $(c,4)$ باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۴۸

۹ اگر رابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x^2+mx & ; x\geq 1\\ \dfrac{3m^2-2}{x} & ; x\leq 1\end{cases}$ تابع باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۱۰ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2a & |x|\leq 1\\ ax^2+5 & |x|\geq 1\end{cases}$، ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) ۴۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۵ ۴) ۱۴

۱۱ اگر رابطهٔ $y=\begin{cases}ax+b & ; x\leq 2\\ bx^2+a & ; 2\leq x\leq 3\\ (a-b)x+8 & ; x\geq 3\end{cases}$ نشان‌دهندهٔ یک تابع باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{17}{3}$ ۴) $\frac{15}{7}$

۲ مقدار تابع

توی تست‌های زیر می‌خوایم مقدار تابع رو در نقاط مختلف پیدا کنیم.

۱۲ در تابع $f(x+3)=3x+14$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) ۲۰

۱۳ اگر $2f(x+4)=f(4)+x^2+5(x+1)+2$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) -3 ۴) ۱

۱۴ اگر $g(3x+1)=\begin{cases}x-2 & ; x\geq 2\\ x^2 & ; x<2\end{cases}$ باشد، مقدار $g(4)+g(10)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵ اگر $f(2x-1)=3x-a$ و $f(3)+f(-3)=9$ باشد، مقدار $f(a+2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶ اگر $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$ باشد، مقدار $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{3}$ ۲) $2+\sqrt{3}$ ۳) $3+\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

۱۷ اگر $f(x)=\sqrt{x^2-6x+14}$ باشد، مقدار $f(3+\sqrt[4]{24})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}+1$ ۲) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{4}-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{4}-1$

۱۸ اگر $f(x)+3f(\frac{1}{x})=1-x^2$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{21}{32}$

۱۹ اگر $(x+2)f(x)-3xf(x+2)=4x^2-mx+3m-1$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{4}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{25}{4}$ ۴) ۶

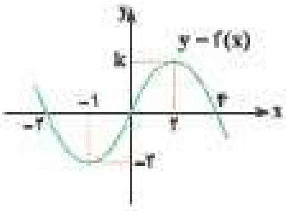
۲۰ اگر $f(x)=\begin{cases}4-f(x) & ; x\geq 1\\ x+1 & ; x<1\end{cases}$ باشد، مقدار $f(1+f(-1))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱ تابع $f(x)=\begin{cases}3x^2-12 & ; \ x<0\\ 2x-4 & ; \ 0\le x<3\\ x^2-x-12 & ; \ x\ge 3\end{cases}$ را در نظر بگیرید. مجموع طول نقاط برخورد تابع f و محور x ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲ نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x)=\begin{cases}1+f(x) & ; \ x>0\\ f^2(x) & ; \ x\le 0\end{cases}$ و $g(-1)+g(2)=14$ باشد، مقدار k کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

حالا می‌خواهیم بریم برای مساحت، محیط، حجم، فاصله، ... یک تابع بنویسیم.

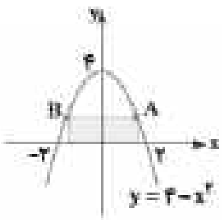
۲۳ کدام تابع مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را برحسب ارتفاع آن بیان می‌کند؟

۱) $S=\frac{\sqrt{3}}{4}h^2$ ۲) $S=\frac{\sqrt{3}}{2}h^2$ ۳) $S=\frac{\sqrt{3}}{3}h^2$ ۴) $S=\frac{\sqrt{2}}{2}h^2$

۲۴ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی که مساحت مستطیل (S) را برحسب محیط آن (P) بیان کند، کدام است؟

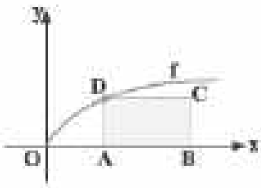
۱) $S(P)=\frac{P^2-36}{16}$ ۲) $S(P)=P^2+36$ ۳) $S(P)=\frac{P^2-36}{4}$ ۴) $S(P)=\frac{P^2+36}{16}$

۲۵ در شکل مقابل مستطیلی که دو رأس آن روی نمودار تابع $y=4-x^2$ و دو رأس دیگر آن روی محور x ها قرار دارد، مشاهده می‌شود. مساحت مستطیل رنگی برحسب تابعی از x کدام است؟



۱) $f(x)=4x-x^3$
۲) $f(x)=8x-2x^3$
۳) $f(x)=4x-x^2$
۴) $f(x)=8x-2x^2$

۲۶ مطابق شکل، رأس $A(x,0)$ و $B(6,0)$ از مستطیل ABCD روی محور x ها و رأس D روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ قرار دارد. مساحت این مستطیل برحسب طول نقطهٔ A کدام است؟

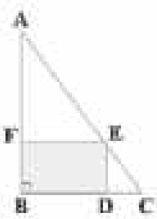


۱) $S(x)=6-\sqrt{x}$
۲) $S(x)=6\sqrt{x}-x$
۳) $S(x)=6\sqrt{x}-x\sqrt{x}$
۴) $S(x)=6x-\sqrt{x}$

۲۷ مطابق شکل استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره به شعاع x در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم 80π متر باشد، مساحت استادیوم برحسب تابعی از x کدام است؟

۱) $\pi x(80-x)$ ۲) $\pi x(40-x)$
۳) $2\pi x(80-x)$ ۴) $2\pi x(40-x)$

۲۸ در شکل مقابل رأس E از مستطیل BDEF روی وتر AC قرار دارد. اگر $AB=8$ و $BC=4$ و $BF=x$ باشد، کدام تابع مساحت مستطیل BDEF را برحسب x بیان می‌کند؟



۱) $f(x)=\frac{x^2}{2}-4x$ ۲) $f(x)=-\frac{x^2}{2}+4x$
۳) $f(x)=-\frac{x^2}{4}+2x$ ۴) $f(x)=-\frac{x^2}{2}+8x$

۲ دامنه و برد تابع

۲۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+mx+n}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ است. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 3 ۴) -3

۳۰ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{3x^2+(2m-n)x+m+n}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-3\}$ است. مقدار mn کدام است؟

۱) 27 ۲) 180 ۳) 150 ۴) 160

۳۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-ax-2}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{1,b\}$ است. مقدار $\dfrac{b}{a}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۲ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^2-|x|+2}{||x|-1|-2}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۳ اگر $f(x)=\begin{cases}1 & ; & x>0\\ 0 & ; & x=0\\ -1 & ; & x<0\end{cases}$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|-f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۵ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{16-2x}+\sqrt[3]{x-5}$ به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-b|<a$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۳۶ در تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{6-x}}{\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-3}}}$ مجموع همهٔ عضوهای صحیح دامنه کدام است؟

۱) 18 ۲) 16 ۳) 14 ۴) 12

۳۷ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{|x+2|-|x+5|}}$ شامل چند عدد صحیح منفی نیست؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۸ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x\le -1$ ۲) $x\ge -1$ ۳) $x\le 1$ ۴) $x\ge 1$

۳۹ تابع $f(x)=\sqrt{3x-|x^2-4x|}$ را در نظر بگیرید. بزرگ‌ترین عضو طبیعی دامنه، چند برابر کوچک‌ترین عضو طبیعی آن است؟

۱) $3/5$ ۲) 7 ۳) $-3/5$ ۴) -7

۴۰ به ازای چند مقدار صحیح m دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^2-(m+1)x+2-m}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) 7 ۲) 8 ۳) 9 ۴) بی‌شمار

۴۱ دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ ۲) $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ ۳) $[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$ ۴) $[\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}]$

۴۲ اگر $f(x)=2^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)-f(\frac{1}{x})}$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۲) $[-1,0)\cup(0,1]$
۳) $[-1,0)\cup[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

۴۳ اگر $g(x)=\begin{cases}1 & ; \ x>0 \\ 0 & ; \ x=0 \\ -1 & ; \ x<0\end{cases}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{4^x-2^{x-1}}}{1-g(x)}$ کدام است؟

۱) $[-1,0)$ ۲) $[-1,+\infty)$ ۳) $[-1,0]$ ۴) $(-1,1)$

۴۴ اگر $f(x)=1-(\frac{1}{2})^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟ (داخل ۹۲)

۱) $[-1,0]$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(0,+\infty)$

۴۵ اگر $f(x)=2^x-2$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{xf(x)}{x-2}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۶ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+5}}{1-\log_2(3-x)}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{5}{2},3]-(-1,1)$ ۲) $[-\frac{5}{2},1)\cup(1,3)$ ۳) $[-\frac{5}{2},3)$ ۴) $(-\frac{5}{2},3)-[-1,1]$

۴۷ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\dfrac{\log_2(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ ۴) $(-2,1)$

۴۸ مجموع اعداد صحیح دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\log_x(x^2-8x+15)}{\sqrt{4-|3-x|}}$ کدام است؟ (شبیه‌ساز داخل ۱۴۰۰)

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

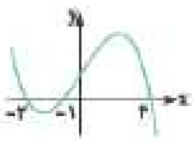
۴۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2-\log_2(x^2-8x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۰ دامنهٔ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{\log_{\frac{1}{2}}x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

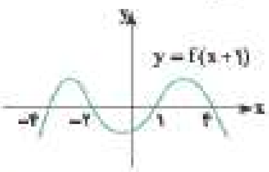
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۱ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-2)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (خارج ۹۴)



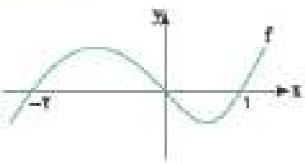
۱) $[-1,1]\cup[0,6]$
۲) $[-3,1]\cup[0,2]$
۳) $[-5,-3]\cup[-1,2]$
۴) $[-5,-3]\cup[0,2]$

۵۲ نمودار تابع $y=f(x+1)$ به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^2+4x+3)f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

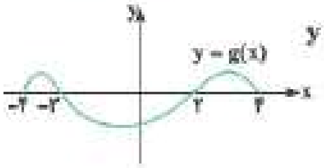


۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵۳ نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-\dfrac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (داخل ۱۴۰۲)



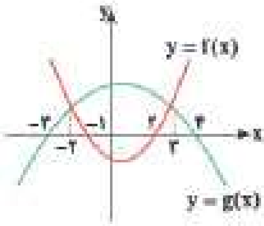
۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵



۵۴ اگر $f(x)=\log_2(x+3)$ و نمودار تابع $y=g(x)$ به‌صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\dfrac{g(x)}{2-f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴



۵۵ نمودار دو تابع درجهٔ دوم f و g به‌صورت مقابل است. در تابع $y=\sqrt{f(x)g(x)-g^2(x)}$ مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو دامنه کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

حالا بریم سراغ سوالات مربوط به بُرد تابع.

۵۶ اگر بُرد تابع $y=\frac{1}{2}x+1$ بازهٔ $[0,\frac{5}{2}]$ باشد، دامنهٔ آن شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۷ بُرد تابع $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}+x^2-2x+3$ کدام است؟

۱) $\{4,11\}$ ۲) $\{11\}$ ۳) $\{0,11\}$ ۴) $\varnothing$

۵۸ بُرد تابع $f(x)=\begin{cases}|x-1|+2 & ; \ -3\le x<2\\ -x^2+6x-5 & ; \ 2\le x\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $[2,6]$ ۳) $(-\infty,6]$ ۴) $(-\infty,4]$

۵۹ بُرد تابع $f(x)=2+\sqrt{4x-x^2}$ به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰ بُرد تابع $f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}$ به‌صورت بازهٔ $[a,+\infty)$ است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{3}$

۶۱ بُرد تابع $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(0,2]$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(2,+\infty)$

۶۲ بُرد تابع $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۳ بُرد تابع $f(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{m\}$ است. بُرد تابع $g(x)=\dfrac{m}{m+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $(0,1]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(0,1)$

۶۴ برد تابع $f(x)=\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-16}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\frac{1}{8},1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm 4\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۵ بُرد تابع $f(x)=2^{\sqrt{-\cos^2 x}}$ شامل چند عضو صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۶ برد تابع $f(x)=2^{1-\cos x}-1$، شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۷ برد تابع $y=\dfrac{2}{|x|}(2x^2-3x)$ کدام است؟

۱) $[-3,+\infty)$ ۲) $(-6,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-[-6,-3]$

۳۲۱ اگر $g(x)$ تابعی یک‌به‌یک با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{3x+4}{g(x)-g(x^2-3)}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲۲ اگر f تابع یک‌به‌یک روی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، معادله $f(2^x)=f(x^2)$ چند جواب مثبت دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

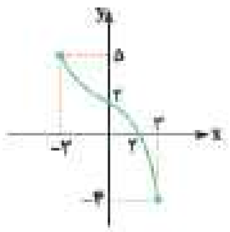
تابع وارون

توی بعضی سؤالا، از تعریف تابع وارون سؤال می‌پرسن، چند تا با هم ببینیم.

۳۲۳ وارون تابع $y=x^3-x+1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (داخل ۱۴۰۱)

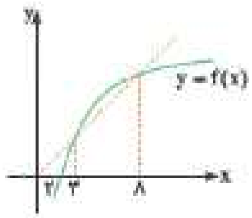
۱) $(-1,-2)$ ۲) $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(-\frac{1}{2},-\frac{11}{8})$

۳۲۴ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-3,3]$ به صورت مقابل است. اگر $\dfrac{f^{-1}(5)}{f(a)+f^{-1}(0)}=-\dfrac{3}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) -1
۴) $\frac{1}{2}$

۳۲۵ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟ (داخل ۹۴)



۱) $(0,2]$
۲) $[2,3]$
۳) $[2,8]$
۴) $[3,8]$

این قسمت مبحث پر تکرار کنکورهای اخیره که باید مقدار تابع وارون رو در یک نقطه پیدا کنید. توی سه چهار سؤال اول نکته‌ها را یاد می‌گیرین، بعدش کلی تست قشنگ‌ارو می‌خونیم.

۳۲۶ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=-x+\sqrt{-2x}$ باشد. حاصل $g(4)-g(12)$ کدام است؟ (شبیه‌ساز تجربی ۹۹)

۱) -10 ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) -6

۳۲۷ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=1+x-2\sqrt{x}\,,\ x\geq 1$ باشد، $(gog)(1)$ کدام است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) صفر

۳۲۸ اگر $f(x-1)=\log_2^{(x+1)}$ و $g(x)=2\cos(\frac{\pi x}{2})$ باشد، مقدار $(f^{-1}og)(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۷

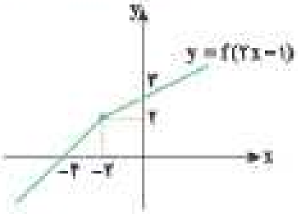
۳۲۹ اگر $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ و $g(x)=\sqrt{x}-1$ باشد، حاصل $(f+g^{-1})(-\frac{2}{5})$ کدام است؟

۱) $-\frac{22}{25}$ ۲) $-\frac{11}{25}$ ۳) $-\frac{22}{75}$ ۴) $-\frac{11}{75}$

۳۳۰ اگر $f(x)=\begin{cases}6-2x\ ;\ x<2\\ 4-x\ ;\ x\geq 2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}2x-3\ ;\ x<0\\ x-4\ ;\ x\geq 0\end{cases}$ باشد، مقدار $fog^{-1}(-5)+gof^{-1}(-2)$ کدام است؟

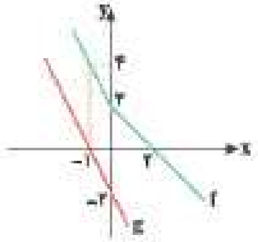
۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳۳۱ نمودار تابع $y = f(2x-1)$ به‌صورت مقابل است. مقدار $\dfrac{f^{-1}(2)+f^{-1}(3)}{f(-5)}$ کدام است؟



۱) -7
۲) 2
۳) -3
۴) 5

۳۳۲ با توجه به نمودارهای دو تابع f و g در شکل مقابل، حاصل $gof^{-1}(-2)+g^{-1}of(-1)$ چقدر است؟ (شبیه‌ساز خارج ۱۴۰۱)



۱) -16
۲) -14
۳) -12
۴) -10

۳۳۳ به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3+6x^2+ax+1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۵ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۳۴ وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2\sqrt{mx-1}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۱ (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۳۳۵ دو تابع با ضابطه‌های $g = \{(2,5),(3,4),(1,6),(4,7),(8,1)\}$ و $f(x) = 2x-5$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (ریاضی داخل ۹۴)

۳۳۶ اگر $f = \{(\frac{1}{9},-1),(\frac{1}{2},1),(-\frac{1}{4},3),(\frac{1}{4},-3)\}$ ، $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ و $fog^{-1}(a) = -3$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۳۳۷ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+9} & ; x \geq 3 \\ 3x - x^2 & ; x < 3 \end{cases}$ و $g = \{(5,2),(7,3),(1,4),(3,6),(9,1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۳۸ دو تابع $f = \{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۳۳۹ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(8)$ کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۳۴۰ اگر $f(x) = x+\sqrt{x}$ و $g(x) = \dfrac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۹)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۴۱ اگر $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ و $g(x) = \dfrac{2x+a}{a-x}$ باشند و $(fog^{-1})(-1) = -\dfrac{11}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴۲ اگر $f = \{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g = \{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ باشند، تابع $\dfrac{g}{gof^{-1}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۸)

۱) $\{(4,2),(5,2)\}$ ۲) $\{(4,2),(3,5)\}$ ۳) $\{(5,2),(2,4)\}$ ۴) $\{(3,5),(2,4)\}$

۳۴۳ اگر $f = \{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g = \{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-1}of) - f$ کدام است؟

۱) $\{-1,4\}$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\{3,4\}$ ۴) $\{2,-1\}$ (ریاضی خارج ۹۸)

۳۴۴ اگر $f(x+1) = \dfrac{g(x)-1}{x}$ و $g^{-1}(x) = 1-x$ باشند، مقدار $(fog)(2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) -3 ۴) -5

۳۴۵ اگر $f(x)=x^۲+۴x+۱۵$ و $(fog)(x)=x^۲g(x)+۴g(x)$ باشد، مقدار $g^{-1}(۳)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱

می‌دونیم اگه $f(a)=b$ باشه، میشه نتیجه گرفت $a=f^{-1}(b)$ هستش! این ویژگی در حالت کلی‌تر هم قابل استفاده است.

۳۴۶ اگر $f(x^۳+۲x)=۲^x-۱۴$ باشد، مقدار $f^{-1}(۲)$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۴ ۳) ۷۲ ۴) ۵۴

۳۴۷ اگر $f^{-1}(\frac{x+۲}{x-۱})=x^۳-۱$ باشد، مقدار $f(۷)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴۸ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۱}{۲x}$ بر دامنهٔ $(۰,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۹ و مشابه داخل ۹۹)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۴۹ اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۲x}$ باشند، آنگاه حاصل $g^{-1}(۶)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵۰ اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(۱۶)$ کدام است؟ (داخل ۸۹)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون

این بخش رو با وارون کردن تابع‌های خطی شروع می‌کنیم. فقط کافیه جای x و y رو عوض کنید!

۳۵۱ قرینهٔ خطی به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (داخل ۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۵۲ نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{x-۳}{۲}$ را در راستای محور yها، ۶ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اگر A نقطهٔ تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصلهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۳۵۳ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۱)$ از نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x+۲$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

۳۵۴ تابع $f(x)=۲x-۱$ را در نظر بگیرید. اگر $g(x+۱)=f(x)-f^{-1}(x)$ باشد، نمودار تابع $y=g(x)$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۵۵ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{x^۲-۵x+۶}{x-۳}$ به کدام صورت است؟

۱) $y=x-۲\,;\,x\neq۳$ ۲) $y=x-۲\,;\,x\neq۱$ ۳) $y=x+۲\,;\,x\neq۳$ ۴) $y=x+۲\,;\,x\neq۱$

۳۵۶ اگر دو خط به معادلات $ax+by=۸$ و $۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a+b$ کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) ±۳ ۲) ±۲ ۳) $۲,-۳$ ۴) $-۲,۳$

۳۵۷ تابع خطی f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳x-۱}{a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(۳f^{-1}(x))=۳x+۵$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

تست‌های زیر مربوط به وارون کردن تابع‌های رادیکالی و درجهٔ دوم و درجهٔ سوم است. توی این سؤالا به محدود کردن دامنه توجه کنید.

۳۵۸ ضابطهٔ وارون تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$ به کدام صورت است؟ (داخل ۹۲)

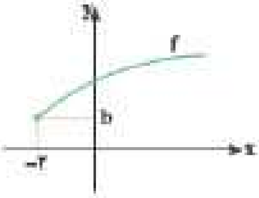
۱) $y=x^۲-۴x+۵; x\leq۲$ ۲) $y=-x^۲+۴x-۵; x\leq۲$

۳) $y=x^۲-۴x+۵; x\geq۱$ ۴) $y=-x^۲+۴x-۵; x\geq۱$

۳۵۹ قرینهٔ نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) 3 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -4

۳۶۰ نمودار تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x+a}$ به‌صورت زیر است. نمودار این تابع را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(a+b)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) 1
۳) -2
۴) -4

۳۶۱ نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به طرف xهای مثبت و ۱ واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌هیم. نمودار وارون تابع حاصل از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۶۲ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = (x-2)^2 + 6x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است، کدام است؟

۱) $-1-\sqrt{x-3}$ ۲) $-1+\sqrt{x-3}$ ۳) $2+\sqrt{x-6}$ ۴) $2-\sqrt{x-6}$

۳۶۳ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -2 + \sqrt{x-3}$ در بازه‌ای که نمودار آن زیر محور xها قرار دارد، کدام است؟

۱) $x^2 + 4x + 7 \,;\, -2 \le x < 0$ ۲) $x^2 + 4x + 7 \,;\, 3 \le x < 7$

۳) $x^2 - 6x + 4 \,;\, 0 \le x \le 3$ ۴) $x^2 - 6x + 4 \,;\, x \ge 0$

۳۶۴ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، کدام است؟

۱) $1+\sqrt{1-x} \,;\, 0 < x < 1$ ۲) $1+\sqrt{1-x} \,;\, x < 1$ ۳) $-1-\sqrt{1-x} \,;\, 0 < x < 1$ ۴) $1-\sqrt{1-x} \,;\, 0 < x < 1$

۳۶۵ نمودار تابع $y = x^2 - 2x \,;\, x \ge 1$ را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $-1-\sqrt{x-1}$ ۲) $-1+\sqrt{x-1}$ ۳) $-1-\sqrt{x+1}$ ۴) $-1+\sqrt{x+1}$

۳۶۶ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = (2x-1)g(x)$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $y = f(x)$ با شرط $x \le 1$ کدام است؟

۱) $y = 1-\sqrt{x-1}$ ۲) $y = 1+\sqrt{x-1}$ ۳) $y = 1-\sqrt{x+1}$ ۴) $y = 1+\sqrt{x+1}$

۳۶۷ تابع $f(x) = x^2\sqrt{x^2}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) $-\sqrt[3]{x} \,;\, x \ge 0$ ۲) $-\sqrt{x^3} \,;\, x \le 0$ ۳) $-\sqrt[3]{x} \,;\, x \le 0$ ۴) $-\sqrt{x^3} \,;\, x \ge 0$

۳۶۸ اگر $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$ ضابطهٔ تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 9

۳۶۹ ضابطهٔ وارون $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $x^2 - 2x + 2 \,;\, x \ge 1$ ۲) $x^2 - 2x \,;\, x \ge 1$ ۳) $x^2 + 2x + 2 \,;\, x \ge -1$ ۴) $x^2 + 2x \,;\, x \ge -1$

۳۷۰ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{4}x - 1}$ در دامنهٔ محدود کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱) $2\sqrt{4x+4} + 2$ ۲) $2\sqrt{4x+4} - 2$ ۳) $2\sqrt{x^2+1} + 2$ ۴) $2\sqrt{x^2+1}$

تابع‌های قدرمطلقی هم در حالت کلی وارون‌پذیر نیستند و برای وارون کردن آن‌ها باید به محدودیت دامنه توجه کنید!

۳۷۱ تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x - 6|$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{1}{2}x - 7, x \ge 2$ ۲) $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, x \le 3$ ۳) $-2x + 14, x \le 3$ ۴) $-2x - \frac{14}{3}, x \ge 2$

۳۷۲ نمودار تابع $y=|2x-6|-|x+4|+x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل ۹۴)

۱) $-x+6;x\le -4$
۲) $-x+5;x\ge 2$
۳) $-\frac{1}{3}x+1;-4\le x\le -3$
۴) $-\frac{1}{2}x+1;-4\le x\le 10$

۳۷۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|2x-4|-|x+1|+x$ را در بازهٔ اکیداً نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} و خط $y=x+1$ با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) 1
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) غیرمتقاطع (تیمساز ۹۹)

۳۷۴ دو تابع $f(x)=3-\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x^2-2x$ را در نظر بگیرید. ضابطهٔ وارون تابع $y=(fog)(x)$ در بازه‌ای که نمودار آن اکیداً نزولی می‌باشد، کدام است؟

۱) $-x+3;x\le 1$
۲) $-x+4;x\le 1$
۳) $-x+3;x\le 3$
۴) $-x+4;x\le 3$

۳۷۵ تابع با ضابطهٔ $y=x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل ۹۴)

۱) $1-\sqrt{1+x};x\le 0$
۲) $1-\sqrt{1-x};x\le 1$
۳) $1+\sqrt{1-x};0\le x\le 1$
۴) $1-\sqrt{1-x};0\le x\le 1$

۳۷۶ اگر $[x]=-1$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $y=|x^2-1|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x-1};0<x\le 1$
۲) $-\sqrt{x-1};0<x\le 1$
۳) $\sqrt{1-x};0\le x<1$
۴) $-\sqrt{1-x};0\le x<1$

چندتا هم وارون تابع دوضابطه‌ای ببینیم.

۳۷۷ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & ; x<0\end{cases}$ کدام است؟ (داخل ۹۴)

۱) $-x^2$
۲) x^2
۳) $x|x|$
۴) $-x|x|$

۳۷۸ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}3x+1 & ; x>1\\ 2x+2 & ; x\le 1\end{cases}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\begin{cases}a(x-1) & ; x>c\\ bx-1 & ; x\le c\end{cases}$ است. مقدار $f^{-1}(\frac{b}{a})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $-\frac{1}{2}$

۳۷۹ اگر $f(x)=\begin{cases}x[x] & ; -1<x<0\\ 2^x & ; 0\le x<2\end{cases}$ باشد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & ; 0<x<1\\ \log_2 x & ; 1<x\le 4\end{cases}$
۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & ; 0<x<1\\ \log_2 x & ; 1\le x<4\end{cases}$
۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x & ; -1<x<0\\ \log_2 x & ; 1\le x<4\end{cases}$
۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x & ; 0<x<1\\ \log_2 x & ; 1\le x<4\end{cases}$

یه روش خیلی خوب برای وارون کردن تابع‌های هموگرافیک داریم که برای حل تست‌های زیر ازش استفاده کنید و لذت ببرید.

۳۸۰ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}+2$ کدام است؟

۱) $\frac{x+2}{x-3}-2$
۲) $\frac{x}{x-5}$
۳) $\frac{x+2}{x-3}+2$
۴) $\frac{x}{x+5}$

۳۸۱ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{a\}$ و برد $\mathbb{R}-\{-2\}$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x)=\frac{5x-3}{bx+4}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -2
۲) $2/5$
۳) -4
۴) 5

۳۸۲ اگر $fof(x)=\frac{af(x)+1}{2f(x)-1}$ و $f^{-1}(0)=-2$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $g(x)=\frac{4x+1}{2x+a}$ کدام است؟

۱) $\frac{-\frac{1}{2}x+1}{2x-4}$
۲) $\frac{-x+2}{2x-4}$
۳) $\frac{-4x+1}{2x+4}$
۴) وارون‌پذیر نیست.

۳۸۳ تابع $f(2x+4)=\frac{4x-6}{2x+a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x)=f^{-1}(x)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 4 ۴) 2

۳۸۴ اگر $x=\frac{f(x)-3x}{f(x)+4}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{x+7}$ ۲) $\frac{x}{x+7}$ ۳) $\frac{x+1}{x-7}$ ۴) $\frac{x}{x-7}$

۳۸۵ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{ax}{1-|x|}\ ;\ |x|<b$ است. مقدار $a\times b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

۲ برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g

سریع توی تست‌های زیر می‌خوایم نقطهٔ برخورد f^{-1} و g رو بررسی کنیم.

۳۸۶ اگر $f(x)=x^2-2x-3\ ;\ x\geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟ (تجربی داخل ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

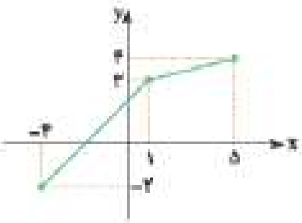
۳۸۷ اگر $f(x)=x^2-3x+1\ ;\ x<\frac{3}{2}$ و $g^{-1}(x)=3x-4$ باشند، نمودارهای دو تابع f^{-1} و g در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۳۸۸ اگر $f(x)=x^2-4x+1\ ;\ x\leq 2$ باشد، نمودار تابع $y=1-f^{-1}(x)$ و $g(x)=\sqrt{f(x)+3}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{13}$ ۴) $\sqrt{6}$

۳۸۹ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-4,5]$ به‌صورت مقابل است. نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=x+|x-2|$ در چند نقطه متقاطع هستند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) متقاطع نیستند.

سریع برای حل تست‌های مربوط به برخورد f و f^{-1} به صعودی بودن تابع f توجه کنید.

۳۹۰ اگر $f(x)=x^2+2x+1$ با دامنهٔ $(-1,+\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (داخل ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

۳۹۱ فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+3}-1$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $2\sqrt{2}$

۳۹۲ نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

۱) $-4,-1$ ۲) $4,-1$ ۳) $-4,1$ ۴) $4,1$

۳۹۳ فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^3+3x-12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۳۹۴ نمودار وارون تابع $y=\log_{4}^{(2^{x+2}+32)}$ نمودار خود را در نقطهٔ A قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{3}$

ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

به نظرتون fof^{-1} و $f^{-1}of$ با هم برابرند؟ بریم ببینیم با هم.

۳۹۵ تابع $f(x)=2-\sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. کدام رابطه نادرست است؟

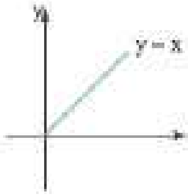
۱) $f^{-1}of(1)=1$ ۲) $(fof^{-1})(1)=1$ ۳) $f^{-1}of(2)=2$ ۴) $fof^{-1}(2)=2$

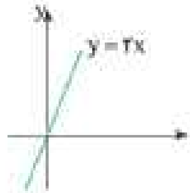
۳۹۶ در کدام تابع زیر رابطهٔ $(f^{-1}of)(x)=(fof^{-1})(x)$ برقرار نیست؟

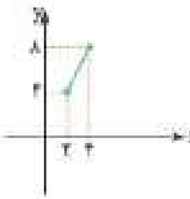
۱) $f(x)=x^2-4x+6; x\geq 2$ ۲) $f(x)=1+2^x$

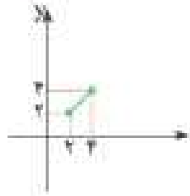
۳) $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$ ۴) $f(x)=2+\sqrt{x-2}$

۳۹۷ اگر $f(x)=4x-x^2; x\geq 2$ باشد، نمودار تابع $y=(f^{-1}of)(x)+(fof^{-1})(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۳۹۸ اگر $f^{-1}(3x+1)=g(\frac{x+3}{4})$ قابل تعریف باشد، مقدار $(fog)(3)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۳۹۹ با توجه به ماشین مقابل، اگر $f(x)=3-\sqrt{x+1}$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y=g(x)$ در کدام بازه زیر محور xها است؟

$x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x$

۱) $[-1,8)$ ۲) $(8,+\infty)$

۳) $(2,3]$ ۴) $(2,4)$

۴۰۰ اگر $f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{3x-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{2})$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۴

۴۰۱ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}+2$ باشد، نمودار دو تابع fof^{-1} و $y=\sqrt{-x+6}$ در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) غیرمتقاطع‌اند.

چندتا سؤال هم از وارون کردن ترکیب دو تابع ببینیم.

۴۰۲ دو تابع $f(x)=x^3+2$ و $g(x)=\frac{1-x}{x+2}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1}og)^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{18}{11}$ ۲) $-\frac{19}{11}$ ۳) $-\frac{20}{11}$ ۴) $-\frac{21}{11}$

۴۰۳ اگر $f(x)=-5+\frac{1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{x+3}{x+2}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $x-3$ ۲) $\frac{x+1}{3}$ ۳) $\frac{3x}{x-1}$ ۴) $x+3$

۴۰۴ اگر $(fog)(x)=\frac{3x+1}{x+1}$ و $f^{-1}(4)=1$ باشد، مقدار $g^{-1}(1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳- ۳) ۱ ۴) ۲-

فصل اول: تابع

۱ ۳

نمودار موجود در گزینهٔ «۳»، خود نمایانگر یک تابع است.

> **تابع و تشخیص آن**
>
> اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌های (x, y) باشد، هنگامی این رابطه یک تابع محسوب می‌شود که هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی، دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفهٔ اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

۲ ۲

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(۵, ۴a-b)$ و $(۵, a-۲b)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند. همچنین در زوج مرتب‌های $(۴, -۲)$ و $(۴, a+b)$ باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} ۴a-b=a-۲b \\ a+b=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=-۳ \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a-b=۱-(-۳)=۴$ است.

۳ ۴

برای اینکه زوج مرتب f تابع نباشد، باید حالتی ایجاد کنیم که ورودی یکسان اما خروجی متفاوت باشد. یعنی:

$k=۰ \Rightarrow f=\{(\underline{۱,۴}),(۲,۴),(۳,۵),(۴,۹),(\underline{۱,۴})\}$ تابع هست.

$k=۱ \Rightarrow f=\{(۱,۴),(\underline{۲,۴}),(۳,۵),(۴,۹),(\underline{۲,۹})\}$ تابع نیست.

$k=۲ \Rightarrow f=\{(۱,۴),(۲,۴),(\underline{۳,۵}),(۴,۹),(\underline{۳,۱۶})\}$ تابع نیست.

$k=۳ \Rightarrow f=\{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۵),(\underline{۴,۹}),(\underline{۴,۲۵})\}$ تابع نیست.

پس مقادیر قابل قبول k برای اینکه f تابع نباشد، برابر است با:

$k=\{۱,۲,۳\} \Rightarrow$ مجموع مقادیر $k = ۶$

۴ ۳

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

الف و ت) از عضو a در نمودار (الف) و از عضو b در نمودار (ت) پیکانی خارج نشده؛ پس تابع نیستند.

ب) از عضو b، ۲ پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست.

پ) از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده است؛ پس تابع است.

۵ ۱

برای این‌که نمودار پیکانی داده شده، نمایانگر یک تابع باشد، باید $m^۲-۲m=۳m-۶$ و $۳m-۶=۱۲-m^۲$ باشد:

$$\begin{cases} m^۲-۲m=۳m-۶ \Rightarrow m^۲-۵m+۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=۳ \end{cases} \\ ۳m-۶=۱۲-m^۲ \Rightarrow m^۲+۳m-۱۸=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۶ \\ m=۳ \end{cases} \end{cases}$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده، تنها مقدار $m=۳$ قابل قبول است.

۶ ۴

به بررسی موارد داده شده می‌پردازیم:

الف) چون هر عدد مثبت، دارای ۲ ریشهٔ چهارم است، پس این رابطه تابع نیست.

ب) این رابطه بیانگر یک تابع نیست، زیرا برای هر عددی، دو عدد با اختلاف ۳ واحد می‌توان نسبت داد.

پ) می‌دانیم هر عدد فرد اول، دارای ۲ مقسوم‌علیه است، پس این رابطه تابع نیست.

۷ ۳

می‌دانیم یک رابطه، زمانی یک تابع است که به ازای یک ورودی x، تنها یک خروجی y حاصل شود، در گزینهٔ «۳» برای $x=۰$ بی‌شمار خروجی y داریم.

$$[x]+[y]=۰ \xrightarrow{x=۰} [۰]+[y]=۰ \Rightarrow [y]=۰ \Rightarrow ۰ \le y < ۱$$

پس این رابطه تابع نیست. باقی روابط موجود در گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع هستند.

۸ ۳

تابع از A به B، شامل زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها، اعضای مجموعه A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها، اعضای مجموعه B هستند. می‌توان این تابع را به‌صورت زیر نمایش داد:

$\{(a, ○), (b, □), (c, △)\}$

چون طبق سوال، این تابع باید حتماً شامل زوج مرتب $(c, ۴)$ باشد، داریم:

$\{(a, ○), (b, □), (c, ۴)\}$

با توجه به تابع بالا، به جای مؤلفه دوم‌های ○ و □، هر ۴ عضو مجموعهٔ B می‌توانند قرار بگیرند. پس در کل $۴ \times ۴ = ۱۶$ تابع مختلف با این شرایط می‌توان نوشت.

۹ ۲

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار هر دو ضابطه در نقطهٔ $x=۱$ با هم برابر باشند.

$$x=۱ : ۲(۱)^۲+m(۱)=\frac{۳m^۲-۲}{۱} \Rightarrow ۲+m=۳m^۲-۲$$

$$۳m^۲-m-۴=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-۱ \\ m=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۱۰ ۲

به ازای $x=۱$، مقدار تابع از ضابطهٔ بالا و ضابطهٔ پایین باید برابر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^۲+۳}+۲a & ; \quad |x| \le ۱ \\ ax^۲+۵ & ; \quad |x| \ge ۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=۱} \sqrt{۴}+۲a=a+۵ \Rightarrow a=۳$$

حالا برای پیدا کردن $f(۳)$ سراغ ضابطهٔ پایینی می‌رویم:

$$f(۳)=۳ \times ۳^۲+۵=۳۲$$

۱۱ ۱

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار ضابطه‌های $ax+b$ و bx^2+a در نقطهٔ $x=2$ با هم برابر باشند. همچنین مقدار ضابطه‌های bx^2+a و $(a-b)x+8$ نیز باید در $x=3$ باهم برابر باشند:

$$\begin{cases} a(2)+b=b(2)^2+a \\ b(3)^2+a=(a-b)(3)+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=4b+a \\ 9b+a=3a-3b+8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=\frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b=4+\frac{4}{3}=\frac{12+4}{3}=\frac{16}{3}$$

۱۲ ۴

برای پیدا کردن $f(5)$ باید در ضابطهٔ داده شده $x=2$ قرار دهیم:

$$f(x+3)=3x+14 \xrightarrow{x=2} f(5)=20$$

مقدار تابع

می‌توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می‌کند و به‌ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد [هر چند ممکن است چند ورودی دارای خروجی‌های یکسان باشند].

منظور از $f(a)$، مقدار تابع f در نقطهٔ x=a است. بنابراین برای محاسبهٔ مقدار تابع در $x=a$، باید در ضابطهٔ تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم.

اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان دهندهٔ عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع f با طول $x=a$ است.

۱۳ ۲

در ضابطهٔ داده شده، به جای x، صفر قرار می‌دهیم:

$$2f(x+4)=f(4)+x^2+5(x+1)+2 \xrightarrow{x=0} 2f(4)=f(4)+7$$

$$\Rightarrow f(4)=7$$

۱۴ ۱

برای پیدا کردن $g(4)$ در تابع $g(3x+1)$ به جای $x=1$ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطهٔ پایینی برویم:

$$x<2: g(3x+1)=x^2 \xrightarrow{x=1} g(4)=1^2=1$$

حالا برای پیدا کردن $g(10)$ در تابع $g(3x+1)$ به جای $x=3$ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطهٔ بالایی برویم:

$$x\ge 2: g(3x+1)=x-2 \xrightarrow{x=3} g(10)=1$$

بنابراین $g(4)+g(10)=2$ است.

۱۵ ۳

برای پیدا کردن $f(2)$ در ضابطهٔ تابع، $x=2$ و برای پیدا کردن $f(-3)$ در ضابطهٔ تابع، $x=-1$ قرار می‌دهیم:

$$x=2\,;\, f(2)=6-a$$

$$x=-1\,;\, f(-3)=-3-a$$

حالا، با توجه به این‌که $f(2)+f(-3)=9$ است، پس:

$$(6-a)+(-3-a)=9 \Rightarrow 3-2a=9 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

حالا سراغ پیدا کردن $f(a+2)$ می‌رویم:

$$f(a+2)=f(-1)$$

کافی است در ضابطهٔ $f(2x-1)$، $x=0$ قرار دهیم:

$$f(2x-1)=4x-a \xrightarrow{x=0} f(-1)=-a=3$$

۱۶ ۴

می‌دانیم $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$ است. حالا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم و سپس $x=2+\sqrt{3}$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=x^3-6x^2+12x-8 \Rightarrow f(x)=(x-2)^3$$

$$\xrightarrow{x=2+\sqrt{3}} f(2+\sqrt{3})=(2+\sqrt{3}-2)^3=(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}$$

۱۷ ۴

ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+14}=\sqrt{(x-3)^2+5}$$

$$\Rightarrow f(3+\sqrt[4]{24})=\sqrt{(3+\sqrt[4]{24}-3)^2+5}=\sqrt{(\sqrt[4]{24})^2+5}$$

$$=\sqrt{\sqrt{24}+5}=\sqrt{2\sqrt{6}+5}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

۱۸ ۴

باجای‌گذاری $x=2$ و $x=\frac{1}{2}$ در تساوی $f(x)+3f(\frac{1}{x})=1-x^2$ داریم:

$$x=2: f(2)+3f(\tfrac{1}{2})=-3$$

$$x=\tfrac{1}{2}: f(\tfrac{1}{2})+3f(2)=\tfrac{3}{4}$$

ضابطهٔ پایینی را در -3 ضرب می‌کنیم و دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(2)+3f(\frac{1}{2})=-3 \\ -9f(2)-3f(\frac{1}{2})=-\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow -8f(2)=-\frac{21}{4} \Rightarrow f(2)=\frac{21}{32}$$

۱۹ ۳

در ضابطهٔ $(x+2)f(x)-2xf(x+2)=4x^2-mx+3m-1$ یک بار $x=0$ و یک بار $x=-2$ قرار می‌دهیم:

$$x=0: 2f(0)-0=3m-1 \Rightarrow f(0)=\frac{3m-1}{2}$$

$$x=-2: 0+6f(0)=16+2m+3m-1 \Rightarrow f(0)=\frac{15+5m}{6}$$

حالا این دو مقدار را با هم برابر قرار می‌دهیم تا m به‌دست آید:

$$\frac{3m-1}{2}=\frac{15+5m}{6} \Rightarrow 9m-3=15+5m \Rightarrow 4m=18$$

$$\Rightarrow m=\frac{9}{2}$$

بنابراین $f(0)=\frac{3m-1}{2}=\frac{\frac{27}{2}-\frac{2}{2}}{2}=\frac{25}{4}$ است.

۲۰ — **۲**

با توجه به ضابطهٔ پایینی تابع، مقدار $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم:

$x<1: f(x)=x+1 \Rightarrow f(-1)=0$

پس $f(1+f(-1))=f(1)$ است. با توجه به ضابطهٔ بالایی تابع داریم:

$x\geq 1: f(x)=4-f(x) \xrightarrow{x=1} f(1)=4-f(1)$

$\Rightarrow 2f(1)=4 \Rightarrow f(1)=2$

۲۱ — **۴**

برای پیدا کردن طول نقاط برخورد با محور xها، باید مشخص کنیم در چه نقاطی، $f(x)=0$ است:

$x<0: f(x)=3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{x<0} x=-2$

$0\leq x<3: f(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2$

$x\geq 3: f(x)=x^2-x-12=0 \Rightarrow (x-4)(x+3)=0$

$\xrightarrow{x\geq 3} x=4$

پس مجموع طول نقاط برخورد برابر $-2+2+4=4$ است.

۲۲ — **۳**

با توجه به نمودار تابع f در صورت سؤال $f(-1)=-3$ و $f(2)=k$ است، پس با توجه به ضابطهٔ تابع g داریم:

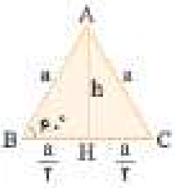
$$g(x)=\begin{cases}1+f(x) & ; \ x>0\\ f^2(x) & ; \ x\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} g(2)=1+f(2)=1+k \\ g(-1)=f^2(-1)=9\end{matrix}$$

حالا با توجه به رابطهٔ $g(-1)+g(2)=14$ داریم:

$9+1+k=14 \Rightarrow k=4$

۲۳ — **۳**

ابتدا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC با کمک $\sin 60^\circ$ داریم:



$$\sin 60^\circ=\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=\frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{4h^2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}h^2$$

۲۴ — **۱**

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم، داریم:

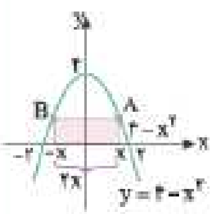
$x=y+3 \Rightarrow y=x-3$

$P=2(x+y)=2(x+x-3)=4x-6 \Rightarrow x=\frac{P+6}{4}$

$S=xy=x(x-3) \Rightarrow S(P)=\left(\frac{P+6}{4}\right)\left(\frac{P+6}{4}-3\right)$

$\Rightarrow S(P)=\left(\frac{P+6}{4}\right)\left(\frac{P-6}{4}\right)=\frac{P^2-36}{16}$

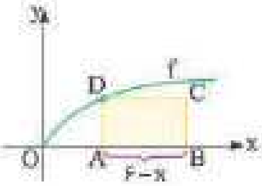
۲۵ — **۲**



با توجه به شکل، نقاط $A(x,4-x^2)$ و $B(-x,4-x^2)$ دو رأس مستطیل هستند. پس یک ضلع مستطیل برابر $2x$ و یک ضلع دیگر $4-x^2$ است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$f(x)=2x(4-x^2)=8x-2x^3$

۲۶ — **۳**



با توجه به این‌که طول نقطهٔ A برابر x و طول نقطهٔ B برابر ۶ است، پس $AB=6-x$ است. در ضمن نقطهٔ D به طول x روی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ قرار دارد، پس $AD=\sqrt{x}$ است.

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$S(x)=AD\times AB=\sqrt{x}(6-x)=6\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

۲۷ — **۱**

اگر شعاع نیم‌دایره‌ها را x و طول مستطیل را L در نظر بگیریم از آن‌جایی‌که محیط استادیوم برابر 80π است، پس:

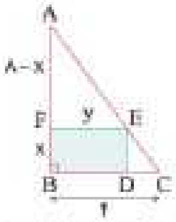
$2L+2\pi x=80\pi$

$\Rightarrow L=40\pi-\pi x$

حالا مساحت استادیوم را برحسب x به‌دست می‌آوریم:

$S=L(2x)+\pi x^2=(40\pi-\pi x)(2x)+\pi x^2=\pi x(80-x)$

۲۸ — **۴**



با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AF}{AB}=\frac{FE}{BC} \Rightarrow \frac{8-x}{8}=\frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{x}{2}+4$$

$$\Rightarrow S=xy=x\left(-\frac{x}{2}+4\right)=-\frac{x^2}{2}+4x$$

۲۹ — **۴**

چون دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ است، پس $x=-1$ و $x=2$ ریشه‌های مخرج کسر هستند:

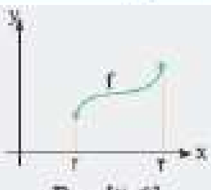
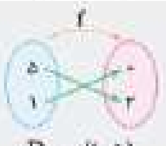
$$\begin{cases}x=-1 & : \ 1-m+n=0 \Rightarrow m-n=1\\ x=2 & : \ 4+2m+n=0 \Rightarrow 2m+n=-4\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m=-1\\ n=-2\end{cases} \Rightarrow m+n=-3$$

یادآوری

دامنهٔ تابع

به مجموعهٔ ورودی‌های تابع f، دامنهٔ تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن دامنهٔ تابع	
نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور xها	 $D_f=[2,4]$
نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که از اعضای آن، پیکان خارج شده	 $D_f=\{1,5\}$
زوج مرتبی: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول	$f=\{(1,2),(5,0)\} \Rightarrow D_f=\{1,5\}$

۳۱ | **۴**

$x=1$ و $x=b$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس مخرج کسر را به‌صورت $(x-1)(x-b)$ در نظر می‌گیریم:

$$\text{مخرج کسر}: (x-1)(x-b)=x^2-(1+b)x+b$$

حالا این عبارت را با x^2-ax-2 مقایسه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} b=-2 \\ 1+b=a \Rightarrow a=-2+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{-2}{-1}=2$$

۳۲ | **۲**

ریشه‌های مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$$\big||x|-1\big|-2=0 \Rightarrow \big||x|-1\big|=2 \Rightarrow \begin{cases} |x|-1=2 \Rightarrow |x|=3 \\ |x|-1=-2 \Rightarrow |x|=-1 \ \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\pm 3$$

پس دامنهٔ تابع f به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$ است. یعنی دو عدد صحیح -3 و 3 در دامنهٔ تابع حضور ندارند.

۳۳ | **۳**

باید ریشه‌های مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$[x]-f(x)=0 \Rightarrow [x]=f(x)$$

حالا با توجه به محدودهٔ x داریم:

$$x>0: [x]=1 \Rightarrow 1\le x<2$$

$$x=0: [x]=0 \Rightarrow x=0$$

$$x<0: [x]=-1 \Rightarrow -1\le x<0$$

پس دامنهٔ تابع f به‌صورت بازهٔ $D_f=(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup[2,+\infty)$ است که شامل ۳ عدد صحیح $x=-1,0,1$ نیست.

۳۴ | **۱**

باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و مخرج کسرها نیز صفر نباشد:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\ge 0 \Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)}\ge 0$$

$$\Rightarrow x(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<0$$

پس دامنهٔ این تابع فقط شامل عدد صحیح -1 است.

۳۵ | **۲**

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجهٔ زوج را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{matrix} 1)\ x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2 \\ 2)\ 16-2x\ge 0 \Rightarrow x\le 8 \end{matrix} \Rightarrow D_f=[2,8]$$

پس $a=2$ و $b=8$ است. حالا مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-8|<2$ را پیدا می‌کنیم:

$$-2<x-8<2 \Rightarrow 6<x<10 \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} x=7,8,9$$

۳۶ | **۲**

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجهٔ زوج (رادیکال‌های صورت کسر) باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$1)\ x+2\ge 0 \Rightarrow x\ge -2$$

$$2)\ 6-x\ge 0 \Rightarrow 6\ge x$$

یادآوری

۳ دامنهٔ توابع معروف

برای تعیین دامنهٔ تابع f با داشتن ضابطهٔ آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱) دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f(x)=2x^3+4x^2-x-10 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

۲) چون عبارت‌های کسری به ازای ریشهٔ مخرج، تعریف‌نشده هستند؛ پس دامنهٔ آن‌ها برابر است با:

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

۳) در رادیکال‌های با فرجهٔ زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

$$y=\sqrt{4-x} \Rightarrow 4-x\ge 0 \Rightarrow x\le 4 \Rightarrow D_f=(-\infty,4]$$

۴) چون $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x\neq 0$ برقرار باشد. بنابراین:

$$D=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\}$$

$$y=x+\tan x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$$

۵) چون $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x\neq 0$ برقرار باشد، بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$:

$$D=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$$

$$y=5+2\cot x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$$

۶) در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

$$y=\log_{\circ}\square \Rightarrow \begin{cases} \square>0 \\ \circ>0,\ \circ\neq 1 \end{cases}$$

$$y=\log_{(3-x)}(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ 3-x>0 \Rightarrow 3>x \\ 3-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow D_f=(1,2)\cup(2,3)$$

هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطهٔ تابع را ساده کنید.

در توابع چندضابطه‌ای، دامنهٔ تابع از اجتماع دامنهٔ همهٔ ضابطه‌ها به‌دست می‌آید.

۳۷ | **۲**

مخرج کسر تابعی از درجهٔ دوم است، بنابراین $x=-3$، ریشهٔ مضاعف مخرج است و تابع مخرج کسر به صورت $3(x+3)^2$ می‌باشد:

$$3(x+3)^2=3x^2+(2m-n)x+m+n$$

$$3x^2+18x+27=3x^2+(2m-n)x+m+n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-n=18 \\ m+n=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=15 \\ n=12 \end{cases} \Rightarrow mn=180$$

در ضمن عبارت $\frac{x+1}{x-3}$ زیر رادیکال فرجهٔ ۳ قرار دارد که شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند. حالا ریشهٔ مخرج کسرها را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

$1)\ \frac{x+1}{x-3} \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$2)\ x \neq 3$

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f = [-2,6] - \{-1,3\}$ است که مجموع عضوهای صحیح آن برابر است با:

$(-2)+0+1+2+4+5+6=16$

۳۷ **۳**

چون رادیکال در مخرج کسر قرار دارد، پس عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد (اما صفر نمی‌تواند باشد):

$|x+2|-|x+5|>0 \Rightarrow |x+2|>|x+5|$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+4x+4>x^2+10x+25$

$\Rightarrow -21>6x \Rightarrow -\frac{21}{6}>x \Rightarrow -3/5>x$

دامنهٔ تابع شامل سه عدد صحیح منفی $x=-3,-2,-1$ نیست.

۳۸ **۳**

ابتدا تابع $f(-x)$ را پیدا می‌کنیم:

$f(-x)=\sqrt{-x+|-x+2|}=\sqrt{-x+|x-2|}$

برای تعیین دامنهٔ تابع f، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$-x+|x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-2| \geq x$

در ضمن می‌دانیم مجموعه جواب نامعادله $|U| \geq a$ از حل دو نامعادلهٔ $U \geq a$ و $U \leq -a$ به‌دست می‌آید:

$$|x-2| \geq x \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq x \Rightarrow -2 \geq 0 \ \text{تناقض} \\ x-2 \leq -x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

۳۹ **۲**

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$3x-|x^2-4x| \geq 0 \Rightarrow 3x \geq |x^2-4x|$

حالا با توجه به ریشه‌های درون قدرمطلق داریم:

$1)\ x \leq 0$ یا $x \geq 4: 3x \geq x^2-4x \Rightarrow x^2-7x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 7 \xrightarrow[\text{محدودهٔ x}]{\text{اشتراک با}} 4 \leq x \leq 7 \cup \{0\}$

$$2)\ 0<x<4: 3x \geq -x^2+4x \Rightarrow x^2-x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{یا} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$\xrightarrow[\text{محدودهٔ x}]{\text{اشتراک با}} 1 \leq x < 4$

از اجتماع بازه‌های به‌دست آمده از ۱ و ۲ دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $D_f=[1,7] \cup \{0\}$ است. پس بزرگترین عضو طبیعی دامنه برابر $x=7$ و کوچک‌ترین عضو طبیعی آن $x=1$ است و نسبت آن‌ها برابر $\frac{7}{1}=7$ است.

۴۰ **۳**

عبارت زیر رادیکال یک سهمی است که باید همواره نامنفی باشد، یعنی دلتای عبارت $x^2-(m+1)x+2-m$ کوچکتر یا مساوی صفر است:

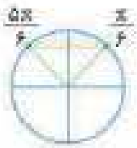
$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2-4(1)(2-m) \leq 0$

$\Rightarrow m^2+6m-7 \leq 0 \Rightarrow (m-1)(m+7) \leq 0 \Rightarrow -7 \leq m \leq 1$

پس به ازای ۹ مقدار صحیح m دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

۴۱ **۲**

چون $2\sin x-1$ زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ قرار دارد، پس:



$2\sin x-1 \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

بنابراین $D_f=[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ است.

۴۲ **۳**

چون $f(x)=2^x$ است، پس $f(\frac{1}{x})=2^{\frac{1}{x}}$ بوده و برای تعیین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)-f(\frac{1}{x})}$ داریم:

$f(x)-f(\frac{1}{x}) \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x \geq \frac{1}{x} \Rightarrow x-\frac{1}{x} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \Rightarrow D_f=[-1,0) \cup [1,+\infty)$

[illegible] چون $x=2$ در تابع صدق می‌کند، پس گزینه‌های «۲» و «۴» حذف می‌شوند. در ضمن $x=-2$ در تابع صدق نمی‌کند؛ پس گزینهٔ «۱» نیز حذف می‌شود.

۴۳ **۳**

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

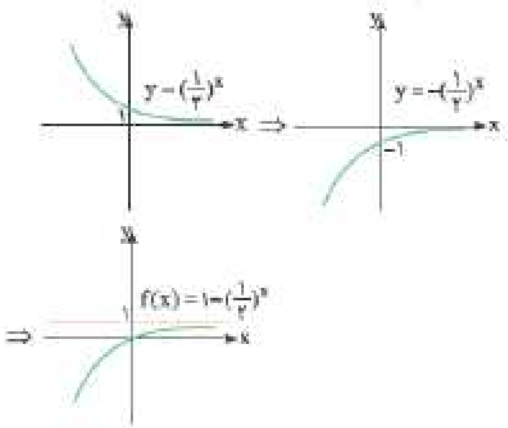
$4^x-2^{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2^{2x} \geq 2^{x-1} \Rightarrow 2x \geq x-1 \Rightarrow x \geq -1$

در ضمن مخرج کسر نباید صفر باشد. به ازای $x>0$ تابع $g(x)$ برابر ۱ است که باعث می‌شود مخرج کسر برابر صفر شود. پس آن را از دامنهٔ تابع کنار می‌گذاریم:

$D_f=[-1,0]$

۴۴ **۳**

ابتدا نمودار تابع $f(x)=1-(\frac{1}{2})^x$ را رسم می‌کنیم:



حال برای تعیین دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\ge 0$ باشد:

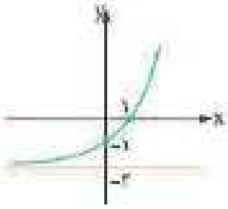
$x\ge 0\,,\,f(x)\ge 0$: راست و بالای محور xها $\Rightarrow [0,+\infty)$

$x\le 0\,,\,f(x)\le 0$: چپ و پایین محور xها $\Rightarrow (-\infty,0]$

$\Rightarrow \xrightarrow{\cup} D=(-\infty,+\infty)$

پیروش سرعتی چون $x=2$ و $x=-2$ در تابع صدق می‌کنند؛ پس گزینهٔ «۳» درست است.

۴۵ **۴**



عبارت زیر رادیکال را به‌صورت $\frac{x}{x-2}\times f(x)$ در نظر می‌گیریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم. با توجه به این‌که نمودار تابع $f(x)=2^x-2$ به‌صورت مقابل است، داریم:

$$g(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}\times f(x)}\Rightarrow \frac{x}{x-2}\times f(x)\ge 0$$

x		۰		۱		۲	
$\frac{x}{x-2}$	+	۰	−		−	ت.ن	+
$f(x)$	−		−	۰	+		+
$\frac{x}{x-2}\times f(x)$	−	۰	−	۰	−	ت.ن	+

پس دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $[0,1]\cup(2,+\infty)$ می‌باشد که شامل بی‌شمار عدد طبیعی می‌باشد.

۴۶ **۲**

عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:

$3-x>0\Rightarrow x<3$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$2x+5\ge 0\Rightarrow x\ge -\frac{5}{2}$

حالا ریشهٔ مخرج کسر را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

$1-\log_2^{(3-x)}=0\Rightarrow \log_2^{(3-x)}=1\Rightarrow 3-x=2\Rightarrow x=1$

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $[-\frac{5}{2},1)\cup(1,3)$ است.

۴۷ **۱**

عبارت جلوی لگاریتم $\log_2(x^2-x-2)$ باید مثبت باشد:

$x^2-x-2>0\Rightarrow (x-2)(x+1)>0\Rightarrow x<-1$ یا $x>2$

از طرفی عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$x^2-1\ge 0\Rightarrow x^2\ge 1\Rightarrow x\le -1$ یا $x\ge 1$

در ضمن مخرج کسر یعنی $\sqrt{x^2-1}+1$ همواره مثبت است و فاقد ریشهٔ حقیقی است. از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ است.

۴۸ **۱**

ابتدا دامنهٔ لگاریتم را تعیین می‌کنیم:

۱) $x^2-8x+15>0\Rightarrow (x-3)(x-5)>0\Rightarrow x<3$ یا $x>5$

۲) $x>0$ و $x\ne 1$

حالا سراغ مخرج کسر می‌رویم:

$4-|3-x|>0\Rightarrow |3-x|<4\Rightarrow -4<x-3<4\Rightarrow -1<x<7$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $D_f=(0,1)\cup(1,3)\cup(5,7)$ است. اعداد صحیح دامنهٔ تابع $x=6$ و $x=2$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۸ است.

۴۹ **۳**

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2-\log_3(x^2-8x)}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

۱) $x^2-8x>0\Rightarrow x(x-8)>0\Rightarrow x<0$ یا $x>8$

۲) $2-\log_3(x^2-8x)\ge 0\Rightarrow \log_3(x^2-8x)\le \log_3^9$

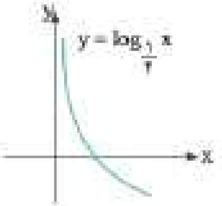
$\Rightarrow x^2-8x\le 9$

$\Rightarrow x^2-8x-9\le 0\Rightarrow (x-9)(x+1)\le 0\Rightarrow -1\le x\le 9$

با اشتراک (۱) و (۲) دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $[-1,0)\cup(8,9]$ به‌دست می‌آید که شامل ۲ عدد صحیح است.

۵۰ **۱**

چون $P(x)=\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}}^x}$ زیر رادیکال با فرجهٔ زوج قرار دارد، پس باید نامنفی باشد. در ضمن با توجه به نمودار $y=\log_{\frac{1}{2}}^x$ داریم:



$\Rightarrow$

x		۰		۱	
x	−	۰	+		+
$\log_{\frac{1}{2}}x$			+	۰	−
$P(x)$		ت.ن	+	ت.ن	−

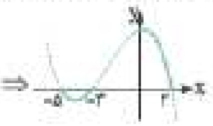
پس دامنهٔ تابع $f(x)$ بازهٔ $(0,1)$ می‌باشد که فاقد عدد صحیح است.

۵۱ **۴**

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

حال برای تعیین دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\ge 0$ باشد.

$$\begin{cases} x\ge 0, f(x)\ge 0 : \text{راست و بالای محور xها} \\ x\le 0, f(x)\le 0 : \text{چپ و پایین محور xها} \end{cases}\Rightarrow$$

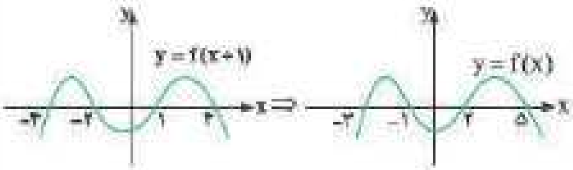


بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $[-5,-3]\cup[0,2]$ است.

پیروش سرعتی با جایگذاری $x=-1$ در تابع به عبارت $\sqrt{-f(-1)}$ می‌رسیم. از آن‌جایی که $f(-1)$ مثبت است، پس عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود و گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» حذف می‌شوند.

۵۲ | **۴**

نمودار تابع $y=f(x+1)$ را ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست آید:



حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲+۴x+۳)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$(x^۲+۴x+۳)f(x)\geq ۰$

x		-۳		-۱		۲		۵	
$x^۲+۴x+۳$	+	۰	−	۰	+		+		+
$f(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−
$(x^۲+۴x+۳)f(x)$	−	۰	−	۰	−	۰	+	۰	−

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $[۲,۵]\cup\{-۳,-۱\}$ که شامل ۶ عدد صحیح است.

۵۳ | **۱**

با توجه به این‌که در عبارت $P(x)=\dfrac{f(x)}{f(۲+x)}$ ریشه‌های صورت $x=-۲,۰,۱$ می‌باشد، پس ریشه‌های مخرج $x=-۴,-۲,-۱$ بوده و برای تعیین علامت $P(x)$ داریم:

x		-۴		-۲		-۱		۰		۱	
$P(x)$	−	تن	+	تن	+	تن	−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow D_g=(-۴,-۲)\cup(-۲,-۱)\cup[۰,۱]$

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)$ شامل ۳ عدد صحیح ۱، ۰ و ۳- است.

۵۴ | **۱**

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\log_۲(x+۳)$ را پیدا می‌کنیم:

$x+۳>۰\Rightarrow x>-۳$

حالا عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. برای تعیین علامت باید ریشه‌های صورت و مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} g(x)=۰\Rightarrow x=-۴,-۳,۲,۴ \\ ۲-f(x)=۰\Rightarrow f(x)=۲\Rightarrow \log_۲(x+۳)=۲\Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{g(x)}{۲-f(x)}\geq ۰\Rightarrow$

x		-۴		-۳		۱		۲		۴	
$g(x)$		۰	+	۰	−		−	۰	+	۰	
$۲-f(x)$			+		+	۰	−		−		
$\dfrac{g(x)}{۲-f(x)}$		تن	+	تن	−	تن	+	۰	−	۰	

با توجه به دامنهٔ تابع $f(x)=\log_۲(x+۳)$، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\dfrac{g(x)}{۲-f(x)}}$ برابر بازهٔ $[۱,۲)$ است که شامل یک عدد صحیح است.

۵۵ | **۱**

باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$f(x)g(x)-g^۲(x)\geq ۰\Rightarrow g(x)(f(x)-g(x))\geq ۰$

ریشه‌های $g(x)=۰$ برابر $x=-۳,۴$ هستند. در ضمن نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در دو نقطهٔ $x=-۲,۳$ متقاطع‌اند، پس ریشه‌های $f(x)-g(x)=۰$ برابر $x=-۲,۳$ هستند. حالا جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x		-۳		-۲		۳		۴	
$g(x)$	−	۰	+		+		+	۰	−
$f(x)-g(x)$	+		+	۰	−	۰	+		+
$g(x)(f(x)-g(x))$	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow D_y=[-۳,-۲]\cup[۳,۴]$

مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو دامنه برابر $-۳+۴=۱$ است.

۵۶ | **۴**

بُرد تابع $y=\frac{۱}{۲}x+۱$ برابر بازهٔ $[۰,\frac{۵}{۲}]$ است، پس:

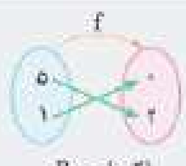
$۰\leq\frac{۱}{۲}x+۱\leq\frac{۵}{۲}\Rightarrow -۱\leq\frac{۱}{۲}x\leq\frac{۳}{۲}\Rightarrow -۲\leq x\leq ۳$

دامنهٔ تابع شامل ۶ عدد صحیح $x=-۲,-۱,۰,۱,۲,۳$ است.

یادآوری

بُرد تابع

به مجموعهٔ خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به‌دست می‌آید، بُرد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن بُرد تابع	
نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور y ها	 $R_f=[۱,۳]$
نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که به اعضای آن پیکان وارد شده	 $R_f=\{۰,۲\}$
زوج مرتبی: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم	$f=\{(۱,۲),(۵,۰)\}\Rightarrow R_f=\{۰,۲\}$

۵۷ | **۴**

ابتدا دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۴-x}:۴-x\geq ۰\Rightarrow ۴\geq x\\ \sqrt{x-۴}:x-۴\geq ۰\Rightarrow x\geq ۴\end{array}\right\}\Rightarrow D_f=\{۴\}$$

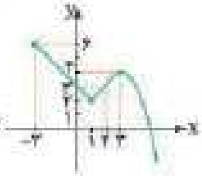
پس تنها عضو دامنهٔ تابع $\{۴\}$ است. حالا بُرد تابع را پیدا می‌کنیم:

$f(۴)=۰+۰+۱۶-۸+۳=۱۱$

۵۸ گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x-1|+2 & ; \ -3\le x<2\\ -x^2+6x-5 & ; \ 2\le x\end{cases}\Rightarrow$$



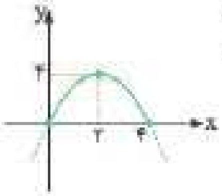
بنابراین برد تابع f برابر $(-\infty,6]$ است.

۵۹ گزینه ۲

عبارت زیر رادیکال یعنی $4x-x^2$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد،

$$4x-x^2\ge 0\Rightarrow x(4-x)\ge 0\Rightarrow 0\le x\le 4$$

حالا به منحنی $y=4x-x^2$ در بازهٔ $0\le x\le 4$ نگاه کنید:



با توجه به این‌که محدودهٔ بُرد $y=4x-x^2$ در بازهٔ $0\le x\le 4$ برابر $0\le y\le 4$ است،
پس $0\le\sqrt{4x-x^2}\le 2$ است. بنابراین:

$$2\le 2+\sqrt{4x-x^2}\le 4$$

$$\Rightarrow R_f=[2,4]\Rightarrow b-a=2$$

۶۰ گزینه ۴

عبارت زیر رادیکال، یک عبارت درجهٔ دوم همواره مثبت است. پس دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است. حالا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}=\sqrt{(x+2)^2+3}$$

چون کمترین مقدار $y=(x+2)^2+3$ برابر ۳ است، پس:

$R_f=[\sqrt{3},+\infty)\Rightarrow$ کمترین مقدار a برابر $\sqrt{3}$ است

۶۱ گزینه ۳

دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است. حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

با توجه به این‌که $x^2>0$ است، پس $x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2$ است و بُرد تابع f برابر $[2,+\infty)$ است.

جمع هر عبارت حقیقی با معکوسش به‌صورت زیر است:

(۱) $x>0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\ge 2$

(۲) $x<0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\le -2$

به نظر شما، بُرد تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ کدام است؟

به نظر شما، بُرد تابع $f(x)=|x|+\frac{1}{|x|+4}$ کدام است؟

۶۲ گزینه ۱

ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

چون $\sqrt{x^2+1}>0$ است، پس $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2$ است و بُرد تابع f به‌صورت بازهٔ $[2,+\infty)$ است که شامل عدد طبیعی $x=1$ نیست.

۶۳ گزینه ۲

می‌دانیم در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و بُرد آن $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

پس بُرد تابع $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$ برابر $\mathbb{R}-\{1\}$ است. حالا بُرد تابع $g(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow 1+\sqrt{x}\ge 1\Rightarrow 0<\frac{1}{1+\sqrt{x}}\le 1$$

پس بُرد این تابع به‌صورت بازهٔ $(0,1]$ است.

۶۴ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+7x+12}{x^2-16}=\frac{(x+3)(x+4)}{(x-4)(x+4)}$$

$$=\frac{x+3}{x-4},\ D_f=\mathbb{R}-\{\pm 4\}$$

چون $x=-4$ جزء دامنهٔ تابع نیست پس $f(-4)=\frac{1}{8}$ هم جزء بُرد تابع نیست. از طرفی می‌دانیم برد تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است، بنابراین برد تابع f شامل دو عدد $\frac{1}{8}$ ، ۱ نیست.

$$R_f=\mathbb{R}-\{\frac{1}{8},1\}$$

۶۵ گزینه ۱

می‌دانیم $0\le\cos^2 x\le 1$ است. در ضمن عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$-\cos^2 x\ge 0\Rightarrow\cos^2 x\le 0$$

پس نتیجه می‌گیریم فقط $\cos^2 x=0$ قابل قبول است. بنابراین:

$$f(x)=2^{\sqrt{-\cos^2 x}}=2^0=1$$

پس بُرد تابع f شامل یک عضو صحیح است: $R_f=\{1\}$

۶۶ گزینه ۳

می‌دانیم $-1\le\cos x\le 1$ است، بنابراین:

$$-1\le\cos x\le 1\xrightarrow{\times(-1)}-1\le-\cos x\le 1\xrightarrow{+1}0\le 1-\cos x\le 2$$

$$\Rightarrow 1\le 2^{1-\cos x}\le 4\xrightarrow{-1}0\le 2^{1-\cos x}-1\le 3\Rightarrow 0\le y\le 3$$

پس برد تابع f شامل ۳ عدد طبیعی است.

۶۷ گزینه ۲

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}\dfrac{4x^2-6x}{x}; & x>0\\[2mm] \dfrac{-4x^2+6x}{x}; & x<0\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}4x-6 & ; x>0\\ -4x+6 & ; x<0\end{cases}$$

۳۲۳ **۲**

در میان گزینه‌ها، نمودار تابع $y=x^۳-x+۱$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸})$ می‌گذرد،

$$y=(\frac{۱}{۲})^۳-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱-۴+۸}{۸}=\frac{۵}{۸}$$

پس وارون این تابع از نقطهٔ $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ می‌گذرد.

حواست باشه

۱) شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.

۲) اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} است و برعکس،

$$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

۳) دامنهٔ تابع f با بُرد تابع f^{-1} برابر است. همچنین بُرد تابع f نیز با دامنهٔ تابع f^{-1} برابر است. $R_{f^{-1}}=D_f,D_{f^{-1}}=R_f$

۴) نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.

۳۲۴ **۱**

با توجه به نمودار، $f(-۳)=۵$ و $f(۲)=۰$ است. پس:

$$\begin{cases}f^{-1}(۵)=-۳\\ f^{-1}(۰)=۲\end{cases}\Rightarrow\frac{f^{-1}(۵)}{f(a)+f^{-1}(۰)}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{-۳}{f(a)+۲}=-\frac{۳}{۴}$$

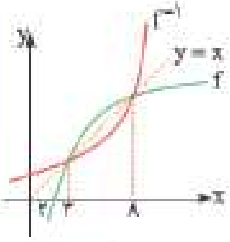
$$\Rightarrow f(a)+۲=۴\Rightarrow f(a)=۲\xrightarrow{f(۰)=۲}a=۰$$

۳۲۵ **۴**

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x-f^{-1}(x)\ge ۰\Rightarrow x\ge f^{-1}(x)$$

با توجه به نمودار زیر، بازه‌ای که در آن مقادیر $y=f^{-1}(x)$ کم‌تر یا مساوی مقادیر $y=x$ باشد، برابر بازهٔ $[۳,۸]$ است.



حواست باشه

برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f، باید نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

۳۲۶ **۴**

چون g وارون f است، پس باید $f^{-1}(۴)-f^{-1}(۱۲)$ را به‌دست آوریم، می‌توانیم تابع f را یک بار برابر ۴ و یک بار برابر ۱۲ بگذاریم:

$$\begin{cases}-x+\sqrt{-۲x}=۴\Rightarrow x=-۲\\ -x+\sqrt{-۲x}=۱۲\Rightarrow x=-۸\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(۴)-f^{-1}(۱۲)=(-۲)-(-۸)=۶$$

حواست باشه

برای محاسبهٔ $f^{-1}(a)$ بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x)=a$ را حل کنیم. جواب این معادله همان $f^{-1}(a)$ است.

به جور دیگه! طراح در کنکور تجربی خارج ۹۹ این سؤال رو اینجوری پرسید: «فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۳)+g(۱۵)$ کدام است؟» جواب:

$g(۳)=f^{-1}(۳)=۱$

$g(۱۵)=f^{-1}(۱۵)=۹$ $\xrightarrow{\text{مجموع}}۱+۹=۱۰$

۳۲۷ **۳**

چون $g(۱)=f^{-1}(۱)$ است، پس:

$$f(x)=x-۲\sqrt{x}+۱=۱\xrightarrow{x\ge ۱}x=۴\Rightarrow g(۱)=۴$$

حال مقدار $g(۴)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x-۲\sqrt{x}+۱=۴\Rightarrow x=۹\Rightarrow g(۴)=۹\Rightarrow g(g(۱))=۹$$

به جور دیگه! طراح ممکن بود اینجوری بپرسه: «اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟»

$$y=x-۲\sqrt{x}+۱=(\sqrt{x}-۱)^۲\Rightarrow\sqrt{y}=|\sqrt{x}-۱|$$

$$\xrightarrow{x\ge ۱}\sqrt{x}=\sqrt{y}+۱\Rightarrow g(x)=(\sqrt{x}+۱)^۲$$

۳۲۸ **۴**

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x-۱)=\log_۳^{(x+۱)}\xrightarrow{x\to x+۱}f(x)=\log_۳^{(x+۲)}$$

حالا سراغ محاسبهٔ $f^{-1}(g(۴))$ می‌رویم. چون $g(۴)=۲\cos ۲\pi=۲$ است، پس باید $f^{-1}(۲)$ را پیدا کنیم:

$$f(x)=۲\Rightarrow\log_۳^{(x+۲)}=۲\Rightarrow x+۲=۹\Rightarrow x=۷$$

پس $f^{-1}(۲)=۷$ است.

به جور دیگه! همین سؤالو با یک تابع نمایی هم ببینیم: «اگر $f(x-۱)=۲^{-۳x}+۱$ و $g(x)=۲\cos(\frac{\pi x}{۴})$ باشد، مقدار $f^{-1}og(۴)$ کدام است؟» که جوابش برابر است با: $f^{-1}(g(۴))=f^{-1}(۲)=-\frac{۱}{۳}$

۳۲۹ **۳**

می‌خواهیم حاصل $f(-\frac{۲}{۵})+g^{-1}(-\frac{۲}{۵})$ را پیدا کنیم. با فرض $f(-\frac{۲}{۵})=a$ و $g^{-1}(-\frac{۲}{۵})=b$ داریم:

$$۱)\ f^{-1}(a)=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{a}{۱+|a|}=-\frac{۲}{۵}\xrightarrow{a<۰}\frac{a}{۱-a}=-\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵a=-۲+۲a\Rightarrow ۳a=-۲\Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow f(-\frac{۲}{۵})=-\frac{۲}{۳}$$

$$۲)\ g(b)=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow\sqrt{b}-۱=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow\sqrt{b}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow b=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow g^{-1}(-\frac{۲}{۵})=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow(f+g^{-1})(-\frac{۲}{۵})=-\frac{۲}{۳}+\frac{۹}{۲۵}=\frac{-۵۰+۲۷}{۷۵}=-\frac{۲۳}{۷۵}$$

به جور دیگه! در آزمون مهر ۱۴۰۰ طراح اینجوری پرسید: «اگر $f(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ باشد، حاصل $f^{-1}(-\frac{۳}{۴})+f^{-1}(\frac{۵}{۹})$ کدام است؟» جواب: $-\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۱}{۲}$

۳۳۰ ۳

برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید در تابع $f(x)=\begin{cases}6-2x\ ;\ x<2\\ 4-x\ ;\ x\ge 2\end{cases}$ ضابطهٔ پایینی را برابر ۲- بگذاریم:

$4-x=-2 \Rightarrow x=6 \Rightarrow f^{-1}(-2)=6$

برای پیدا کردن $g^{-1}(-5)$ باید در تابع $g(x)=\begin{cases}2x-3; x<0\\ x-4; x\ge 0\end{cases}$ ضابطهٔ بالایی را برابر ۵- بگذاریم:

$2x-3=-5 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow g^{-1}(-5)=-1$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$f(g^{-1}(-5))+g(f^{-1}(-2))=f(-1)+g(6)=8+2=10$

۳۳۱ ۳

مطابق شکل، نقاط $(-2,2),(0,3)$ روی نمودار تابع $y=f(2x-1)$ قرار دارند، پس در آن صدق می‌کنند:

$(-2,2)\Rightarrow f(2\times -2-1)=2 \Rightarrow f(-5)=2\Rightarrow f^{-1}(2)=-5$

$(0,3)\Rightarrow f(2\times 0-1)=3\Rightarrow f^{-1}(3)=-1$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(2)+f^{-1}(3)}{f(-5)}=\frac{(-5)+(-1)}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

۳۳۲ ۳

ابتدا با توجه به شکل صورت سؤال، ضابطهٔ توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+2\ ;\ x\le 0\\ -x+2\ ;\ x>0\end{cases},\ g(x)=-2x-2$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید ضابطهٔ پایینی تابع f را برابر ۲- قرار دهیم:

$-x+2=-2\Rightarrow x=4\Rightarrow f^{-1}(-2)=4$

پس سادهٔ شدهٔ عبارت مورد نظر برابر است با:

$g(f^{-1}(-2))+g^{-1}(f(-1))=g(4)+g^{-1}(4)$

برای پیدا کردن $g^{-1}(4)$ داریم:

$g(x)=-2x-2=4\Rightarrow x=-3\Rightarrow g^{-1}(4)=-3$

$\Rightarrow g(4)+g^{-1}(4)=(-10)+(-3)=-13$

۳۳۳ ۲

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به‌دست می‌آوریم:

$10y-x=-10 \xrightarrow{y=1} 10-x=-10\Rightarrow x=20$

پس مختصات نقطه برخورد تابع f^{-1} با خط برابر $(20,1)$ است و این نقطه روی تابع f^{-1} قرار دارد، یعنی $f^{-1}(20)=1$ است. داریم:

$f^{-1}(20)=1\Rightarrow f(1)=20\Rightarrow (1)^3+6(1)^2+a(1)+1=20\Rightarrow a=12$

۳۳۴ ۴

چون وارون تابع f خط $y=12-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند، پس:

$y=12-x\xrightarrow{y=10}10=12-x\Rightarrow x=2\Rightarrow (2,10)\in f^{-1}$

در نتیجه $(10,2)\in f$ است، پس:

$f(10)=2\Rightarrow \sqrt{10-2\sqrt{10m-1}}=2\Rightarrow 10-2\sqrt{10m-1}=4$

$\Rightarrow \sqrt{10m-1}=3\Rightarrow m=1\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

$\Rightarrow f(m+4)=f(5)=1$

۳۳۵ ۴

چون $f^{-1}(g(a))=6$ است، پس $g(a)=f(6)$ است. در ضمن $f(6)=7$ است، پس:

$g(a)=7\xrightarrow{(4,7)\in g}a=4$

۳۳۶ ۳

در تابع f داریم، $f(\frac{1}{4})=-3$ و با توجه به این‌که $f(g^{-1}(a))=-3$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $g^{-1}(a)=\frac{1}{4}$ بنابراین:

$g^{-1}(a)=\frac{1}{4}\Rightarrow g(\frac{1}{4})=a$

ضابطهٔ $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$g(\frac{1}{4})=-(\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}$

۳۳۷ ۲

چون $f^{-1}(g^{-1}(a))=8$ است، پس $g^{-1}(a)=f(8)$ است. از طرفی برای پیدا کردن $f(8)$، باید به سراغ ضابطهٔ بالایی تابع f برویم:

$x\ge 3: f(x)=\sqrt{5x+9}\xrightarrow{x=8}f(8)=\sqrt{5\times 8+9}=7$

بنابراین $g^{-1}(a)=7$ است، یعنی $g(7)=a$ است. با توجه به تابع g نتیجه می‌گیریم $a=3$ است.

۳۳۸ ۲

چون $f^{-1}(g(2a))=6$ است، پس $g(2a)=f(6)$ است، بنابراین با توجه به تابع‌های f و g داریم:

$g(2a)=f(6)\xrightarrow{f(6)=3}g(2a)=3\Rightarrow\frac{2a}{2a-1}=3$

$\Rightarrow 6a-3=2a\Rightarrow 4a=3\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

۳۳۹ ۴

فرض می‌کنیم $(g^{-1}of^{-1})(8)=\alpha$ باشد، پس:

$g^{-1}(f^{-1}(8))=\alpha\Rightarrow g(\alpha)=f^{-1}(8)\ (1)$

حال برای محاسبهٔ $f^{-1}(8)$ ضابطهٔ f را برابر ۸ می‌گذاریم:

$8=\frac{2}{5}x-4\Rightarrow\frac{2}{5}x=12\Rightarrow x=30\Rightarrow f^{-1}(8)=30$

بنابراین از (۱) داریم:

$g(\alpha)=f^{-1}(8)=30\Rightarrow\alpha^3+\alpha=30\Rightarrow\alpha=3\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(8))=3$

۳۴۰ ۱

ابتدا $f^{-1}(20)$ را پیدا می‌کنیم:

$x+\sqrt{x}=20\Rightarrow x=16\Rightarrow f^{-1}(20)=16$

پس $g^{-1}(f^{-1}(20))=g^{-1}(16)$ است، پس ضابطهٔ g را برابر ۱۶ می‌گذاریم:

$\frac{9x+6}{1-x}=16\Rightarrow 9x+6=16-16x\Rightarrow 25x=10$

$\Rightarrow x=\frac{2}{5}\Rightarrow g^{-1}(16)=\frac{2}{5}$

۳۴۱ ۳

می‌دانیم $f(g^{-1}(-1))=-\frac{11}{3}$ است، پس ابتدا ضابطهٔ تابع f را برابر $-\frac{11}{3}$ می‌گذاریم:

$\frac{2x+1}{3}=-\frac{11}{3}\Rightarrow 2x=-12\Rightarrow x=-6$

پس $f(-6)=-\frac{11}{3}$ است، بنابراین $g^{-1}(-1)=-6$ است، یعنی $g(-6)=-1$ است:

$$g(-6)=\frac{-12+a}{a+6}=-1\Rightarrow -12+a=-a-6\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3$$

۳۴۲ **۱**

$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(4,3),(6,4)\}$ است، حالا خواهیم داشت:

$$x=2:\frac{g(2)}{g(f^{-1}(2))}=\frac{g(2)}{g(1)}\Rightarrow \times$$

$$x=5:\frac{g(5)}{g(f^{-1}(5))}=\frac{g(5)}{g(2)}=\frac{6}{3}=2$$

$$x=4:\frac{g(4)}{g(f^{-1}(4))}=\frac{g(4)}{g(3)}=\frac{2}{1}=2$$

$$x=6:\frac{g(6)}{g(f^{-1}(6))}=\frac{g(6)}{g(4)}\Rightarrow \times$$

پس تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$ به‌صورت $\{(5,2),(4,2)\}$ است.

۳۴۳ **۴**

$g^{-1}=\{(3,2),(2,4),(6,5),(1,3)\}$ است، حالا خواهیم داشت:

$$x=1:g^{-1}(f(1))-f(1)=g^{-1}(2)-f(1)=4-2=2$$

$$x=2:g^{-1}(f(2))-f(2)=g^{-1}(5)-f(2)\Rightarrow \times$$

$$x=3:g^{-1}(f(3))-f(3)=g^{-1}(4)-f(3)\Rightarrow \times$$

$$x=4:g^{-1}(f(4))-f(4)=g^{-1}(6)-f(4)=5-6=-1$$

پس برد تابع $(g^{-1}of)-f$ برابر $\{2,-1\}$ است.

۳۴۴ **۱**

ابتدا مقدار $g(2)$ را به‌دست می‌آوریم، پس ضابطهٔ g^{-1} را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$1-x=2\Rightarrow x=-1\Rightarrow g(2)=-1$$

پس $f(g(2))=f(-1)$ است و داریم:

$$f(x+1)=\frac{g(x)-1}{x}\xrightarrow{x=-2}f(-1)=\frac{g(-2)-1}{-2}$$

حالا برای به‌دست آوردن $g(-2)$، تابع g^{-1} را برابر ۲- قرار می‌دهیم:

$$1-x=-2\Rightarrow x=3\Rightarrow g(-2)=3$$

$$\Rightarrow f(-1)=\frac{g(-2)-1}{-2}=\frac{3-1}{-2}=-1$$

۳۴۵ **۱**

فرض می‌کنیم $g^{-1}(3)=a$ باشد، پس $g(a)=3$ است. حالا در ضابطهٔ fog به جای xها، a قرار می‌دهیم:

$$f(g(a))=a^3g(a)+4g(a)\xrightarrow{g(a)=3}f(3)=3a^3+4\times 3$$

از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع f داریم:

$$f(3)=3^2+4(3)+15=36$$

$$\Rightarrow 3a^3+12=36\Rightarrow 3a^3=24\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$$

پس $g^{-1}(3)=a=2$ است.

۳۴۶ **۳**

چون $f(x^3+2x)=2^x-14$ است، پس $f^{-1}(2^x-14)=x^3+2x$ است و با جای‌گذاری $x=4$ مقدار $f^{-1}(2)$ به‌دست می‌آید:

$$x=4:f^{-1}(2^4-14)=4^3+2\times 4\Rightarrow f^{-1}(2)=72$$

۳۴۷ **۴**

چون $f^{-1}(\frac{x+2}{x-1})=x^3-1$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت $f(x^3-1)=\frac{x+2}{x-1}$ است. حال چون $f(7)$ را می‌خواهیم، پس داریم:

$$x^3-1=7\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$

بنابراین با جای‌گذاری $x=2$ در ضابطهٔ تابع داریم:

$$f(2^3-1)=\frac{2+2}{2-1}\Rightarrow f(7)=4$$

۳۴۸ **۴**

برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد $f^{-1}(x)$ و نیمساز ناحیهٔ دوم یعنی $y=-x\,;\,x<0$ از ویژگی تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$f^{-1}(x)=-x\Rightarrow f(-x)=x\Rightarrow -x+\frac{1}{2x}=x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x}=2x\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\xrightarrow{x<0}x=-\frac{1}{2}$$

۳۴۹ **۲**

با فرض $g^{-1}(6)=a$ داریم:

$$g(a)=6\Rightarrow f(a)+\sqrt{f(a)}=6\Rightarrow f(a)=4$$

حال چون $f^{-1}(x)$ داده شده، پس می‌توانیم از $f(a)=4$ نتیجه بگیریم $f^{-1}(4)=a$ است:

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}\xrightarrow{x=4}a=f^{-1}(4)=\sqrt[3]{8}=2\Rightarrow g^{-1}(6)=2$$

۳۵۰ **۴**

با فرض $g^{-1}(16)=a$ داریم: $g(a)=16\Rightarrow f(3a-4)=16$

حال از $f(3a-4)=16$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(16)=3a-4$ است و خواهیم داشت:

$$f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}\xrightarrow{x=16}3a-4=f^{-1}(16)=16+\sqrt{16}=20$$

$$\Rightarrow a=8$$

بنابراین $g^{-1}(16)=8$ است.

۳۵۱ **۱**

نمودار هر تابع (به شرط وارون‌پذیر بودن) و وارون آن نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. پس باید وارون تابع خطی داده شده را به‌دست آوریم. بنابراین کافی است جای x و y را عوض کنیم تا معادلهٔ خط d به‌دست آید:

$$3y-2x=4\xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}}d:3x-2y=4$$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}}y=-2$$

> [illegible] می‌توانیم بدون محاسبهٔ تابع وارون، در معادلهٔ خط اولیه به جای y صفر بگذاریم.

۳۵۲ ۴

برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون f، نحوهٔ تشکیل تابع f را بررسی می‌کنیم.

$f: (-۳) \to (÷۲)$ $f^{-1}: (+۳) \leftarrow (×۲)$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = ۲x + ۳ \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{۶ واحد}} y = ۲x + ۳ - ۶$$

حالا نقطهٔ برخورد تابع حاصل را با تابع f پیدا می‌کنیم.

$$\frac{x-۳}{۲} = ۲x - ۳ \Rightarrow x - ۳ = ۴x - ۶ \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱$$

$$\Rightarrow f(۱) = -۱ \Rightarrow A(۱,-۱) \Rightarrow OA = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

راهکار سریع

برای وارون کردن توابعی که در ضابطهٔ آن‌ها یک x وجود دارد، یک راهکار جالب و سریع این است که ابتدا نحوهٔ تشکیل تابع f را پیدا کنید. سپس برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون تابع، اعمال را به طور برعکس و از آخر به اول روی x انجام دهید. در جدول زیر، تعدادی از این اعمال و برعکس آن‌ها آورده شده:

−	+
÷	×
$\sqrt{\ }$	توان ۲
$\sqrt[۳]{\ }$	توان ۳
$\log_a x$	a^x

۳۵۳ ۳

با توجه به تابع $f(x) = \frac{۲}{۳}x + ۲$ داریم:

$f: (×\frac{۲}{۳}) \to (+۲) \Rightarrow f^{-1}: (÷\frac{۲}{۳}) \leftarrow (-۲)$

پس $f^{-1}(x) = \frac{x-۲}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳x-۶}{۲}$ است. حالا معادلهٔ f^{-1} را مرتب می‌کنیم و فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۱)$ را از آن پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{۳x-۶}{۲} \Rightarrow ۳x - ۲y - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|۲۱ - ۲ - ۶|}{\sqrt{۳^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

۳۵۴ ۲

با توجه به تابع $f(x) = ۲x - ۱$ داریم:

$f: (×۲) \to (-۱) \Rightarrow f^{-1}: (÷۲) \leftarrow (+۱)$

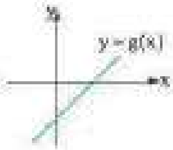
بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{x+۱}{۲}$ است و داریم:

$$g(x+۱) = f(x) - f^{-1}(x) = ۲x - ۱ - \frac{x+۱}{۲} = \frac{۳x-۳}{۲}$$

حالا در تابع $g(x+۱)$ به جای xها $x-۱$ قرار می‌دهیم تا به تابع $g(x)$ برسیم:

$$g(x+۱) = \frac{۳x-۳}{۲} \xrightarrow{x \to x-۱} g(x) = \frac{۳(x-۱)-۳}{۲} = \frac{۳x-۶}{۲}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{۳}{۲}x - ۳ \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.

۳۵۵ ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-۲)(x-۳)}{x-۳} = x - ۲\ ;\ x \neq ۳ \Rightarrow$$

عدد ۱ در محدودهٔ بُرد تابع f وجود ندارد، پس: $f^{-1}(x) = x + ۲\ ;\ x \neq ۱$

۳۵۶ ۲

چون این دو خط نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن‌اند، پس وارون یکی از آن‌ها با دیگری برابر است، بنابراین در خط $۲x - ۳y = b$ جای x و y را عوض می‌کنیم تا وارون آن یعنی $۲y - ۳x = b$ به‌دست آید.

پس $۲y - ۳x = b$ و $ax + by = ۸$ برابراند، پس: $\frac{a}{-۳} = \frac{b}{۲} = \frac{۸}{b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{۲} = \frac{۸}{b} \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \pm ۴ \\ \frac{a}{-۳} = \frac{b}{۲} \Rightarrow ab = -۲۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۴ \Rightarrow a = -۶ \Rightarrow a + b = -۲ \\ b = -۴ \Rightarrow a = ۶ \Rightarrow a + b = ۲ \end{cases}$$

۳۵۷ ۲

با توجه به تابع $f(x) = \frac{۳x-۱}{a}$ داریم:

$f: (×۳) \to (-۱) \to (÷a)$

$\Rightarrow f^{-1}: (÷۳) \leftarrow (+۱) \leftarrow (×a)$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{ax+۱}{۳}$ است. حالا $f(۳f^{-1}(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(۳f^{-1}(x)) = f(ax+۱) = \frac{۳(ax+۱)-۱}{a} = \frac{۳ax+۲}{a} = ۳x + \frac{۲}{a}$$

$$\Rightarrow ۳x + \frac{۲}{a} = ۳x + ۵ \Rightarrow \frac{۲}{a} = ۵ \Rightarrow a = \frac{۲}{۵}$$

۳۵۸ ۱

نحوهٔ تولید تابع $f(x) = ۲ - \sqrt{x-۱}$ به‌صورت زیر است:

$f: (-۱) \to (-\sqrt{\ }) \to (+۲)$

$f^{-1}: (+۱) \leftarrow (\text{توان ۲}) \leftarrow (-۲)$

پس $f^{-1}(x) = (x-۲)^۲ + ۱$ است. در ضمن بُرد تابع f بازهٔ $(-\infty,۲]$ است، پس دامنهٔ تابع f^{-1} نیز برابر همین بازه است.

پیروزی سریع چون $f(۵) = ۰$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(۰) = ۵$ باشد. فقط گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۳۵۹ **۳**

ابتدا نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم، یعنی آن را وارون می‌کنیم. توجه کنید بُرد تابع f بازهٔ $[2, +\infty)$ است.

$y: (-1) \to (\sqrt{\ }) \to (+2)$

$y^{-1}: (+1) \leftarrow (\text{توان } 2) \leftarrow (-2)$

$\Rightarrow y^{-1} = (x-2)^2 + 1 \,;\, x \geq 2$

حالا نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow[\text{۲ واحد راست}]{x \to (x-2)} y = (x-4)^2 + 1$

$\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۳ واحد}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3$

پس $g(x) = (x-4)^2 - 2$ است و $g(4) = -2$ است.

۳۶۰ **۳**

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ است. پس $a = 2$ و $b = 1$ می‌باشد. حالا، اگر نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کنیم، به تابع $y = 1 + \sqrt{-x+2}$ می‌رسیم که بُرد آن به‌صورت بازهٔ $[1, +\infty)$ است. حالا نمودار حاصل را وارون می‌کنیم:

$y: (x \to -1) \to (+2) \to (\sqrt{\ }) \to (+1)$

$y^{-1}: (x \to -1) \leftarrow (-2) \leftarrow (\text{توان } 2) \leftarrow (-1)$

$\Rightarrow y^{-1} = 2 - (x-1)^2 \,;\, x \geq 1$

در نتیجه $g(x) = 2 - (x-1)^2 \,;\, x \geq 1$ است و داریم:

$g(a+b) = g(2+1) = 2 - (3-1)^2 = 2 - 4 = -2$

۳۶۱ **۴**

وقتی نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کنیم به نمودار $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ می‌رسیم. حالا وارون تابع حاصل را پیدا می‌کنیم:

$y: (-2) \to (\sqrt[3]{\ }) \to (+1)$

$y^{-1}: (+2) \leftarrow (\text{توان } 3) \leftarrow (-1) \Rightarrow y^{-1} = (x-1)^3 + 2$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$ از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

به جورِ دیگه! طراح می‌تونست یکم تست رو جذاب‌تر بپرسه! اینطوری: «اگر نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + a$ از نقطهٔ $(1, 2)$ بگذرد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟»

جواب: $(1,2) \in f \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-2}$

۳۶۲ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 6x = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$

طول رأس این سهمی برابر $x = -1$ است که در بازهٔ $x \geq -1$ اکیداً صعودی است. حالا ضابطهٔ وارون تابع را در این بازه پیدا می‌کنیم:

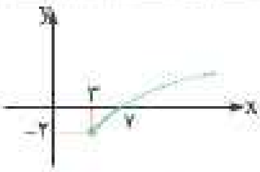
$f: (+1) \to (\text{توان } 2) \to (+3)$

$f^{-1}: (-1) \leftarrow (\sqrt{\ }) \leftarrow (-3) \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$

به جورِ دیگه! طراح میتونه همین تست رو کمی ساده‌تر بپرسه: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3 \,;\, x \geq -1$ کدام است؟»

یا اگه بخواد راه عددگذاری رو سخت‌تر کنه، اینطوری بپرسه: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3 \,;\, x \geq -1$ به صورت $f^{-1}(x) = a + \sqrt{x+b}$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟»

۳۶۳ **۱**



مطابق شکل نمودار تابع f در بازهٔ $[3, 7)$ زیر محور xها قرار دارد و محدودهٔ بُرد آن در این بازه به‌صورت $[-2, 0)$ است:

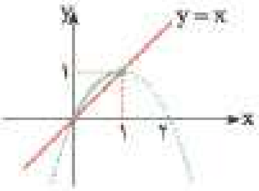
حالا ضابطهٔ وارون تابع را پیدا می‌کنیم:

$f: (-3) \to (\sqrt{\ }) \to (-2)$

$f^{-1}: (+3) \leftarrow (\text{توان } 2) \leftarrow (+2)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+2)^2 + 3 \,;\, -2 \leq x \leq 0$

۳۶۴ **۴**



نمودار تابع f را در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم است، در نظر می‌گیریم؛ بُرد تابع در این بازه به صورت $(0, 1)$ است. حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم و وارون آن را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$f(x) = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1 \,;\, 0 < x < 1$

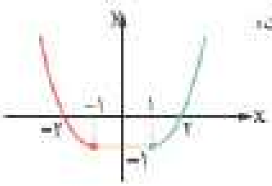
$f: (-1) \to (\text{توان } 2) \to (x \to -1) \to (+1)$

$f^{-1}: (+1) \leftarrow (-\sqrt{\ }) \leftarrow (x \to -1) \leftarrow (-1)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x} \,;\, 0 < x < 1$

۳۶۵ **۳**

وقتی نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x \,;\, x \geq 1$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، باید به جای همهٔ xها، $-x$ قرار دهیم. پس ضابطهٔ آن پس از قرینه نسبت به محور yها به صورت زیر است:



$y = x^2 + 2x \,;\, x \leq -1$

$\Rightarrow y = (x+1)^2 - 1 \,;\, x \leq -1$

حالا نمودار این تابع را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم یعنی آن را وارون می‌کنیم:

$y:\ +1 \rightarrow$ توان ۲ $\rightarrow -1$

$y^{-1}:\ -1 \leftarrow -\sqrt{\ } \leftarrow +1 \Rightarrow y^{-1}=-1-\sqrt{x+1}$

۳۶۶ **۳**

ابتدا باید ضابطهٔ تابع $y=f(x)$ را پیدا کنیم:

$$fog(x)=(2x-1)g(x)=(2x-1)(2x+1)=4x^2-1$$

حالا با فرض $g(x)=2x+1=t$ داریم:

$$x=\frac{t-1}{2}\Rightarrow f(g(x))=4x^2-1\Rightarrow f(t)=4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2-1=t^2-2t$$

پس $f(x)=x^2-2x$ است و طبق گفتهٔ صورت سؤال باید ضابطهٔ وارون آن را در $x\le 1$ پیدا کنیم:

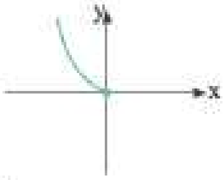
$$f(x)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1\ ;\ x\le 1$$

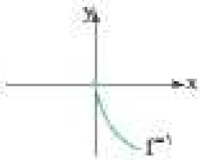
$f:\ -1 \rightarrow$ توان ۲ $\rightarrow -1$

$f^{-1}:\ +1 \leftarrow -\sqrt{\ } \leftarrow +1 \Rightarrow f^{-1}(x)=1-\sqrt{x+1}$

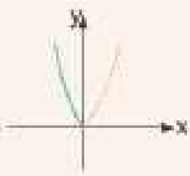
۳۶۷ **۱**

می‌دانیم $f(x)=x^2\sqrt{x^2}=x^2|x|$ است که در بازهٔ $x\le 0$ نزولی است، پس:

$x\le 0:\ f(x)=-x^3\Rightarrow$ 

$\xrightarrow[y=x]{\text{قرینه نسبت به}}$  $\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{x}\ ;\ x\ge 0$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از علامت جمع بین x^2 و $\sqrt{x^2}$ استفاده کنه، «تابع $f(x)=x^2+\sqrt{x^2}$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه کدام است؟»

$f(x)=x^2+|x|=\begin{cases}x^2+x\ ;\ x>0\\ x^2-x\ ;\ x\le 0\end{cases}\xrightarrow{\text{رسم}}$ 

$\xrightarrow{\text{ضابطه}} y^{-1}=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}\ ;\ x\ge 0$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده کنه: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x\sqrt{x}$ کدام است؟»

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}\ ;\ x\ge 0\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده کنه و همچنین بین x و $\sqrt{x}$ علامت جمع قرار بده! ببینیم: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ کدام است؟»

جواب: $f(x)=x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2$

۳۶۸ **۳**

می‌دانیم اگر $f^{-1}(a)=b$ باشد، آنگاه $f(b)=a$ خواهد بود. بنابراین در یک عدد دلخواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$f(8)=\frac{10}{4}-\frac{3}{2}=1\Rightarrow f^{-1}(1)=8$$

$$f^{-1}(1)=a(1)+a(\sqrt{1})=2a\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4$$

۳۶۹ **۱**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=\sqrt{x-1}+1$$

$f:\ -1 \rightarrow \sqrt{\ } \rightarrow +1$

$f^{-1}:\ +1 \leftarrow$ توان ۲ $\leftarrow -1$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^2+1=x^2-2x+2\ ;\ x\ge 1$$

روش سریع عددگذاری کنیم! چون $f(5)=3$ است، پس گزینه‌ای درست است که $f^{-1}(3)=5$ باشد. پس گزینهٔ (۱) درست است.

یه جوره دیگه! اگه طراح رادیکال بیرونی رو نذاره، باز هم برای وارون کردن می‌تونیم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کنیم، مثلاً اینجوری بپرسه: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x+2\sqrt{x-2}+3$ کدام است؟»

جواب: $f(x)=x+2\sqrt{x+2}+3=(\sqrt{x+2}+1)^2$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x}-1)^2-2$

۳۷۰ **۳**

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$1)\ x\ge 0\quad 2)\ \frac{1}{4}x-1\ge 0\Rightarrow x\ge 4\Rightarrow D_f=[4,+\infty)$$

حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{4}x-1}=\sqrt{\frac{1}{4}x^2-x}=\sqrt{(\frac{1}{2}x-1)^2-1}$$

نحوهٔ تولید تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$f:\ \times\frac{1}{2} \rightarrow -1 \rightarrow$ توان ۲ $\rightarrow -1 \rightarrow \sqrt{\ }$

$f^{-1}:\ \div\frac{1}{2} \leftarrow +1 \leftarrow \sqrt{\ } \leftarrow +1 \leftarrow$ توان ۲

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=2\sqrt{x^2+1}+2$$

روش سریع میتونیم عددگذاری کنیم! چون $f(4)=0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0)=4$ باشد، پس گزینهٔ (۳) درست است.

۳۷۱ ۲

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $y=|x+1|-|3x-6|$ ساده می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}2x-7 & ; x\le -1\\ 4x-5 & ; -1<x<2\\ -2x+7 & ; x\ge 2\end{cases}\xrightarrow{\text{نزولی}} y=-2x+7\ ;\ x\ge 2$$

پس ضابطهٔ وارون تابع در بازه‌ای که نزولی است، به‌صورت $y^{-1}=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\ ;\ x\le 3$ است.

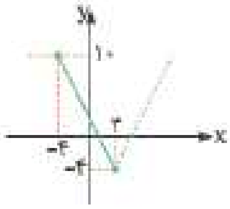
به چوره دیگه! طراح می‌تونست خواستهٔ سوال رو کمی سخت‌تر کنه و اینجوری بپرسه: «نمودار وارون تابع در بازهٔ نزولی و نمودار تابع $y=x^2-3x$ در چند نقطه مشترک هستند؟» جواب: در یک نقطه به طول $x=-1$ مشترک‌اند.

برای به‌دست آوردن وارون توابع قدرمطلقی، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک‌به‌یک است. برای این منظور تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یک‌به‌یک است، تعیین کرده و ضابطهٔ وارون تابع را به‌دست می‌آوریم.

۳۷۲ ۴

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}10 & ; x<-4\\ -2x+2 & ; -4\le x\le 3\\ 2x-10 & ; x>3\end{cases}\Rightarrow$$

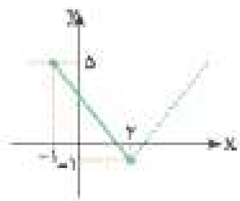


ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$ است. از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $-4\le y\le 10$ است، پس دامنهٔ تابع f^{-1} در این بازه به‌صورت $-4\le x\le 10$ است.

۳۷۳ ۳

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}5 & ; x<-1\\ -2x+3 & ; -1\le x\le 2\\ 2x-5 & ; x>2\end{cases}\Rightarrow$$



ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}; -1\le x\le 5$ است. حال طول نقطهٔ برخورد منحنی f^{-1} و g را محاسبه می‌کنیم:

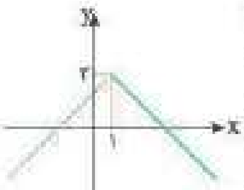
$$f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=x+1\Rightarrow \frac{3}{2}x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

۳۷۴ ۴

ضابطهٔ $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=3-\sqrt{x^2-2x+1}=3-\sqrt{(x-1)^2}=3-|x-1|$$

پس نمودار تابع fog به‌صورت زیر است:

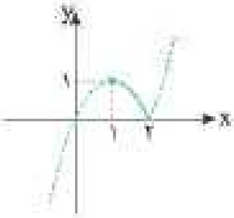


ضابطهٔ تابع در بازهٔ اکیداً نزولی به‌صورت $y=-x+4$ است و چون بُرد تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ است، پس ضابطهٔ وارون آن به‌صورت زیر است:
$y=-x+4; x\le 3$

۳۷۵ ۳

نمودار تابع $f(x)=x|x-2|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-2); x\le 2\\ x(x-2); x>2\end{cases}\Rightarrow$$



ضابطهٔ وارون تابع f در بازهٔ نزولی به‌صورت زیر است:

$$y=-x(x-2)=-x^2+2x-1+1=-(x-1)^2+1$$

y: (-1) → (توان ۲) → (x-1) → (+1)

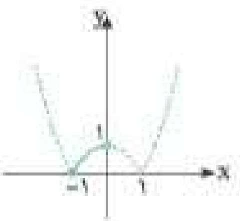
y^{-1}: (+1) ← ($\sqrt{\ }$) ← (×-1) ← (-1)

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}$$

بُرد تابع f در این بازه برابر $0\le y\le 1$ است، پس دامنهٔ f^{-1} نیز برابر $0\le x\le 1$ است.

۳۷۶ ۴

چون $[x]=-1$ است، پس $-1\le x<0$ است. حالا نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم می‌کنیم:



محدودهٔ برد تابع در بازهٔ مورد نظر برابر بازهٔ $[0,1)$ است. حالا نحوهٔ تولید تابع $y=-x^2+1$ به‌صورت زیر است:

y: (توان ۲) → (×(-1)) → (+1)

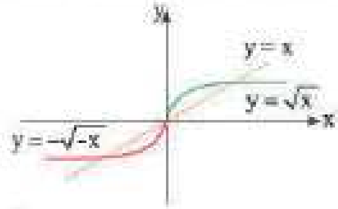
y^{-1}: ($\sqrt{\ }$) ← (×(-1)) ← (-1)

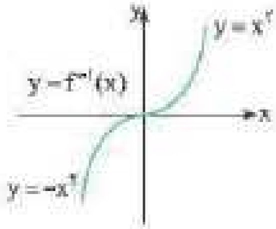
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x}\ ; 0\le x<1$$

۳۷۷ **۳**

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، با توجه به این که وارون تابع‌های رادیکالی با فرجهٔ ۲، به شکل سهمی هستند خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,;x\geq 0\\ -\sqrt{-x}\,;x<0\end{cases}\Rightarrow$$





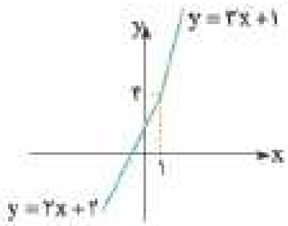
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x\,|x|\,;x\in\mathbb{R}$$

به عبارت دیگه توی کنکور خارج از کشور سال ۹۷، طراح پرسیده ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\;;x\neq 0\\ 0\;;x=0\end{cases}$ کدام است؟ برای حل کافیه $|x|$ رو باز کنید که جواب میشه: $f^{-1}(x)=x|x|$

۳۷۸ **۲**

نمودار تابع f به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}3x+1;x>1\\ 2x+2;x\leq 1\end{cases}$$



حالا با توجه به برد هر یک از ضابطه‌ها، ضابطهٔ وارون تابع به شکل زیر است:

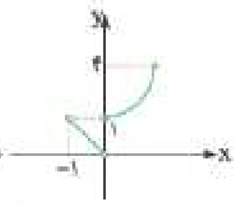
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x-1);x>4\\ \frac{x}{2}-1;x\leq 4\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}}{2}-1=-\frac{1}{4}$$

۳۷۹ **۲**

بهتر است، نمودار تابع f را رسم کنیم. توجه کنید در ضابطهٔ بالایی، وقتی $-1<x<0$ است، پس $[x]=-1$ می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}-x\;;-1<x<0\\ 2^x\;;0\leq x<2\end{cases}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}-x\;;0<x<1\\ \log_2^x\;;1\leq x<4\end{cases}$$

۳۸۰ **۲**

ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{3x+2+2x-2}{x-1}=\frac{5x}{x-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-5}$$

اگر تابع کسری $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک‌به‌یک باشد:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

اگر $a+d=0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

۳۸۱ **۴**

چون $f^{-1}(x)=\frac{5x-3}{bx+4}$ است، پس $f(x)=\frac{-4x-3}{bx-5}$ است. حالا چون بُرد f برابر $\mathbb{R}-\{-2\}$ است، پس:

$$\frac{-4}{b}=-2\Rightarrow b=2\Rightarrow f(x)=\frac{-4x-3}{2x-5}$$

از طرفی دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{a\}$ است، پس:

$$a=\frac{5}{2}\Rightarrow ab=\frac{5}{2}\times 2=5$$

۳۸۲ **۴**

$$f(f(x))=\frac{af(x)+1}{2f(x)-1}\Rightarrow f(x)=\frac{ax+1}{2x-1}$$

از طرفی چون $f^{-1}(0)=-2$ است، پس $f(-2)=0$ است:

$$f(-2)=\frac{-2a+1}{-4-1}=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

پس $g(x)=\frac{4x+1}{2x+\frac{1}{2}}$ است. چون صورت این کسر، مضربی از مخرج آن است، پس تابع g وارون‌پذیر نیست.

در توابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر صورت و مخرج کسر پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رُخ می‌دهد که $ad=bc$ باشد.

۳۸۳ **۴**

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. برای این‌که $f(x)$ را پیدا کنیم باید در تساوی داده شده به جای xها عبارت $\frac{x-4}{2}$ قرار دهیم:

$$f\left(2\times\frac{x-4}{2}+4\right)=\frac{4\times\frac{x-4}{2}-6}{2\times\frac{x-4}{2}+a}\Rightarrow f(x)=\frac{2x-14}{x+a-4}$$

چون $f(x)=f^{-1}(x)$ است، پس:

$$(a-4)+(2)=0\Rightarrow a=2$$

۳۸۴ ۲

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{f(x) - 3x}{f(x) + 4} \Rightarrow xf(x) + 4x = f(x) - 3x$$

$$\Rightarrow xf(x) - f(x) = -7x \Rightarrow f(x)(x-1) = -7x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-7x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x+7}$$

۳۸۵ ۲

چون مخرج کسر بزرگ‌تر از صورت کسر است و هم‌چنین علامت آن همواره مثبت است، پس $-1 < \frac{x}{1+|x|} < 1$ است، یعنی محدودهٔ برد تابع f به‌صورت $(-1, 1)$ است. حالا ضابطهٔ وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} ; & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1} ; & x < 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{هموگرافیک}]{\text{طرز وارون}} f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x-1} ; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x}{-x-1} ; & -1 < x < 0 \end{cases}$$

می‌توانیم ضابطهٔ f^{-1} را به‌صورت زیر مرتب کنیم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} ; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{1+x} ; & -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} \; ; \; \underbrace{-1 < x < 1}_{|x|<1}$$

با مقایسهٔ ضابطهٔ f^{-1} با صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم $a = 1$ و $b = 1$ است و $a \times b = 1$ است.

۳۸۶ ۴

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \; ; \; x \geq 1$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$f:$ -1 ← توان ۲ ← -4

$f^{-1}:$ $+1$ ← $+\sqrt{\;}$ ← $+4$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$

حالا نقاط تلاقی نمودارهای f^{-1} و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{جای‌گذاری}} x = 21$$

۳۸۷ ۳

ابتدا نقطهٔ برخورد f و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = g^{-1}(x) \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 3x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\xrightarrow[x < \frac{3}{2}]{\text{مجموع ضرایب برابر صفر}} \begin{cases} x = 1 \xrightarrow{y = 3x - 4} y = -1 \Rightarrow A(1, -1) \\ x = 5 \; \times \end{cases}$$

چون دو تابع f و g^{-1} در نقطهٔ $A(1, -1)$ متقاطع‌اند، پس دو تابع f^{-1} و g در نقطهٔ $A'(-1, 1)$ متقاطع‌اند.

هایلایت

اگر دو تابع f و g^{-1} در نقطهٔ $A(a, b)$ متقاطع باشند، آن‌گاه دو تابع f^{-1} و g در نقطهٔ $A'(b, a)$ متقاطع‌اند.

۳۸۸ ۲

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3 \; ; \; x \leq 2$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$f:$ -2 ← توان ۲ ← -3

$f^{-1}:$ $+2$ ← $-\sqrt{\;}$ ← $+3$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+3}$

حالا نقاط تقاطع توابع $y = 1 - f^{-1}(x)$ و $y = \sqrt{f(x) + 3}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$1 - f^{-1}(x) = \sqrt{f(x) + 3} \Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 = \sqrt{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 = |x-2| \xrightarrow{x \leq 2} \sqrt{x+3} - 1 = -(x-2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = -x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \; \times \end{cases} \xrightarrow{y = |x-2|} y = 1$$

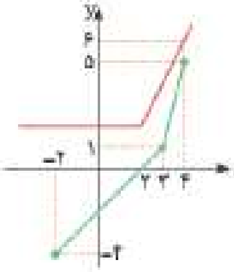
$$\Rightarrow A(1, 1) \Rightarrow |OA| = \sqrt{2}$$

۳۸۹ ۴

با توجه به نمودار تابع f و محدودهٔ دامنه و برد آن، ضابطهٔ f^{-1} را می‌نویسیم:

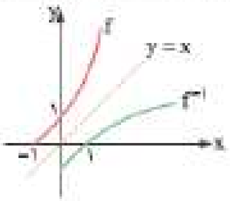
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 ; & -4 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{11}{4} ; & 1 < x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 2 ; & -2 \leq x \leq 3 \\ 4x - 11 ; & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

حالا نمودار دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g(x) = x + |x-2|$ را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$ متقاطع نیستند

۳۹۰ ۴

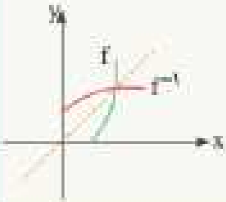


نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ با دامنهٔ $(-1, +\infty)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد و هیچ نقطهٔ تلاقی با آن ندارد، پس f و f^{-1} همدیگر را قطع نمی‌کنند.

هایلایت

۱ برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1}، راهکار کلی این است که ضابطهٔ f^{-1} را به‌دست آوریم و سپس معادلهٔ $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل کنیم.

۲ در توابع اکیداً صعودی و توابع هموگرافیک نقاط برخورد f و f^{-1} [در صورت وجود]، همان نقاط برخورد f و خط $y = x$ است. پس در این توابع معادلهٔ $f(x) = x$ را حل می‌کنیم.



۳۹۱ **۲**

تابع $f(x)=\sqrt{x+3}-1$ یک تابع اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل تقاطع این تابع با وارونش، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+3}-1=x \Rightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \Rightarrow x+3=x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \xrightarrow{y=x} y=1 \\ x=-2 \ \times \end{cases}$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OM|=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

۳۹۲ **۲**

چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2}=x \Rightarrow x+4=x^2-2x$$

$$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

۳۹۳ **۳**

تابع $f(x)=x^3+3x-12$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x^3$ و $y=3x-12$ به‌دست آمده، پس اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل برخورد این تابع با وارونش، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$x^3+3x-12=x \Rightarrow x^3+2x-12=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,2)$$

$$\Rightarrow OA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

> یه جوره دیگه! فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $f(x)=2x-3+\sqrt{x-1}$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟
> جواب: $2\sqrt{2}$

۳۹۴ **۲**

تابع $y=\log_4(2^{x+2}+32)$ از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی $f(x)=\log_4 x$ و $g(x)=2^{x+2}+32$ به‌دست آمده (تابع fog) پس اکیداً صعودی است. پس برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد این تابع با وارونش، داریم:

$$\log_4(2^{x+2}+32)=x \Rightarrow 4^x=2^{x+2}+32 \Rightarrow (2^x)^2-4\times(2^x)-32=0$$

$$\xrightarrow{2^x=t} t^2-4t-32=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-4 \ \times \\ t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

پس $A(3,3)$ است و فاصلهٔ آن از نقطهٔ $O(0,0)$ برابر $OA=3\sqrt{2}$ است.

۳۹۵ **۴**

دامنهٔ تابع f به‌صورت بازهٔ $[1,+\infty)$ و برد تابع f برابر بازهٔ $(-\infty,2]$ است. درضمن می‌دانیم $f^{-1}of(x)=x; x\in D_f$ و $fof^{-1}(x)=x; x\in R_f$ است. حالا چون $x=3$ در برد تابع f قرار ندارد، پس $fof^{-1}(3)$ تعریف نشده است.

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد ترکیب f و f^{-1}، همواره تابعی همانی است:

	ضابطه	دامنه
حالت ۱	$(fof^{-1})(x)=x$	$D_{f^{-1}}=R_f$
حالت ۲	$(f^{-1}of)(x)=x$	$D_f=R_{f^{-1}}$

نمودار تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ برابر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (یا بخشی از آن) است.

شرط لازم و کافی برای برابر بودن fof^{-1} و $f^{-1}of$ آن است که $D_f=R_f$.

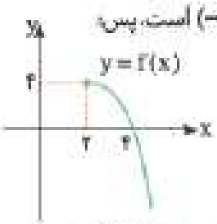
اگر $(fog)(x)=(gof)(x)=x$ باشد آن‌گاه f و g وارون یکدیگر هستند.

۳۹۶ **۲**

برای این‌که تساوی داده شده برقرار باشد، باید f تابعی وارون‌پذیر با دامنه و برد یکسان باشد. در میان گزینه‌ها، دامنه و برد توابع موجود در گزینه‌های (۱) و (۴) به‌صورت بازهٔ $[2,+\infty)$ و دامنه و برد تابع گزینهٔ (۳) برابر $\mathbb{R}-\{1\}$ است. اما در گزینهٔ (۲) دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن برابر $(1,+\infty)$ است.

۳۹۷ **۳**

ابتدا نمودار تابع $f(x)=4x-x^2; x\geq 2$ را رسم می‌کنیم؛ دامنهٔ تابع f برابر بازهٔ $[2,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $(-\infty,4]$ است. پس:



$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}of(x)=x; x\geq 2 \\ fof^{-1}(x)=x; x\leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=(f^{-1}of)(x)+(fof^{-1})(x)=x+x=2x; 2\leq x\leq 4$$

که نمودار این تابع در گزینهٔ (۳) آمده است.

۳۹۸ **۴**

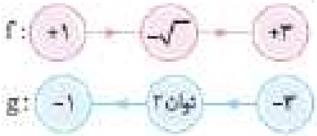
برای پیدا کردن $g(3)$، باید در تساوی داده شده به جای x عدد ۹ بگذاریم:

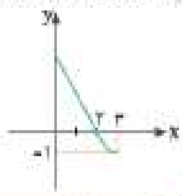
$$f^{-1}(3x+1)=g\left(\frac{x+3}{4}\right) \xrightarrow{x=9} f^{-1}(28)=g(3)$$

$$\Rightarrow f(g(3))=f(f^{-1}(28))=28$$

۳۹۹ **۳**

چون ترکیب دو تابع f و g برابر x یعنی تابع همانی است، پس دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند، یعنی $g(x)=f^{-1}(x)$ است. حالا نمودار تابع f و وارون آن را رسم می‌کنیم:





$$\Rightarrow g(x)=(x-3)^2-1 \ ; \ x\leq 3$$

> یه جوره دیگه! طراح به جای این‌که f و g رو به شکل ماشین نمایش بده، می‌تونست بگه «اگر $f(x)=3-\sqrt{x+1}$ و ترکیب دو تابع f و g تابع همانی باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟»

انتشارات بین‌المللی گاج

مجموعه کتاب‌های آی‌کیو قرن جدید

ویژه کنکور ۱۴۰۴

هدیه رایگان

درسنامه

ریاضیات تجربی جامع

دهم | یازدهم | دوازدهم

تالیف جدید

آموزش تیپ تست‌های کنکور

مؤلف: مهندس سجاد عظمتی

مجموعه کتاب‌های **فرمول بیست**

ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی

9 786220 308683

ریاضیات تجربی جامع

ناشر | انتشارات بین‌المللی گاج

مدیرمسئول | مهندس محمد جوکار

واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های | آی‌کیو

عنوان کتاب | درسنامه ریاضیات تجربی جامع کنکور

مؤلف | سجاد عظمتی

کارشناسان علمی | علی احمدی قزل‌دشت، امیرحسام شکری، نریمان فتح اللهی

ویراستاران علمی | مصطفی غلامی، علیرضا کاظمی بقا، شاهین پروازی، سینا همتی، داود بوالحسنی،
محمدمهدی فدایی، بهروز فرزانه

هماهنگی و امور اجرایی | پروانه سعادت‌خواه

ویراستاران فنی | مهسا چراغعلی، نازیلا امیری، آرزو بهرامی، ریحانه حاجیلو، زهرا زینل، گیتی جعفرکریمی،
مریم احمدی طباطبایی، مریم قربانی، آوینه داودی

صفحه‌آرا | ژاله ترابی‌نژاد، نازنین ملکی، شبنم بیدی، الهه شمسی، فاطمه آقایی‌پور

اجرا | لیلا فرجی، سمیه فرید، فاطمه جعفری، عاطفه محمدی، شقایق بهمنی، نسرین علیخانی

حروف‌نگار | فرشته کلاهی، مریم قلی‌پور

رسم تصاویر | فاطمه میناسرشت، زهره عباسی، مینا باباءاحمدی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع | گاج

لیتوگرافی، چاپخانه و صحافی | گاج

نوبت چاپ | اول - سال تحصیلی (۱۴۰۴-۱۴۰۳)

شمارگان | ۱۰۰۰۰ نسخه

قیمت | رایگان (هدیه)

سرشناسه: عظمتی، سجاد
عنوان: درسنامه ریاضیات تجربی جامع کنکور
مؤلف: سجاد عظمتی
مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین‌المللی گاج ۱۴۰۳
مشخصات ظاهری: ۲۳۰ ص، مصور (رنگی)
فروست: این کتاب از مجموعه کتاب‌های آی‌کیو گاج می‌باشد.

فروشگاه مرکزی گاج | تهران، میدان انقلاب، نبش بازارچه کتاب

صندوق پستی | ۱۳۱۴۵-۳۷۷

تلفن | ۰۲۱-۶۴۲۰

وب‌سایت | www.gajmarket.com

مقدمه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

قدم اول رو محکم بردار

اولین قدم برای موفقیت در درس ریاضی، درک کامل و دقیق مفاهیم کتاب درسی است. در این کتاب، تلاش کردیم تا تمام مفاهیم کتاب درسی را به طور کامل، دقیق و منظم آموزش دهیم. این آموزش به صورت جامع و با پوشش‌دهی کامل از مطالب ریاضی سال‌های دهم، یازدهم و دوازدهم است . بعد از آموزش مفاهیم، با کمک مثال‌های آموزشی، این مباحث را در ذهنتون تثبیت کردیم. سپس، همهٔ تیپ تست‌های مهم کنکور را مورد بررسی قرار دادیم و چند تست هم از آن مطرح کردیم تا به طور کامل روی الگوهای کنکوری مسلط بشید.

علاوه بر آموزش مفهومی مطالب، به روزترین و خاص‌ترین روش‌ها مانند روش‌های حل سریع‌تر را در سؤالات بیان کردیم و در حل برخی سؤالات، در کنار روش‌های تشریحی، از روش سریع‌تر نیز سؤال را حل کردیم.

امیدواریم با مطالعه این کتاب، مطالب ریاضی کنکور را به طور کامل یاد بگیرید و پس از حل تست‌های متنوع و رسیدن به تسلط کافی، بهترین نتیجه را در کنکور سراسری بگیرید.

تشکر و قدردانی:

- جناب آقای مهندس محمد جوکار که مثل همیشه برای به ثمر رسیدن این اثر پشتیبانی و همراهی کردند.
- اساتید علی احمدی قزل‌دشت، نریمان فتح اللهی، امیرحسام شکری و محمدامین کریمی که در مراحل تالیف همراهی کردند.
- اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشان، باعث شدند کتاب بهتری تالیف شود.

اساتید: معین کرمی، افشین ملاک پور، محمدمصطفی ابراهیمی، مجید رفعتی و علی مقدم‌نیا.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی

sajad.azemati

فهرست

فصل ۰۱

تـابـع

ارتباط با فصل‌های دیگه: پیش‌نیازهای این فصل، فصل‌های توان و عبارت جبری، معادله و نامعادله، معادله و تابع درجه دوم و کمی هم مثلثات است. و دانستن تابع هم پیش‌نیاز موضوع‌های لگاریتم و تابع نمایی، نمودار توابع مثلثاتی، حد و پیوستگی، مشتق و کاربرد مشتق است.

توصیه: سعی کنید توجه ویژه‌ای به رسم توابع مختلف داشته باشید. در کنکورهای اخیر، طراح علاقه بسیار زیادی به مفاهیم و همچنین سؤالات ترکیبی داشته. بنابراین اگه میخواید خیالتون از این فصل راحت باشه، باید راه‌حل‌های علمی و اصولی رو یاد بگیرید و از اونا برای حل تست‌ها استفاده کنید. البته در کنارش می‌تونید (به عنوان روش دوم) کارهای سریع‌تر مثل استفاده از گزینه‌ها و عددگذاری رو هم تمرین کنید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۲	۶	۴	۳	۴	۴	۴	۵

درس ۱ مفاهیم تـابـع

تابع و تشخیص آن

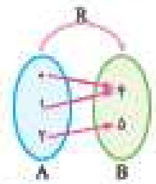
۱ اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌های (x, y) باشد، هنگامی این رابطه یک تابع محسوب می‌شود که هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی، دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفهٔ اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

مثال **اگر رابطهٔ $f=\{(۳,a+۲b),(۵,۴),(۷,۲),(۳,۷),(۵,۲a-b)\}$ یک تابع باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.**

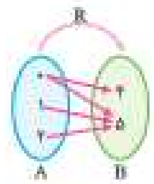
چون رابطهٔ داده‌شده یک تابع است، باید مؤلفه‌های دوم در زوج مرتب‌های $(۳,a+۲b)$ و $(۳,۷)$ و هم‌چنین $(۵,۴)$ و $(۵,۲a-b)$ برابر باشند. پس:

$$\begin{cases} a+۲b=۷ \\ ۲a-b=۴ \end{cases} \Rightarrow a=۳, b=۲$$

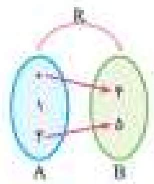
۲ اگر یک رابطه به‌صورت نمودار پیکانی بیان شود، در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان خارج شود.



از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً یک پیکان خارج شده، بنابراین تابع است.

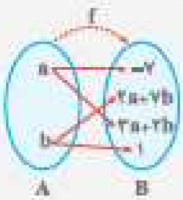


از عضو «۰» دو پیکان خارج شده، بنابراین تابع نیست.



از عضو «۱»، پیکانی خارج نشده، بنابراین تابع نیست.

تست **اگر نمودار مقابل نمایش یک تابع باشد، مقدار a+b کدام است؟**



۱) ۴

۲) ۲

۳) ۴-

۴) ۲-

۴ نمایش زوج مرتبی نمودار پیکانی داده‌شده به صورت:

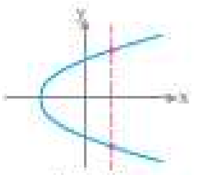
$$f=\{(a,-۷),(a,۳a+۲b),(b,۲a+۷b),(b,۱)\}$$

است و برای آن‌که رابطهٔ فوق یک تابع باشد باید روابط زیر برقرار باشد:

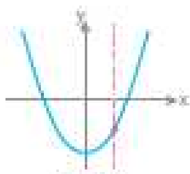
$$\begin{matrix} ۱)\ ۳a+۲b=-۷ \\ ۲)\ ۲a+۷b=۱ \end{matrix} \Rightarrow b=۱, a=-۳ \Rightarrow a+b=-۲$$

۳ یک نمودار به شرطی متعلق به یک تابع است که هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

به نمودارهای زیر دقت کنید:

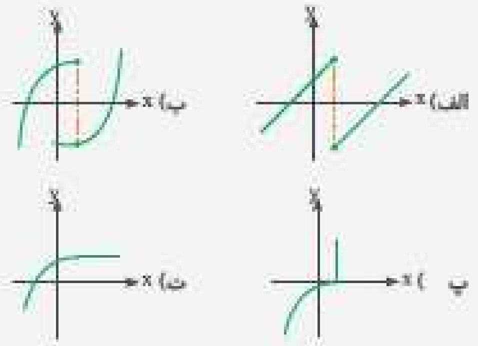


تابع نیست.



تابع است.

تست **چه تعداد از نمودارهای زیر نشان‌دهندهٔ یک تابع است؟**



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱ در نمودارهای (الف)، (ب) و (پ) خطی موازی محور yها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. پس این نمودارها نمی‌توانند نشان‌دهندهٔ یک تابع باشند.

برای تشخیص تابع بودن رابطه‌هایی که به‌صورت معادله بیان می‌شوند، می‌توان از مثال نقض استفاده کرد؛ یعنی اگر به‌ازای یک x بیش از یک مقدار برای y به دست بیاید، آن رابطه مربوط به یک تابع نیست.

مثال **آیا رابطهٔ $x^2+y^2=4$ نشان دهندهٔ یک تابع است؟**

اگر به‌جای x عدد صفر را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=0 \Rightarrow (0)^2+y^2=4 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$$

بنابراین این رابطه مربوط به یک تابع نیست چون یک x پیدا کردیم که به‌ازای آن بیش از یک جواب برای y به‌دست آمد.

تست **کدام رابطه، یک تابع نیست؟**

۱) $|x|+y^2=0$ ۲) $|x-1|+|y-2|=0$

۳) $f(x)=\begin{cases} x+2 \ ; & x\geq 1 \\ 4x \ ; & x\leq 1 \end{cases}$ ۴) $y=\sqrt{x^2+2x+1}$

۳ در گزینهٔ (۳) چون $x=1$ می‌تواند در هر دو ضابطه قرار بگیرد ولی اعداد یکسانی تولید نمی‌کند، پس تابع نیست. حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

می‌دانیم جمع دو عبارت نامنفی وقتی صفر می‌شود که هر دو برابر صفر باشند؛ پس در گزینه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$(1)\begin{cases} |x|=0 \Rightarrow x=0 \\ y^2=0 \Rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع است}$$

$$(2)\begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ |y-2|=0 \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع است}$$

در گزینهٔ (۴) چون $y=\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|$ است و به‌ازای هر x، فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس این رابطه نیز نشان‌دهندهٔ یک تابع است.

می‌دانیم به تابع‌هایی که برای xهای مختلف، ضابطه‌های مختلف دارند تابع‌های چند ضابطه‌ای می‌گویند. روابطی که به‌صورت چندضابطه‌ای بیان می‌شوند، در صورتی تابع هستند که:

- دامنه‌های ضابطه‌ها با یکدیگر اشتراکی نداشته باشند.
- در صورت وجود اشتراک بین دامنهٔ ضابطه‌ها، به‌ازای xهای مشترک، باید yهای یکسان داشته باشند.
- هر یک از ضابطه‌ها در بازهٔ خود تابع باشند.

مثلاً رابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-1 \ ; & x\geq 2 \\ x+2 \ ; & x\leq 2 \end{cases}$ تابع نیست، چون $x=2$ در دامنهٔ دو ضابطه وجود دارد ولی مقادیر y یکسانی تولید نمی‌کند:

ضابطهٔ بالا: $f(2)=2-1=1$

ضابطهٔ پایین: $f(2)=2+2=4$

تست **اگر رابطهٔ زیر تابع باشد، واسطهٔ حسابی a و b کدام است؟**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x \ ; & x\geq 1 \\ a \ ; & x=1 \\ |x|+\frac{3b}{x} \ ; & x\leq 1 \end{cases}$$

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

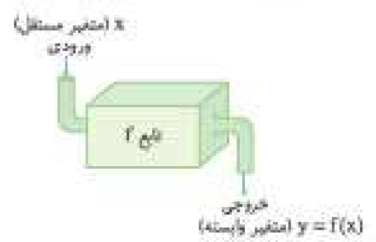
۴ چون $x=1$ در دامنهٔ هر سه ضابطه قرار دارد، پس باید به ازای $x=1$ مقدار سه ضابطه با هم برابر شود.

$$x=1: (1)^2+3(1)=a=|1|+\frac{3b}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \rightarrow \text{واسطه حسابی}=\frac{a+b}{2}=2/5$$

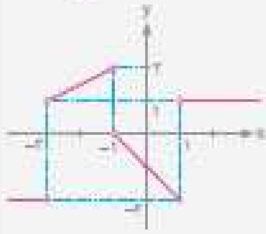
مقدار تابع

می‌توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می‌کند و به‌ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد [هر چند ممکن است چند ورودی دارای خروجی‌های یکسانی باشند.]



منظور از $f(a)$، مقدار تابع f در نقطهٔ $x=a$ است. بنابراین برای محاسبهٔ مقدار تابع در $x=a$، باید در ضابطهٔ تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم. اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان‌دهندهٔ عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع f با طول $x=a$ است.

تست شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\frac{f(1)+f(f(-1))}{f(-5)}$ کدام است؟



۱) $-\frac{1}{2}$

۲) -2

۳) $\frac{1}{2}$

۴) 2

۳ با توجه به نمودار، مقدار تابع در نقطه‌های خواسته‌شده در کسر را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{f(1)+f(f(-1))}{f(-5)}=\frac{-2+f(2)}{-2}=\frac{-2+1}{-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات یا توابعی دیگر

در مورد نقاط برخورد یک تابع با محورهای مختصات یا برخورد دو تابع، به نکات زیر توجه کنید:

۱ عرض نقطهٔ برخورد تابع $f(x)$ با محور xها برابر صفر است.

۲ طول نقطهٔ برخورد تابع $f(x)$ با محور yها برابر صفر است.

مثلاً در نمودار تابع زیر مختصات نقطه‌های A و B برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} A(0,2) \\ B(1,0) \end{cases}$$

اگر نمودار تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ همدیگر را در نقطه‌ای به طول a و عرض b قطع کنند، در این صورت مقدار این دو تابع در نقطهٔ برخورد با هم برابر است، یعنی: $f(a)=g(a)=b$

تست خط $f(x)=-2x+1$ و سهمی به معادلهٔ $g(x)=x^2+bx+c$ در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ متقاطع‌اند. c کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ چون این دو نمودار در نقاط ۱ و ۲ متقاطع‌اند، پس:

$f(1)=g(1)\Rightarrow -2\times 1+1=1+b+c\Rightarrow b+c=-2$

$f(2)=g(2)\Rightarrow -2\times 2+1=4+2b+c\Rightarrow 2b+c=-7$

$\Rightarrow b=-5,\ c=3$

تابع‌نویسی

در بعضی از مسائل می‌خواهیم مساحت، محیط، حجم و ... از یک شکل هندسی را برحسب تابعی از یک متغیر بیان کنیم. در این سؤالات ابتدا با توجه به شکل مسئله همهٔ متغیرهای موجود در مسئله را برحسب متغیر خواسته‌شده به‌دست می‌آوریم و سپس در فرمول مساحت، محیط و ... جای‌گذاری می‌کنیم.

تست از یک قطعه مقوای مربع شکل به ضلع ۱۲ سانتی‌متر می‌خواهیم یک جعبهٔ در باز بسازیم. برای این منظور از چهارگوشهٔ این مقوا چهار مربع به ضلع x بریده و اطراف آن را تا می‌کنیم. کدام‌یک از توابع زیر، حجم جعبه را برحسب x بیان می‌کند؟

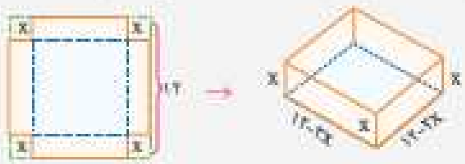
۱) $V=2x(12-x)^2$

۲) $V=x(12-2x)^2$

۳) $V=x^2(12-x)$

۴) $V=x^2(12-2x)$

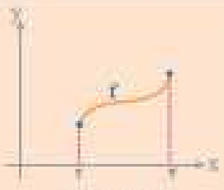
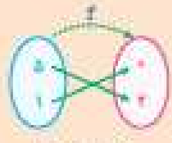
۲ با توجه به شکل، حجم جعبه را به دست می‌آوریم:



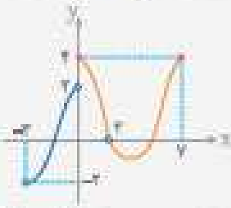
$\Rightarrow V=x(12-2x)^2$

دامنهٔ تابع

به مجموعهٔ ورودی‌های تابع f، دامنهٔ تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن دامنهٔ تابع	
نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور xها	 $D_f=[2,4]$
نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که از اعضای آن، پیکان خارج شده	 $D_f=\{1,5\}$
زوج مرتبی: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول	$f=\{(1,2),(5,0)\}\Rightarrow D_f=\{1,5\}$

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. دامنهٔ تابع f کدام است؟



۱) $[-3,0)\cup[4,7]$

۲) $(-3,7]$

۳) $[-2,4]$

۴) $(-3,7]-\{3\}$

۴ با توجه به شکل، تصویر نمودار روی محور x برابر بازهٔ $(-3,7]-\{3\}$ است، پس: $D_f=(-3,7]-\{3\}$

دامنهٔ توابع معروف

برای تعیین دامنهٔ تابع f با داشتن ضابطهٔ آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱ دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f(x)=2x^3+4x^2-x-10 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

۲ چون عبارت‌های کسری به ازای ریشهٔ مخرج، تعریف‌نشده هستند؛ پس دامنهٔ آن‌ها برابر است با:

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

۳ در رادیکال‌های با فرجهٔ زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

$$y=\sqrt{4-x} \Rightarrow 4-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 4 \Rightarrow D_f=(-\infty,4]$$

۴ چون $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x\neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$$D=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})\}$$

$$y=x+\tan x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$$

۵ چون $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x\neq 0$ برقرار باشد، بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$:

$$D=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$$

$$y=5+2\cot x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$$

۶ در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

$$y=\log_{\bigcirc}\bigcirc \Rightarrow \begin{cases}\bigcirc>0\\ \bigcirc>0\,,\ \bigcirc\neq 1\end{cases}$$

$$y=\log_{(3-x)}(x-1) \Rightarrow \begin{cases}x-1>0 \Rightarrow x>1\\ 3-x>0 \Rightarrow 3>x \Rightarrow D_f=(1,2)\cup(2,3)\\ 3-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 2\end{cases}$$

تذکر ۱ هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطهٔ تابع را ساده کنید.

تذکر ۲ در توابع چندضابطه‌ای، دامنهٔ تابع از اجتماع دامنهٔ همهٔ ضابطه‌ها به‌دست می‌آید.

مثلاً برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{1-x^2}$ باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

$$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

اما اگر ابتدا تابع را ساده کنیم به $y=\frac{1}{1-x}$ تبدیل می‌شود که دامنهٔ آن به اشتباه $\mathbb{R}-\{1\}$ به دست می‌آید!

تست دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{2+x}{x^2+ax+b}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{2\}$ می‌باشد حاصل $a+2b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۴

۴ چون دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}-\{2\}$ است، پس $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج تابع f است، پس مخرج به صورت $(x-2)^2$ می‌باشد، در نتیجه: $x^2+ax+b=(x-2)^2=x^2-4x+4 \Rightarrow a=-4, b=4$

پس $a+2b=-4+2\times 4=4$ است.

تست دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x-1}}$ به‌صورت بازهٔ $[a\,,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ باید عبارت زیر هر یک از رادیکال‌ها بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x-1}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1\\ 2-\sqrt{x-1}\geq 0 \Rightarrow 2\geq\sqrt{x-1} \Rightarrow 4\geq x-1 \Rightarrow 5\geq x\end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت بازهٔ $[1,5]$ است و در نتیجه $a+b=6$ است.

تست دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{-\sin^2\pi x}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۳ عبارت $-\sin^2\pi x$ زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ قرار دارد؛ پس باید $-\sin^2\pi x\geq 0$ باشد. در ضمن می‌دانیم $-\sin^2\pi x$ عبارتی کوچک‌تر یا مساوی صفر است، پس باید $-\sin^2\pi x=0$ باشد:

$$-\sin^2\pi x=0 \Rightarrow \sin\pi x=0 \Rightarrow \pi x=k\pi \Rightarrow x=k$$

پس x می‌تواند همهٔ اعداد صحیح باشد؛ یعنی $D_f=\mathbb{Z}$ است.

تست دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{1-\log(x-1)}$ به‌کدام صورت است؟

۱) $(1,2]$ ۲) $[2,10]$ ۳) $[1,11)$ ۴) $(1,11]$

۴ باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و $1-\log(x-1)$ نامنفی باشد:

۱) $0<x-1 \Rightarrow 1<x$

۲) $0\leq 1-\log(x-1) \Rightarrow \log(x-1)\leq 1 \Rightarrow x-1\leq 10 \Rightarrow x\leq 11$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده $D_f=(1,11]$ است.

میانبر با جای‌گذاری $x=11$ عبارت زیر رادیکال برابر صفر و عبارت جلوی لگاریتم مثبت می‌شود، پس گزینهٔ (۴) درست است.

میانبر هنگام یافتن دامنهٔ توابع، درصورتی که گزینه‌ها به‌صورت بازه بیان شده باشد می‌توانیم با عددگذاری مناسب از گزینه‌ها، جواب را به‌دست آوریم. در انتخاب عدد باید دقت کنیم که این عدد باعث تفاوت در گزینه‌ها شود.

تست دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

۱) $(0,2]$ ۲) $(0,2)$

۳) $(-\infty,2]-\{0\}$ ۴) $(-\infty,2]$

۱ عدد $x=-1$ در گزینه‌های (۳) و (۴) وجود دارد که باعث منفی شدن عبارت زیر رادیکال می‌شود.

$x=-1 \Rightarrow$ در تابع صدق نمی‌کند.

پس گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند.

یکی از تفاوت‌های بین گزینهٔ (۱) و گزینهٔ (۲) عدد $x=2$ است که در بازهٔ گزینهٔ (۱) قرار دارد ولی در بازهٔ گزینهٔ (۲) وجود ندارد.

$x=2 \Rightarrow$ در تابع صدق می‌کند $\Rightarrow$ $x=2$ در دامنهٔ تابع بوده

پس گزینهٔ (۲) نادرست است و گزینهٔ (۱) پاسخ صحیح است.

قدرمطلق، جزء صحیح، رادیکال با فرجهٔ فرد، سینوس و کسینوس شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند.

تست دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳ رادیکال با فرجهٔ فرد شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند، پس برای تعیین دامنهٔ تابع f می‌توانیم دامنهٔ $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ را به دست آوریم؛ پس:

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-3,1\}$$

یافتن دامنهٔ توابع ساخته شده با f(x)

وقتی نمودار تابع f را در اختیار داریم، باید به موارد زیر توجه کنیم:

وضعیت x

۱ منظور از $x>0$، قسمت‌های سمت راست محور y است.

۲ منظور از $x<0$، قسمت‌های سمت چپ محور y است.

وضعیت f(x)

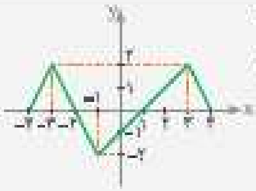
۱ منظور از $f(x)>0$، قسمت‌های بالای محور x است.

۲ منظور از $f(x)<0$، قسمت‌های پایین محور x است.

توجه منظور از $f(x)=0$، نقاط برخورد نمودار f با محور x است.

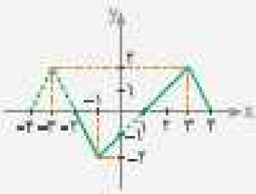
در بعضی از سؤالات، ضابطه یا نمودار تابع f را به ما می‌دهند و از ما دامنهٔ تابع $\sqrt{f(x)}$ یا $\sqrt{xf(x)}$ یا ... را می‌خواهند. در این سؤالات باید با توجه به ضابطه یا نمودار داده شده، مشخص کنیم عبارت زیر رادیکال در کدام ناحیه بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

مثال اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را تعیین کنید.



برای تعیین دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\ge 0$ باشد.

$$\begin{cases} x\ge 0 ; f(x)\ge 0 & \text{راست و بالای محور xها} \\ x\le 0 ; f(x)\le 0 & \text{چپ و پایین محور xها} \end{cases} \Rightarrow$$

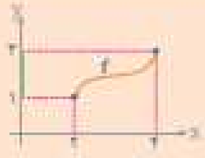
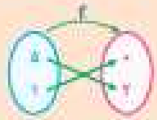


$$\Rightarrow D_f=[-2,0]\cup[1,4]$$

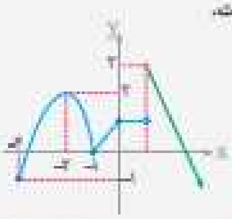
برد تابع

به مجموعهٔ خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به‌دست می‌آید، برد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن بُرد تابع

نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور yها	 $R_f=[1,3]$
نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که به اعضای آن پیکان وارد شده	 $R_f=\{0,2\}$
زوج مرتب: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم	$f=\{(1,2),(5,0)\}\Rightarrow R_f=\{0,2\}$

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. برد تابع f کدام است؟



۱) $(-\infty,3]-\{-1,1\}$

۲) $(-1,1)\cup(1,3]$

۳) $(-\infty,1)\cup(1,3]$

۴) $(-\infty,3]$

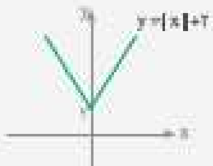
۴ با توجه به شکل، تصویر نمودار روی محور yها برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ است، پس: $R_f=(-\infty,3]$

یافتن برد تابع از روی ضابطه

برای تشخیص برد تابع از روی ضابطه، یکی از راه‌ها رسم شکل و استفاده از تصویر نمودار روی محور yهاست.

مثال برد تابع $f(x)=|x|+2$ را به‌دست آورید.

برای تعیین برد تابع f(x) نمودار را رسم می‌کنیم و داریم:



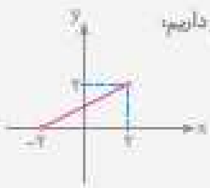
$$\Rightarrow R_f=[2,+\infty)$$

برد توابع خطی در حالت کلی برابر با $\mathbb{R}$ است. اما اگر دامنهٔ تابع محدود شده باشد.

می‌توانیم مقدار تابع را در نقطهٔ ابتدا و انتهای دامنه به‌دست آوریم و آن دو نقطه را به هم متصل کنیم.

مثال برد تابع $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ با دامنهٔ $[-2,2]$ را به‌دست آورید.

ابتدا $f(-2)$ و $f(2)$ را به‌دست می‌آوریم و داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} f(-2)=0 \\ f(2)=2 \end{cases} \Rightarrow R_f=[0,2]$$

برای یافتن برد توابع درجه دوم به‌صورت $f(x)=ax^2+bx+c$، می‌توانیم عرض رأس سهمی را به‌دست آوریم، سپس با توجه به علامت a برد تابع را تعیین کنیم:

$R_f=[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ $\quad$ $R_f=(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]$

تست برد تابع $f(x)=(3x+1)^2-(2x-1)^2$ کدام است؟

۱) $[-5,+\infty)$ ۲) $(-\infty,5]$

۳) $[5,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-5]$

۱ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و داریم:

$$f(x)=(3x+1)^2-(2x-1)^2=(9x^2+6x+1)-(4x^2-4x+1)$$

$$\Rightarrow f(x)=5x^2+10x\Rightarrow x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{10}{2\times5}=-1$$

$$\Rightarrow f(-1)=5(-1)^2+10(-1)=-5$$

درضمن چون علامت ضریب x^2 مثبت است، پس دهانهٔ سهمی رو به بالاست و برد آن برابر $[-5,+\infty)$ است.

برای یافتن بُرد توابع چندضابطه‌ای باید بُرد تک‌تک ضابطه‌ها را به‌دست آورده و بین آن‌ها اجتماع بگیریم.

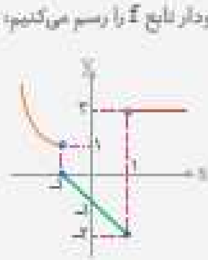
تست بُرد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; x<-1\\ -x-1 & ; -1\le x\le 1\\ 3 & ; x>1\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[0,1)$ ۲) $[-2,0]\cup(1,+\infty)$

۳) $(-\infty,-2]\cup[0,1)$ ۴) $[-2,+\infty)$

۲ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ; x<-1\\ -x-1 & ; -1\le x\le 1\\ 3 & ; x>1\end{cases}\Rightarrow$$



با توجه به نمودار، برد تابع f به صورت بازهٔ $[-2,0]\cup(1,+\infty)$ است.

برای تعیین برد توابع شامل قدرمطلق، می‌توانیم تابع را در ریشه‌های داخل قدرمطلق به‌صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم و برد تابع حاصل را بیابیم.

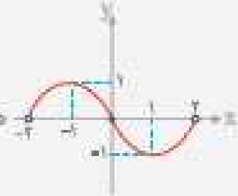
تست بُرد تابع $f(x)=x|x|-2x$ در بازهٔ $(-2,2)$ کدام است؟

۱) $(-2,2)$ ۲) $[-1,1]$

۳) $(0,+\infty)$ ۴) $[-3,3]$

۲ ضابطهٔ f را در ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & ; -2<x\le 0\\ x^2-2x & ; 0<x<2\end{cases}\Rightarrow$$



با توجه به شکل برد تابع f برابر $[-1,1]$ است.

برای تعیین برد توابع کسری روش ثابتی وجود ندارد ولی به کمک برخی نامساوی‌ها می‌توانیم بُرد بعضی از این توابع کسری را به‌دست آوریم.

۱ عبارات $\frac{x^2}{x^2+1}$، $\frac{|x|}{|x|+1}$ و $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ و ... همگی نامنفی بوده و از یک کوچکتر هستند. [چون صورت کسر کوچکتر از مخرج است] پس:

$$0\le\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}<1,\ 0\le\frac{|x|}{|x|+1}<1,\ 0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1$$

دقت کنید که همهٔ این کسرها به‌ازای $x=0$ مقدارشان صفر می‌شود، به همین خاطر برای $x=0$ علامت مساوی قرار دادیم ولی چون صورت و مخرج مساوی نیستند، برای عدد یک علامت مساوی نمی‌گذاریم.

۲ عبارات $\frac{1}{x^2+1}$، $\frac{1}{|x|+1}$ و $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ و ... همگی مثبت و از یک کوچک‌تر هستند [صفر نمی‌شوند] و به‌ازای $x=0$ برابر یک می‌شوند، بنابراین:

$$0<\frac{1}{\sqrt{x}+1}\le1,\ 0<\frac{1}{|x|+1}\le1,\ 0<\frac{1}{x^2+1}\le1$$

تست برد تابع $f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ کدام است؟

۱) $(0,2]$ ۲) $[1,2)$

۳) $[2,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

۲ ابتدا صورت کسر را به صورت $\sqrt{x}+\sqrt{x}+1$ می‌نویسیم و سپس کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+1$$

همچنین واضح است که $0\le\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}<1$ است، پس:

$$0\le\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}<1\xrightarrow{+1}1\le\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+1<2\Rightarrow1\le f(x)<2$$

پس برد این تابع به صورت بازهٔ $R_f=[1,2)$ است.

برابری دو تابع

در حالت کلی دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

۲ برای هر x از این دامنهٔ یکسان، $f(x)=g(x)$ باشد.

به عبارت دیگر برای این که دو تابع مساوی باشند، باید دامنه‌های دو تابع برابر بوده و ضابطه‌هایشان بعد از ساده کردن یکسان باشد.

مثلاً دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{x^2}{x}$ با هم مساوی نیستند، چون دامنهٔ یکسانی ندارند، هرچند به ظاهر، پس از ساده کردن ضابطهٔ g، همان ضابطهٔ f به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} f(x)=x \Rightarrow D_f=\mathbb{R} \\ g(x)=\frac{x^2}{x} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0\} \end{cases}$$

ولی دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{x}{x^2}$ با هم مساوی‌اند، چون دامنهٔ هر دو تابع برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است و ضابطهٔ آن‌ها نیز برای هر $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ یکسان است:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

تذکر ممکن است دو تابع f و g، دارای دامنه و برد یکسان باشند، ولی خود توابع با هم مساوی نباشند.

مثلاً دامنهٔ هر دو تابع $f=\{(1,2),(3,4)\}$ و $g=\{(1,4),(3,2)\}$ برابر $\{1,3\}$ و برد آن‌ها $\{2,4\}$ است، ولی این دو تابع برابر نیستند.

تست دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. چه تعداد از موارد زیر دو تابع f، g مساوی‌اند؟

الف) $f(x)=2\log x$ و $g(x)=\log x^2$

ب) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ و $g(x)=1$

ج) $f(x)=(\sqrt{x})^2$ و $g(x)=x$

د) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱ به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف) $D_f=(0,+\infty),\ D_g=\mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow f\neq g$

ب) $D_f=\mathbb{R}-\{0\},\ D_g=\mathbb{R} \Rightarrow f\neq g$

ج) $D_f=[0,+\infty),\ D_g=\mathbb{R} \Rightarrow f\neq g$

د) $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow f=g$

برای بررسی دقیق‌تر عبارت (د) ضابطهٔ توابع موجود در این گزینه را ساده می‌کنیم تا برابر بودن آن‌ها را نشان دهیم:

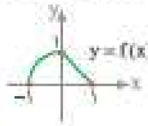
$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases} 1 & ; x>0 \\ -1 & ; x<0 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & ; x>0 \\ -1 & ; x<0 \end{cases}$$

درس ۲ انتقال و تبدیل نمودار تابع

انتقال نمودار $y=f(x)$

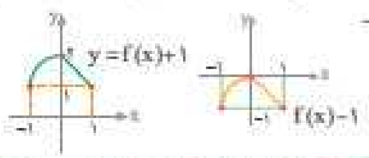
اگر نمودار تابع $y=f(x)$ موجود باشد، برای انتقال افقی و عمودی آن به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

فرض می‌کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است:



۱ $y=f(x)+k$: نمودار $y=f(x)$ را k واحد در راستای محور y ها انتقال می‌دهیم.

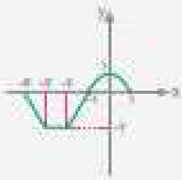
اگر $k>0$ باشد، منحنی به سمت بالا و اگر $k<0$ باشد منحنی به سمت پایین می‌رود.



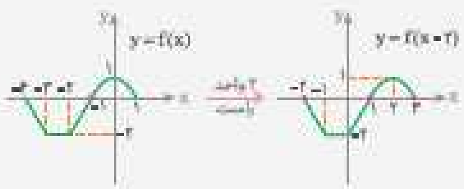
۲ $y=f(x+k)$: نمودار $y=f(x)$ را k واحد در راستای محور x ها انتقال می‌دهیم.

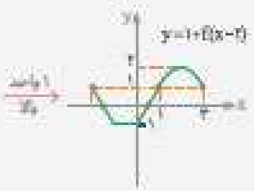
اگر $k>0$ باشد، منحنی به سمت چپ و اگر $k<0$ باشد، منحنی به سمت راست می‌رود.

مثال نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $y=1+f(x-2)$ را رسم کنید.



نمودار تابع $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-2)$ به دست آید، سپس آن را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y=1+f(x-2)$ برسیم:





تست به ترتیب با کدام انتقال‌ها نمودار $y=x^2+6x+4$ به روی نمودار $y=x^2-4x+3$ منطبق می‌شود؟

۱) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا
۲) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت بالا
۳) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت پایین
۴) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت پایین

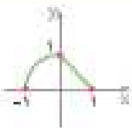
۱ ابتدا ضابطهٔ هر دو تابع را ساده می‌کنیم:

$y=(x^2+6x+4+5)-5=(x+3)^2-5$

$y=(x^2-4x+3+1)-1=(x-2)^2-1$

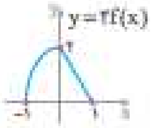
داخل پرانتز از $x+3$ به $x-2$ رسیده است، یعنی x به $x-5$ تبدیل شده، پس نمودار ۵ واحد به سمت راست منتقل شده و چون بیرون پرانتز از -5 به -1 رسیده یعنی به اندازهٔ ۴ واحد اضافه شده، پس نمودار ۴ واحد به سمت بالا منتقل شده است.

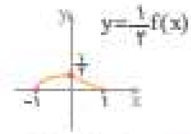
انبساط و انقباض نمودار y=f(x)



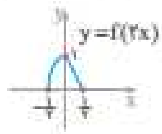
اگر نمودار $y=f(x)$ موجود باشد، برای انبساط و انقباض آن به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:
فرض می‌کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است:

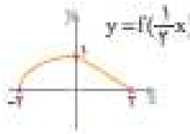
۱ $y=kf(x)$: عرض تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم.
اگر $k>1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منبسط (در امتداد محور y بازتر) می‌شود و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منقبض (در امتداد محور y، فشرده‌تر) می‌شود.



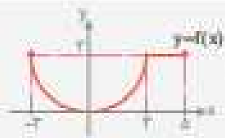


۲ $y=f(kx)$: طول تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر می‌کنیم.
اگر $k>1$ باشد، نمودار در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در امتداد محور xها با ضریب k منبسط می‌شود.





مثال نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(2x-1)$ را رسم کنید.



ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

تست نمودار تابع $y=(x+1)^2$ را ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم و سپس آن را با ضریب ۳ در راستای افقی منقبض می‌کنیم. نمودار حاصل و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) $-1,1$ ۲) $0,1$ ۳) $0,-1$ ۴) $-1,0,1$

۲ تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

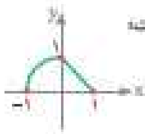
$$y=(x+1)^2 \xrightarrow{x\to x-2} y=(x-1)^2 \xrightarrow{x\to 3x} y_{جدید}=(3x-1)^2$$

حال محل برخورد نمودار تابع $y=(x+1)^2$ و نمودار تابع جدید را مشخص می‌کنیم:

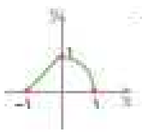
$$(x+1)^2=(3x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x+1=3x-1 \Rightarrow x=1 \\ x+1=-(3x-1) \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

قرینهٔ نمودارها

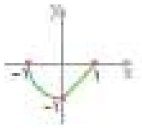
فرض می‌کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است:



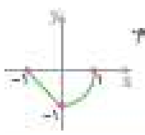
۱ رسم نمودار تابع $f(-x)$:
نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.



۲ رسم نمودار تابع $-f(x)$:
نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



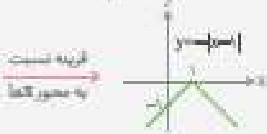
۳ رسم نمودار تابع $-f(-x)$:
نمودار $y=f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.



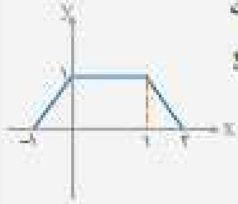
تذکر برای رسم نمودار $y=kf(x)$، اگر $k<0$ باشد، ابتدا نمودار $kf(x)$ را با فرض مثبت بودن k رسم و سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.
تذکر ۲ اگر $k<0$ باشد، ابتدا نمودار $f(kx)$ را با فرض مثبت بودن k رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

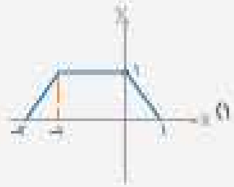
مثال نمودار تابع $y=-|x-1|$ را رسم کنید.

برای رسم نمودار تابع $y=-|x-1|$، ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x-1|$ به‌وجود آید. سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

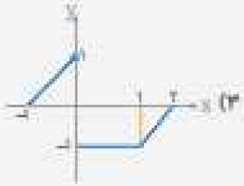


تست نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ کدام است؟



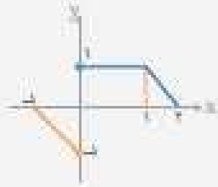
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴ تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ در $x>۰$ برابر $y=f(x)$ و در $x<۰$ برابر $y=-f(x)$ است. بنابراین نمودار آن به صورت زیر است:



تست نمودار تابع $y=|x-۱|+۲$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، سپس آن را ۳ واحد به طرف xهای مثبت و ۱ واحد به طرف yهای منفی منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $y=|x-۱|-۲$ ۲) $y=|x-۲|+۱$

۳) $y=|x+۱|+۲$ ۴) $y=|x+۲|-۱$

۲

$$y=|x-۱|+۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=|-x-۱|+۲=|x+۱|+۲$$

$$\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{۳ واحد}} y=|x-۳+۱|+۲ \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{۱ واحد}} y=|x-۲|+۲-۱=|x-۲|+۱$$

تست نقطهٔ $(-۵,۱۲)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ واقع شده است. این نقطه، با چه نقطه‌ای از نمودار تابع $g(x)=-f(x)-۲$ متناظر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $(-۵,۱۴)$ ۲) $(-۵,-۱۴)$

۳) $(۳,۱۴)$ ۴) $(-۳,-۱۴)$

۲ چون نقطهٔ $(-۵,۱۲)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار دارد، پس $f(-۵)=۱۲$ است. برای پیدا کردن نقطهٔ معادل $(-۵,۱۲)$ روی نمودار تابع g داریم:

$$g(-۵)=-f(-۵)-۲=-(۱۲)-۲=-۱۴$$

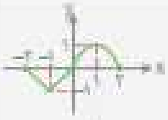
تبدیل نمودارهای f(x) و f(ax+b) به یکدیگر

برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ با کمک نمودار تابع $y=f(x)$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

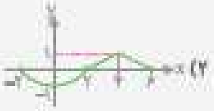
۱. با توجه به علامت b، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ b واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم.

۲. طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می‌کنیم.

تست نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(\frac{۱}{۲}x-۱)$ کدام است؟



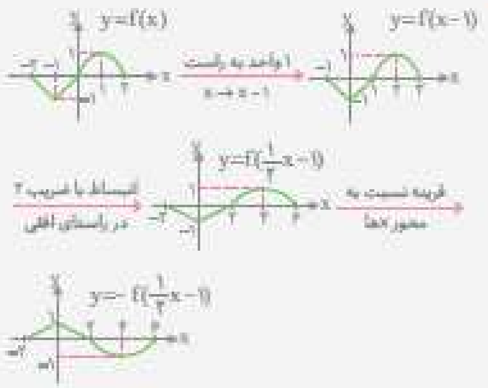
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴ تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

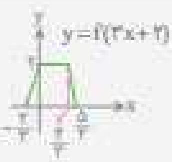


برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ با کمک نمودار $y=f(ax+b)$ برعکس مراحل فوق عمل می‌کنیم:

۱. طول تمام نقاط نمودار را در a ضرب می‌کنیم تا به نمودار تابع $y=f(x+b)$ برسیم.

۲. اگر $b>۰$ باشد، نمودار را به اندازهٔ b واحد به سمت راست و اگر $b<۰$ باشد، نمودار را به اندازهٔ b واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

مثال نمودار تابع $y=f(۳x+۲)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم کنید.



ابتدا طول تمام نقاط را در ۳ ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:

درس ۳ انواع تابع

توابع چند جمله‌ای

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_n \neq 0$ و همهٔ ضرایب عدد حقیقی هستند را یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.

مثلاً تابع $y=x^4+\sqrt{2}x+1$ یک چندجمله‌ای درجهٔ ۴ است، اما تابع $y=x^4+\sqrt{2x}+1$ چندجمله‌ای نیست.

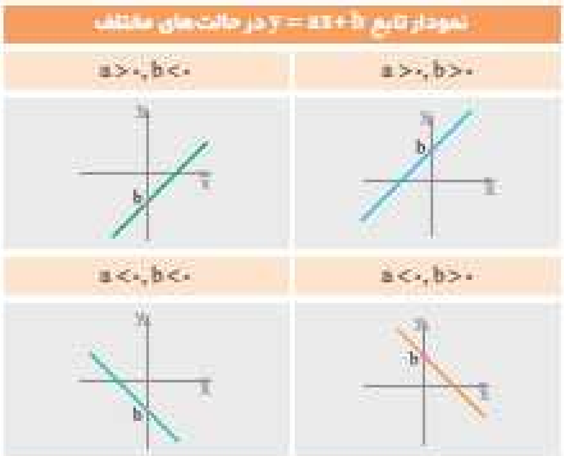
چند ویژگی

1. برای تابع $f(x)=0$ درجه تعریف نمی‌شود.
2. درجهٔ تابع ثابت $f(x)=c$ برابر صفر است.
3. درجهٔ تابع خطی $f(x)=mx+b$ برابر ۱ است.
4. درجهٔ تابع سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ برابر ۲ است.

تابع خطی

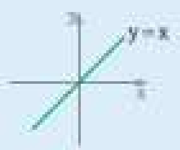
به هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ تابع خطی می‌گویند. می‌دانیم در این تابع a برابر شیب‌خط و b نشان‌دهندهٔ عرض از مبدأ است.

نمودار توابع خطی $y=ax+b$ با توجه به علامت a و b در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:

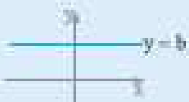


تذکر: اگر $a=1$ و $b=0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y=ax+b$ به تابع $y=x$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع همانی می‌گویند.

توجه کنید خط $y=x$ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم دستگاه مختصات است.



تذکر: اگر $a=0$ باشد، آنگاه تابع خطی $y=ax+b$ به تابع $y=b$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع ثابت می‌گویند.



مثال: اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد و بدانیم $f(3)+g(3)=5$ است، حاصل $f(4)\times g(5)$ را به دست آورید.

چون f تابعی همانی است، پس $f(3)=3$ است، بنابراین با توجه به صورت سؤال داریم:

$f(3)+g(3)=5 \Rightarrow 3+g(3)=5 \Rightarrow g(3)=2$

حال چون تابع g ثابت است، پس به ازای تمام مقادیر برابر ۲ است. بنابراین:

$f(4)\times g(5)=4\times 2=8$

برای نوشتن ضابطهٔ تابع خطی باید شیب خط و مختصات یک نقطه از آن یا مختصات دو نقطه از خط را در اختیار داشته باشیم.

تست: اگر نمودار تابع خطی f محور yها را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند و بدانیم $f(1)=f(-3)+8$ است، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۴ چون تابع خطی $f(x)=ax+b$ محور yها را با عرض ۱ قطع می‌کند پس:

$f(0)=1 \Rightarrow b=1$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $f(1)=f(-3)+8$ داریم:

$a+1=-3a+1+8 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=2x+1 \Rightarrow f(2)=2\times 2+1=5$

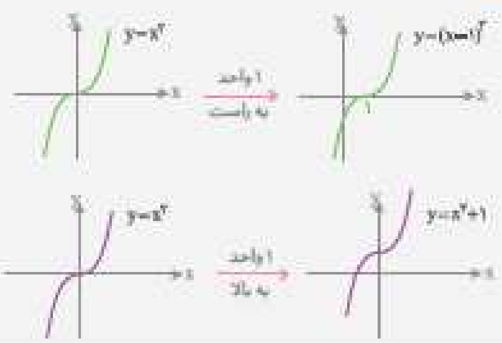
تابع درجهٔ سوم

هر تابع به‌صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ با شرط $a\neq 0$، یک تابع درجهٔ ۳ است. دامنه و بُرد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

نمودار تابع $y=x^3$ و $y=-x^3$ به‌صورت زیر است:

تنها صفر این تابع نقطهٔ $x=0$ است. یعنی نمودار تابع فقط در نقطهٔ به‌طول $x=0$ محور xها را قطع می‌کند.

مثال: نمودار تابع $y=(x-1)^3$ و $y=x^3+1$ را رسم کنید.



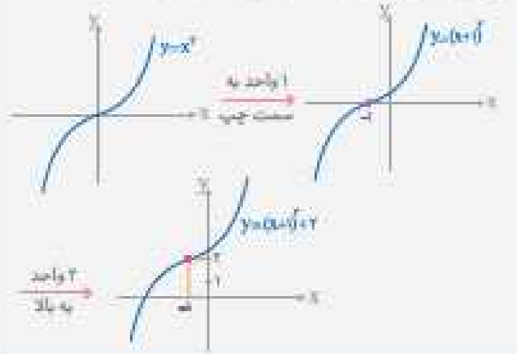
در بعضی از سؤالات که ضابطهٔ تابع درجه سوم به‌صورت $y=ax^3+bx^2+cx+d$ داده می‌شود، می‌توانیم به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای، آن‌ها را به‌صورت $y=(x-a)^3+k$ بنویسیم و با کمک قوانین انتقال نمودار آن را رسم کنیم.

$f(x)=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow f(x)=(x+1)^3$

$f(x)=x^3-6x^2+12x-8 \Rightarrow f(x)=(x-2)^3$

مثال **نمودار تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$ را رسم کنید.**

با کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای، تابع را به‌صورت $f(x)=(x+1)^3+2$ بازنویسی می‌کنیم. حال با کمک قوانین انتقال داریم:



نمودار $y=x^2$ و $y=x^3$ زیر ذره‌بین

با توجه به نمودار توابع $y=x^2$ و $y=x^3$ مشاهده می‌کنیم:

1. هر دو تابع در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی هستند.
2. این دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x=0$ و $x=1$ متقاطع‌اند.
3. در بازهٔ $(0,1)$ نمودار تابع $y=x^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=x^3$ است.
4. در بازهٔ $(1,+\infty)$ نمودار تابع $y=x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y=x^2$ قرار دارد.

توابع گویا

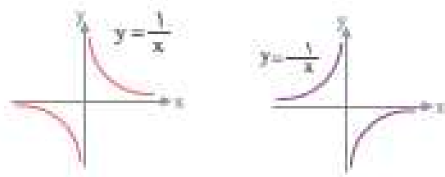
هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست، یعنی $Q(x)\neq 0$. پس دامنهٔ آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

مثلاً توابع زیر همگی گویا هستند.

$$y=\frac{1}{x+2} \quad , \quad y=\frac{\sqrt{2}x+5}{x^3+4} \quad , \quad y=\frac{\frac{1}{4}x-1}{x^2+x+9}$$

نمودار تابع گویای $y=\frac{1}{x}$ و $y=-\frac{1}{x}$ به‌صورت زیر است:



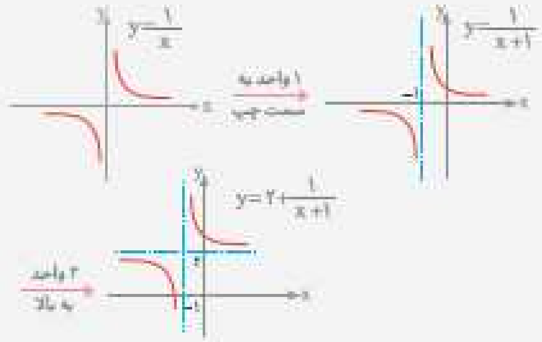
با توجه به نمودار، واضح است که دامنه و برد تابع برابر با $\mathbb{R}-\{0\}$ است.

برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ می‌توانیم ضابطهٔ تابع را ساده کنیم و از قوانین انتقال استفاده کنیم.

مثال **نمودار تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ را رسم کنید.**

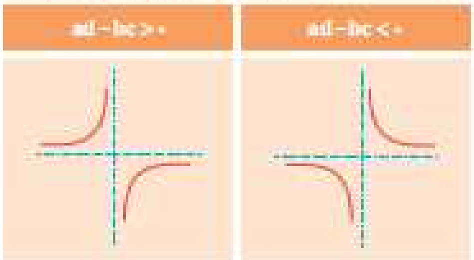
ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2x+2+1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$$



برای رسم سریع‌تر تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1. خط قائم $x=-\frac{d}{c}$ و خط افقی $y=\frac{a}{c}$ را به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم.
2. با توجه به علامت $ad-bc$ نمودار را به یکی از شکل‌های زیر رسم می‌کنیم:



نکته اگر $ad-bc=0$ باشد، ضابطهٔ تابع به فرم $f(x)=\frac{a}{c}$ تبدیل می‌شود که تابعی ثابت است.

مثال **برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ به روش گفته شده، ابتدا خط قائم $x=-1$ و خط افقی $y=\frac{2}{1}=2$ را به صورت خط‌چین رسم می‌کنیم. حال چون $ad-bc=2-3<0$ است، پس نمودار به صورت زیر خواهد بود:**

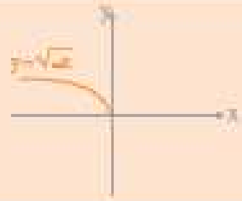
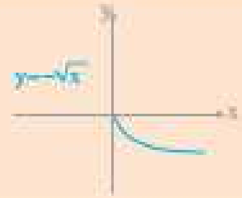
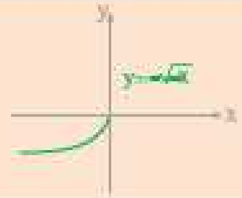
تابع رادیکالی [تابع ریشهٔ دوم]

به تابع $f(x)$ که در آن ضابطه‌ای برحسب x زیر رادیکال باشد تابع رادیکالی می‌گویند؛ مانند:

$$y=\sqrt{5x^2+1}\ ,\ y=5+\sqrt{2x-4}\ ,\ y=\sqrt{\frac{2x+7}{x-1}}$$

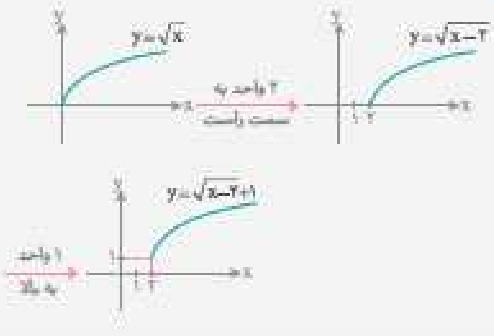
به حالتی خاص از تابع رادیکالی که هر عدد نامنفی را به ریشهٔ دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع ریشهٔ دوم می‌گویند و آن را به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند و نمودار آن به‌صورت زیر است:

$$\Rightarrow D_f=R_f=[0,+\infty)$$

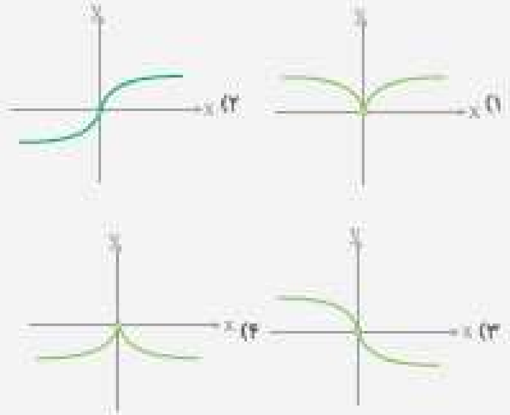
قرینهٔ نمودار $y=\sqrt{x}$ نسبت به محورهای مختصات	
قرینه نسبت به محور y	
قرینه نسبت به محور x	
قرینه نسبت به مبدأ مختصات	

با کمک قوانین انتقال، می‌توانیم نمودار توابع رادیکالی به فرم $y=\sqrt{ax+b}+c$ را از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنیم.

مثال نمودار تابع $y=\sqrt{x-2}+1$ را رسم کنید.

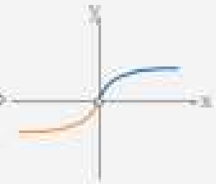


تست نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$ کدام است؟



۲ برای رسم، ابتدا آن را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

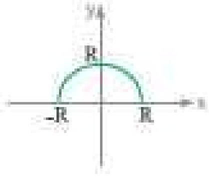
$$f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x>0\\ -\sqrt{-x} & ;x<0\end{cases}\Rightarrow$$



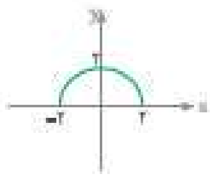
توجه کنید چون $x=0$ در دامنهٔ f وجود ندارد، پس نمودار آن در این نقطه توخالی است.

نمودار توابع $y=\sqrt[3]{x}$ و $y=-\sqrt[3]{x}$ به صورت زیر است:

نمودار تابع $y=\sqrt{R^2-x^2}$ یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R است.



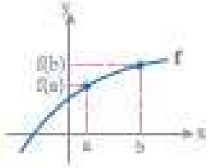
نمودار تابع $y=\sqrt{4-x^2}$ به صورت زیر است:



درس ۴ تابع صعودی و نزولی

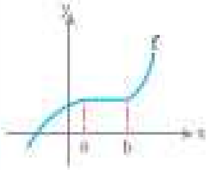
تابع صعودی و نزولی

به تابعی که در آن با افزایش مقدار x، مقدار y هم افزایش یابد، تابع اکیداً صعودی می‌گویند. در تابع اکیداً صعودی f، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:



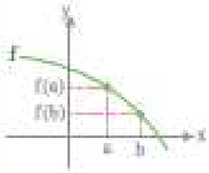
$a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

به تابعی که در آن با افزایش مقدار x، مقدار y افزایش یابد یا ثابت بماند، تابع صعودی می‌گویند. در تابع صعودی f، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:



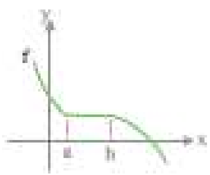
$a<b \Rightarrow f(a)\le f(b)$

به تابعی که در آن، با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش یابد، تابع اکیداً نزولی می‌گویند. در تابع اکیداً نزولی f، برای هر دو مقدار a و b در دامنه، داریم:



$a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$

به تابعی که در آن، با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند، تابع نزولی می‌گویند. در تابع نزولی f، برای هر دو مقدار a و b در دامنه داریم:

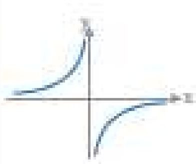


$a<b \Rightarrow f(a)\ge f(b)$

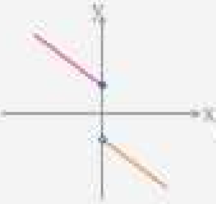
تذکر ۱ کلمهٔ اکید نشان می‌دهد تابع در هیچ بازه‌ای ثابت نیست.

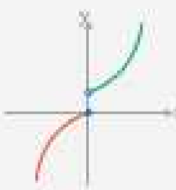
تذکر ۲ اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک‌به‌یک است، اما عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد.

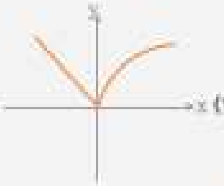
مثلاً، تابع $y=-\frac{1}{x}$ تابعی یک‌به‌یک است، اما به علت جهش در اطراف $x=0$، تابعی اکیداً صعودی نیست.

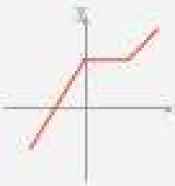


تست کدام نمودار مربوط به تابعی مانند f است که برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ که $x_1<x_2$ باشد، $f(x_1)<f(x_2)$ است؟

۱)


۲)


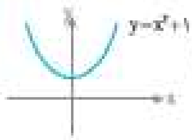
۳)


۴)


۲ صورت سؤال معرف تابعی اکیداً صعودی است. در میان گزینه‌ها فقط نمودار گزینهٔ (۲) اکیداً صعودی است.

تابع یکنوا و غیریکنوا

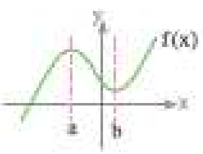
اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه اکیداً یکنوا است.

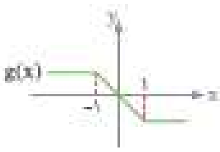


مثلاً تابع $y=x^2+1$ در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0]$ و $[0,+\infty)$ اکیداً یکنوا است.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه یکنوا است و اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ نه صعودی باشد و نه نزولی، به آن تابع غیریکنوا می‌گوییم.

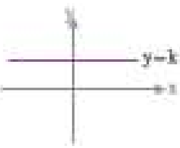
مثلاً نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل است. این تابع در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است، پس در این بازه اکیداً یکنوا است. از طرفی در بازه‌های $(-\infty,a]$ و $[b,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس در این بازه‌ها نیز اکیداً یکنوا است. اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی (غیریکنوا).





نمودار تابع $g(x)$ در شکل زیر دیده می‌شود. این تابع در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ یکنوا (نزولی) است اما اکیداً یکنوا نیست.

تابع ثابت $y=k$، تنها تابعی است که در هر بازه هم صعودی و هم نزولی می‌باشد. بنابراین یک تابع یکنوا است.



مثال ۱ **یکنوایی تابع $y=\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]$ را بررسی کنید.**

می‌دانیم x^2 عبارتی نامنفی است، پس کسر $\frac{x^2}{x^2+1}$ مثبت بوده و چون مقدار مخرج کسر از صورت آن یک واحد بیشتر است، در نتیجه $0\leq\frac{x^2}{x^2+1}<1$. بنابراین، تابع $y=\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]$، در واقع تابع ثابت $y=0$ است که تابعی هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.

مثال ۲ **اگر تابع $f=\{(3,2a-1),(1,5),(4,-3)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a را پیدا کنید.**

در تابع $f=\{(1,5),(3,2a-1),(4,-3)\}$، ترتیب مؤلفه‌های اول به صورت $1<3<4$ است. با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی، خواهیم داشت:

$$f(4)<f(3)<f(1)\Rightarrow -3<2a-1<5\xrightarrow{+1}-2<2a<6$$
$$\xrightarrow{\div 2}-1<a<3$$

تست **تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt{x^2}$ در چه تعداد از بازه‌های زیر صعودی است؟**

الف) $(-1,1)$

ب) $(0,+\infty)$

پ) $(-\infty,+\infty)$

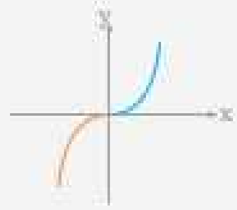
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

۳ ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x\sqrt{x^2}=x|x|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2 & ; x\geq 0\\ -x^2 & ; x<0\end{cases}\Rightarrow$$



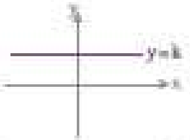
با توجه به نمودار، تابع f در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ و هر زیر مجموعه‌ای از آن صعودی است.

بررسی یکنوایی توابع معروف

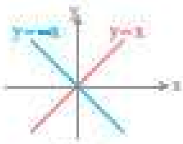
در سؤالاتی که ضابطهٔ تابع داده می‌شود، بهترین راه برای تشخیص یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است.

نمودار همهٔ توابع مهم کتاب درسی، که باید برای تشخیص یکنوایی به خاطر داشته باشید در ادامه آورده شده است.

در این نمودارها، قسمت‌های صعودی با رنگ قرمز و قسمت‌های نزولی با رنگ آبی مشخص شده است.

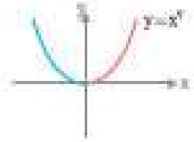


تنها تابع هم صعودی و هم نزولی



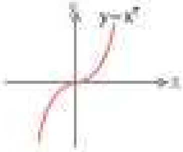
$y=x$ اکیداً صعودی

$y=-x$ اکیداً نزولی

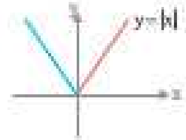


در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی

در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی

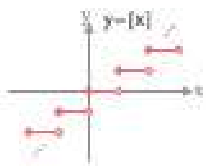


اکیداً صعودی

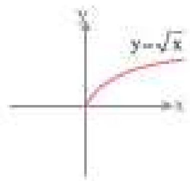


در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی

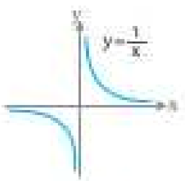
در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی



صعودی



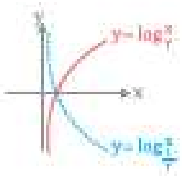
اکیداً صعودی



در هر یک از بازه‌های $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی، اما در $\mathbb{R}$ غیریکنوا

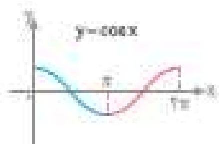
برای پایهٔ بزرگ‌تر از یک، اکیداً صعودی

برای پایهٔ بین صفر و یک، اکیداً نزولی



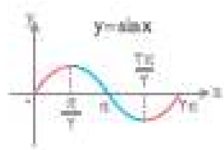
برای مبنای بزرگ‌تر از یک، اکیداً صعودی

برای مبنای بین ۰ و ۱، اکیداً نزولی



در بازهٔ $[0,\pi]$ اکیداً نزولی

در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ اکیداً صعودی



در بازهٔ $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

اکیداً نزولی در بازه‌های

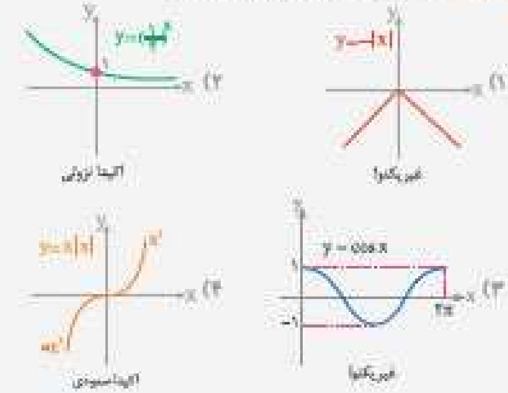
$[0,\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$

اکیداً صعودی

تست کدام تابع اکیداً نزولی است؟

۱) $y=-|x|$ ۲) $y=(\frac{1}{3})^x$ ۳) $y=\cos x$ ۴) $y=x|x|$

۲ نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:



تأثیر انتقال تابع بر وضعیت و بازهٔ یکنوایی

- انتقال در راستای افقی یا عمودی و هم‌چنین انبساط و انقباض افقی یا عمودی وضعیت یکنوایی تابع را تغییر نمی‌دهند؛ یعنی اگر تابعی اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشد، در اثر انتقال، انقباض یا انبساط همچنان اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باقی می‌ماند.

مثلاً تابع $y=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی است، پس تابع $y=1+2\sqrt{3x-1}$ نیز اکیداً صعودی می‌باشد.

- انتقال، انبساط و انقباض در راستای افقی، بازهٔ یکنوایی تابع را تغییر می‌دهد.

مثلاً تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[0,\pi]$ اکیداً نزولی است، اما تابع $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ در بازهٔ $[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}]$ اکیداً نزولی است.

- قرینه کردن نسبت به محور xها یا نسبت به محور yها، وضعیت یکنوایی تابع را تغییر می‌دهد.

مثلاً تابع $y=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی است، اما تابع‌های $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ اکیداً نزولی هستند.

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=1+2\sin(\pi-2x)$ در کدام بازهٔ زیر یکنوا است؟

۱) $(0,\frac{\pi}{2})$ ۲) $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ ۳) $(0,\pi)$ ۴) $(\frac{2\pi}{3},\pi)$

۲ می‌دانیم $\sin(\overbrace{\pi-2x}^{\text{ربع دوم}})=+\sin 2x$ است، بنابراین ضابطهٔ تابع را به صورت $f(x)=1+2\sin 2x$ می‌نویسیم. از طرفی می‌دانیم انتقال در راستای قائم و انبساط قائم تأثیری در بازهٔ یکنوایی ندارند، پس می‌توانیم تابع $y=\sin 2x$ را بررسی کنیم:

با توجه به گزینه‌ها تابع f در بازهٔ $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ یکنوا است.

بررسی یکنوایی توابع چندضابطه‌ای

برای بررسی یکنوایی توابعی که به‌صورت چندضابطه‌ای مطرح می‌شوند، بهترین راهکار رسم نمودار تابع است.

تست چه تعداد از توابع زیر یکنوا است؟

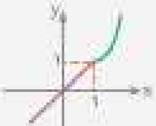
الف) $f(x)=\begin{cases}x^3 & ; x\geq 1\\ x & ; x<1\end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ; x\geq 0\\ x-1 & ; x<0\end{cases}$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & ; x\geq 1\\ x & ; x<1\end{cases}$

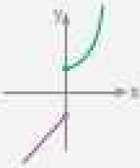
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲ نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:

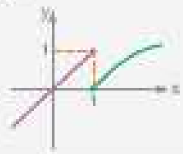
الف) $y=\begin{cases}x^3 & ; x\geq 1\\ x & ; x<1\end{cases}\Rightarrow$



ب) $y=\begin{cases}x^2+1 & ; x\geq 0\\ x-1 & ; x<0\end{cases}\Rightarrow$



پ) $y=\begin{cases}\sqrt{x-1} & ; x\geq 1\\ x & ; x<1\end{cases}\Rightarrow$



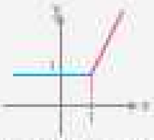
بررسی یکنوایی توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

برای بررسی یکنوایی توابع شامل قدرمطلق، بهترین راه این است که تابع را در ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسیم و آن را رسم کنیم.

مثال یکنوایی تابع $y=x+|x-1|$ را بررسی کنید.

ابتدا تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم و خواهیم داشت:

$y=x+|x-1|=\begin{cases}2x-1 & ; x\geq 1\\ 1 & ; x<1\end{cases}\Rightarrow$



واضح است که تابع فوق، صعودی است.

تست یکنوایی تابع $f(x)=x(|x|+\frac{1}{x})$ چگونه است؟

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

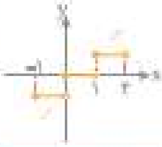
۱ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$f(x)=x(|x|+\frac{1}{x})=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ -x^2+1 & x<0\end{cases}\Rightarrow$

با توجه به شکل واضح است این تابع همواره صعودی است.

برای بررسی یکنوایی توابع شامل جزء صحیح نیز بهترین راهکار رسم نمودار تابع است.

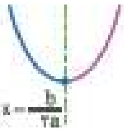
مثلاً با توجه به نمودار تابع $y=[x]$، این تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.



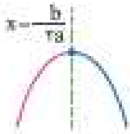
بررسی یکنوایی توابع درجهٔ دوم

نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل سهمی است و در حالت کلی غیریکنوا می‌باشد، اما اگر دامنه را برحسب رأس سهمی محدود کنیم، در یک بازه اکیداً نزولی و در یک بازه اکیداً صعودی خواهد شد. در این صورت با توجه به علامت a با دو حالت زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر $a>0$ باشد، دهانهٔ سهمی روبه بالا است. بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است به صورت $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است به صورت $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ می‌باشد.



۲ اگر $a<0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین است. بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است به صورت $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است به صورت $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ می‌باشد.



تست تابع $y=(x+1)^2-(2x-1)^2$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱   ۲) -1 ۳) ۲   ۴) -2

۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=(x+1)^2-(2x-1)^2=(x^2+2x+1)-(4x^2-4x+1)=-3x^2+6x$$

چون طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{6}{2(-3)}=1$ و دهانهٔ سهمی رو به پایین است، پس تابع در بازهٔ $(-\infty,1]$ اکیداً صعودی است یعنی $a=1$ است.

بررسی یکنوایی توابع نمایی

تابع نمایی $y=a^x$ به‌ازای $a>1$، یک تابع اکیداً صعودی و به ازای $0<a<1$ یک تابع اکیداً نزولی است.

در برخی سؤالات، ضابطهٔ یک تابع نمایی با پایهٔ پارامتری داده می‌شود و از ما پرسیده می‌شود: اگر تابع نمایی داده‌شده اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، مقدار پارامتر چقدر است؟

در این سؤالات اگر تابع نمایی اکیداً صعودی باشد، باید مقدار پایه را بزرگ‌تر از یک و اگر تابع نمایی اکیداً نزولی باشد، مقدار پایه را بین صفر و یک قرار می‌دهیم.

حذر اگر مقدار پایه برابر صفر یا یک باشد، تابع داده شده به تابعی ثابت تبدیل می‌شود که هم صعودی و هم نزولی است.

تست اگر تابع نمایی $y=(\frac{a+3}{a^2+1})^x$، تابعی اکیداً صعودی باشد، در این صورت مقادیر a کدام خواهد بود؟

۱) $(-3,1)$ ۲) $(-1,2)$

۳) $[1,2)$ ۴) $[-1,3)$

۲ اگر پایهٔ تابع نمایی $y=(\frac{a+3}{a^2+1})^x$ بزرگ‌تر از یک باشد، در این صورت تابع صعودی اکید خواهد بود:

$$\frac{a+3}{a^2+1}>1\Rightarrow a+3>a^2+1\Rightarrow \underbrace{a^2-a-2}_{(a-2)(a+1)}<0\Rightarrow -1<a<2$$

پس به ازای مقادیر بازهٔ $(-1,2)$، تابع y اکیداً صعودی است.

یکنوایی در اعمال توابع

مجموع دو تابع اکیداً صعودی یا مجموع یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع صعودی، تابعی اکیداً صعودی است. به‌طور مشابه مجموع دو تابع اکیداً نزولی یا مجموع یک تابع اکیداً نزولی و یک تابع نزولی، تابعی اکیداً نزولی است.

مثلاً چون هر یک از توابع $y=2^x$ و $y=x^3$ اکیداً صعودی هستند، پس تابع $f(x)=x^3+2^x$ نیز اکیداً صعودی است.

تست تابع $f(x)=\sqrt{x-2}+x^2-4x$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) همواره صعودی

۲) همواره نزولی

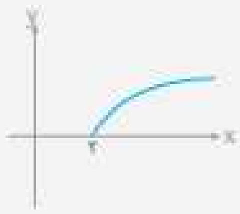
۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی

۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

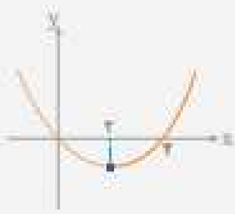
۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم. چون $x-2$ زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ قرار دارد، پس:

$$x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2$$

از طرفی تابع f از مجموع دو تابع $y_1=\sqrt{x-2}$ و $y_2=x^2-4x$ تشکیل شده که هر دوی آن‌ها در بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی هستند:



و



پس تابع f که از جمع دو تابع اکیداً صعودی به‌وجود آمده نیز تابعی اکیداً صعودی است.

یکنوایی تابع $\frac{1}{f(x)}$

اگر $f(x)$ تابعی صعودی و همواره دارای یک علامت و مخالف صفر باشد، آنگاه تابع $\frac{1}{f(x)}$ نزولی است و اگر $f(x)$ نزولی باشد، تابع $\frac{1}{f(x)}$ صعودی است.

تست **وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x+1}$ چگونه است؟**

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱ به دلیل وجود $\sqrt{x}$ دامنهٔ تابع برابر $[0,+\infty)$ است. در این بازه، تابع $y=x+1$ صعودی است. از طرفی می‌دانیم تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است. بنابراین مجموع این دو تابع صعودی خواهد بود.

$$y=\underbrace{(\sqrt{x})}_{\text{صعودی}}+\underbrace{(-\frac{1}{x+1})}_{\text{صعودی}}$$

ترکیب دو تابع صعودی یا ترکیب دو تابع نزولی، تابعی صعودی است. اما ترکیب یک تابع صعودی و یک تابع نزولی، تابعی نزولی است.

پس برای این‌که توابع fog و gof اکیداً یکنوا شوند، باید هر دو تابع f و g اکیداً یکنوا باشند.

تست **اگر دو تابع f و g به‌ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی باشند، کدام‌یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟**

۱) $f.g$ ۲) $f-g$ ۳) gof ۴) $g-f$

۲ چون g اکیداً نزولی است، پس $-g$ اکیداً صعودی خواهد بود و مجموع دو تابع اکیداً صعودی نیز، تابعی اکیداً صعودی است

$f+(-g)=$ اکیداً صعودی + اکیداً صعودی = اکیداً صعودی

میانبر با فرض $f(x)=x$ و $g(x)=-2x$ و تشکیل هر یک از توابع موجود در گزینه‌ها، می‌توان به راحتی سایر گزینه‌ها را حذف کرد.

درس ۵ اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

اعمال روی ضابطهٔ توابع

توابع را نیز می‌توان مانند اعداد جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کرد و توابع جدید به‌دست آورد. [البته در هنگام تقسیم، تابع واقع در مخرج نباید صفر باشد.]

۱ برای هر x متعلق به دامنهٔ هر دو تابع f و g، می‌توان توابع $f+g$، $f-g$ و $f.g$ را به‌صورت زیر تعریف کرد:

مجموع دو تابع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x), D_{f+g}=D_f\cap D_g$
تفاضل دو تابع	$(f-g)(x)=f(x)-g(x), D_{f-g}=D_f\cap D_g$
ضرب دو تابع	$(f.g)(x)=f(x).g(x), D_{f.g}=D_f\cap D_g$

۲ برای هر x متعلق به دامنهٔ هر دو تابع f و g که در آن $g(x)\neq 0$ باشد، می‌توان تابع $\frac{f}{g}$ را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}; D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$$

مثال **دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=2x$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطهٔ تابع $y=f.g+\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.**

$$D_y=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$\Rightarrow f.g+\frac{f}{g}=x^2(2x)+\frac{x^2}{2x}=2x^3+\frac{x}{2}\Rightarrow y=2x^3+\frac{x}{2}$$

برای رسم نمودار توابع $f\pm g$ یا $f\times g$ یا $\frac{f}{g}$ بعد از یافتن دامنهٔ تابع مورد نظر، باید ضابطهٔ آن‌ها را هم به دست آوریم و نمودار را در آن دامنه رسم کنیم.

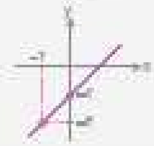
مثال **فرض کنید $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$ و $g(x)=\frac{x+2}{x}$ است. نمودار تابع $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.**

ابتدا دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را می‌یابیم:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}=(\mathbb{R}-\{0\})\cap(\mathbb{R}-\{0\})-\{-2\}$$
$$=\mathbb{R}-\{-2,0\}$$

سپس ضابطهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم و نمودار آن را در دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ رسم می‌کنیم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x^2-4}{x}}{\frac{x+2}{x}}=\frac{x^2-4}{x+2}=x-2$$

$\Rightarrow$ 

تست **نمودار توابع f و g به صورت زیر است. مقدار $(\frac{g-f}{-4f})(0)$ کدام است؟**

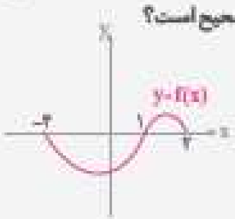
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{5}{3}$

۲ با توجه به شکل صورت سؤال $f(0)=1$ است. حال برای پیدا کردن $g(0)$ ضابطهٔ g را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix} g(-1)=0 \\ g(1)=-2 \end{matrix}\Rightarrow m=-\frac{2}{2}=-1\Rightarrow g(x)=-x-1\Rightarrow g(0)=-1$$

$$\Rightarrow(\frac{g-f}{-4f})(0)=\frac{g(0)-f(0)}{-4f(0)}=\frac{-1-1}{-4\times 1}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

تست نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y=f(2x)+f(-x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۷

۴ دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر بازهٔ $[-4,2]$ است، پس دامنهٔ تابع $f(-x)$ و $f(2x)$ را به‌دست می‌آوریم و اشتراک آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-x): -4 \le -x \le 2 \Rightarrow -2 \le x \le 4 \Rightarrow D_{f(-x)}=[-2,4]$$

$$f(2x): -4 \le 2x \le 2 \Rightarrow -2 \le x \le 1 \Rightarrow D_{f(2x)}=[-2,1]$$

اشتراک دامنه‌های فوق به‌صورت بازهٔ $[-2,1]$ است که شامل ۴ عدد صحیح است.

اعمال توابع در تابع‌های زوج مرتبی

در بعضی از سؤالات، توابع f و g را به‌صورت زوج‌مرتب بیان می‌کنند و از ما توابع $f \pm g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را می‌خواهند. برای به دست آوردن این توابع، ابتدا مؤلفه‌های اول مشترک بین دو تابع را تعیین می‌کنیم (یعنی اشتراک دامنه‌ها را مشخص می‌کنیم). سپس، اعمال خواسته‌شده را روی مؤلفه‌های دوم انجام می‌دهیم.

تست اگر توابع f و g به‌صورت زیر باشند، آنگاه تابع $\frac{2g}{f-1}$ از چند زوج مرتب تشکیل شده است؟

$$f=\{(3,2),(1,0),(2,1),(5,1)\}$$

$$g=\{(3,5),(-1,2),(1,4),(5,3)\}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ برای به‌دست آوردن $2g$ به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌های (x,y)، همهٔ مؤلفه‌های دوم g را ۲ برابر کرده و برای به‌دست آوردن $f-1$ ، از همهٔ مؤلفه‌های دوم f، یک واحد کم می‌کنیم:

$$2g=\{(3,10),(-1,4),(1,8),(5,6)\}$$

$$f-1=\{(3,1),(1,-1),(2,0),(5,0)\}$$

حال برای به‌دست آوردن $\frac{2g}{f-1}$ ، به‌ازای مؤلفه‌های اول مشترک، مؤلفه‌های دوم تابع $2g$ را بر مؤلفه‌های دوم تابع $f-1$ تقسیم می‌کنیم! بنابراین:

$$D_{\frac{2g}{f-1}}=D_{2g}\cap D_{f-1}-\{x|(f-1)(x)=0\}=\{1,3,5\}-\{2,5\}=\{1,3\}$$

$$\frac{2g}{f-1}=\{(3,\frac{10}{1}),(1,\frac{8}{-1})\}=\{(3,10),(1,-8)\} \Rightarrow$$ ۲ زوج مرتب

تست اگر $f=\{(1,2),(2,3),(4,-1)\}$ و $g=\{(1,0),(3,2),(4,1)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ کدام است؟

۱) $\{0,2\}$ ۲) $\{1,0\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\{0,-1\}$

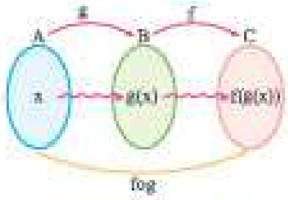
۲ با توجه به اینکه $D_f \cap D_g=\{1,4\}$ است؛ پس:

$$\begin{matrix} f+g=\{(1,2),(4,0)\} \\ f-g=\{(1,2),(4,-2)\} \end{matrix} \Rightarrow \frac{f+g}{f-g}=\{(1,1),(4,0)\}$$

بنابراین برد این تابع برابر $\{1,0\}$ است.

ترکیب دو تابع

اگر f و g دو تابع باشند، تابع $(fog)(x)=f(g(x))$ را ترکیب f با g می‌گوییم و آن را با fog نمایش می‌دهیم، به شرط آن‌که خروجی‌های تابع g در دامنهٔ تابع f قرار داشته باشند.



به طور مشابه gof را به‌صورت $(gof)(x)=g(f(x))$ نمایش می‌دهیم، به شرط آن‌که مقادیر f در دامنهٔ g قرار داشته باشند.

نحوهٔ تشکیل تابع مرکب به کمک ماشین تابع

fog

$$x \to \boxed{g} \to \boxed{f} \to f(g(x))$$

fog

مقادیر $g(x)$ به‌عنوان ورودی تابع f است.

gof

$$x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to g(f(x))$$

gof

مقادیر $f(x)$ به‌عنوان ورودی تابع g است.

fof

$$x \to \boxed{f} \to \boxed{f} \to f(f(x))$$

fof

مقادیر $f(x)$ به‌عنوان ورودی تابع f است.

تست اگر $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$ باشد، مقدار $fof(-1)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۴

۱ ابتدا $f(-1)$ را به‌دست می‌آوریم: $f(-1)=\sqrt{2-1-1}=0$

سپس مقدار $f(f(-1))$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(f(-1))=f(0)=\sqrt{2+0-0}=\sqrt{2}$$

توابع مرکب زوج مرتبی

اگر توابع f و g را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بدهند و از ما تابع fog را بخواهند، از تابع درونی یعنی $g(x)$ شروع می‌کنیم. اگر زوج مرتب (a, b) عضوی از تابع g باشد در تابع بیرونی یعنی $f(x)$ به دنبال زوج مرتبی می‌گردیم که مؤلفهٔ اولش b باشد. اگر زوج مرتب (b, c) را در تابع f یافتیم آنگاه نتیجه می‌گیریم که زوج مرتب (a, c) در تابع fog است. به عبارت دیگر:

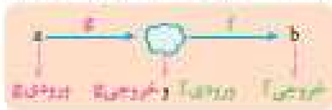
$$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c \Rightarrow (a,c) \in fog \qquad \begin{cases} (a,b) \in g \\ (b,c) \in f \end{cases} \Rightarrow (a,c) \in fog$$

مثال اگر $f = \{(1,1),(2,-1)\}$ و $g = \{(1,0),(-1,1)\}$ باشد، توابع gof و fog را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 0 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 1 \end{cases} \Rightarrow gof = \{(1,0),(2,1)\}$$

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \\ -1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 1 \end{cases} \Rightarrow fog = \{(-1,1)\}$$

برای بررسی سؤالاتی که در آن، ترکیب ضابطهٔ یک تابع با زوج‌مرتب تابع دیگر داده می‌شود، بهترین روش این است که ورودی و خروجی هر تابع را به کمک فلش‌گذاری مشخص کنیم. یعنی اگر $f(g(a)) = b$ باشد آنگاه:



مثال دو تابع $f = \{(2,5),(3,4),(1,6),(4,7),(8,1)\}$ و $g(x) = 2x-5$ مفروض‌اند. اگر $f(g(a)) = 6$ باشد مقدار a را به دست آورید.

از فلش‌گذاری استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$f(g(a)) = 6 \Rightarrow a \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f} 6 \Rightarrow (a, \bigcirc) \in g, (\bigcirc, 6) \in f$$

با توجه به زوج‌مرتب‌های تابع f نتیجه می‌گیریم $\bigcirc = 1$، پس $(a, 1) \in g$ و این یعنی $g(a) = 1$ است، پس:

$$g(a) = 2a - 5 \xrightarrow{g(a)=1} 2a - 5 = 1 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

تست اگر $f = \{(1,-1),(2,3),(0,-2)\}$ و $g = \{(1,2),(-1,0),(-2,5)\}$ باشند، تابع fog+gof کدام است؟

۱) $\{(1,3),(-1,-2)\}$ ۲) $\{(1,0),(0,5)\}$

۳) $\{(1,3)\}$ ۴) $\{(0,5)\}$

۳ ابتدا توابع fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &1 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 0 \\ &2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} \times \Rightarrow gof = \{(1,0),(0,5)\} \\ &0 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \\ &-1 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} -2 \Rightarrow fog = \{(1,3),(-1,-2)\} \\ &-2 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} \times \end{aligned}$$

با توجه به این که اشتراک دامنهٔ توابع fog و gof برابر $\{1\}$ است، پس:

$$fog + gof = \{(1, 3+0)\} = \{(1,3)\}$$

یافتن ضابطهٔ تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطهٔ توابع f و g را به ما می‌دهند و از ما ضابطهٔ تابع fog را می‌خواهند. در این سؤالات باید در تابع f به‌جای همهٔ xها، $g(x)$ قرار دهیم.

مثال ۱ اگر $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \dfrac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع gof را به دست آورید.

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)+2}{2-\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{4x-2+2x+2}{\cancel{x+1}}}{\frac{2x+2-2x+1}{\cancel{x+1}}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

مثال ۲ اگر $f(x) = ax+b$ و $fof(x) = 4x+1$ آنگاه a و b را بیابید.

$$fof(x) = f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b)+b$$

$$= a^2x + ab + b = 4x + 1$$

$$\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ ab + b = 1 \Rightarrow b(a+1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} b(2+1) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \\ b(-2+1) = 1 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \end{cases}$$

تست اگر $f(x) = 2x-2$ و $g(x) = x^2-1$ باشد، جواب معادلهٔ $(fog)(x) = 0$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{2}$ ۲) ± 2 ۳) $\pm\sqrt{3}$ ۴) ± 3

۱ ابتدا ضابطهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x) = 2(x^2-1) - 2 = 2x^2 - 4 \Rightarrow (fog)(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

تذکر در بعضی از تست‌های تابع مرکب می‌توانیم برای یافتن ضابطهٔ تابع موردنظر به‌جای x یک عدد دلخواه بگذاریم و مسئله را با عددگذاری حل کنیم.

یافتن ضابطهٔ تابع درونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطهٔ تابع مرکب fog و تابع f (تابع بیرونی) داده شده و ضابطهٔ تابع g (تابع درونی) یعنی $g(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ در تابع $f(x)$ به جای همهٔ xها، $g(x)$ را قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید.

۲ تابع $f(g(x))$ به‌دست‌آمده را مساوی با تابع مرکب fog که در مسئله داده شده، قرار می‌دهیم و معادلهٔ حاصل را برحسب $g(x)$ حل می‌کنیم.

مثال اگر $f(x) = x+1$ و $(fog)(x) = x^2+2x+2$ باشند، تابع $g(x)$ را به دست آورید.

$$f(x) = x+1 \Rightarrow f(g(x)) = g(x)+1$$

$$g(x)+1 = x^2+2x+2 \Rightarrow g(x) = x^2+2x+1$$

تست اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $(fog)(x)=x+2$ باشد، ضابطهٔ g کدام است؟

۱) $\frac{x-3}{x+1}$　۲) $\frac{-x+1}{x+1}$　۳) $\frac{x+3}{x+1}$　۴) $\frac{x+1}{x}$

۳ طبق صورت سؤال $f(g(x))=x+2$ است؛ پس در تابع f به جای همهٔ xها $g(x)$ می‌گذاریم و خواهیم داشت:

$$f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)-1}\Rightarrow\frac{g(x)+1}{g(x)-1}=x+2$$

$$g(x)+1=xg(x)+2g(x)-x-2$$

$$\Rightarrow\underbrace{xg(x)+g(x)}_{(x+1)g(x)}=x+3\Rightarrow g(x)=\frac{x+3}{x+1}$$

میانبر با جای‌گذاری عدد دلخواه $x=0$ در تابع fog می‌توانیم گزینهٔ درست را پیدا کنیم.

یافتن ضابطهٔ تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطهٔ تابع مرکب fog و تابع g [تابع درونی] را می‌دهند و ضابطهٔ تابع f [تابع بیرونی] یعنی $f(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل از سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ضابطهٔ تابع $g(x)$ را برابر t فرض کرده و مقدار x را برحسب t به‌دست می‌آوریم.

۲ در تابع مرکب داده‌شده، به جای x عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f برحسب t یعنی $f(t)$ را به‌دست می‌آوریم.

۳ در تابع $f(t)$ به جای همهٔ tها، x می‌گذاریم تا ضابطهٔ $f(x)$ به دست آید.

مثال اگر $f(x+2)=4x-3$ باشد $f(x)$ را به دست آورید.

اگر فرض کنیم که $g(x)=x+2$ آنگاه این مسئله مشابه مثال قبل قابل حل است:

$$g(x)=x+2=t\Rightarrow x=t-2\xrightarrow[f(x+2)]{\text{جای‌گذاری در}}f(t)=4(t-2)-3=4t-11$$

$$\Rightarrow f(x)=4x-11$$

تست اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8x^2+6x+5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج - ۹۵)

۱) $2x^2+3x+1$　۲) $2x^2-2x+3$

۳) $2x^2-x+4$　۴) $2x^2+x+3$

۳ با درنظر گرفتن $g(x)=t$ داریم:

$$2x+1=t\Rightarrow x=\frac{t-1}{2}\Rightarrow f(g(x))=f(2x+1)=8x^2+6x+5$$

$$\Rightarrow f(t)=8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+6\left(\frac{t-1}{2}\right)+5=8\left(\frac{t^2-2t+1}{4}\right)+3(t-1)+5$$

با ساده کردن عبارت به‌دست آمده $f(t)=2t^2-t+4$ خواهد شد که با جای‌گذاری x به جای t، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=2x^2-x+4$ خواهد بود.

میانبر در تابع مرکب $x=0$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(g(0))=8(0)^2+6(0)+5\Rightarrow f(1)=5$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=1$ برابر ۵ می‌شود گزینهٔ (۳) است.

پیدا کردن ضابطهٔ تابع f(△) با معلوم بودن ضابطهٔ f(●)

در بعضی از سؤالات، ضابطهٔ تابع f(●) را داریم و از ما ضابطهٔ تابع f(△) را می‌خواهند. [● و △ عبارت‌های برحسب یک متغیر مثلاً x هستند.] برای حل این سؤالات دو راه حل کلی وجود دارد:

روش اول با تغییر متغیر مناسب ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم و سپس در این تابع به جای x عبارت △ را قرار می‌دهیم.

روش دوم ابتدا بررسی می‌کنیم چه تغییری باید روی عبارت ● انجام دهیم تا به عبارت △ تبدیل شود سپس همین تغییر را روی ضابطهٔ تابع f(●) نیز اعمال می‌کنیم.

مثلاً فرض کنید $f(x-2)=x^2+5x+1$ و می‌خواهیم $f(3-x)$ را پیدا کنیم. برای این کار می‌توانیم به دو روش بالا به صورت زیر عمل کنیم:

روش اول

$$x-2=t\Rightarrow x=t+2\Rightarrow f(t)=(t+2)^2+5(t+2)+1$$

$$=t^2+4t+4+5t+10+1=t^2+9t+15$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2+9x+15\Rightarrow f(3-x)=(3-x)^2+9(3-x)+15$$

$$=9-6x+x^2+27-9x+15\Rightarrow f(3-x)=x^2-15x+51$$

روش دوم ابتدا بررسی می‌کنیم که چه تغییری روی عبارت $x-2$ اعمال کنیم تا به عبارت $3-x$ برسیم. به عبارت دیگر باید ببینیم که به جای x چه عبارتی قرار دهیم تا تغییر مطلوب مسئله رخ دهد. فرض می‌کنیم که باید به جای x عبارت $\square$ را در $x-2$ بگذاریم تا عبارت $3-x$ حاصل شود:

$$\square-2=3-x\Rightarrow\square=5-x$$

پس کافیست که در ضابطهٔ تابع $f(x-2)=x^2+5x+1$ به جای همهٔ xها عبارت $5-x$ را قرار دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$f(x-2)=x^2+5x+1\xrightarrow{x\to 5-x}f(5-x-2)=(5-x)^2+5(5-x)+1$$

$$\Rightarrow f(3-x)=25-10x+x^2+25-5x+1=x^2-15x+51$$

تذکر اگر ضابطهٔ f(○) را داشته باشیم، برای مشخص کردن ضابطهٔ f(○) از طریق عددگذاری، بهترین عدد از حل معادلهٔ ○=○ به دست می‌آید.

تست اگر $f(x-3)=x^2-4x+5$ باشد، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟

۱) x^2+1　۲) x^2+3

۳) x^2+4x+5　۴) x^2-4x+5

۴ با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x-3=t\Rightarrow x=t+3\Rightarrow f(t)=(t+3)^2-4(t+3)+5$$

$$\Rightarrow f(t)=t^2+6t+9-4t-12+5\Rightarrow f(x)=x^2+2x+2$$

$$\Rightarrow f(1-x)=\underbrace{(1-x)^2+2(1-x)+2}_{1-2x+x^2+2-2x+2}\Rightarrow f(1-x)=x^2-4x+5$$

میانبر برای میان‌بُر زدن و استفاده از عددگذاری در این سؤال، ابتدا باید عدد مناسب را به دست آوریم:

$$x-3=1-x\Rightarrow x=2\xrightarrow[f(x-3)]{\text{جایگذاری در}}f(2-3)=2^2-4\times2+5$$

$$\Rightarrow f(-1)=1$$

با قرار دادن $x=2$ در ضابطهٔ $f(1-x)$، به $f(-1)$ می‌رسیم و می‌دانیم $f(-1)=1$ است. پس گزینه‌ای نشان‌دهندهٔ ضابطهٔ $f(1-x)$ است که با قرار دادن $x=2$ در آن، حاصل برابر ۱ شود. در میان گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۴) این ویژگی را دارد.

یافتن بُرد تابع مرکب

برای به‌دست آوردن بُرد تابع مرکب fog به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا بُرد تابع درونی یعنی g را به دست می‌آوریم.

۲ بُرد تابع درونی را به عنوان دامنهٔ تابع بیرونی یعنی f در نظر می‌گیریم.

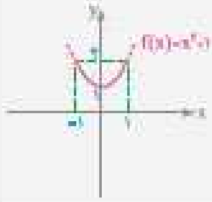
۳ سپس بُرد تابع بیرونی را با دامنهٔ جدید به‌دست می‌آوریم.

مثال **اگر $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sin x$ باشند، بُرد تابع fog را به‌دست آورید.**

می‌دانیم $-1 \le \sin x \le 1$ است، پس: $R_g=[-1,1]$

بازهٔ $[-1,1]$ را به عنوان دامنهٔ تابع f در نظر می‌گیریم: $D_f=[-1,1]$

حال بُرد تابع $f(x)=x^2+1$ را در دامنهٔ $[-1,1]$ تعیین می‌کنیم:

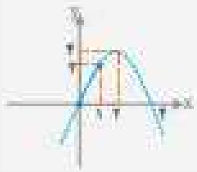


$\Rightarrow R_{fog}=[1,2]$

تست **اگر $f(x)=2x-[2x]$ و $g(x)=-x^2+4x$ باشند، بُرد تابع gof کدام است؟** (داخل - ۹۹)

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3)$ ۳) $[0,4)$ ۴) $[1,4)$

۲ می‌دانیم $0 \le 2x-[2x]<1$ است، بنابراین باید بُرد $g(x)=-x^2+4x$ را به‌ازای ورودی $[0,1)$ به‌دست آوریم:



$\Rightarrow$ بُرد تابع $gof=[0,3)$

یافتن دامنهٔ تابع مرکب

با توجه به نحوهٔ تشکیل تابع fog مشخص است که $g(x)$ به‌جای مقادیر ورودی تابع f قرار می‌گیرد، پس دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x \to \boxed{g} \to \boxed{f} \to f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad D_{f(g(x))}=\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

fog

به همین ترتیب برای دامنهٔ تابع‌های gof و fof می‌توان نوشت:

$$D_{f(f(x))}=\{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \qquad D_{g(f(x))}=\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثلاً اگر $f(x)=x+2$ و $g(x)=\sqrt{x+5}$ باشند، برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع gof، باید ابتدا دامنهٔ توابع f و g را مشخص کنیم:

$D_f=\mathbb{R},\ D_g=[-5,+\infty)$

حال با توجه به دامنهٔ هردو تابع، خواهیم داشت:

$D_{gof}=\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}=\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x+2\}$

$=\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \le x\}=[-7,+\infty)$

تست **اگر $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟** (داخل - ۹۵)

۱) $[0,1)$ ۲) $\{0\}$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

۲ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow x \ne \pm 1$

$g(x)=\sqrt{x-x^2} \Rightarrow x(1-x) \ge 0 \Rightarrow 0 \le x \le 1$

$D_{gof}=\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}=\{x \ne \pm 1 \mid 0 \le \dfrac{1+x^2}{1-x^2} \le 1\}$

حال باید جواب نامعادلهٔ $0 \le \dfrac{1+x^2}{1-x^2} \le 1$ را مشخص کنیم:

۱) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} \ge 0 \xrightarrow{1+x^2>0} 1-x^2>0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow -1<x<1$

۲) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} \le 1 \Rightarrow \dfrac{1+x^2}{1-x^2}-1 \le 0 \Rightarrow \dfrac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{2x^2}{1-x^2} \le 0 \xrightarrow{2x^2 \ge 0} 1-x^2<0 \Rightarrow 1<x^2 \Rightarrow x>1$ یا $x<-1$ یا $x=0$

با توجه به این‌که اشتراک جواب‌های به‌دست آمده از نامعادله برابر $x=0$ است، پس: $D_{gof}=\{x \ne \pm 1 \mid x=0\}=\{0\}$

میانبر راه میان‌بُر این است که $x=\frac{1}{2}$ را در تابع gof قرار دهیم:

$$g\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=g\left(\tfrac{5}{3}\right)=\sqrt{\tfrac{5}{3}-\left(\tfrac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{\tfrac{5}{3}\left(1-\tfrac{5}{3}\right)}=\sqrt{-\tfrac{10}{9}}$$

پس $x=\frac{1}{2}$ نباید در دامنهٔ تابع باشد. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) حذف می‌شوند.

تست **اگر $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\log_2(x^2+2x)$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟**

۱) $[-2,4]$ ۲) $[-2,0]$

۳) $[-4,-1] \cup (1,2]$ ۴) $[-4,-2) \cup (0,2]$

۴ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$f(x)=\sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \ge 0 \Rightarrow 3 \ge x$

$g(x)=\log_2(x^2+2x) \Rightarrow x(x+2)>0 \Rightarrow x<-2$ یا $x>0$

$D_{fog}=\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}=\{x<-2$ یا $x>0 \mid \log_2(x^2+2x) \le 3\}$

بنابراین باید جواب نامعادلهٔ $\log_2(x^2+2x) \le 3$ را مشخص کنیم:

$\log_2(x^2+2x) \le 3 \Rightarrow x^2+2x \le 2^3 \Rightarrow x^2+2x-8 \le 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+4) \le 0 \Rightarrow -4 \le x \le 2$

بنابراین دامنهٔ fog برابر می‌شود با:

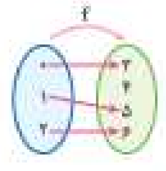
$D_{fog}=\{x<-2$ یا $x>0 \mid -4 \le x \le 2\}=[-4,-2) \cup (0,2]$

میانبر با قرار دادن $x=-2$ در تابع fog عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس $x=-2$ نباید در دامنهٔ تابع باشد. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) حذف می‌شوند.

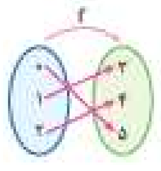
درس ۶ تابع یک‌به‌یک و تابع وارون

تابع یک‌به‌یک

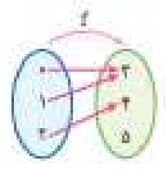
اگر در یک رابطهٔ تشکیل‌شده از زوج‌مرتب‌ها، به‌صورت (x,y)، به‌ازای هر x، فقط یک y داشته باشیم، آن رابطه یک تابع است. هم‌چنین اگر در تابع، به‌ازای هر y، فقط یک x داشته باشیم، به این تابع، یک‌به‌یک گویند.



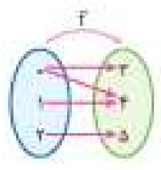
تابع یک‌به‌یک است.



تابع یک‌به‌یک است.



تابع است و یک‌به‌یک نیست.



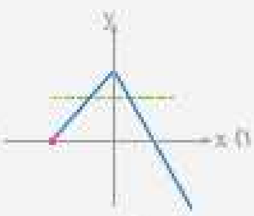
تابع نیست.

اگر تابع f به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها به شکل (x,y) باشد، به شرطی یک‌به‌یک است که هیچ دو x مختلفی دارای y یکسان نباشند. مثلاً تابع $f=\{(۱,۲),(۳,۰),(۴,۲)\}$ یک‌به یک نیست، زیرا دو زوج مرتب $(۱,۲)$، $(۴,۲)$ دارای مؤلفهٔ دوم یکسان هستند.

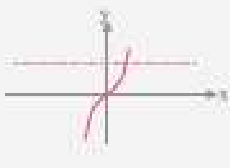
نمودار تابع f به شرطی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تذکر توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، یک‌به‌یک هستند.

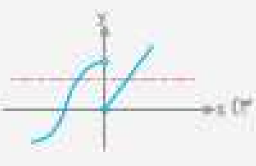
مثال یک‌به‌یک بودن تابع‌های زیر را بررسی کنید.

۱)


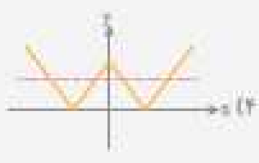
یک‌به‌یک نیست.

۲)


یک‌به‌یک است.

۳)


یک‌به‌یک نیست.

۴)


یک‌به‌یک نیست.

تست اگر رابطهٔ $f(x)=\{(a-۲,۵),(-۷,۳),(-۵,۵),(a+b,۳)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۴ چون زوج مرتب‌های $(a-۲,۵)$ و $(-۵,۵)$ و هم‌چنین $(-۷,۳)$ و $(a+b,۳)$ دارای مؤلفه‌های دوم یکسان هستند، پس برای این‌که تابع یک‌به‌یک باشد، باید مؤلفهٔ اول آن‌ها نیز برابر باشد.

$a-۲=-۵ \Rightarrow a=-۳$

$a+b=-۷ \Rightarrow -۳+b=-۷ \Rightarrow b=-۴$

تشخیص یک‌به‌یک بودن در توابع چندضابطه‌ای

برای این‌که یک تابع چندضابطه‌ای یک‌به‌یک باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ تک‌تک ضابطه‌ها یک‌به‌یک باشند.

۲ برد دو ضابطه اشتراک نداشته باشد.

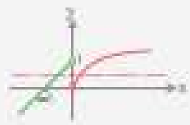
برای بررسی یک‌به‌یک بودن توابع چندضابطه‌ای، بهترین راه رسم نمودار تابع است.

مثال دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داده شده‌اند، یک‌به‌یک بودن این دو تابع را بررسی کنید.

$$g(x)=\begin{cases} x^۲ & ; x\geq ۰ \\ \dfrac{۱}{x} & ; x<۰ \end{cases} \Rightarrow$$

یک‌به‌یک است.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & ; x\geq ۰ \\ x+۱ & ; x<۰ \end{cases} \Rightarrow$$



یک‌به‌یک نیست.

تست برای این‌که تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & ; x\geq ۲ \\ x+a & ; x<۲ \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، a در کدام بازه می‌تواند قرار گیرد؟

۱) $[۲,۴]$ ۲) $(۲,۴]$ ۳) $(-\infty,۲]$ ۴) $(-\infty,۴]$

۳ ابتدا نمودار تابع f را بدون توجه به مقدار a رسم می‌کنیم، عدد a باعث می‌شود نمودار $y=x$ به سمت بالا یا پایین حرکت کند:

۱) اگر a منفی باشد، نمودار $y=x$ به پایین حرکت می‌کند و تابع یک‌به‌یک خواهد بود.

۲) اگر a مثبت باشد، خط $y=x$ به سمت بالا حرکت می‌کند که حداکثر ۲ واحد می‌تواند به بالا حرکت کند تا به نقطهٔ توپر برسد، زیرا اگر بیش‌تر از ۲ واحد حرکت کند از نقطهٔ توپر عبور می‌کند و در این صورت تابع یک‌به‌یک نخواهد بود. پس a می‌تواند در بازهٔ $(-\infty,۲]$ قرار گیرد.

محدود کردن دامنه برای یک‌به‌یک شدن

بعضی از توابع در دامنهٔ خود یک‌به‌یک نیستند، اما اگر دامنهٔ آن‌ها را محدود کنیم، یک‌به‌یک می‌شوند.

تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ در حالت کلی یک‌به‌یک نیست. برای یک‌به‌یک شدن، باید رأس سهمی را پیدا کنیم و دامنه را به قبل یا بعد از طول رأس سهمی محدود کنیم. بنابراین تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ در هر یک از بازه‌های $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ و هر زیرمجموعه از این دو بازه، یک‌به‌یک است.

مثلاً در تابع $f(x)=x^2-4x-6$، طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{-4}{2(1)}=2$ است، پس:

تذکر واضح است اگر تابع در یک بازه یک‌به‌یک باشد، در هر زیر بازه از آن بازه نیز یک‌به‌یک است.

تست در تابع $f(x)=x^2-6x+1$ بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که می‌توان برای دامنهٔ تابع در نظر گرفت تا این تابع یک‌به‌یک شود کدام است؟

۱) $[-3,3]$ ۲) $(-\infty,2]$

۳) $[3,+\infty)$ ۴) $[2,+\infty)$

۳ طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{-6}{2(1)}=3$ است، بنابراین برای این‌که تابع یک‌به‌یک شود، باید یکی از قسمت‌های زیر را نگه داریم و بقیهٔ تابع را حذف کنیم:

پس تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,3]$ یا $[3,+\infty)$ یک‌به‌یک است.

مفهوم تابع وارون

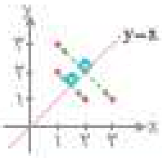
با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌مرتب (a,b)، زوج‌مرتب (b,a) به‌دست می‌آید. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌مرتب‌های تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به‌دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

مثلاً وارون تابع $f=\{(6,3),(2,5),(3,4)\}$ به‌صورت زیر است:

$f^{-1}=\{(3,6),(5,2),(4,3)\}$

اگر تابع f و تابع f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، ملاحظه می‌شود که نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند.

مثلاً تابع $f=\{(2,1),(3,1)\}$ را در نظر بگیرید، وارون این تابع به‌صورت $f^{-1}=\{(1,2),(1,3)\}$ است. حال f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، همان‌طور که می‌بینید هر نقطه از تابع f بعد از قرینه شدن نسبت به $y=x$ به نقطه‌ای از f^{-1} تبدیل می‌شود.



تذکر برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f، باید نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

مثال در هر یک از توابع زیر از روی نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

وارون یک تابع ممکن است تابع نباشد.

مثلاً $f(x)=x^2$ یک تابع است، اما وارون آن تابع نیست:

تابع نیست

وارون تابع f در صورتی یک تابع است که f تابعی یک‌به‌یک باشد. در این حالت می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر است.

تست کدام‌یک از توابع زیر وارون‌پذیر است؟

۱) $f=\{(1,2),(2,3),(3,2)\}$

۲) $g=\{(2,4),(3,1),(4,2)\}$

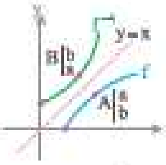
۳) $h=\{(1,3),(2,2),(3,3)\}$

۴) $k=\{(2,2),(3,1),(1,2)\}$

۲ در بین گزینه‌ها تابع g یک‌به‌یک است، چون تمام زوج‌مرتب‌ها، مؤلفه‌های اول و دوم متفاوت دارند. بنابراین تنها تابع g وارون‌پذیر است.

ویژگی‌های تابع وارون

با توجه به این‌که نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$، یعنی نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند (متقارن‌اند)، خواهیم داشت:



۱ اگر نقطهٔ $A(a,b)$ روی نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطهٔ $B(b,a)$ روی نمودار تابع f^{-1} است و بر عکس، به عبارت دیگر:

$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x+\sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -5
۳) -2 ۴) تعریف نشده

۳ فرض می‌کنیم $a=f^{-1}(4)$ باشد. بنابراین:

$$f(a)=4 \Rightarrow -a+\sqrt{-2a}=4 \xrightarrow{\text{جایگذاری گزینه‌ها}} a=-2$$

۴ همواره دامنهٔ تابع f با بُرد تابع f^{-1} برابر است. همچنین بُرد تابع f نیز با دامنهٔ تابع f^{-1} برابر است.

$$D_f=R_{f^{-1}} \qquad R_f=D_{f^{-1}}$$

تست شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟ (داخل - ۹۴)

۱) $(0,2]$ ۲) $[2,3]$ ۳) $[2,8]$ ۴) $[3,8]$

۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x-f^{-1}(x)\geq 0 \Rightarrow x\geq f^{-1}(x)$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، بازه‌ای که در آن مقادیر $y=f^{-1}(x)$ کمتر یا مساوی مقادیر $y=x$ باشد، برابر بازهٔ $[3,8]$ است.

یافتن ضابطهٔ وارون تابع

برای یافتن ضابطهٔ وارون تابع $y=f(x)$ باید x را برحسب y پیدا کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم. ضابطهٔ وارون تابع‌های مشهور عبارت‌اند از:

۱. یافتن ضابطهٔ وارون تابع خطی $f(x)=ax+b$

ضابطهٔ وارون تابع خطی $f(x)=ax+b$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=ax+b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \xrightarrow{\text{عوض جای } x \text{ و } y} y=\frac{x-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

مثال ضابطهٔ وارون تابع $y=2x+1$ را به دست آورید.

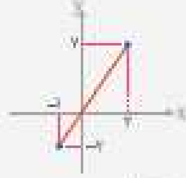
ابتدا x را برحسب y می‌نویسیم. سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=2x+1 \Rightarrow x=\frac{y-1}{2} \xrightarrow{\text{عوض جای } x \text{ و } y} y=\frac{x-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

تست ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=3x+1$ با دامنهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) $\frac{x+1}{3};\ -2\leq x\leq 7$ ۲) $\frac{x-1}{3};\ -2\leq x\leq 7$
۳) $\frac{x+1}{3};\ -4\leq x\leq 2$ ۴) $\frac{x-1}{3};\ -4\leq x\leq 2$

۲ نمودار تابع f را در بازهٔ $[-1,2]$ رسم می‌کنیم:

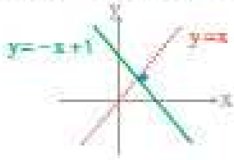


با توجه به نمودار برد تابع f در این بازه برابر $[-2,7]$ است، پس:

$$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{3};\ -2\leq x\leq 7$$

تنها دو تابع خطی وجود دارد که بر وارون خود منطبق هستند: یکی خط $y=x$ و دیگری خطوط عمود بر آن یعنی $y=-x+b$.

مثلاً وارون تابع $f(x)=-x+1$ برابر $f^{-1}(x)=-x+1$ است:



تست نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر نقاط $(a+2,0)$ و $(b,-1)$ روی نمودار f^{-1} باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) صفر
۴) ۱

۱ ضابطهٔ تابع خطی f در بازهٔ $[-2,0]$ به‌صورت $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ است. حال با توجه به این‌که نقاط $(a+2,0)$ و $(b,-1)$ روی نمودار f^{-1} قرار دارند، پس نقاط $(0,a+2)$ و $(-1,b)$ روی نمودار f قرار دارند:

$$f(0)=a+2 \Rightarrow \frac{1}{2}(0)+1=a+2 \Rightarrow a=-1$$
$$f(-1)=b \Rightarrow -\frac{1}{2}+1=b \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}$$

۲. یافتن ضابطهٔ وارون تابع‌های درجهٔ دوم و رادیکالی

از آن‌جایی‌که نمودار توابع درجهٔ دوم به شکل سهمی است، پس در حالت کلی یک‌به‌یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیستند؛ بنابراین باید دامنه را به قبل یا بعد از طول رأس سهمی محدود کنیم.

مثال ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^2-4x+4$ با شرط $x\geq 2$ را به‌دست آورید.

طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{-4}{2}=2$ است. حال در $x\geq 2$ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=(x-2)^2$ را به دست می‌آوریم:

$$y=(x-2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y}=|x-2| \xrightarrow{x\geq 2} \sqrt{y}=x-2 \Rightarrow$$
$$x=\sqrt{y}+2 \xrightarrow{\text{عوض جای } x \text{ و } y} y=\sqrt{x}+2 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2$$

تست ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^2+6x+4$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که نزولی است، کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=3-\sqrt{x+5}$ ۲) $f^{-1}(x)=-3-\sqrt{x+5}$
۳) $f^{-1}(x)=3+\sqrt{x-5}$ ۴) $f^{-1}(x)=-3+\sqrt{x-5}$

۲ طول رأس سهمی برابر $-\frac{6}{2(1)}=-3$ است. از آن‌جایی که ضریب x^2 مثبت است، پس دهانهٔ سهمی روبه‌بالا بوده و در نتیجه بازهٔ $(-\infty,-3]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع در آن نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع را در این بازه به‌دست می‌آوریم:

$$y=x^2+6x+4+5-5=(x+3)^2-5 \Rightarrow (x+3)^2=y+5$$
$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x+3|=\sqrt{y+5} \xrightarrow{x\leq -3} x+3=-\sqrt{y+5}$$
$$\Rightarrow x=-3-\sqrt{y+5} \Rightarrow y^{-1}=-3-\sqrt{x+5}$$

توابع رادیکالی به‌صورت $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $f(x)=\sqrt[3]{ax+b}$ در دامنهٔ خود یک به یک بوده و برای به‌دست آوردن ضابطهٔ وارون آن‌ها از روش کلی استفاده می‌کنیم.

تست **ضابطهٔ وارون تابع $y=2-\sqrt{x+a}$ به‌صورت $y=x^2-bx+5$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟**

۱) -3 ۲) 3 ۳) -5 ۴) 5

۲ در تابع $y=2-\sqrt{x+a}$ ابتدا x را برحسب y محاسبه کرده و سپس ضابطهٔ وارون را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x+a}=2-y \Rightarrow x+a=(2-y)^2 \Rightarrow x=y^2-4y+4-a$$

$$\Rightarrow y^{-1}=x^2-4x+4-a$$

با مقایسهٔ ضابطهٔ به‌دست آمده و $y=x^2-bx+5$ نتیجه می‌گیریم:

$$b=4\,,\,4-a=5 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow a+b=3$$

تست **ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ کدام است؟**

۱) $y=\sqrt[3]{x+1}$ ۲) $y=1+\sqrt[3]{x}$

۳) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$ ۴) $y=2+\sqrt[3]{x-1}$

۳ ابتدا x را برحسب y محاسبه کرده و سپس ضابطهٔ وارون تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(x^3-3x^2+3x-1)+1+1=(x-1)^3+2 \Rightarrow (x-1)^3=y-2$$

$$\xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} x-1=\sqrt[3]{y-2} \Rightarrow x=1+\sqrt[3]{y-2} \Rightarrow y^{-1}=1+\sqrt[3]{x-2}$$

تذکر در بعضی از سؤالات، ضابطهٔ تابع f داده می‌شود و از ما ضابطهٔ تابع f^{-1} را می‌خواهند. در بسیاری از این سؤالات می‌توانیم با جای‌گذاری اعداد دلخواه و ویژگی تابع وارون، ضابطهٔ f^{-1} را به‌دست آوریم. [اگر پس از جای‌گذاری عددی، دو گزینه باقی بماند، عدد دلخواه دیگری را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم.]

۳. یافتن ضابطهٔ وارون تابع‌های قدر مطلقی

برای به‌دست آوردن وارون توابع قدر مطلقی، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک‌به‌یک است. برای این منظور تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یک‌به‌یک است، تعیین کرده و ضابطهٔ وارون تابع را به‌دست می‌آوریم.

مثال **تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+|x-1|$ در یک بازه وارون‌پذیر است. ضابطهٔ وارون آن را در این بازه به دست آورید.**

ریشهٔ داخل قدرمطلق $x=1$ است. پس:

$$f(x)=\begin{cases} x+(x-1) & ; x\geq 1 \\ x-(x-1) & ; x<1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; x\geq 1 \\ 1 & ; x<1 \end{cases}$$

در بازهٔ $x<1$، ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=1$ است. پس یک‌به‌یک نیست. بنابراین ضابطهٔ وارون تابع را برای $x\geq 1$ به‌دست می‌آوریم:

$$x\geq 1: y=2x-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$$

تست **نمودار تابع $y=|2x-6|-|x+4|+x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟** (داخل - ۹۴)

۱) $-x+6; x\leq -4$ ۲) $-x+5; x\geq 2$

۳) $-\frac{1}{2}x+1; -4\leq x\leq -3$ ۴) $-\frac{1}{2}x+1; -4\leq x\leq 10$

۴ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 10 & ; x<-4 \\ -2x+2 & ; -4\leq x\leq 3 \\ 2x-10 & ; x>3 \end{cases} \Rightarrow$$

ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$ است.

از طرفی چون برد تابع f در این بازه برابر $-4\leq y\leq 10$ است، پس دامنهٔ تابع f^{-1} در این بازه به صورت $-4\leq x\leq 10$ است.

۴. یافتن ضابطهٔ وارون تابع هموگرافیک

اگر تابع کسری $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک‌به‌یک باشد، برای به‌دست آوردن وارون آن، کافی است ضریب x در صورت کسر یعنی a و عدد ثابت مخرج یعنی d را قرینه کرده و سپس با یکدیگر جابه‌جا کنیم:

قرینه و جابه‌جایی

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

تذکر اگر $a+d=0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

مثال **اگر وارون تابع $f(x)=\frac{mx+1}{3x-2}$ برابر خودش باشد، مقدار m را به دست آورید.**

$$m+(-2)=0 \Rightarrow m=2$$

تست **ضابطهٔ وارون تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}-1$ کدام است؟**

۱) $y=\frac{2x-1}{x+1}$ ۲) $y=\frac{2x+1}{x-1}$

۳) $y=\frac{x+2}{x-1}$ ۴) $y=\frac{x-2}{x+1}$

۳ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و سپس وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2x+1}{x-1}-1=\frac{2x+1-x+1}{x-1}=\frac{x+2}{x-1}$$

$$\xrightarrow{a+d=0} y=y^{-1}=\frac{x+2}{x-1}$$

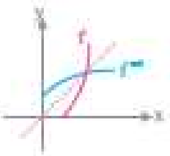
اگر صورت و مخرج پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک‌به‌یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیست. [این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که $ad-bc=0$ باشد.]

مثلاً تابع $f(x)=\frac{2x-6}{x-3}$ وارون‌پذیر نیست، زیرا

$$f(x)=\frac{2x-6}{x-3}=\frac{2(x-3)}{x-3}=2\,; x\neq 3 \Rightarrow$$ یک‌به‌یک نیست.

برخورد f و $f^{-۱}$

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و $f^{-۱}$ ، راهکار کلی این است که ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به دست آوریم و سپس معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ را حل کنیم.



در توابع اکیداً صعودی، نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ [در صورت وجود]، همان نقاط برخورد f و خط $y=x$ است، پس در توابع صعودی، برای تعیین نقاط برخورد توابع f و $f^{-۱}$ ، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.

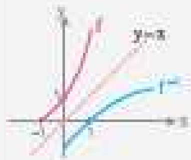
درصورتی که نمودار تابع f قابل رسم باشد، برای مشخص کردن نقاط برخورد تابع با وارون خودش، می‌توانیم از روش رسم نمودار کمک بگیریم.

تست **اگر $f(x)=x^{۲}+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟** (داخل - ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲

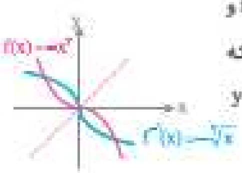
۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

۴ با توجه به شکل، نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد و هیچ نقطهٔ تلاقی با آن ندارد، پس f و $f^{-۱}$ همدیگر را قطع نمی‌کنند.



اگر تابع f صعودی نباشد، ممکن است تعدادی از نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ ، روی نیمساز ربع اول و سوم نباشند. [نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ همواره نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن هستند.]

مثلاً نمودار توابع $f(x)=-x^{۳}$ و $f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x}$ به‌صورت زیر است که دو نقطهٔ برخورد آن‌ها روی خط $y=x$ نمی‌باشد.



در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $a+d\neq ۰$) برای مشخص کردن نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ همواره می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم.

تست **نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟** (خارج - ۹۵)

۱) ۱-، ۴- ۲) ۱-، ۴

۳) ۱، ۴- ۴) ۱، ۴

۲ چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=x\Rightarrow x+۴=x^{۲}-۲x\Rightarrow x^{۲}-۳x-۴=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-۱\\x=۴\end{cases}$$

مسائل ترکیبی تابع وارون و تابع مرکب

سؤالاتی که برای حل آن‌ها باید به‌طور همزمان از ویژگی‌های تابع مرکب و تابع وارون استفاده کنیم به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱ در بعضی از سؤالات، ترکیب یک تابع با وارون تابعی دیگر مورد سؤال قرار می‌گیرد. برای حل این سؤالات تابع مرکب را به‌صورت فلش نمایش دهیم.

ترکیب یک تابع با وارون تابع دیگر

۱) اگر $f(g^{-۱}(a))=b$ باشد:

۲) اگر $f^{-۱}(g(a))=b$ باشد:

مثال **توابع $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۵,۱)\}$ و $g(x)=۲|x|+۱$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(a))=۲$ باشد، مقدار a را به دست آورید.**

نحوهٔ تشکیل $f^{-۱}(g(a))=۲$ را با فلش نمایش می‌دهیم:

$$a\xrightarrow{g}\bigcirc\xrightarrow{f^{-۱}}۲\Rightarrow f^{-۱}(\bigcirc)=۲\Rightarrow f(۲)=\bigcirc$$

چون $(۲,۳)\in f$ پس $\bigcirc=۳$ است. بنابراین $(a,۳)\in g$ است، پس:

$$۲|a|+۱=۳\Rightarrow|a|=۱\Rightarrow a=\pm۱$$

تست **اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^{۳}+x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$ کدام است؟** (خارج - ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۴ فرض می‌کنیم $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=\alpha$ باشد، پس:

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=\alpha\Rightarrow g(\alpha)=f^{-۱}(۸)\quad(۱)$$

حال برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۸)$ ضابطهٔ f را برابر ۸ می‌گذاریم:

$$۸=\frac{۲}{۵}x-۴\Rightarrow\frac{۲}{۵}x=۱۲\Rightarrow x=۳۰\Rightarrow f^{-۱}(۸)=۳۰$$

بنابراین از (۱) داریم:

$$g(\alpha)=f^{-۱}(۸)=۳۰\Rightarrow\alpha^{۳}+\alpha=۳۰\Rightarrow\alpha=۳\Rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=۳$$

۲ برای به‌دست آوردن تابع $f^{-۱}og^{-۱}$ با داشتن توابع f و g، می‌توانیم تابع gof را به‌دست آوریم و سپس آن را وارون کنیم، یعنی:

$$(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$$

تست اگر $(fog)(x)=\frac{۳x}{۲x+۱}$ باشد، تابع $g^{-1}of^{-1}$ است؟

۱) $\frac{۲x}{۳x+۱}$ ۲) $\frac{۲x-۳}{x}$ ۳) $\frac{-x}{۲x-۳}$ ۴) $\frac{۲x}{x-۳}$

۳ می‌دانیم $(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)$ است. پس کافیست وارون تابع fog را به دست آوریم. از آن جایی که تابع fog تابعی هموگرافیک است، پس:

$$(fog)(x)=\frac{۳x+۰}{۲x+۱}\Rightarrow(fog)^{-1}(x)=\frac{-x}{۲x-۳}$$

جابه‌جا و قرینه

پس $(g^{-1}of^{-1})(x)=\frac{-x}{۲x-۳}$ است.

ترکیب یک تابع با وارونش ($f^{-1}of\,,\,fof^{-1}$)

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، ترکیب این تابع با وارونش، همواره برابر با x است. از طرفی با توجه به دامنهٔ توابع f و f^{-1}، با حالت‌های زیر مواجه می‌شویم:

۱ در تابع $f^{-1}of$، چون x ابتدا وارد تابع f می‌شود، پس x باید عضو دامنهٔ f باشد:

$$(f^{-1}of)(x)=x\;;\;x\in D_f$$

۲ در تابع fof^{-1}، چون x ابتدا وارد تابع f^{-1} می‌شود، پس x باید عضو دامنهٔ f^{-1} باشد:

$$(fof^{-1})(x)=x\;;\;x\in D_{f^{-1}}$$

مثلاً اگر $f(x)=۳+\sqrt{x-۲}$ باشد چون $D_f=[۲,+\infty)$ است، پس:

$(f^{-1}of)(x)=x\;;\;x\geq ۲$

و اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ باشد، چون $R_f=[۰,+\infty)$ است، با توجه به این‌که $D_{f^{-1}}=R_f$ است، پس:

$(fof^{-1})(x)=x\;;\;x\geq ۰$

تست اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,۰),(۲,۳),(۰,۴)\}$ باشد، دامنهٔ تابع fof^{-1} کدام است؟

۱) $\{-۱,۱,۰,۲\}$ ۲) $\{۰,۲,۳,۴\}$
۳) $\{-۱,۱,۲\}$ ۴) $\{۲,۳,۴\}$

۲ می‌دانیم $(fof^{-1})(x)=x\;;\;x\in R_f$ است، پس دامنهٔ تابع fof^{-1} با برد تابع f برابر است، بنابراین:

$$f=\{(۱,۲),(-۱,۰),(۲,۳),(۰,۴)\}\Rightarrow D_{fof^{-1}}=R_f=\{۲,۰,۳,۴\}$$

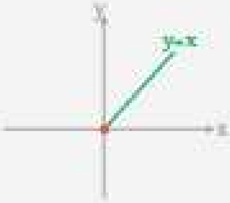
اگر $(fog)(x)=(gof)(x)=x$ باشد، آنگاه f و g وارون یکدیگر هستند.

مثال اگر $f(x)=۲x-۱$ و ترکیب دو تابع f و g همانی باشد مقدار $g(۷)$ را به دست آورید.

می‌دانیم $g(۷)=f^{-1}(۷)$ است، پس برای به‌دست آوردن $f^{-1}(۷)$ ضابطهٔ f را برابر عدد ۷ می‌گذاریم:

$$f(x)=۷\Rightarrow ۲x-۱=۷\Rightarrow x=۴\Rightarrow f^{-1}(۷)=۴\Rightarrow g(۷)=۴$$

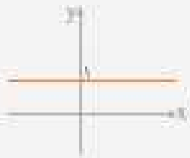
تست نمودار تابع $(fof^{-1})(x)$ به صورت زیر است. ضابطهٔ تابع f کدام می‌تواند باشد؟



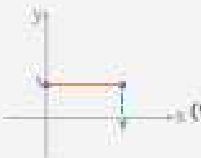
۱) $f(x)=x^۲$
۲) $f(x)=\frac{۱}{x}$
۳) $f(x)=\sqrt{x}$
۴) $f(x)=۲^{|x|}$

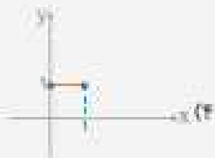
۳ می‌دانیم $(fof^{-1})(x)=x\;;\;x\in R_f$ پس برد تابع f باید به صورت $[۰,+\infty)$ باشد و هم‌چنین f تابعی وارون‌پذیر باشد. پس ضابطهٔ f می‌تواند $f(x)=\sqrt{x}$ باشد.

تست اگر $f(x)=-x^۲+۴\;;\;x>۰$، آن‌گاه نمودار $y=\frac{(fof^{-1})(x)}{(f^{-1}of)(x)}$ کدام است؟

۱)


۲)

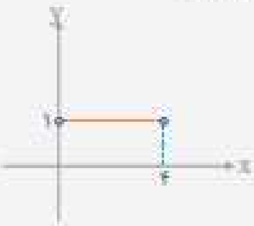

۳)


۴)


۳ با توجه به نمودار زیر، دامنهٔ تابع f برابر $(۰,+\infty)$ و برد آن $(-\infty,۴)$ است، پس:

$(f^{-1}of)(x)=x\;;\;x>۰$
$(fof^{-1})(x)=x\;;\;x<۴$
$$\Rightarrow y=\frac{(fof^{-1})(x)}{(f^{-1}of)(x)}=\frac{x}{x}=۱\;;\;۰<x<۴$$

پس نمودار این تابع به‌صورت مقابل است:



فصل ۰۲

معادله و تابع درجه دوم

■ **ارتباط با فصل‌های دیگه:** پیش‌نیاز اصلی برای درک و تحلیل سؤالات این فصل، توان و عبارت‌های جبری و همین‌طور فصل معادله و نامعادله است. از معادلهٔ درجه دوم و سهمی، بیش‌تر در فصل‌های تابع، حد، مشتق و کاربرد مشتق استفاده می‌شود.

■ **توصیه:** توی کنکورهای ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ از این فصل سؤالایی مطرح شد که هم محاسبات زیادی داشتند و هم بعضاً نیاز به خلاقیت داشتن!

اما سر جلسه کنکور نه فرصت زیادی برای اون همه محاسبات هست و نه فرصت زیادی برای فکر کردن و ایده‌پردازی. پس سعی کن با تمرین و تکرار زیاد، خودت رو برای سخت‌ترین‌ها آماده کنی.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	صفر	۲	۳	۲	۲	۲	۲	۲

درس ۱ معادلهٔ درجهٔ دوم

معادلهٔ درجهٔ دوم

به معادلهٔ به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a\neq 0$ یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌گوییم.

معادلهٔ $x^2+2x+3=0$ یا $x^2-5=0$ معادلهٔ درجهٔ دوم محسوب می‌شوند و $2x-3=0$ یک معادلهٔ درجهٔ اول است، چون جملهٔ x^2 در آن وجود ندارد.

روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم

برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم معمولاً از سه روش مختلف می‌توان استفاده کرد؛ این روش‌ها عبارتند از:

۱ اولین و ابتدایی‌ترین راه برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده از تجزیه است؛ بدین معنی که طرف اول معادلهٔ درجهٔ دوم را به حاصل‌ضرب دو عبارت درجهٔ اول تجزیه می‌کنیم و سپس به کمک اصل زیر، ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$A\times B=0 \Rightarrow A=0 \text{ یا } B=0$$

مثال ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x=0$ را به‌دست آورید.

$$x^2-5x=0 \Rightarrow (x)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

۲ اگر تجزیهٔ عبارت درجهٔ دوم به راحتی امکان‌پذیر نباشد، می‌توانیم برای حل معادله از روش مربع کامل استفاده کنیم. از این روش معمولاً در مواردی استفاده می‌کنیم که ضریب x^2 برابر ۱ باشد.

مراحل حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش مربع کامل

۱ عدد ثابت را به طرف راست تساوی می‌بریم و اگر ضریب x^2 عددی غیر ۱ باشد، طرفین تساوی را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

۲ ضریب x را نصف کرده و مربع آن را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

۳ طرف اول را به شکل یک عبارت مربع کامل می‌نویسیم و عدد طرف راست را ساده می‌کنیم.

۴ از طرفین جذر می‌گیریم.

مثال ریشه‌های معادلهٔ $x^2+10x+20=0$ را با استفاده از روش مربع کامل به‌دست آورید.

$$x^2+10x=-20$$
$$x^2+10x+25=-20+25$$
$$(x+5)^2=5$$
$$x+5=\pm\sqrt{5} \Rightarrow x=-5\pm\sqrt{5}$$

۳ برای حل معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ از روش کلی، ابتدا مبین (دلتا) معادله یعنی $\Delta=b^2-4ac$ را به‌دست می‌آوریم. در صورتی‌که Δ منفی نباشد، ریشه‌های معادله از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال معادلهٔ $2x^2+x-6=0$ را با استفاده از روش Δ حل کنید.

$$\Delta=b^2-4ac=1^2-4(2)(-6)=1+48=49$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\times 2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-1+7}{4}=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-7}{4}=-2 \end{cases}$$

تست ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x(2x-3)=8$ کدام است؟

۱) $\frac{3+\sqrt{73}}{2}$　۲) $\frac{3+\sqrt{73}}{4}$　۳) $\frac{6+\sqrt{73}}{2}$　۴) $\frac{6+\sqrt{73}}{4}$

۲ ابتدا معادله را به صورت $2x^2-3x-8=0$ بازنویسی و سپس با استفاده از روش Δ معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=(-3)^2-4(2)(-8)=73 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{73}}{2(2)}=\frac{3\pm\sqrt{73}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ بزرگ‌تر}} x=\frac{3+\sqrt{73}}{4}$$

دو حالت خاص برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$

۱ اگر $a+b+c=0$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است و برعکس. مثلاً:

$$3x^2-5x+2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3}$$

۲ اگر $a+c=b$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱− و دیگری برابر $-\frac{c}{a}$ است و برعکس. مثلاً:

$$2x^2-x-3=0 \xrightarrow{a+c=b} x_1=-1,\ x_2=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(\sqrt{5}+1)x+\sqrt{5}=0$ باشند، حاصل $\alpha^2+\beta^2$ کدام است؟

۱) ۶　۲) ۳　۳) ۵　۴) ۷

۱ چون مجموع ضرایب برابر صفر است، پس یکی از ریشه‌ها برابر $\alpha=1$ و دیگری برابر است با:

$$\beta=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5} \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=1^2+(\sqrt{5})^2=1+5=6$$

نکته برای تجزیهٔ عبارت‌های درجهٔ ۲ که ضریب x^2 عددی غیر یک است، می‌توان ضریب x^2 را در عدد ثابت ضرب کرد و پس از تجزیهٔ آن، ضریب x^2 را یکبار در یکی از پرانتزها، در x ضرب کرده و در پرانتز دیگر، عدد ثابت را بر آن تقسیم می‌کنیم تا تجزیهٔ عبارت اولیه به دست آید.

$$2x^2-x-10=0 \Rightarrow x^2-x-20=0 \Rightarrow (2x-5)(x+\frac{4}{2})=0$$

تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

در محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ به روش دلتا، عبارت Δ زیر رادیکال قرار دارد، پس با توجه به علامت Δ با سه حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ $\Delta<0$: معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲ $\Delta=0$: معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد. [در این حالت طرف اول معادله مربع کامل است و مقدار دو ریشهٔ مساوی $x=-\frac{b}{2a}$ است.]

۳ $\Delta>0$: معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

به عنوان مثال به معادلات زیر دقت کنید:

الف) معادلهٔ $3x^2+2x+1=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد؛ زیرا:

$$\Delta=2^2-4\times(3)\times(1)=4-12=-8$$

ب) معادلهٔ $4x^2+4x+1=0$ دارای یک ریشهٔ مضاعف است؛ زیرا:

$$\Delta=4^2-4(4)(1)=16-16=0 \Rightarrow x=-\frac{4}{2(4)}=-\frac{1}{2}$$

پ) معادلهٔ $x^2-3x+2=0$ دارای ۲ ریشهٔ حقیقی متمایز است؛ زیرا:

$$\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$$

تست به‌ازای چند مقدار m معادلهٔ $4x^2-(5m-3)x+9=0$ دارای ریشهٔ مضاعف است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) صفر

۲ برای آن‌که این معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید $\Delta=0$ باشد، بنابراین:

$$\Delta=(5m-3)^2-4\times4\times9=0 \Rightarrow (5m-3)^2=144=12^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5m-3=12 \Rightarrow m_1=3 \\ 5m-3=-12 \Rightarrow m_2=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

بنابراین به‌ازای دو مقدار m، معادله دارای ریشهٔ مضاعف است.

مجموع، حاصل‌ضرب و اختلاف ریشه‌ها

چون جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به‌دست می‌آیند، پس اگر α و β ریشه‌های این معادله باشند، آنگاه روابط مجموع، حاصل‌ضرب و تفاضل ریشه‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

۱ $S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

۲ $P=\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{\overbrace{b^2-(b^2-4ac)}^{4ac}}{4a^2}=\frac{c}{a}$

۳ $|\alpha-\beta|=|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}|=|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

تست اگر حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ $(m+1)x^2-(2m+1)x-3m=0$ برابر با $\frac{5}{3}$ باشد، آنگاه حاصل‌ضرب ریشه‌ها چقدر است؟

۱) -2　۲) $\frac{3}{2}$　۳) -6　۴) $\frac{9}{4}$

۱ اگر ریشه‌های این معادله x_1 و x_2 باشند، آنگاه:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{2m+1}{m+1}=\frac{5}{3} \Rightarrow 6m+3=5m+5 \Rightarrow m=2$$

حال $m=2$ را در معادله قرار می‌دهیم و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$3x^2-5x-6=0 \Rightarrow x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-6}{3}=-2$$

روابط متقارن بین ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، به عبارت‌هایی مثل $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ یا $\alpha^2\beta+\beta\alpha^2$ یا ... که با جابه‌جایی α و β دوباره به همان عبارت می‌رسیم، عبارت متقارن می‌گوییم. اگر مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل‌ضرب آن‌ها را P نمایش دهیم، آن‌گاه:

$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$	مجموع مربع ریشه‌ها
$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$	مجموع مکعب ریشه‌ها
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$	مجموع جذر ریشه‌ها

تذکر ۱ برای به‌دست آوردن $\alpha^2+\beta^2$ و $\alpha^3+\beta^3$ از اتحادهای مربع دوجمله‌ای و مکعب دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS$$

تذکر ۲ اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، برای به‌دست آوردن حاصل عبارت‌های متقارن برحسب α و β (مثل $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ یا $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2$ یا...) می‌توانیم به کمک اتحاد، فاکتورگیری، تجزیه و یا مخرج مشترک‌گیری عبارت داده‌شده را به عبارتی برحسب S و P بنویسیم.

تذکر ۳ اگر α و β زیر رادیکال باشند، باید رادیکال را به توان ۲ برسانید. مثلاً برای به‌دست آوردن $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ آن را برابر A قرار می‌دهیم. ببینید:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\xrightarrow{\text{توان ۲}}A^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }}A=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-4x+2=0$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{1}=4$

۲) $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2$

۳) $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=4^2-2(2)=12$

۴) $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS=4^3-3(2)(4)=64-24=40$

۵) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{4}{2}=2$

۶) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{12}{2}=6$

۷) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{4^2-4(1)(2)}}{1}=\sqrt{16-8}=\sqrt{8}$

۸) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

تست اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{20}{3}$ ۲) $\frac{20}{9}$ ۳) $\frac{80}{3}$ ۴) $\frac{80}{9}$

۴ چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^2-5x+3=0\Rightarrow S=\alpha+\beta=5\ ,\ P=\alpha\beta=3$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^3-3PS}{P^2}=\frac{5^3-3\times3\times5}{3^2}$$

$$=\frac{125-45}{9}=\frac{80}{9}$$

تست اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a+2)x+3=0$ باشند و رابطهٔ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ در معادلهٔ $x^2-(a+2)x+3=0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با: $S=a+2$ و $P=3$ است، پس:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2\Rightarrow\frac{a+2}{3}=2\Rightarrow a+2=6\Rightarrow a=4$$

تست به‌ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ می‌باشد؟ (داخل - ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ در معادلهٔ $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$S=-\frac{-(m+1)}{2}=\frac{m+1}{2}\ ,\ P=\frac{\frac{1}{8}}{2}=\frac{1}{16}$$

مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادله برابر ۲ است، پس:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\Rightarrow\sqrt{S+2\sqrt{P}}=2\Rightarrow S+2\sqrt{P}=4$$

$$\Rightarrow\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}=4\Rightarrow\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}=4$$

$$\Rightarrow\frac{m+2}{2}=4\Rightarrow m+2=8\Rightarrow m=6$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(x-3)=5$ باشند، حاصل $\alpha(\beta+1)+\beta(\alpha+1)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷- ۳) ۳ ۴) ۱

۲ چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x(x-3)=5\Rightarrow x^2-3x-5=0\Rightarrow S=\alpha+\beta=3,\ P=\alpha\beta=-5$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha(\beta+1)+\beta(\alpha+1)=2\alpha\beta+\alpha+\beta=2(-5)+3=-7$$

۲ روش جالب

برای به دست آوردن حاصل برخی از عبارت‌ها که بر حسب ریشه‌های معادله هستند، می‌توانیم از دو روش خلاقانهٔ زیر استفاده کنیم:

۱ یک روش این است که حاصل عبارت خواسته‌شده را با کمک مجموع یا حاصل‌ضرب ریشه‌ها، ساده کنیم و سپس از اتحادها استفاده کنیم.

تست **اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2x-5=0$ باشند، حاصل عبارت $(x_1-2)^3+(x_2-2)^3$ کدام است؟**

۱) -38 ۲) -42 ۳) 38 ۴) 42

۱ مجموع ریشه‌های معادله برابر $x_1+x_2=2$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر $x_1x_2=-5$ است؛ پس:

$$x_1+x_2=2 \Rightarrow \begin{cases} x_1-2=-x_2 \\ x_2-2=-x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1-2)^3+(x_2-2)^3=(-x_2)^3+(-x_1)^3=-(x_1^3+x_2^3)$$

از طرفی می‌دانیم $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$ است؛ پس حاصل عبارت برابر است با:

$$-(x_1^3+x_2^3)=-(S^3-3PS)=-(2^3-3(-5)(2))=-38$$

۲ روش دیگر این است که این معادله‌ها را بر حسب عبارت صورت سؤال مرتب کنیم و سپس x_1 ، x_2 را در معادله جای‌گذاری کنیم.

تست **اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x=5-x^2$ باشند، حاصل عبارت $\frac{1}{(x_2+1)^3}+\frac{1}{(x_1+1)^3}$ کدام است؟**

۱) $\frac{16}{25}$ ۲) $-\frac{16}{25}$ ۳) $\frac{16}{125}$ ۴) $-\frac{16}{125}$

۴ معادلهٔ داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^2+x-5=0 \Rightarrow x(x+1)=5 \Rightarrow \frac{x}{5}=\frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{x_1^3}{125}+\frac{x_2^3}{125}=\frac{x_1^3+x_2^3}{125}=\frac{S^3-3PS}{125}$$

$$=\frac{(-1)^3-3(-5)(-1)}{125}=\frac{-1-15}{125}=-\frac{16}{125}$$

روابط نامتقارن بین ریشه‌ها

منظور از روابط نامتقارن، عبارت‌هایی بر حسب α و β، مثل $2\alpha+5\beta^2$ است که با جابه‌جایی α و β به خود عبارت اولیه نمی‌رسیم. این سؤالات، دو حالت کلی دارند:

۱ در بعضی از سؤالات، α و β به‌عنوان ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده می‌شود و حاصل یک عبارت نامتقارن برحسب α و β خواسته می‌شود؛ برای حل این سؤالات باید به این نکته توجه کرد که ریشه‌های هر معادله در آن معادله صدق می‌کنند؛ بنابراین با جای‌گذاری α و β در معادلهٔ درجهٔ دوم داده‌شده، به دو معادله برحسب α و β می‌رسیم و با مرتب کردن این معادله‌ها برحسب عبارت داده‌شده در سؤال، می‌توانیم حاصل آن عبارت را به‌دست آوریم.

تست **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $5x^2-2x-1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{5\alpha-2}+\beta$ کدام است؟**

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۶

۳ چون α یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$5\alpha^2-2\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha(5\alpha-2)=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{5\alpha-2}$$

بنابراین حاصل عبارت $\frac{1}{5\alpha-2}+\beta$ برابر است با:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{5}=\frac{2}{5}=0/4$$

۲ اگر رابطه‌ای بین ریشه‌ها بیان شود که قابل تبدیل به S و P نباشد، یعنی غیر متقارن باشد، در این صورت به دلخواه S یا P را به‌دست آورده، سپس آن را به همراه رابطهٔ داده‌شده در یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی حل می‌کنیم تا ریشه‌ها به دست آیند.

مثال **در معادلهٔ $2x^2-mx+16=0$ اگر یکی از ریشه‌ها مربع دیگری باشد، مقدار m کدام است؟**

اگر ریشه‌های معادله را α و β فرض کنیم، طبق فرض مسئله رابطهٔ $\alpha=\beta^2$ بین ریشه‌ها برقرار است [که رابطه‌ای غیر متقارن است]. از طرفی $P=\alpha\beta=\frac{16}{2}=8$ است؛ بنابراین:

$$\alpha\beta=8 \Rightarrow \beta^2\times\beta=8 \Rightarrow \beta^3=8 \Rightarrow \beta=2$$

چون $\beta=2$ یک جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$2(2)^2-m(2)+16=0 \Rightarrow 2m=24 \Rightarrow m=12$$

نوشتن معادلهٔ درجهٔ دوم

اگر بخواهیم معادلهٔ درجهٔ دومی با ریشه‌های x_1 و x_2 تشکیل دهیم، کافی‌ست ابتدا $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ را به‌دست آوریم، سپس معادله را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x^2-Sx+P=0$$

مثال **معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۲- و ۵ باشند.**

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=-2+5=3 \\ P=x_1x_2=(-2)(5)=-10 \end{cases} \Rightarrow x^2-3x-10=0$$

نکته در معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب صحیح یا گویا، اگر یکی از ریشه‌ها برابر عدد گنگ $a+\sqrt{b}$ باشد، ریشهٔ دیگر برابر $a-\sqrt{b}$ خواهد بود. (و برعکس)

مثال **معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرایب صحیح بنویسید که یک ریشهٔ آن $2-\sqrt{3}$ باشد.**

ریشهٔ دیگر برابر مزدوج این ریشه، یعنی $2+\sqrt{3}$ است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4 \\ P=x_1x_2=(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})=4-3=1 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+1=0$$

مراحل نوشتن معادلهٔ درجهٔ دوم جدید بر اساس ریشه‌های یک معادلهٔ دیگر

اگر بخواهیم معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسیم که ریشه‌های آن با ریشه‌های یک معادلهٔ دیگر ارتباط داشته باشد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا S و P معادلهٔ اولیه را تشکیل می‌دهیم.

۲ به‌کمک S و P معادلهٔ اولیه، S و P معادلهٔ خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم.

۳ مطابق رابطهٔ $x^2-Sx+P=0$ معادلهٔ جدید را می‌نویسیم.

مثال معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-x-1=0$ باشد.

$$S=\alpha+\beta=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{-1}{2}$$

$$S_{new}=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\frac{1}{2})^2-2(-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$$

$$P_{new}=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

معادلهٔ جدید: $x^2-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow 4x^2-5x+1=0$

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را α و β بنامیم، آنگاه با استفاده از روش بالا به حالت‌های خاص زیر می‌رسیم:

۱ معادله‌ای که ریشه‌هایش قرینهٔ α و β یعنی $-\alpha$ و $-\beta$ است، به صورت $ax^2-bx+c=0$ است. [b قرینه می‌شود.]

به عنوان مثال، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-6=0$، قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-6=0$ است.

۲ معادله‌ای که ریشه‌هایش عکس (وارون) α و β یعنی $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است، به صورت $cx^2+bx+a=0$ است. [جای a و c عوض می‌شود.]

به عنوان مثال، ریشه‌های معادلهٔ $-8x^2+5x+1=0$، عکس ریشه‌های معادلهٔ $x^2+5x-8=0$ است.

۳ معادله‌ای که ریشه‌هایش عکس و قرینهٔ α و β یعنی $\frac{-1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\beta}$ است، به صورت $cx^2-bx+a=0$ است. [b قرینه و جای a و c عوض می‌شود.]

به عنوان مثال، ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-7x+2=0$، عکس و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+7x+4=0$ است.

۴ معادله‌ای که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادلهٔ ax^2+bx+c است، به‌صورت $ax^2+bkx+ck^2=0$ می‌باشد.

به عنوان مثال، معادله‌ای که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+6=0$ است، به صورت $x^2-10x+24=0$ می‌باشد.

۵ معادله‌ای که ریشه‌هایش k واحد بیشتر یا k واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است، به‌ترتیب به صورت $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$ و $a(x+k)^2+b(x+k)+c=0$ است.

تست اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2x-12=0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به‌صورت $(\frac{2}{\alpha}+1\ ,\ \frac{2}{\beta}+1)$ است؟

۱) $x^2-7x+3=0$　　۲) $x^2+7x-3=0$

۳) $3x^2-7x+3=0$　　۴) $3x^2+7x-3=0$

۳ طبق ترتیب گفته‌شده عمل می‌کنیم:

۱) $S=\alpha+\beta=-2\ ,\ P=\alpha\beta=-12$

۲)
$$\begin{cases} S_{new}=(\frac{2}{\alpha}+1)+(\frac{2}{\beta}+1)=2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})+2 \\ =2(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})+2=2(\frac{-2}{-12})+2=\frac{7}{3} \\ P_{new}=(\frac{2}{\alpha}+1).(\frac{2}{\beta}+1)=\frac{4}{\alpha\beta}+2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})+1 \\ =\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+1=\frac{4}{-12}+2(\frac{-2}{-12})+1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1=1 \end{cases}$$

۳) معادلهٔ جدید: $x^2-\frac{7}{3}x+1=0 \xrightarrow{\times 3} 3x^2-7x+3=0$

علامت ریشه‌ها

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ در حالتی‌که دلتا مثبت است، دو ریشهٔ حقیقی متمایز داریم. حالا می‌خواهیم علامت این دو ریشه را بررسی کنیم:

علامت ریشه‌ها	Δ	S	P
دو ریشهٔ مثبت	+	+	+
دو ریشهٔ منفی	+	−	+
دو ریشهٔ غیرهم‌علامت	+		−

تست اگر منحنی به معادلهٔ $y=2x^2-4x+m-3$ محور x ها را در دو نقطهٔ متمایز به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m>3$　　۲) $3<m<4$

۳) $3<m<5$　　۴) $4<m<5$

۳ باید $\Delta>0\ ,\ S>0\ ,\ P>0$ باشد.

۱) $\Delta=b^2-4ac>0 \Rightarrow \underbrace{(-4)^2-4(2)(m-3)}_{16-8m+24}>0 \Rightarrow 40-8m>0$
$\Rightarrow 5-m>0 \Rightarrow m<5$

۲) $S=-\frac{b}{a}>0 \Rightarrow \frac{4}{2}>0$ ✓

۳) $P=\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m-3}{2}>0 \Rightarrow m>3$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده از (۱) و (۳) داریم: $3<m<5$

نکته ۱ برای این‌که معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای ۲ ریشهٔ هم‌علامت باشد، کافی است $\Delta>0$ و $P>0$ باشد.

نکته ۲ اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی باشد، کافیست فقط شرط $P<0$ را بررسی کنیم.

تست به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $2x^2+x+m^2-4=0$ دارای یک ریشهٔ حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی است؟

۱) $0<m<2$

۲) $m>2$ یا $m<-2$

۳) $-2<m<2$

۴) $m>-2$

۳ چون منحنی دارای یک ریشهٔ حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی است، پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m^2-4}{2}<0\Rightarrow \underbrace{m^2-4}_{(m-2)(m+2)}<0\Rightarrow -2<m<2$$

معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم

برای حل بعضی از معادله‌های غیر درجهٔ دو، می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، آن را به معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد.

مثال معادلهٔ $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)=8$ را حل کنید.

با استفاده از تغییر متغیر $t=x^2+3x$ معادله را بر حسب t می‌نویسیم و داریم:

$$t^2-2t-8=0\Rightarrow (t+2)(t-4)=0\Rightarrow\begin{cases}t=-2\\ t=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+3x=-2\Rightarrow x^2+3x+2=0\xrightarrow{a+c=b}x=-1,x=-2\\ x^2+3x=4\Rightarrow x^2+3x-4=0\xrightarrow{a+b+c=0}x=1,x=-4\end{cases}$$

برای حل معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$ باید از تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ و برای حل معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ باید از تغییر متغیر $x^2=t$ استفاده کنیم و آن را به شکل معادلهٔ درجهٔ دوم $at^2+bt+c=0$ بنویسیم. حال از آن جایی که $\sqrt{x}$ و x^2 نامنفی هستند، پس به‌ازای t های منفی، معادله جواب حقیقی ندارد. [در این معادلات اگر $c=0$ باشد، نیازی به تغییر متغیر نیست و معادله با فاکتورگیری قابل حل است.]

۱ اگر معادلهٔ برحسب t دارای دو جواب مثبت باشد:

معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$ دارای دو جواب مثبت است.

معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ دارای چهار جواب است که دوبه‌دو قرینهٔ هم هستند.

۲ اگر معادله بر حسب t دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی باشد یا دارای یک ریشهٔ مضاعف مثبت باشد:

معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$ فقط یک جواب مثبت دارد.

معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ دو جواب دارد که قرینهٔ یکدیگرند.

۳ در غیر این‌صورت، معادله‌های $ax+b\sqrt{x}+c=0$ و $ax^4+bx^2+c=0$ جواب ندارند.

مثال ۱ معادلهٔ $x+2\sqrt{x}-3=0$ را حل کنید.

با تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ معادله را به‌صورت $t^2+2t-3=0$ می‌نویسیم:

$$t^2+2t-3=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0}\begin{cases}t=1\Rightarrow\sqrt{x}=1\Rightarrow x=1\\ t=-3\ \times\end{cases}$$

مثال ۲ معادلهٔ $x^4-3x^2-4=0$ را حل کنید.

از تغییر متغیر $t=x^2$ استفاده می‌کنیم:

$$x^4-3x^2-4=0\xrightarrow{x^2=t}t^2-3t-4=0\Rightarrow(t-4)(t+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=4\ \checkmark\\ t=-1\ \times\end{cases}$$

از آن‌جایی که $t=x^2$ است، پس نامنفی بوده و $t=4$ قابل قبول است، بنابراین:

$$x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

تست معادلهٔ $(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲ برای حل معادله از تغییر متغیر $t=\frac{x^2}{3}-2$ استفاده می‌کنیم و آن را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب t تبدیل می‌کنیم:

$$(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0\xrightarrow{(\frac{x^2}{3}-2)=t}t^2-7t+6=0$$

$$\Rightarrow(t-1)(t-6)=0\Rightarrow\begin{cases}t=1\\ t=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{3}-2=1\Rightarrow x^2=9\\ \Rightarrow x=\pm3\\ \frac{x^2}{3}-2=6\Rightarrow x^2=24\\ \Rightarrow x=\pm2\sqrt{6}\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای دو جواب صحیح $x=\pm3$ است.

درس ۲ سهمی و ویژگی‌های آن

معرفی سهمی

نمودار هر تابع به شکل $y=ax^2+bx+c$ با شرط $a\neq 0$ به صورت یک سهمی است. معمولاً رأس سهمی را با S نشان می‌دهند. اگر ضریب x^2 مثبت باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر ضریب x^2 منفی باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین است:

رأس سهمی

طول رأس سهمی برابر $x_S=-\frac{b}{2a}$ است. با جای‌گذاری آن در معادلهٔ سهمی، عرض رأس سهمی به دست می‌آید. البته می‌توانیم عرض رأس سهمی را از رابطهٔ $-\frac{\Delta}{4a}$ پیدا کنیم. به عبارت دیگر، مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ است.

تست **اگر مختصات رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx-7$ برابر $(-2,5)$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۳ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) نقطهٔ $(-2,5)$ روی منحنی است، پس در معادله صدق می‌کند.

$y=ax^2+bx-7\xrightarrow{(-2,5)}5=a(-2)^2+b(-2)-7$

$\Rightarrow 4a-2b=12\Rightarrow 2a-b=6$

۲) طول رأس سهمی برابر ۲- است، پس:

$x_S=-\frac{b}{2a}=-2\Rightarrow b=4a\xrightarrow{(1)}2a-4a=6$

$\Rightarrow a=-3\Rightarrow b=-12$

بنابراین $a-b=-3-(-12)=9$ است.

تذکر منظور از بیشترین یا کمترین مقدار یک سهمی، عرض نقطهٔ رأس آن است.

تست **بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{x^2+mx+6}$ برابر $\frac{1}{2}$ است. مقدار m کدام است؟**

۱) $\sqrt{5}\pm\sqrt{2}$ ۲) ± 4 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) ± 1

۲ چون بیش‌ترین مقدار تابع f برابر $\frac{1}{2}$ است، پس کم‌ترین مقدار تابع $g(x)=x^2+mx+6$ برابر ۲ است، بنابراین:

$-\frac{\Delta}{4a}=2\Rightarrow -\frac{m^2-4(1)(6)}{4}=2\Rightarrow m^2-24=-8$

$\Rightarrow m^2=16\Rightarrow m=\pm 4$

محور تقارن سهمی

سهمی نسبت به خط عمودی که از رأس آن می‌گذرد، متقارن است. به این خط محور تقارن سهمی می‌گویند و معادلهٔ آن به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ است:

تذکر ۱ خط افقی $y=y_S$ در رأس سهمی بر آن مماس است.

تذکر ۲ واضح است که سهمی، محور تقارن خود را در نقطهٔ رأس خود قطع می‌کند.

از آن‌جایی که سهمی نسبت به محور تقارن آن متقارن است، پس اگر دو نقطهٔ هم‌عرض (x_1,y) و (x_2,y) روی سهمی باشند، طول رأس سهمی برابر میانگین طول‌های این دو نقطه است، یعنی:

$$x_S=\frac{x_1+x_2}{2}$$

مثلاً اگر دو نقطهٔ $(-2,6)$ و $(4,6)$ روی یک سهمی باشند، معادلهٔ محور تقارن آن برابر $x=\frac{-2+4}{2}=1$ است.

تست **اگر $(-1,4)$ و $(2,4)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادلهٔ محور تقارن این سهمی کدام است؟**

۱) $x=2$ ۲) $x=\frac{1}{2}$ ۳) $x=-1$ ۴) $x=\frac{3}{2}$

۲ چون نقاط $(-1,4)$ و $(2,4)$ دارای عرض‌های یکسان هستند، پس معادلهٔ محور تقارن این سهمی برابر است با:

$x=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$

تست **اگر خط $x=-1$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=2x^2+(m-1)x-m$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟**

۱) ۵- ۲) ۴- ۳) ۲- ۴) ۷-

۴ چون خط $x=-1$ محور تقارن سهمی است، پس طول رأس سهمی برابر $x_S=-1$ است:

$x_S=-\frac{b}{2a}=-1\Rightarrow -\frac{m-1}{2(2)}=-1\Rightarrow m-1=4\Rightarrow m=5$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=2x^2+4x-5$ بوده و عرض رأس آن، برابر است با:

$y_S=2(-1)^2+4(-1)-5=2-4-5=-7$

تست **رأس سهمی $y=-x^2+bx+3$ روی خط $y=4$ واقع است. اگر محور تقارن سهمی از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات عبور کند، مقدار b کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۲ چون ضریب x^2 منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است. در ضمن چون رأس سهمی روی خط $y=4$ قرار دارد، پس عرض رأس سهمی برابر ۴ است:

$$y=-x^2+bx+3:\ y_S=4 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=4 \Rightarrow -\frac{b^2-4(-1)(3)}{4(-1)}=4$$

$$\Rightarrow b^2+12=16 \Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2$$

چون محور تقارن سهمی از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات عبور می‌کند، پس طول رأس سهمی باید مثبت باشد:

$$x_S>0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow -\frac{b}{2(-1)}>0 \Rightarrow b>0 \Rightarrow b=2$$

صفرهای سهمی

نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

تست **اگر صفرهای تابع $f(x)=2x^2+bx+30$ دو واحد اختلاف داشته باشند، طول رأس سهمی کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۷

۳ اگر α و β صفرهای تابع $f(x)=2x^2+bx+30$ باشند، داریم:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2-240}}{2}=2 \Rightarrow \sqrt{b^2-240}=4$$

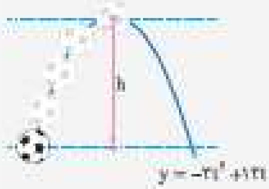
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} b^2-240=16 \Rightarrow b^2=256 \Rightarrow b=\pm 16$$

$$\Rightarrow x_S=-\frac{b}{2a}=\pm 4$$

مسائل کاربردی سهمی

در بعضی از مسائل که به‌صورت کاربردی بیان می‌شوند، می‌توانیم از معادلهٔ سهمی استفاده کنیم. در این مسائل برخی نقاط از جمله رأس سهمی و محل برخورد با محورهای مختصات از اهمیت بیش‌تری برخوردار هستند.

مثال **شخصی توپی را از روی زمین به هوا پرتاب می‌کند. اگر معادلهٔ ارتفاع توپ در لحظهٔ t پس از پرتاب به‌صورت $y=-3t^2+12t$ باشد، بیش‌ترین ارتفاع توپ چقدر است؟**



چون ضریب t^2 منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است. از طرفی بیش‌ترین ارتفاع توپ، همان عرض رأس سهمی، یعنی $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

$$y_S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{144-4(-3)(0)}{4(-3)}=-\frac{144}{4(-3)}=12$$

نکته اگر حاصل جمع دو عدد مقداری ثابت باشد، آنگاه هنگامی حاصل ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن است که آن دو عدد برابر باشند.

تست **با طنابی به طول ۸۸ متر می‌خواهیم دورتادور زمینی مستطیل‌شکل که یک طرف آن رودخانه است را حصارکشی کنیم. بیش‌ترین مساحت این زمین کدام است؟** (خارج - ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

۲ یک ضلع زمین که به رودخانه مجاور است، نیاز به حصارکشی ندارد، پس با توجه به شکل $2y+x=88$ و در نتیجه $y=\frac{88-x}{2}$ است؛ بنابراین مساحت زمین برابر است با:

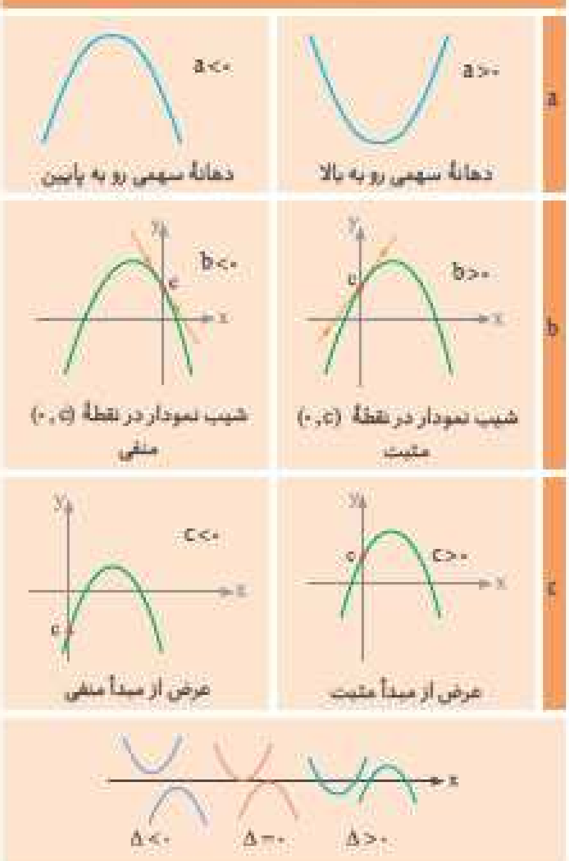
$$\Rightarrow S=xy=x\left(\frac{88-x}{2}\right)=44x-\frac{x^2}{2}$$

بیش‌ترین مساحت زمین، برابر عرض رأس سهمی $S=44x-\frac{x^2}{2}$ است:

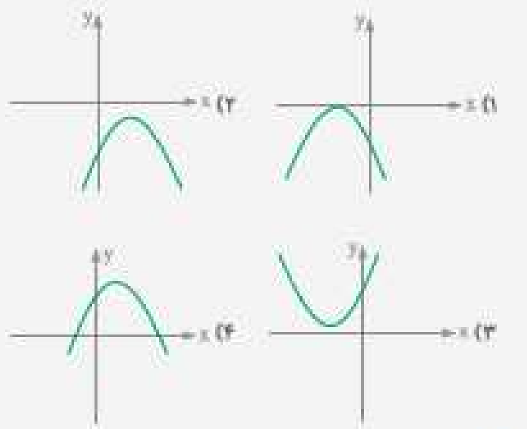
$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{(44)^2-4(-\frac{1}{2})(0)}{4(-\frac{1}{2})}=968$$

تعیین علامت ضرایب به کمک نمودار

علامت ضرایب در معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$



تست کدام نمودار مربوط به تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ با شرط $a<0$، $b>0$ و $\Delta<0$ است؟



۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) شیب خط مماس بر نمودار در $(0,c)$ منفی است؛ پس $b<0$.

۲) دهانهٔ سهمی رو به پایین است؛ پس $a<0$. شیب خط مماس در محل برخورد با محور yها مثبت است؛ پس $b>0$. با محور xها برخوردی ندارد؛ پس $\Delta<0$.

۳) دهانهٔ سهمی رو به بالا است؛ پس $a>0$.

۴) محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند؛ پس $\Delta>0$.

نوشتن معادلهٔ سهمی

برای نوشتن معادلهٔ یک سهمی با داشتن ۳ نقطهٔ متمایز از آن، راهکار کلی این است که معادلهٔ سهمی را به صورت $y=ax^2+bx+c$ در نظر بگیریم و مختصات نقاط داده‌شده را در آن جای‌گذاری کنیم تا مقادیر a و b و c معلوم شود.

مثال یک سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند و از دو نقطه با مختصات $(1,6)$ و $(-2,-3)$ می‌گذرد. معادلهٔ سهمی را بنویسید.

معادلهٔ سهمی را به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم. چون سهمی محور yها را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع می‌کند، پس:

$$f(0)=1 \Rightarrow a(0)^2+b(0)+c=1 \Rightarrow c=1$$

حال چون سهمی از دو نقطهٔ $(1,6)$ و $(-2,-3)$ می‌گذرد، خواهیم داشت:

$$f(1)=6 \Rightarrow a(1)^2+b(1)+1=6 \Rightarrow a+b=5$$

$$f(-2)=-3 \Rightarrow a(-2)^2+b(-2)+1=-3 \Rightarrow 2a-b=-2$$

پس $b=4$ و $a=1$ است و معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=x^2+4x+1$ است.

با داشتن برخی نقاط خاص از سهمی، می‌توانیم به جای استفاده از روش گفته‌شده، معادلهٔ سهمی را سریع‌تر به دست آوریم:

۱ اگر سهمی محور طول‌ها را در دو نقطهٔ x_1، x_2 قطع کند، می‌توانیم معادلهٔ سهمی را به صورت $y=k(x-x_1)(x-x_2)$ در نظر بگیریم و با جای‌گذاری مختصات هر نقطهٔ دلخواهی از سهمی، مقدار k را به‌دست آوریم.

مثال یک سهمی محور xها را در دو نقطه با طول‌های -1 و ۳ قطع کرده و از نقطهٔ $(4,10)$ می‌گذرد. معادلهٔ سهمی را بنویسید.

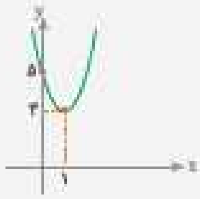
معادلهٔ سهمی را به صورت $y=k(x+1)(x-3)$ در نظر می‌گیریم. حال چون سهمی از نقطهٔ $(4,10)$ می‌گذرد، پس:

$$10=k\underbrace{(4+1)(4-3)}_{5} \Rightarrow k=2$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: y=2(x+1)(x-3)=2x^2-4x-6$$

۲ اگر مختصات رأس سهمی به صورت $S(\alpha,\beta)$ باشد، می‌توانیم معادلهٔ سهمی را به صورت $y=k(x-\alpha)^2+\beta$ در نظر بگیریم و با کمک هر نقطهٔ دیگری از سهمی مقدار k را به دست آوریم.

مثال معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.



معادلهٔ سهمی را به صورت $y=k(x-1)^2+3$ در نظر می‌گیریم. چون سهمی محور yها را در نقطه‌ای با عرض ۵ قطع می‌کند، پس:

$$5=k(0-1)^2+3 \Rightarrow 5=k+3 \Rightarrow k=2$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: y=2(x-1)^2+3$$

تست سهمی $y=ax^2+bx+c$ گذرا از نقطهٔ $(6,1)$ محور تقارن خود را در $(2,-7)$ قطع می‌کند. این سهمی از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟

۱) $(-2,3)$ ۲) $(4,-1)$ ۳) $(4,-3)$ ۴) $(-2,1)$

۴ چون این سهمی محور تقارن خود را در نقطهٔ $(2,-7)$ قطع می‌کند، پس نقطهٔ $(2,-7)$ رأس سهمی است؛ بنابراین معادلهٔ آن را به صورت $y=k(x-2)^2-7$ در نظر می‌گیریم. حال چون این سهمی از نقطهٔ $(6,1)$ می‌گذرد، پس:

$$y=k(x-2)^2-7 \xrightarrow{(6,1)} 1=k(6-2)^2-7 \Rightarrow 16k=8 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-7$ است که از میان گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(-2,1)$ در آن صدق می‌کند.

بررسی وضعیت سهمی و خط

برای بررسی وضعیت سهمی به معادلهٔ $y_1 = ax^2 + bx + c$ و خط $y_2 = mx + h$ نسبت به هم ابتدا معادلهٔ تقاطع یعنی $y_1 = y_2$ را تشکیل می‌دهیم. سپس همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم تا به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برسیم. حال با توجه به علامت Δ در این معادلهٔ درجهٔ دوم با سه حالت مواجه می‌شویم:

$\Delta < 0$

خط و سهمی برخورد ندارند.

$\Delta = 0$

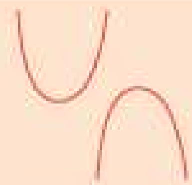
خط و سهمی برهم مماس‌اند.

$\Delta > 0$

خط و سهمی در ۲ نقطه متقاطع‌اند.

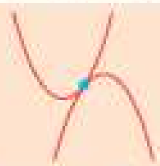
برای بررسی وضعیت دو سهمی به معادله‌های $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ و $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ نسبت به هم نیز ابتدا معادلهٔ تقاطع یعنی $y_1 = y_2$ را تشکیل می‌دهیم. سپس همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم. حال با توجه به علامت Δ در این معادلهٔ درجهٔ دوم با سه حالت مواجه می‌شویم:

$\Delta < 0$



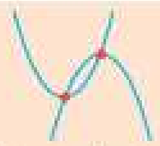
سهمی‌ها برخورد ندارند

$\Delta = 0$



سهمی‌ها بر هم مماس‌اند

$\Delta > 0$



سهمی‌ها در ۲ نقطه متقاطع‌اند

مثال **به‌ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $y = x^2 + (m+1)x + 4$ و خط $y = 2x + m$ در دو نقطه متقاطع‌اند؟**

ابتدا معادلهٔ $x^2 + (m+1)x + 4 = 2x + m$ را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$x^2 + mx + x + 4 - 2x - m = 0 \Rightarrow x^2 + (m-1)x + 4 - m = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} (m-1)^2 - 4(1)(4-m) > 0 \Rightarrow \underbrace{m^2 + 2m - 15}_{(m-3)(m+5)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -5 \end{cases}$$

تست **به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیهٔ اول محورهای مختصات مماس است؟** (خارج-۹۳)

۱) -4 ۲) $-12, 4$

۳) $12, -4$ ۴) 12

۱ چون نمودار تابع درجهٔ دوم بر خط $y = x$ مماس است، پس باید Δ معادلهٔ تقاطع صفر باشد:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \to 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} m^2 - 4(2)(m+6) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m+4)(m-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 12 \end{cases}$$

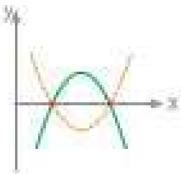
حال چون منحنی بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است، پس m ای قابل قبول است که ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ را مثبت کند. ریشهٔ مضاعف معادله برابر با $-\frac{m}{2(2)} = -\frac{m}{4}$ است، پس

$$-\frac{m}{4} > 0 \Rightarrow m < 0$$

بنابراین $m = -4$ قابل قبول است.

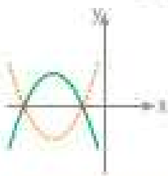
مشخص کردن علامت صفرهای سهمی با کمک وضعیت نمودار سهمی

۱ اگر سهمی محور xها را در ۲ نقطه با طول مثبت قطع کند.



$$\Rightarrow \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{array}$$

۲ سهمی محور xها را در ۲ نقطه با طول منفی قطع کند.



$$\Rightarrow \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{array}$$

نکته اگر نمودار منحنی $y = ax^2 + bx + c$ محور xها را در طرفین مبدأ مختصات قطع کند، کافیست حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی باشد.

تست **به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m-1)x^2-4x+m-6$ محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟**

۱) $1<m<6$

۲) $m<1$ یا $m>6$

۳) $m>6$

۴) $m>1$

۱ چون منحنی محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند، پس دارای یک ریشهٔ حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی است؛ پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است:

$P=\frac{c}{a}=\frac{m-6}{m-1}<0 \Leftrightarrow$

m	$-\infty$	1		6	$+\infty$
$\frac{m-6}{m-1}$	+		−		+

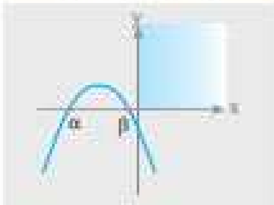
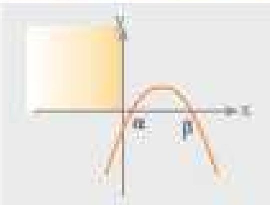
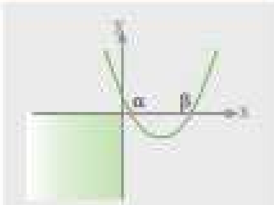
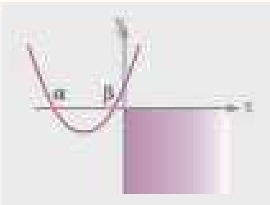
$\Rightarrow 1<m<6$

تذکر در صورتی که حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی باشد، Δ معادله همواره مثبت است.

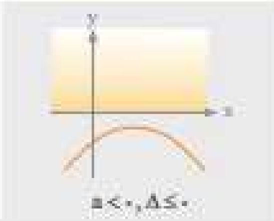
گذر از ناحیه‌های دستگاه مختصات

در بعضی از سؤالات می‌خواهیم نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ از ناحیهٔ مشخصی در دستگاه مختصات عبور نکند. همهٔ حالت‌های ممکن به صورت زیر است:

سهمی فقط از یک ناحیه نگذرد.

فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.	فقط از ناحیهٔ ۲ نگذرد.
	
$S<0$	$S>0$
$a<0, \Delta>0, P\geq 0$	
فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.	**فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.**
	
$S>0$	$S<0$
$a>0, \Delta>0, P\geq 0$	

سهمی فقط از دو ناحیه بگذرد.

فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ بگذرد.	فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ بگذرد.
	
$a>0, \Delta\leq 0$	$a<0, \Delta\leq 0$

مثال **اگر نمودار سهمی $y=-x^2+(m-2)x-4$ فقط از ناحیهٔ اول و دوم عبور نکند، حدود m کدام است؟**

چون می‌خواهیم سهمی فقط از ناحیهٔ اول و دوم عبور نکند، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$1)\ a<0 \Rightarrow -1<0$ ✓

$2)\ \Delta\leq 0 \Rightarrow (m-2)^2-4(-1)(-4)\leq 0 \Rightarrow \underbrace{m^2-4m-12}_{(m-6)(m+2)}\leq 0$

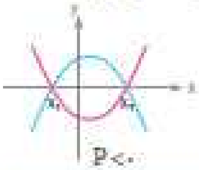
$\Rightarrow -2\leq m\leq 6$

اگر سهمی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات عبور کند، کافی است فقط شرط $P<0$ را بررسی کنیم. با توجه به نمودار زیر، در این حالت:

۱ سهمی محور xها را در طرفین مبدأ قطع می‌کند.

۲ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد.

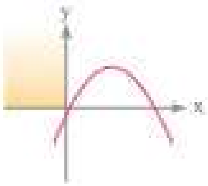
در این حالت Δ قطعاً مثبت بوده و نیازی به بررسی علامت Δ نیست.



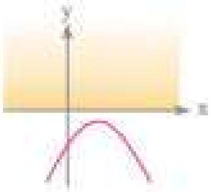
$P<0$

نکته به شکل‌های زیر دقت کنید. حالتی که مسئله می‌گوید سهمی فقط از ناحیهٔ ۲ نگذرد، نمودار (۱) مدنظر مسئله است؛ اما وقتی می‌گوید از ناحیهٔ ۲ نگذرد همهٔ نمودار (۱)، (۲) و (۳) مدنظر است.

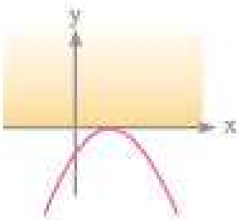
۱ $a<0, \Delta>0, S>0, P\geq 0$



۲ $a<0, \Delta<0$



۳ $a<0, \Delta=0$



تست اگر نمودار سهمی $y=-x^2+(m-2)x-4$ فقط از ناحیهٔ دوم عبور نکند، حدود m کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(6,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-2)$ ۴) $(-2,6)$

۲ چون می‌خواهیم سهمی فقط از ناحیهٔ دوم عبور نکند، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$1)\ a<0 \Rightarrow -1<0$ ✓

$2)\ \Delta>0 \Rightarrow (m-2)^2-4(-1)(-4)>0 \Rightarrow \underbrace{m^2-4m-12}_{(m-6)(m+2)}>0$

$\Rightarrow \begin{cases} m<-2 \\ m>6 \end{cases}$

$3)\ P\geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{-4}{-1}=4>0$ ✓

$4)\ S>0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{m-2}{-1}>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2$

بنابراین اشتراک بازه‌های به‌دست‌آمده از (۲) و (۴) برابر $(6,+\infty)$ است.

سهمی‌های بالا یا پایین محور xها

در سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$،

۱ در صورتی که $\Delta<0$ باشد، نمودار محور xها را قطع نخواهد کرد؛ یعنی همواره بالای محور xها یا همواره پایین محور xها قرار خواهد گرفت.

۲ در صورتی که $\Delta=0$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف بوده و نمودار سهمی در این ریشه بر محور xها مماس است.

$\Delta=0$	
$a<0$	$a>0$
	

$\Delta<0$	
$a<0$	$a>0$
	

تست به‌ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=mx^2-3x+m$ همواره بالای محور xها است؟

۱) $-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$ ۲) $m>0$

۳) $m<-\frac{3}{2}$ ۴) $m>\frac{3}{2}$

۴ باید ضریب x^2 مثبت و دلتا منفی باشد.

$1)\ m>0$

$2)\ \Delta<0 \Rightarrow (-3)^2-4(m)(m)<0 \Rightarrow 9-4m^2<0$

$\Rightarrow \frac{9}{4}<m^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} m>\frac{3}{2}$ یا $m<-\frac{3}{2}$

$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}} m>\frac{3}{2}$

یادداشت:

فصل ۰۳

معادله و نامعادله

ارتباط با فصل‌های دیگه: برای شروع این فصل یادگیری اتحادها، خواص قدرمطلق و اعمال اولیه جبری مانند مخرج‌مشترک‌گیری کافیست، اما خودش پیش‌نیاز اصلی برای خواندن بسیاری از فصل‌هاست.

توصیه: در کنکورهای سال‌های اخیر، توجه ویژه‌ای به بخش معادله و نامعادله و تست‌های این بخش شده است که با تمرین و تکرار به راحتی قابل حل هستند. در ضمن به مسائل مربوط به کاربردهای معادلات گویا و گنگ (انجام کار، سرعت، غلظت، مسئله مسیر و ...) توجه ویژه‌ای کنید و سعی کنید مفهومشون رو درک کنید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۳	۱	صفر	۲	۲	۱	۱	۱

درس ۱ معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا

به معادلاتی که صورت و مخرج کسر آن‌ها چندجمله‌ای است، معادلات گویا گویند. برای حل این معادلات به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا صورت و مخرج همهٔ کسرها را تجزیه می‌کنیم.

۲ مخرج مشترک کسرها را به دست می‌آوریم و طرفین تساوی را به شکل یک کسر نوشته و طرفین وسطین می‌کنیم.
(همچنین می‌توانیم طرفین تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کنیم.)

۳ معادلهٔ جدید ایجادشده را حل می‌کنیم.

تذکر بعد از حل معادله، باید جواب‌های به‌دست آمده را بررسی کنیم تا در دامنهٔ عبارت‌ها باشند [یعنی هیچ مخرجی را در معادلهٔ اولیه صفر نکنند].

مثال معادلهٔ $\frac{1}{x^2-x}-1=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}$ را حل کنید.

مخرج مشترک می‌گیریم و داریم:

$$\frac{(x-1)+2x}{x^2-x}=\frac{x^2-x-1}{x^2-x}\Rightarrow 3x-1=x^2-x-1$$

$$\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & ✗\\ x=4 & ✓\end{cases}$$

از آن‌جایی که $x=0$ ریشهٔ مخرج است، پس در دامنهٔ معادله نیست و قابل قبول نمی‌باشد.

تست چه تعداد از معادله‌های زیر دارای جواب طبیعی هستند؟

الف) $\frac{x-3}{x}=\frac{x+5}{2x+3}$ ب) $\frac{6}{x^2}-2=0$ پ) $3-\frac{2}{x}=x$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲ همهٔ معادلات را حل می‌کنیم:

الف) $\frac{x+5}{2x+3}=\frac{x-3}{x}\Rightarrow 2x^2-3x-9=x^2+5x$

$$\Rightarrow x^2-8x-9=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=9\end{cases}$$

ب) $\frac{6}{x^2}=2\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

پ) $3-\frac{2}{x}=x\Rightarrow x+\frac{2}{x}-3=0\xrightarrow{\times x}x^2-3x+2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\end{cases}$

پس معادله‌های (الف) و (پ) دارای جواب طبیعی هستند.

ساده کردن در معادلات گویا

در معادلات گویا اگر هر یک از کسرها قابل ساده شدن باشند، ابتدا آن‌ها را ساده می‌کنیم. زیرا ریشه‌های مخرج در دامنهٔ تعریف قرار ندارند.

مثلاً:

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2+x}+\frac{x^3-1}{x^4+x^3+x^2}=1$$

$$\Rightarrow\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)}+\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2(x^2+x+1)}=1\Rightarrow\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{x^2}=1$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+x+x-1}{x^2}=1\Rightarrow x^2+2x-1=x^2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

اگر بعد از ساده کردن معادله، به عبارتی مانند $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ رسیدیم، به دو نکتهٔ زیر توجه کنید:

۱ صورت کسرها را نباید از طرفین معادله ساده کرد. [A را نمی‌توان با C ساده کرد.] مگر آن‌که ریشهٔ عبارت ساده‌شده را به عنوان یکی از جواب‌های معادله درنظر بگیریم. مثلاً:

$$\frac{x^2-1}{x}=\frac{x-1}{x+1} \not\Rightarrow \frac{x+1}{x}=\frac{1}{x+1}$$

۲ مخرج کسرها را می‌توانیم از طرفین ساده کنیم. [B را می‌توان با D ساده کرد.] اما باید دقت کنیم که ریشه‌های عبارت‌های ساده‌شده را از مجموعهٔ جواب معادله حذف کنیم. مثلاً:

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x+1}{x^2-x} \rightarrow \frac{x}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{x+1}{x\cancel{(x-1)}} \xrightarrow{x\neq 1} \frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x}$$

تست معادلهٔ $\frac{2-x}{x^2-x}=\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}$ چند جواب دارد؟

۱) دو جواب مثبت ۲) دو جواب منفی

۳) یک جواب منفی ۴) جواب ندارد

۳ در سمت چپ معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-x} \Rightarrow \frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2-x}{x(x-1)}$$

با شرط $x\neq 1$ عبارت $(x-1)$ را از مخرج کسرها حذف می‌کنیم:

$$\frac{4x-2}{x+1}=\frac{2-x}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4x^2-2x=-x^2+x+2$$

$$\Rightarrow 5x^2-3x-2=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0} \begin{cases} x=1 & ✗ \\ x=-\frac{2}{5} & ✓ \end{cases}$$

بنابراین $x=\frac{-2}{5}$ تنها جواب معادله است.

برای حل بعضی از معادلات گویا، می‌توانیم با یک تغییر متغیر مناسب، ظاهر معادله را ساده‌تر کنیم تا حل معادله آسان شود.

وقتی یک عبارت یکسان در چند جای معادله وجود دارد، آن عبارت را t در نظر می‌گیریم و معادله را برحسب t حل می‌کنیم.

در نهایت x را به دست می‌آوریم. همچنین گاهی دو عبارت که معکوس یکدیگر هستند، در معادلات گویا به چشم می‌خورند؛ برای حل آن‌ها نیز از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

مثال معادلهٔ $\frac{5}{2}=\frac{x-2}{2}+\frac{2}{x-2}$ را حل کنید.

فرض می‌کنیم $t=\frac{2}{x-2}$ باشد، بنابراین:

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{t^2+1}{t}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2-5t+2=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=(5)^2-4(2)(2)=9} \begin{cases} t=\frac{5+3}{4}=2 \\ t=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال با محاسبهٔ t، مقادیر x به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$t=2 \Rightarrow \frac{2}{x-2}=2 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

$$t=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{x-2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x-2=4 \Rightarrow x=6$$

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+2}=x^2-4x+3$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۳ برای ساده‌تر شدن محاسبات فرض می‌کنیم $x^2-4x+2=A$ باشد ($A\neq 0$)، پس:

$$\frac{A+4}{A}=A+1 \Rightarrow A^2+A=A+4 \Rightarrow A^2=4 \Rightarrow A=\pm 2$$

$$\begin{cases} A=x^2-4x+2=2 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0\,,\ x=4 \\ A=x^2-4x+2=-2 \Rightarrow \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر ۶=۴+۲+۰ است.

مسائل کاربردی معادلات گویا

برای حل برخی مسائل که به صورت کاربردی مطرح می‌شوند، باید از معادلات گویا استفاده کنیم. این مسائل به سه دستهٔ کلی زیر تقسیم می‌شوند:

۱ در بعضی از مسائل، اطلاعاتی راجع به مدت‌زمان انجام کار توسط دو نفر یا دو وسیله داده می‌شود. در این گونه مسائل اگر مدت‌زمان انجام یک کار برابر t ساعت باشد، مقداری از کار که در یک ساعت انجام می‌شود، برابر با $\frac{1}{t}$ از کل کار است.

فرض کنید شخص A کاری را به تنهایی در t_A ساعت و شخص B همان کار را به تنهایی در t_B ساعت انجام می‌دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در t_{AB} ساعت انجام خواهد شد. در این صورت رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}=\frac{1}{t_{AB}}$$

مثال **آرمان برای تایپ یک مقاله ۲ ساعت وقت صرف می‌کند. اگر بهرام به او کمک کند، کار تایپ مقاله در ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه انجام می‌شود. اگر بهرام به تنهایی این مقاله را تایپ کند، چند دقیقه طول می‌کشد تا تایپ او تمام شود؟**

آرمان به تنهایی مقاله را در ۱۲۰ دقیقه (۲ ساعت) تایپ می‌کند. اگر بهرام به او کمک کند، کار تایپ در ۸۰ دقیقه (۱ ساعت و ۲۰ دقیقه) انجام می‌شود. حال اگر بهرام به تنهایی مقاله را در t_B دقیقه تایپ کند، داریم:

$$\frac{1}{120}+\frac{1}{t_B}=\frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{t_B}=\frac{1}{80}-\frac{1}{120}=\frac{3-2}{240}=\frac{1}{240}$$

$$\Rightarrow t_B=240$$

بنابراین بهرام این مقاله را به تنهایی در ۲۴۰ دقیقه تایپ می‌کند.

۲ در بعضی از مسائل اطلاعاتی راجع به سرعت یک متحرک داده می‌شود. از درس فیزیک می‌دانیم:

$$\text{زمان سپری‌شده}=\frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{سرعت}}$$

تست **یک کشتی فاصلهٔ ۱۴۴ کیلومتری بین دو شهر را رفته و برگشته است. مدت زمان رفت و برگشت ۱۵ ساعت است. اگر سرعت این کشتی در جهت جریان آب ۸ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی در جهت آب کدام است؟** (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۴ اگر سرعت حرکت کشتی را هنگامی که در جهت آب حرکت می‌کند برابر v در نظر بگیریم، سرعت آن هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند، برابر $v-8$ می‌شود. حال چون مجموع زمان رفت و برگشت ۱۵ ساعت است، پس:

$$\text{زمان رفت} + \text{زمان برگشت} = 15$$

$$\frac{144}{v}+\frac{144}{v-8}=15 \xrightarrow{\div 3} \frac{48}{v}+\frac{48}{v-8}=5$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری گزینه‌ها}} v=24$$

۳ در بعضی از مسائل، اطلاعاتی راجع به غلظت یک محلول داده می‌شود. از درس شیمی می‌دانیم غلظت، کمیتی است که بیان می‌کند چه مقدار از یک حل شونده در حلال، حل شده است.

$$\text{غلظت} = \frac{\text{وزن مادهٔ حل شونده}}{\text{وزن کل محلول}}$$

معمولاً کلید حل گونه این مسائل، پیدا کردن وزن مادهٔ حل‌شونده است. طبق رابطهٔ فوق برای پیدا کردن وزن مادهٔ حل‌شونده کافی است غلظت را در وزن کل محلول ضرب کنیم.

مثال **۱۲۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۸ درصد موجود است. با تبخیر چند کیلوگرم آب می‌توانیم غلظت محلول را به ۱۰ درصد برسانیم؟**

ابتدا وزن نمک را به دست می‌آوریم:

$$\text{وزن نمک} = 120 \times \frac{8}{100} = 9/6$$

حال فرض می‌کنیم با تبخیر x کیلوگرم آب، غلظت محلول به ۱۰ درصد می‌رسد، پس:

$$\frac{10}{100}=\frac{9/6}{120-x} \Rightarrow 96 = 120 - x \Rightarrow x = 24$$

عدد طلایی و مستطیل طلایی

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y رابطهٔ زیر برقرار باشد، مستطیل را مستطیل طلایی می‌نامند.

$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$$

در نسبت فوق، فرض می‌کنیم $t=\frac{x}{y}$ است و داریم:

$$\frac{x}{y}=1+\frac{y}{x} \Rightarrow t=1+\frac{1}{t} \Rightarrow t^2-t-1=0$$

$$\xrightarrow{t=\frac{x}{y}>0} t=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{\text{طول}}{\text{عرض}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

پس در مستطیل طلایی نسبت طول به عرض برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1/618$ است و این نسبت را عدد طلایی می‌نامند.

تست **اگر محیط یک زمین مستطیل شکل، برابر ۲۰ متر و اندازهٔ طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول زمین چقدر است؟**

۱) $5\sqrt{5}-5$ ۲) $\frac{5\sqrt{10}-5}{2}$

۳) $5\sqrt{5}+5$ ۴) $\frac{5\sqrt{10}+5}{2}$

۱ اگر طول زمین x و عرض آن y باشد، با توجه به این‌که محیط زمین برابر ۲۰ است، پس: $2x+2y=20 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$

از طرفی مستطیل، یک مستطیل طلایی است، پس:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x} \xrightarrow{y=10-x} \frac{x}{10-x}=\frac{x+10-x}{x}$$

$$\Rightarrow x^2=100-10x \Rightarrow x^2+10x-100=0 \Rightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{500}}{2}$$

$$=-5\pm 5\sqrt{5}$$

با توجه به $x>0$، طول زمین برابر با $-5+5\sqrt{5}$ خواهد بود.

معادلات گنگ

به معادلاتی که در آن‌ها، عبارت رادیکالی شامل متغیر، وجود داشته باشد، معادلات گنگ می‌گویند.

$$\sqrt{x}=5 \ ,\ \sqrt{2x^2+5x+1}=x \ ,\ \sqrt{x+2}+4=x-2$$

مراحل حل معادله

برای حل معادلات گنگی که در آن‌ها فقط یک رادیکال قرار دارد، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ رادیکال را در یک طرف معادله، تنها نگه می‌داریم و عبارت‌های دیگر را به طرف دیگر معادله می‌بریم.

۲ با به توان رساندن طرفین، رادیکال را از بین می‌بریم و معادله را حل می‌کنیم.

۳ جواب‌های به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی بررسی می‌کنیم تا عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج و طرف راست معادله را منفی نکنند و معادله به ازای جواب‌های به‌دست آمده برقرار باشد.

مثال **معادلهٔ $x=\sqrt{x+1}+5$ را حل کنید.**

$$\sqrt{x+1}=x-5$$

$$x+1=x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-11x+24=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \ ✓ \\ x=3 \ ✗ \end{cases}$$

جواب $x=3$ در معادلهٔ داده‌شده صدق نمی‌کند، چون طرف راست معادله یعنی $x-5$ را منفی می‌کند.

تذکر برای حل بعضی از معادلات گنگ باید عمل توان‌رسانی را دو بار انجام دهیم؛ زیرا ممکن است با یک بار به توان رساندن، رادیکال از بین نرود.

مثلاً برای حل معادلهٔ $\sqrt{1+\sqrt{x}}=2$ داریم:

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}=2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1+\sqrt{x}=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=9$$

نکته در بعضی از معادلات گنگ، وقتی پس از ساده کردن، به $\sqrt{\square} = \bigcirc$ می‌رسیم، دامنهٔ عبارت زیر رادیکال باعث منفی شدن عبارت طرف دیگر تساوی می‌شود. در این حالت، معادله فاقد جواب حقیقی است.

مثال **معادلهٔ $\sqrt{x-3} = 1-x$ چند جواب دارد؟**

دامنهٔ عبارت زیر رادیکال به‌صورت $[3,+\infty)$ است. در بازهٔ $[3,+\infty)$ عبارت سمت راست تساوی یعنی $1-x$ در بازهٔ $(-\infty,-2]$ قرار دارد. بنابراین سمت راست تساوی به‌ازای دامنهٔ عبارت زیر رادیکال همواره عبارتی منفی است؛ در نتیجه معادله فاقد جواب است.

تست **اگر $\sqrt{3a+16} + 2a = 1$ باشد، عدد $4a+9$ کدام است؟**

(خارج - ۹۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۳۱

۱ رادیکال را تنها کرده و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{3a+16} = 1-2a \xrightarrow{\text{توان } 2} 3a+16 = 4a^2-4a+1$$

$$\Rightarrow 4a^2-7a-15=0$$

حال برای تجزیهٔ عبارت $4a^2-7a-15$ عدد ۴ را در ۱۵- ضرب می‌کنیم، سپس تجزیه کرده و در یکی از پرانتزها a را در ۴ ضرب و در پرانتز دیگر، عدد ثابت را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$4a^2-7a-15=0 \Rightarrow a^2-7a-60=0$$

$$\Rightarrow \left(a-\frac{12}{4}\right)(4a+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 & ✗ \\ a=-\frac{5}{4} & ✓ \end{cases}$$

چون $a=3$ طرف سمت راست معادلهٔ اولیه را منفی می‌کند، قابل قبول نیست، پس:

$$4a+9 = 4\left(-\frac{5}{4}\right)+9 = -5+9 = 4$$

مجموع و تفاضل دو رادیکال

برای حل معادلات گنگی که شامل مجموع یا تفاضل دو رادیکال هستند، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر مجموع دو رادیکال برابر صفر باشد، عبارت زیر هر رادیکال را برابر صفر قرار می‌دهیم و از جواب‌های به‌دست آمده، اشتراک می‌گیریم. مثلاً:

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-x}=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \\ x^2-x=0 \Rightarrow x=1,\ x=0 \end{cases}$$

تنها جواب معادله $x=1$ است.

۲ اگر مجموع یا تفاضل دو رادیکال برابر عبارتی غیر صفر باشد، یکی از رادیکال‌ها را به طرف دوم می‌بریم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. مثلاً:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow x+1 = 9 + (x-2) - 6\sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow -6 = -6\sqrt{x-2} \Rightarrow \sqrt{x-2}=1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3\ ✓$$

تست **اگر $\sqrt{22-a} - \sqrt{10-a} = 2$ باشد، مقدار $\frac{2a-3}{9}$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۱ ابتدا $\sqrt{10-a}$ را به طرف راست تساوی منتقل کرده و سپس طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{22-a} = 2+\sqrt{10-a} \Rightarrow 22-a = 4+10-a+4\sqrt{10-a}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{10-a} = 8 \Rightarrow \sqrt{10-a} = 2 \Rightarrow 10-a=4 \Rightarrow a=6$$

$$\Rightarrow \frac{2a-3}{9} = \frac{(2\times 6)-3}{9} = 1$$

نکته برای حل بعضی از معادلات گنگ، می‌توانیم با یک تغییر متغیر مناسب، ظاهر معادله را ساده‌تر کنیم تا حل معادله آسان شود.

مثال ۱ **معادلهٔ $\sqrt{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-3$ را حل کنید.**

فرض می‌کنیم $t=\sqrt{x}-1$ باشد؛ در این صورت:

$$t-2=\sqrt{t} \Rightarrow (t-2)^2=t \Rightarrow t^2-4t+4=t$$

$$\Rightarrow t^2-5t+4=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases} t=1 & ✗ \\ t=4 & ✓ \end{cases}$$

$$\Rightarrow t=4 \Rightarrow \sqrt{x}-1=4 \Rightarrow \sqrt{x}=5 \Rightarrow x=25$$

مثال ۲ **معادلهٔ $\sqrt{x+1} = \frac{2}{\sqrt{x+1}}+1$ را حل کنید.**

فرض می‌کنیم $t=\sqrt{x+1}$ باشد؛ بنابراین:

$$t=\frac{2}{t}+1 \Rightarrow t^2-t-2=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=-1 & ✗ \\ \sqrt{x+1}=2 & ✓ \end{cases}$$

واضح است $\sqrt{x+1}$ نمی‌تواند برابر ۱- باشد، پس:

$$\sqrt{x+1}=2 \Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3$$

تست **حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^2+4x+3=\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام است؟**

(ریاضی داخل - ۹۴)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲ با فرض $t=x^2+4x+3$ داریم:

$$t=\sqrt{t+2} \Rightarrow t^2=t+2 \Rightarrow t^2-t-2=0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 & ✓ \\ t=-1 & ✗ \end{cases}$$

با توجه به معادلهٔ $t=\sqrt{t+2}$ باید t عددی مثبت باشد، پس به‌ازای $t=2$ خواهیم داشت:

$$x^2+4x+3=2 \Rightarrow x^2+4x+1=0$$

$$\Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

تذکر گاهی در برخی از معادلات گنگ که چندین رادیکال شامل متغیر وجود دارد، اشتراک دامنهٔ رادیکال‌ها تهی خواهد بود و معادله فاقد ریشه می‌باشد و نیازی به حل معادله نخواهد بود.

مثال معادلهٔ $\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}=3$ چند ریشه دارد؟

ابتدا دامنهٔ رادیکال‌ها را تعیین می‌کنیم:

$1)\ 4x-x^2\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 4$

$2)\ x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$

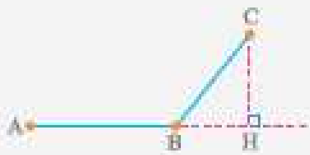
$3)\ x-5\geq 0 \Rightarrow x\geq 5$

چون اشتراک بازه‌های به دست آمده برابر $\varnothing$ می‌باشد، پس معادله فاقد ریشهٔ حقیقی می‌باشد.

مسئله کاربردی در معادلات گنگ

در بعضی از مسائل مربوط به معادلات گنگ، یک مسیر داریم که از دو یا چند بخش تشکیل شده است. [در این سؤالات معمولاً بخش‌های مختلف مسیر در یک راستا نیستند.] برای حل این مسائل، باید طول بخشی از مسیر را به کمک قضیهٔ فیثاغورس تعیین کنیم و با حل یک معادلهٔ گنگ، طول همهٔ قسمت‌های این مسیر را به دست آوریم.

تست در شکل زیر، متحرکی از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند و پس از عبور از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رسد. اگر $AH=11$ ، $CH=3$ و مسافت طی‌شده توسط متحرک ۱۲ متر باشد، طول مسیر BC چند متر است؟



۱) ۳/۵

۲) ۴

۳) ۴/۵

۴) ۵

۴ با فرض $BH=x$ نتیجه می‌گیریم $AB=11-x$ و $BC=\sqrt{x^2+9}$ است، پس:

$$11-x+\sqrt{x^2+9}=12\Rightarrow\sqrt{x^2+9}=x+1\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^2+9=x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow 2x=8\Rightarrow x=4$$

بنابراین $BC=\sqrt{16+9}=5$ است.

حل معادلات به روش هندسی

گاهی حل معادلات به روش جبری کاری سخت یا غیرممکن است. برای حل این معادلات می‌توانیم به سراغ روش هندسی برویم. روش هندسی معمولاً جواب دقیق را به ما نمی‌دهد، اما می‌توانیم تعداد جواب و حدود جواب را از این روش به دست بیاوریم.

مثال معادلهٔ $x^2-2x+1=\sqrt{x+4}$ چند ریشه دارد؟

ابتدا دو طرف معادله را به شکلی می‌نویسیم که نمودار دو طرف تساوی را به راحتی بتوانیم رسم کنیم:

$$x^2-2x+1=\sqrt{x+4}\Rightarrow\underbrace{(x-1)^2}_{f(x)}=\underbrace{\sqrt{x+4}}_{g(x)}$$

حالا هر دو نمودار $f(x)=(x-1)^2$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

پس این معادله دارای ۲ ریشه می‌باشد.

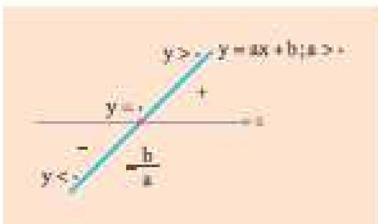
درس ۲ نامعادلات و تعیین علامت

تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ ۱ و درجهٔ ۲

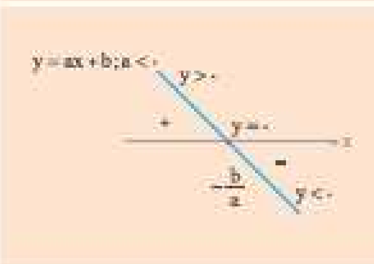
برای تعیین علامت عبارت درجهٔ یک $ax+b$ ، ابتدا آن را به معادلهٔ $ax+b=0$ تبدیل می‌کنیم و ریشهٔ معادله را به‌دست می‌آوریم. سپس مطابق جدول تعیین علامت زیر، علامت آن را مشخص می‌کنیم:

جدول تعیین علامت

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a		موافق علامت a



x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	$-$		$+$



x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	$+$		$-$

مثال عبارت $-5x+8$ را تعیین علامت کنید.

ریشهٔ معادلهٔ $-5x+8=0$ برابر $\frac{8}{5}$ است پس:

x	$-\infty$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$-5x+8$		+	0	−	

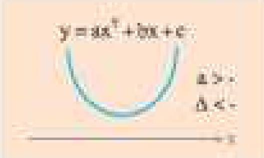
با توجه به نمودار نیز واضح است که تابع بعد از $x=\frac{5}{8}$، پایین محور xها است و دارای علامت منفی است و قبل $x=\frac{5}{8}$، بالای محور xها است و دارای علامت مثبت است.

برای تعیین علامت عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c ابتدا آن را به معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ تبدیل می‌کنیم و ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به علامت Δ، عبارت درجهٔ دوم را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\Delta=b^2-4ac$$

۱ $\Delta<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
y	موافق علامت a	



x	$-\infty$	$+\infty$
y	+	

همواره مثبت

x	$-\infty$	$+\infty$
y	−	

همواره منفی

مثلاً:

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2-x+1	+	

۲ $\Delta=0$

x	$-\infty$		$x_1=x_2$		$+\infty$
y		موافق علامت a	0	موافق علامت a	

x	$-\infty$		$x_1=x_2$		$+\infty$
y		+	0	+	

همواره نامنفی

x	$-\infty$		$x_1=x_2$		$+\infty$
y		−	0	−	

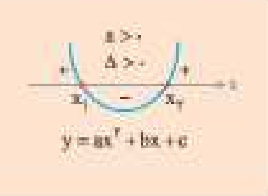
همواره نامثبت

مثلاً:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$(x-3)^2$		+	0	+	

۳ $\Delta>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y		+	0	−	0	+	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y		−	0	+	0	−	

مثلاً:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\underbrace{4-x^2}_{(2-x)(2+x)}$		−	0	+	0	−	

تست عبارت $P(x)=x^2-3x-10$ در کدام بازه مثبت نیست؟

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-2,5)$

۳) $(-5,2]$ ۴) $[-2,5]$

۴ ریشه‌های عبارت $P(x)=x^2-3x-10$ را به‌دست می‌آوریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2-3x-10=0\Rightarrow(x-5)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=5\\x=-2\end{cases}$$

$\Rightarrow$

x		-2		5	
P(x)	+	0	−	0	+

$\Rightarrow[-2,5]$

تست جدول تعیین علامت چه تعداد از عبارت‌های زیر به صورت مقابل است؟

x	$-\infty$		1		$+\infty$
P(x)		+	0	+	

الف) $P(x)=x^2-2x+1$

ب) $P(x)=x-1$

پ) $P(x)=x^2-x$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱ چون در جدول داده‌شده، $x=1$ تنها ریشهٔ $P(x)$ است، پس (پ) نادرست است. از طرفی علامت $P(x)$ به ازای همهٔ نقاط به جز $x=1$ مثبت است، پس (ب) نیز نادرست است. اما در (الف) می‌توانیم $P(x)$ را به صورت $(x-1)^2$ بنویسیم که جدول تعیین علامت آن در صورت سؤال نمایش داده شده است.

تعیین علامت عبارت تشکیل شده از ضرب یا تقسیم چند عبارت

برای تعیین علامت عبارت‌هایی که از ضرب یا تقسیم چند عبارت درجهٔ اول تشکیل شده‌اند، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ در سطر اول جدول تعیین علامت، ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

۲ هر عبارت درجهٔ اول را به تنهایی در یک سطر تعیین علامت می‌کنیم.

۳ در هر ناحیه، علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. به‌ازای ریشه‌های صورت کسر، حاصل عبارت برابر صفر و به‌ازای ریشه‌های مخرج کسر، عبارت تعریف‌نشده است.

مثال عبارت $P(x)=\frac{x+1}{x-2}$ را تعیین علامت کنید.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
...				...			

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
...				...			

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	تعریف‌نشده	$+$	

نکته توان فرد یا ریشهٔ مرتبهٔ فرد روی علامت عبارت تأثیری ندارند. بنابراین تعیین علامت عبارت‌های $\sqrt[2k+1]{ax+b}$ و $(ax+b)^{2k+1}$ همانند تعیین علامت $ax+b$ است.

تست عبارت $P(x)=\frac{2x-5}{x-4}$ در کدام بازه منفی است؟

۱) $(2,4)$ ۲) $(\frac{5}{2},4)$

۳) $(4,5)$ ۴) $\mathbb{R}-[\frac{5}{2},4]$

۲ جدول تعیین علامت را مطابق ترتیب گفته‌شده رسم می‌کنیم و داریم:

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$2x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	تعریف‌نشده	$+$	

عبارت $P(x)$ در بازهٔ $(\frac{5}{2},4)$ منفی است.

تعیین علامت به روش سریع

برای این‌که بتوانیم هر عبارتی (چند جمله‌ای، کسری و ...) را سریع تعیین علامت کنیم، می‌توانیم جدول تعیین علامت را به ترتیب زیر پُر کنیم:

۱ عبارات همواره مثبت را در تعیین علامت دخالت نمی‌دهیم و به جای عبارات همواره منفی، فقط علامت منفی می‌گذاریم.

۲ همهٔ عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به عوامل اول تجزیه کرده و ریشهٔ هر عامل را به دست می‌آوریم.

۳ ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ (از چپ به راست) در سطر اول جدول تعیین علامت می‌نویسیم.

۴ برای ریشه‌های صورت کسر، صفر و برای ریشه‌های مخرج کسر «تعریف‌نشده» می‌نویسیم.

۵ علامت ضریب بزرگ‌ترین توان در همهٔ عبارت‌ها را در هم ضرب کرده، علامت حاصل را در اولین خانه از سمت راست قرار می‌دهیم.

۶ در ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبهٔ فرد، علامت‌ها را یکی‌درمیان در اطراف ریشه عوض می‌کنیم ولی در ریشهٔ مضاعف (یعنی توان زوج داشته باشد) یا در ریشهٔ عبارت داخل قدر مطلق، علامت را عوض نمی‌کنیم.

مثال عبارت $P(x)=\frac{(x^2+3)(x-1)}{(x+2)(x^2-4)}$ را تعیین علامت کنید.

چون عبارت x^2+3 همواره مثبت است، آن را در تعیین علامت دخالت نمی‌دهیم.

$$P(x)=\frac{x-1}{(x+2)(x+2)(x-2)}=\frac{x-1}{(x+2)^2(x-2)}$$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$P(x)$					...				

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$P(x)$			تعریف‌نشده		0		تعریف‌نشده		

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$P(x)$			تعریف‌نشده		0		تعریف‌نشده	$+$	

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	تعریف‌نشده	$+$	0	$-$	تعریف‌نشده	$+$	

تست عبارت $P(x)=\frac{(-x^2-1)(x+1)^3}{x^2-5x+6}$ در کدام بازه مثبت است؟

۱) $(3,+\infty)$ ۲) $(-1,2)$

۳) $(2,3)$ ۴) $(-\infty,2)$

۳ در عبارت $P(x)=\frac{(-x^2-1)(x+1)^3}{x^2-5x+6}$، چون $(-x^2-1)$ همواره منفی است، پس به جای آن علامت منفی می‌گذاریم. از طرفی می‌دانیم توان فرد روی علامت عبارت تأثیری ندارد. پس تعیین علامت $(x+1)^3$ مانند $x+1$ است. بنابراین:

$$P(x)=\frac{-(x+1)}{(x-2)(x-3)}$$

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	تعریف‌نشده	$+$	تعریف‌نشده	$-$	

با توجه به گزینه‌ها، عبارت $P(x)$ در بازهٔ $(2,3)$ مثبت است.

خواص نامساوی‌ها

خاصیت‌های اصلی نامساوی $a<b$ به صورت زیر است:

۱ می‌توانیم به طرفین نامساوی عددی اضافه یا کم کنیم.

$a+c<b+c$

۲ می‌توانیم طرفین را در عدد مثبت c ضرب یا بر عدد مثبت c تقسیم کنیم.

$ac<bc$ ، $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

۳ اگر طرفین را در عدد منفی c ضرب یا بر عدد منفی c تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$a<b \xrightarrow{c<0} \begin{cases} ac>bc \\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c} \end{cases}$$

مثلاً،

$$2<3 \Rightarrow \begin{cases} 2\times-5>3\times-5 \\ -\dfrac{2}{5}>-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

۴ اگر دو طرف یک نامساوی هم‌علامت باشند، با معکوس کردن آن‌ها جهت عوض می‌شود. مثلاً،

$$2<5 \Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{5}$$

۵ اگر دو طرف یک نامساوی مختلف‌العلامت باشد، با معکوس کردن آن‌ها جهت عوض نمی‌شود. مثلاً،

$$-2<5 \Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{1}{5}$$

نکته قدرمطلق و توان زوج برای اعداد مثبت جهت را عوض نمی‌کند، اما در اعداد منفی باعث عوض شدن جهت می‌شود.

هر دو مثبت: $0<a<b \xrightarrow{\text{زوج }n} \begin{cases} a^n<b^n \\ |a|<|b| \end{cases}$

هر دو منفی: $a<b<0 \xrightarrow{\text{زوج }n} \begin{cases} a^n>b^n \\ |a|>|b| \end{cases}$

تست اگر $c<0$ و $a<b$ باشد، کدام گزینه درست است؟

الف) $ac>bc$ ب) $ac^2>bc^2$

پ) $a+c>b+c$ ت) $a^2c>b^2c$

۱) (الف)، (پ) ۲) (ب)، (پ) ۳) فقط (الف) ۴) فقط (پ)

۳ به بررسی عبارات می‌پردازیم:

الف) $a<b \xrightarrow[c<0]{\times c} ac>bc$

ب) $a<b \xrightarrow[c^2>0]{\times c^2} ac^2<bc^2$

پ) $a<b \xrightarrow{+c} a+c<b+c$

ت) چون علامت a و b مشخص نیست، ممکن است $a^2<b^2$ یا $a^2>b^2$ باشد.

حل نامعادله‌های گویا

برای حل نامعادله‌های درجهٔ اول، بهترین راه این است که x را در یک طرف نامعادله تنها کنیم.

مثال مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-1}{5}>\frac{1}{3}$ را به دست آورید.

$$\frac{x-1}{5}>\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 5} x-1>\frac{5}{3} \Rightarrow x>1+\frac{5}{3} \Rightarrow x>\frac{8}{3}$$

راهکار کلی برای حل نامعادله‌های گویا این است که همهٔ جملات را به یک طرف ببریم و سپس با استفاده از تعیین علامت، جواب را به دست آوریم.

مثال نامعادلهٔ $\frac{x^2+2x+3}{x-1}\leq x$ را حل کنید.

$$\frac{x^2+2x+3}{x-1}-x\leq 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{x^2+2x+3-x(x-1)}^{-x^2+x}}{x-1}\leq 0 \Rightarrow \frac{3x+3}{x-1}\leq 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{3x+3}{x-1}$		+		−	تعریف نشده	+	

$\Rightarrow$ مجموعهٔ جواب $=[-1,1)$

تذکر برای این‌که ببینیم عبارت $P(x)$ به‌ازای چه مقادیری از x همواره مثبت می‌شود، باید نامعادلهٔ $P(x)>0$ و برای این‌که ببینیم عبارت $P(x)$ به‌ازای چه مقادیری از x همواره منفی می‌شود، باید نامعادلهٔ $P(x)<0$ را حل کنیم.

مثال عبارت $\frac{2-x}{x+2}$ در کدام بازه مثبت است؟

باید نامعادلهٔ $\frac{2-x}{x+2}>0$ را حل کنیم. بنابراین جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$\frac{2-x}{x+2}>0 \rightarrow$

x		-2		2	
$\frac{2-x}{x+2}$	−	تعریف نشده	+		−

$\Rightarrow (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

نکته اگر هنگام تعیین علامت به عبارت‌های درجهٔ دوم برخورد کردیم که ریشه نداشتند، آن‌ها را کنار گذاشته و فقط علامت ضریب x^2 را نگه می‌داریم و سپس عبارت را مانند آنچه قبلاً گفته شد، تعیین علامت می‌کنیم.

مثال نامعادلهٔ $(-x^2+2x-3)(x^2-2x-3)\geq 0$ را حل کنید.

عبارت $-x^2+2x-3$ ریشه ندارد (چون $\Delta<0$)؛ پس این عبارت را حذف کرده و فقط علامت منفی پشت x^2 را نگه می‌داریم:

$$-(x^2-2x-3)\geq 0 \Rightarrow -(x-3)(x+1)\geq 0$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
عبارت		−		+		−	

$\Rightarrow -1\leq x\leq 3$

تست جواب نامعادلهٔ $\frac{2x+3}{2}-\frac{3}{4}>\frac{4x+1}{3}$ کدام است؟

۱) $x<\frac{2}{3}$ ۲) $x>\frac{3}{4}$ ۳) $x>\frac{7}{6}$ ۴) $x<\frac{5}{4}$

۴ طرفین نامعادله را در عدد ۱۲ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$12\times\left(\frac{2x+3}{2}-\frac{3}{4}>\frac{4x+1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{6(2x+3)-3(3)}_{12x+9}>\underbrace{4(4x+1)}_{16x+4} \Rightarrow 5>4x \Rightarrow x<\frac{5}{4}$$

نکته در حل نامعادلات گویا، اگر علامت مخرج کسر مشخص باشد، می‌توانیم طرفین نامعادله را در عبارت مخرج ضرب کنیم.

مثال **مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{4x}{x^2+3}<1$ را به دست آورید.**

عبارت مخرج کسر یعنی x^2+3 همواره مثبت است، بنابراین برای حل نامعادله، طرفین نامعادله را در x^2+3 ضرب می‌کنیم:

$$\frac{4x}{x^2+3}<1 \Rightarrow 4x<x^2+3 \Rightarrow x^2-4x+3>0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3)>0 \Rightarrow x<1 \text{ یا } x>3$$

تذکر در صورتی که در یک تست جواب نامعادله به‌صورت بازه بیان شده باشد، با استفاده از روش عددگذاری و امتحان گزینه‌ها می‌توانیم بدون حل کردن نامعادله، جواب را مشخص کنیم.

تست **مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{5x^2-12x}{x^2-9}<1$ کدام است؟**

۱) $(-3,\frac{3}{2})$ ۲) $(-3,3)-\{\frac{3}{2}\}$

۳) $(\frac{3}{2},3)$ ۴) $(-3,3)$

۲ عدد ۱ را به آن طرف نامعادله می‌بریم و سپس مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{5x^2-12x}{x^2-9}-1<0 \Rightarrow \frac{5x^2-12x-1(x^2-9)}{x^2-9}<0 \Rightarrow \frac{(2x-3)^2}{x^2-9}<0$$

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
P		+		−		−		+	

$\rightarrow (-3,3)-\{\frac{3}{2}\}$

میانبر چون $x=\frac{3}{2}$ در نامعادله صدق نمی‌کند و $x=2$ در آن صدق می‌کند، پس گزینهٔ (۲) درست است.

دستگاه نامعادلات

برای حل دستگاه نامعادلات، جواب‌های هر یک از نامعادله‌ها را جداگانه به‌دست آورده و سپس بین جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم.

مثال **مجموعهٔ جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases}2x>x+3\\x^2-5x+4<0\end{cases}$ را به‌دست آورید.**

$$\begin{cases}2x>x+3\\x^2-5x+4<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x>x+3\\(x-1)(x-4)<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>3\\1<x<4\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} 3<x<4$$

تست **مجموعه جواب مشترک دو نامعادلهٔ $\frac{4x-1}{3}>3x-2$ و $\frac{3x+5}{2}-\frac{2x-4}{3}>\frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟**

۱) $-2<x<2$ ۲) $-4<x<1$

۳) $-2<x<1$ ۴) $-4<x<2$

۲ طرفین نامعادلهٔ (۱) را در ۳ و طرفین نامعادلهٔ (۲) را در ۶ ضرب می‌کنیم:

$$1)\ \frac{4x-1}{3}>3x-2 \Rightarrow 4x-1>9x-6$$

$$\Rightarrow 5>5x \Rightarrow x<1$$

$$2)\ \frac{3x+5}{2}-\frac{2x-4}{3}>\frac{1}{2} \Rightarrow 9x+15-4x+8>3$$

$$\Rightarrow 5x>-20 \Rightarrow x>-4$$

$$\xrightarrow{\cap} -4<x<1$$

میانبر چون $x=1$ در نامعادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۴) حذف می‌شوند. از طرفی $x=-3$ در هر دو نامعادله صدق می‌کند، پس گزینهٔ (۲) پاسخ تست است.

حل نامعادلهٔ توأم

برای حل نامعادله‌های توأم، نامعادله را یک‌بار از سمت چپ و یک‌بار از سمت راست حل می‌کنیم، سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

مثال **نامعادلهٔ $x-3<2x<x-1$ را حل کنید.**

$$\left.\begin{array}{l}x-3<2x \Rightarrow -3<x\\2x<x-1 \Rightarrow x<-1\end{array}\right\} \Rightarrow -3<x<-1$$

تذکر اگر در یک نامعادلهٔ توأم، عبارت درجهٔ اول $ax+b$ بین دو عدد قرار گیرد، می‌توانیم طرفین نامعادله را ابتدا $b-$ کرده و سپس بر a تقسیم کنیم. مثلاً برای حل نامعادلهٔ $-5<2x-3<1$ داریم:

$$-5<2x-3<1 \xrightarrow{+3} -5+3<2x<1+3$$

$$\xrightarrow{\div 2} -1<x<2$$

تست **مجموعه جواب نامعادلهٔ $3>\frac{2x-3}{x+1}>1$ به کدام صورت است؟** (داخل - ۹۸)

۱) $\mathbb{R}-[-6,4]$ ۲) $\mathbb{R}-[-4,6]$

۳) $x>4$ ۴) $x<-6$

۱ از نامعادلهٔ $3>\frac{2x-3}{x+1}>1$ داریم:

$$1)\ 1<\frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1}-1>0 \Rightarrow \frac{2x-3-(x+1)}{x+1}>0$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x+1}>0 \Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>4$$

$$2)\ \frac{2x-3}{x+1}<3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1}-3<0 \Rightarrow \frac{2x-3-3(x+1)}{x+1}<0$$

$$\Rightarrow \frac{-x-6}{x+1}<0 \Rightarrow x<-6 \text{ یا } x>-1$$

از اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) مجموعه جواب معادله $x>4$ یا $x<-6$ می‌شود که می‌توانیم آن را به صورت $\mathbb{R}-[-6,4]$ نمایش دهیم.

میانبر چون $x=5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) که فاقد عدد ۵ هستند، حذف می‌شود. از طرفی $x=-7$ نیز در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینهٔ (۱) پاسخ تست است.

وضعیت منحنی

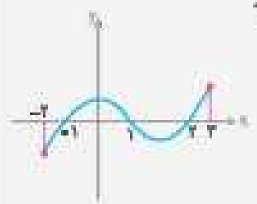
اگر نمودار منحنی f را داشته باشیم، آن‌گاه:

۱ جواب معادلهٔ $f=0$ ، مجموعهٔ xهایی است که به‌ازای آن‌ها نمودار f محور xها را قطع می‌کند.

۲ جواب نامعادلهٔ $f>0$ ، مجموعهٔ xهایی است که به‌ازای آن‌ها نمودار f بالای محور x قرار می‌گیرد.

۳ جواب نامعادلهٔ $f<0$ ، مجموعهٔ xهایی است که به‌ازای آن‌ها نمودار f پایین محور x قرار می‌گیرد.

مثال **نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x)<0$ را به دست آورید.**



نمودار تابع f در بازه‌های $(-2,-1)$ و $(1,2)$ پایین محور xها قرار دارد، پس مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x)<0$ به صورت $(-2,-1)\cup(1,2)$ است.

برای این‌که مشخص کنیم منحنی y_1 در چه بازه‌هایی بالا یا پایین منحنی y_2 قرار می‌گیرد، باید مجموعه جواب نامعادله‌های $y_1<y_2$ یا $y_1>y_2$ را به‌دست آوریم.

مثال **به ازای کدام مقادیر x نمودار سهمی $y_1=x^2$ زیر خط نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y_2=x$ قرار می‌گیرد؟**

باید نامعادلهٔ $y_1<y_2$ را حل کنیم:

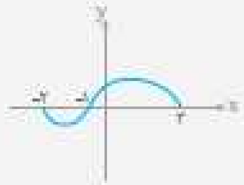
$$y_1<y_2 \Rightarrow x^2<x \Rightarrow x^2-x<0 \Rightarrow x(x-1)<0$$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
P(x)		+		−		+	

$\rightarrow 0<x<1$

تست **شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $xf(x)>0$ کدام است؟**



۱) $(-1,0)$

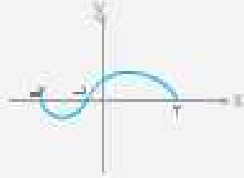
۲) $[-2,3]-(-1,0)$

۳) $(-2,-1)\cup(0,3)$

۴) $[-2,3]$

۳ برای این‌که $xf(x)$ مثبت باشد، باید x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، یعنی هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x>0,\ f(x)>0: & \text{راست و بالای محور x ها} \\ x<0,\ f(x)<0: & \text{چپ و پایین محور x ها} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 

پس جواب نامعادلهٔ $xf(x)>0$ به‌صورت بازهٔ $(-2,-1)\cup(0,3)$ است.

یادداشت:

فصل ۰۴

قدرمطلق و براکت

ارتباط با فصل‌های دیگه: پیش‌نیازهای این فصل، فصل‌های توان و عبارت جبری، معادله و نامعادله و کمی معادله و تابع درجه دوم است. اما در مباحثی مثل تابع، معادله و نامعادله، مثلثات، حد، مشتق و کاربرد مشتق به قدرمطلق و براکت نیاز خواهید داشت.

توصیه: درسته تعداد تست‌هایی که به طور مستقیم از قدرمطلق و براکت در کنکور مطرح شده، کمه؛ اما از این مبحث، به صورت ترکیبی با مباحث دیگه تست مطرح میشه. به طوری که اکثر سؤالات چالشی در مبحث تابع، حد، مشتق و کاربرد مشتق همراه با قدرمطلق و براکت مطرح میشه. پس یه مبحث پایه‌ای محسوب میشه و لازمه خیلی جدی بگیریدش.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	صفر	صفر	۱	۱	صفر	۱	صفر	صفر

درس ۱ قدر مطلق

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

قدرمطلق هر عدد حقیقی مانند x را با $|x|$ نمایش می‌دهند و به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$|x|=\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

از نظر هندسی $|x|$ نشان دهندهٔ فاصلهٔ x از نقطهٔ صفر بر روی محور اعداد حقیقی است.

مثلاً، فاصلهٔ نقطهٔ ۳ تا مبدأ مختصات برابر ۳ و فاصلهٔ نقطهٔ ۵- تا مبدأ مختصات برابر ۵ است:

با استفاده از همین تعریف قدر مطلق می‌توان قدر مطلق عبارات را حذف کرد. در برخورد با $|u|$، خواهیم داشت:

$$|u|=\begin{cases} u & ; \ u \geq 0 \\ -u & ; \ u < 0 \end{cases}$$

یعنی عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت کنید، اگر مثبت بود خودش و اگر منفی بود قرینه‌اش را جای آن بنویسید.

مثال عبارت $A=|x-2|+|3-x|$ را در محدوده $x<2$ بدون قدرمطلق بنویسید.

ابتدا با توجه به بازهٔ داده شده درون قدر مطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\begin{matrix} x<2 & \rightarrow & x-2<0 \\ x<2 & \rightarrow & 3-x>0 \end{matrix} \Rightarrow A=(2-x)+(3-x)=-2x+5$$

پس اگر $x<2$ باشد، عبارت A برابر $-2x+5$ است.

تست اگر $2<x<3$ باشد، حاصل $|x-3|+|2x-3|+|x-4|$ کدام است؟

۱) $2x+1$ ۲) $-2x+3$ ۳) 4 ۴) 10

۳ از $x<3$ نتیجه می‌گیریم $x-3<0$ و $x-4<0$ و از $2<x$ نتیجه می‌گیریم:

$$2<x \Rightarrow 4<2x \Rightarrow 1<2x-3$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$|x-3|+|2x-3|+|x-4|=-x+3+2x-3+(-x+4)=4$$

تست اگر $\sqrt{x^2+2xy+y^2}-|x-y|+\frac{y}{\sqrt{y^2}}-\frac{\sqrt{x^2}}{x}=8$ و $x<y<0$ باشد، مقدار y کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۴ می‌دانیم $\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2}=|x+y|$ است، پس:

$$\sqrt{x^2+2xy+y^2}-|x-y|+\frac{y}{\sqrt{y^2}}-\frac{\sqrt{x^2}}{x}=8$$

$$\Rightarrow |x+y|-|x-y|+\frac{y}{|y|}-\frac{|x|}{x}=8$$

حال از آن‌جایی که x و y منفی هستند، پس مجموع آن‌ها نیز منفی است. از طرفی چون $x<y$، پس $x-y$ نیز منفی است:

$$-(x+y)+(x-y)+(-1)-(-1)=8 \Rightarrow -2y=8 \Rightarrow y=-4$$

خواص قدرمطلق

۱ اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند:

$|ab|=|a||b|$ $\qquad$ $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|};(b\neq 0)$

۲ قدرمطلق هر عدد با قدرمطلق قرینه‌اش برابر است:

$|a|=|-a|$

۳ قدرمطلق هر عددی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است:

$0\leq|a|$

۴ قدرمطلق هر عدد بزرگتر یا مساوی خود آن عدد است:

$a\leq|a|$

۵ توان عبارت داخل قدرمطلق را می‌توان از قدر مطلق خارج کرد:

$|a^n|=|a|^n$

۶ اگر عبارت داخل قدرمطلق به توان زوج برسد، می‌توان قدرمطلق را حذف کرد:

$|a^{2n}|=a^{2n}$

با توجه به تعریف جذر(ریشهٔ دوم مثبت) می‌توان گفت:

$\sqrt{x^2}=|x|$

تست اگر $1<x<2$ باشد، حاصل عبارت $A=\sqrt[4]{(2-x)^4}-\sqrt{x^2-2x+1}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $x+3$ $\qquad$ ۲) $2x-5$ $\qquad$ ۳) 4 $\qquad$ ۴) $-2x+3$

۴ از خواص قدرمطلق داشتیم $|a|=\sqrt[n]{a^n}$ (n زوج)، بنابراین حاصل عبارت A به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$A=\sqrt[4]{(2-x)^4}-\sqrt{(x-1)^2}=|2-x|-|x-1|$$

چون $1<x<2$ است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}1<x<2\rightarrow 2-x>0\\ 1<x<2\rightarrow x-1>0\end{array}\right\}\rightarrow A=(2-x)-(x-1)=-2x+3$$

معادلات قدر مطلقی

۱ برای حل معادلات به شکل $|u|=|v|$ می‌توانیم از خواص قدرمطلق استفاده کنیم و بنویسیم:

$$|u|=|v|\rightarrow\begin{cases}u=v\\u=-v\end{cases}$$

مثال معادلهٔ $|2x-1|=|x-5|$ را حل کنید.

$1)\ 2x-1=x-5\Rightarrow x=-4$

$2)\ 2x-1=-x+5\Rightarrow 3x=6\rightarrow x=2$

تذکر برای حل معادلات به شکل $|u|=v$ هم می‌توانیم از روش قبلی استفاده کنیم، فقط باید دقت کنید که در جواب‌های به‌دست آمده $v\geq 0$ باشد.

مثال معادلهٔ $|x^2-3x|=x-4$ را حل کنید.

چون $x-4$ باید نامنفی باشد، این معادله را با شرط $x-4\geq 0$ حل می‌کنیم.

$1)\ x^2-3x=x-4\Rightarrow x^2-4x+4=(x-2)^2=0\Rightarrow x=2$

چون به ازای $x=2$، عبارت $x-4$ عددی منفی است این جواب غیرقابل قبول است.

$2)\ x^2-3x=-x+4\Rightarrow x^2-2x-4=0$

$$\Delta=20,\ x=\frac{2\pm\sqrt{20}}{2}=\begin{cases}1+\sqrt{5}\\1-\sqrt{5}\end{cases}$$

هر دو جواب به‌دست آمده، $x-4$ را منفی می‌کنند، پس هر دو غیرقابل قبول هستند، پس این معادله فاقد جواب است.

۲ برای حل معادلاتی که به شکل جمع و تفریق چند قدرمطلق هستند، معمولاً بهترین کار بازه‌بندی و حذف قدرمطلق است، دقت کنید در این حالت نیز باید جواب‌ها با بازهٔ اولیه اشتراک داشته باشند.

مثال معادله $|x|+|x-2|-2x=-2$ چند جواب دارد؟

با استفاده از ریشه‌ها قدرمطلق را حذف می‌کنیم و معادلهٔ هر خط را حل می‌کنیم.

$1)\ x<0:\ -4x+2=-2\Rightarrow x=1$

این جواب غیرقابل قبول است، چون با بازهٔ (۱) اشتراک ندارد.

$2)\ 0\leq x\leq 2:\ -2x+2=-2\Rightarrow x=2$

$3)\ 2<x:\ -2=-2$

اینجا به یک عبارت همواره درست رسیدیم.

یعنی تمام اعداد در محدودهٔ $x>2$ در این معادله صدق می‌کنند، پس معادله بی‌شمار جواب دارد.

نامعادلهٔ قدر مطلقی

راه اصلی این است که با بازه‌بندی، قدرمطلق را حذف کرد و پس از حل نامعادله به‌دست آمده، جواب‌ها را با بازه ابتدایی اشتراک گرفت.
استفاده از عددگذاری در این قسمت‌ها یک روش میانبر است.
این نامعادلات در چند حالت دسته‌بندی می‌شوند:

۱ نامعادلاتی که به صورت $|P(x)|>Q(x)$ یا $|P(x)|<Q(x)$ مطرح می‌شوند.

مثال نامعادلهٔ $x^2-2<|x|$ را حل کنید.

چون $x=0$ ریشهٔ داخل قدرمطلق است، داریم:

$$x\geq 0:x^2-2<x\Rightarrow x^2-x-2<0\Rightarrow(x-2)(x+1)<0$$

$$\Rightarrow -1<x<2\xrightarrow{\text{اشتراک}}0\leq x<2$$

$$x<0:x^2-2<-x\Rightarrow x^2+x-2<0\Rightarrow(x+2)(x-1)<0$$

$$\Rightarrow -2<x<1\xrightarrow{\text{اشتراک}}-2<x<0$$

از اجتماع جواب‌های به‌دست آمده، مجموعه جواب نامعادله برابر $-2<x<2$ است.

تست مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x+|2x-1|<3$ شامل چند عدد صحیح است؟ (کنکور مجدد - ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲

$$1)\ x\le\frac{1}{2}: \underbrace{x-(2x-1)}_{-x+1}<3 \Rightarrow -2<x \xrightarrow{x\le\frac{1}{2}} -2<x\le\frac{1}{2}$$

$$2)\ x>\frac{1}{2}: x+(2x-1)<3 \Rightarrow 3x<4$$

$$\Rightarrow x<\frac{4}{3} \xrightarrow{x>\frac{1}{2}} \frac{1}{2}<x<\frac{4}{3}$$

از اجتماع جواب‌های به‌دست آمده $-2<x<\frac{4}{3}$ به‌دست می‌آید که شامل سه عدد صحیح ۱ و ۰ و ۱- است.

۴ نامعادلاتی که در آن‌ها مجموع یا تفاضل دو یا چند عبارت قدرمطلقی وجود دارد.

مثال نامعادلهٔ $|x|+|x-1|>3$ را حل کنید.

ریشه‌های داخل قدرمطلق $x=0$ و $x=1$ هستند. بنابراین نامعادله را به سه ضابطه تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x<0 \Rightarrow \overbrace{-x-(x-1)}^{-2x+1}>3 \Rightarrow -2x>2 \Rightarrow x<-1 \\ \xrightarrow{x<0} x<-1 \\ 0\le x\le 1 \Rightarrow x-(x-1)>3 \Rightarrow 1>3 \xrightarrow{\text{همواره نادرست}} \varnothing \\ x>1 \Rightarrow \overbrace{x+(x-1)}^{2x-1}>3 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2 \\ \xrightarrow{x>1} x>2 \end{cases}$$

از اجتماع بازه‌های به دست آمده، جواب نامعادله برابر $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ است.

تست مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x+1|+|x-2|\le 5$ کدام است؟

۱) $[-2,3]$ ۲) $[-3,2]$ ۳) $[-1,4]$ ۴) $[-4,1]$

۱ ریشه‌های داخل قدرمطلق ۱- و ۲ هستند؛ بنابراین نامعادله را به سه ضابطه تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x<-1 \Rightarrow \overbrace{-(x-2)-(x+1)}^{-2x+1}\le 5 \Rightarrow -2\le x \xrightarrow{x<-1} -2\le x<-1 \\ -1\le x<2 \Rightarrow -(x-2)+(x+1)\le 5 \Rightarrow \underbrace{3\le 5}_{\text{همواره برقرار}} \Rightarrow -1\le x<2 \\ x\ge 2 \Rightarrow \overbrace{(x-2)+(x+1)}^{2x-1}\le 5 \Rightarrow 2x\le 6 \Rightarrow x\le 3 \xrightarrow{x\ge 2} 2\le x\le 3 \end{cases}$$

بنابراین اجتماع بازه‌های به‌دست آمده برابر است با:

$$[-2,-1)\cup[-1,2)\cup[2,3]=[-2,3]$$

تست مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|2x|<|x-1|-3$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ همهٔ عبارت‌ها را به طرف چپ منتقل می‌کنیم:

$$3-|x-1|>|2x| \Rightarrow 3-|x-1|-|2x|>0$$

چون $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های داخل قدرمطلق هستند، پس نامعادله را در ۳ ناحیه حل می‌کنیم:

$$1)\ x<0 \Rightarrow 3+(x-1)+2x>0 \Rightarrow x>-\frac{2}{3} \xrightarrow{x<0} -\frac{2}{3}<x<0$$

$$2)\ 0\le x<1 \Rightarrow 3+(x-1)-2x>0 \Rightarrow x<2 \xrightarrow{0\le x<1} 0\le x<1$$

$$3)\ x\ge 1 \Rightarrow 3-(x-1)-2x>0 \Rightarrow x<\frac{4}{3} \xrightarrow{x\ge 1} 1\le x<\frac{4}{3}$$

اجتماع بازه‌های به‌دست آمده، بازهٔ $(-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ است که شامل ۲ عدد صحیح است.

نکته برای حل سریع‌تر دو نامعادلهٔ قدرمطلقی $|P(x)|<a$ و $|P(x)|>a$ با شرط مثبت بودن a می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

۱ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|P(x)|<a$ برابر است با:

$$-a<P(x)<a$$

مثلاً

$$|x-1|<3 \Rightarrow -3<x-1<3 \Rightarrow -2<x<4$$

۲ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|P(x)|>a$ برابر است با:

$P(x)>a$ یا $P(x)<-a$

مثلاً

$$|x-2|>1 \Rightarrow \begin{cases} x-2>1 \Rightarrow x>3 \\ x-2<-1 \Rightarrow x<1 \end{cases}$$

۳ برای حل نامعادله‌هایی به‌صورت $|P(x)|>|Q(x)|$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و در هر دو طرف، اتحادها را باز می‌کنیم.

مثال نامعادلهٔ $|x+1|<|2x-1|$ را حل کنید.

$$|x+1|<|2x-1| \Rightarrow (x+1)^2<(2x-1)^2$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1<4x^2-4x+1$$

$$\Rightarrow 0<3x^2-6x \Rightarrow 0<x^2-2x \Rightarrow 0<x(x-2)$$

$\Rightarrow x<0$ یا $x>2$

تست مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|2-x|>|2x-3|$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) ۲

۲ ابتدا دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(2-x)^2>(2x-3)^2 \Rightarrow x^2-4x+4>4x^2-12x+9$$

$$3x^2-8x+5<0$$

این عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$3x^2-8x+5=0 \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

	1		$\frac{5}{3}$	
+		−		+

پس جواب بازهٔ $(1,\frac{5}{3})$ است که شامل اعداد صحیح نیست.

نکته اگر بخواهیم طرفین نامعادلهٔ $|P(x)|\geq|Q(x)|$ را بر عبارتی تقسیم کنیم، باید ریشهٔ آن عبارت را به عنوان یکی از جواب‌ها در نظر بگیریم.

مثال نامعادلهٔ $|x^2-x|\leq|x|$ را حل کنید.

می‌توانیم نامعادله را به‌صورت $|x||x-1|\leq|x|$ بنویسیم، سپس $|x|$ را از طرفین ساده کنیم و ریشهٔ آن یعنی $x=0$ را به عنوان یکی از جواب‌ها در نظر بگیریم. اکنون نامعادلهٔ $|x-1|\leq 1$ را حل می‌کنیم:

$$|x-1|\leq 1\Rightarrow -1\leq x-1\leq 1\Rightarrow 0\leq x\leq 2$$

تست مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^2-2x<|x-2|$ به‌صورت کدام بازه است؟ (خارج - ۹۲)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(1,2)$

۲ ریشهٔ داخل قدر مطلق $x=2$ است، پس:

$$1)\ x\geq 2: x^2-2x<x-2\Rightarrow \underbrace{x(x-2)-(x-2)}_{(x-2)(x-1)}<0$$

$$\Rightarrow 1<x<2\ \times$$

بازهٔ به دست آمده در شرط $x>2$ صدق نمی‌کند.

$$2)\ x<2: x^2-2x<-(x-2)\Rightarrow \underbrace{x(x-2)+(x-2)}_{(x-2)(x+1)}<0$$

$$\Rightarrow -1<x<2$$

بنابراین جواب نامعادله بازهٔ $(-1,2)$ است.

میانبر چون $x=0$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینهٔ (۳) و (۴) حذف می‌شوند. از طرفی $x=1$ نیز در معادله صدق می‌کند پس گزینهٔ (۲) که شامل عدد ۱ هست، پاسخ تست می‌باشد.

نکته اگر $|P(x)|$ یک عبارت گویا باشد، می‌توانیم ریشهٔ مخرج را کنار بگذاریم، سپس طرفین وسطین کرده و دو طرف را به توان ۲ برسانیم، ممکن است در انتها، ریشهٔ مخرج در بازهٔ جواب باشد. در این صورت آن را از جواب کم کنید.

مثال مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|<1$ را محاسبه کنید.

$$\left|\frac{x-1}{x+2}\right|<1\xrightarrow{x\neq -2}|x-1|<|x+2|\Rightarrow (x-1)^2<(x+2)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}-2x+1<\cancel{x^2}+4x+4\Rightarrow -3<6x\Rightarrow \frac{-1}{2}<x$$

$x=-2$ ریشهٔ مخرج است که در مجموعه جواب انتهایی وجود ندارد پس جواب نامعادله $(-\frac{1}{2},+\infty)$ است.

تست مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|>5$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱ چون $x=-2$ ریشهٔ مخرج کسر است، آن را کنار گذاشته و داریم:

$$\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|>5\xrightarrow{x\neq -2}|2x-1|>5|x+2|$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2>25(x+2)^2$$

$$(2x-1)^2-25(x+2)^2>0\xrightarrow[\text{مزدوج}]{\text{اتحاد}}$$

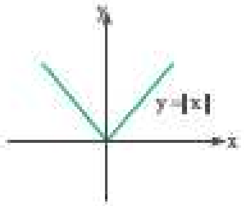
$$(2x-1-5x-10)(2x-1+5x+10)>0$$

$$\Rightarrow (-3x-11)(7x+9)>0\Rightarrow -\frac{11}{3}<x<-\frac{9}{7}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت بازهٔ $(-\frac{11}{3},-2)\cup(-2,-\frac{9}{7})$ است که شامل یک عدد صحیح یعنی -3 است.

تابع قدرمطلق

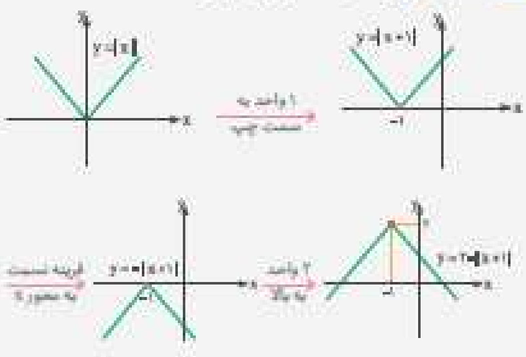
نمودار تابع $y=|x|$ به صورت زیر است:



نمودار تابع در $x\geq 0$ برابر $y=x$ و در $x\leq 0$ برابر $y=-x$ است؛ بنابراین شیب نیم‌خط راست برابر ۱ و شیب نیم‌خط چپ برابر ۱- بوده و این دو نیم‌خط بر هم عمود هستند.

با کمک قوانین انتقال، می‌توانیم نمودار توابع قدر مطلقی به فرم $y=|ax+b|+c$ را از روی نمودار تابع $y=|x|$ رسم کنیم.

مثال نمودار تابع $y=2-|x+1|$ را رسم کنید.

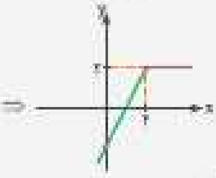


برای رسم نمودار توابعی که قسمتی از آن‌ها دارای قدرمطلق است، می‌توانیم ضابطهٔ تابع را در ریشهٔ داخل قدرمطلق‌ها به صورت چند ضابطه‌ای بنویسیم.

مثال ۱ نمودار تابع $y=x-\sqrt{x^2-4x+4}$ را رسم کنید.

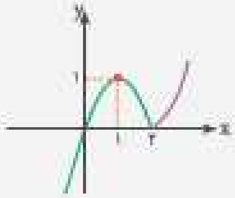
ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و سپس آن را در $x=2$ به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$y=x-\underbrace{\sqrt{x^2-4x+4}}_{(x-2)^2}=x-|x-2|=\begin{cases}2 & ;x\ge 2\\ 2x-2 & ;x<2\end{cases}$$

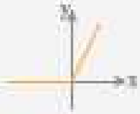
$\Rightarrow$ 

مثال ۲ نمودار تابع $y=x|x-2|$ را رسم کنید.

$$y=x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x & ;x\ge 2\\ -x^2+2x & ;x<2\end{cases}\Rightarrow$$



تست شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع است؟



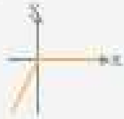
۱) $y=x-|x|$

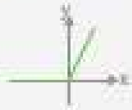
۲) $y=x+|x|$

۳) $y=|x-1|-1$

۴) $y=1-|x-1|$

۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $y=x-|x|=\begin{cases}0 & ;x\ge 0\\ 2x & ;x<0\end{cases}\Rightarrow$ 

۲) $y=x+|x|=\begin{cases}2x & ;x\ge 0\\ 0 & ;x<0\end{cases}\Rightarrow$ 

۳) نمودار تابع $y=|x-1|-1$ از انتقال افقی و عمودی تابع $y=|x|$ به‌دست آمده، پس نمودار آن شبیه نمودار $y=|x|$ است. [هفتی شکل]

۴) نمودار تابع $y=1-|x-1|$ از انتقال افقی و عمودی تابع $y=-|x|$ به‌دست آمده، پس نمودار آن شبیه نمودار $y=-|x|$ است. [هشتی شکل]

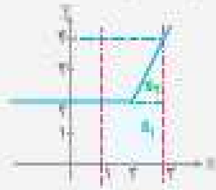
یکی از تیپ تست‌های پرتکرار در این قسمت محاسبه مساحت محصور بین نمودارها و محورهای مختصات است.

تست مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $f(x)=x+|x-2|$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=3$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۲ ضابطهٔ f را در $x=2$ به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را به‌همراه خط‌های عمودی $x=1$ و $x=3$ در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x+|x-2|=\begin{cases}2x-2 & ;x\ge 2\\ 2 & ;x<2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 

مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار و محور x و دو خط $x=1$ و $x=3$ برابر است با:

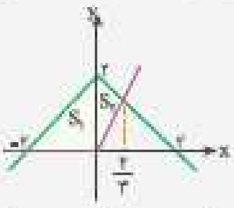
$$S=S_1+S_2=(2\times 2)+(\frac{1\times 2}{2})=4+1=5$$

تست مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=2-|x|$ کدام است؟ (داخل-۹۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۳

۳ نمودار تابع $y=x+|x|$ و $y=2-|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$y=2-|x|=\begin{cases}2-x & ;x\ge 0\\ 2+x & ;x<0\end{cases},\ y=x+|x|=\begin{cases}2x & ;x\ge 0\\ 0 & ;x<0\end{cases}$$



محل برخورد دو نمودار در سمت راست محور xها از معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$2x=2-x\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

بنابراین مساحت ناحیهٔ محدود برابر است با:

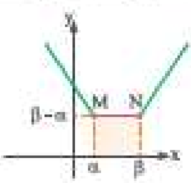
$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

نمودارهای معروف

برخی نمودارهای قدرمطلق، بسیار معروف هستند. می‌توان با روش بازه‌بندی و حذف قدرمطلق آنها را رسم کرد اما بلد بودن روش سریع رسم آن‌ها مهم است.

۱ نمودار گلدانی

نمودار تابع $y=|x-\alpha|+|x-\beta|$، شبیه یک گلدان است.



به مختصات نقاط M و N توجه کنید.

$M(\alpha, \beta-\alpha)$, $N(\beta, \beta-\alpha)$

ناحیهٔ رنگی همیشه مربع است.

شیب نیم‌خط سمت راست ۲ و شیب نیم‌خط سمت چپ ۲- است.

تست **نمودار دو تابع $y=|x-2|+|x+1|$ و خط $y=x+7$ در چند نقطه باهم برخورد دارند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

۲ راه اول: برای پیدا کردن نقاط برخورد دو نمودار باید معادلهٔ $|x+1|+|x-2|=x+7$ را حل کنیم:

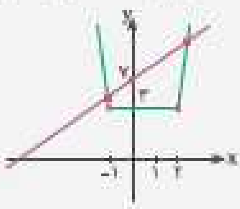
$1)\ x<-1: -2x+1=x+7 \Rightarrow x=-2$

$2)\ -1\le x\le 2: \underbrace{(x+1)-(x-2)}_{3}=x+7 \Rightarrow x=-4 \xrightarrow{-1\le x\le 2} \times$

$3)\ x>2: 2x-1=x+7 \Rightarrow x=8$

پس در $x=-2$ و $x=8$ دو نمودار باهم برخورد دارند.

راه دوم: می‌توانیم نمودارهای $y=|x-2|+|x+1|$ و $y=x+7$ را در یک دستگاه مختصات رسم و نقاط تقاطع آن‌ها را مشخص کنیم.



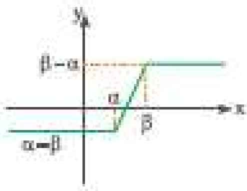
با توجه به نمودار هم مشخص است که دو نقطه برخورد دارند.

نمودار سرسره‌ای

نمودار تابع $y=|x-\alpha|-|x-\beta|$ ، شبیه یک سرسره است.

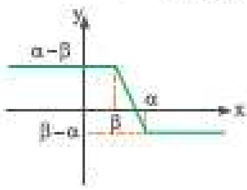
این نمودار باتوجه به مقدار ریشه قدر مطلق‌ها، یکی از دو حالت زیر را دارد.

$1)\ \alpha<\beta$



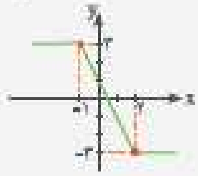
شیب پاره‌خط میانی برابر ۲ است.

$2)\ \alpha>\beta$



شیب پاره‌خط میانی برابر ۲- است.

مثال **نمودار تابع $y=|x-2|-|x+1|$ را رسم کنید.**

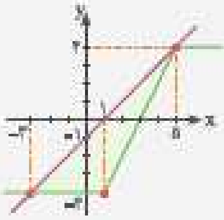


تست **مساحت محصور بین دو نمودار $y=|x-1|-|x-5|$ و $y=x-1$ کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۲ ابتدا دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. شکل محصور یک مثلث به قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۸. پس مساحت آن برابر است با:

$S=\frac{1}{2}(4)(8)=16$

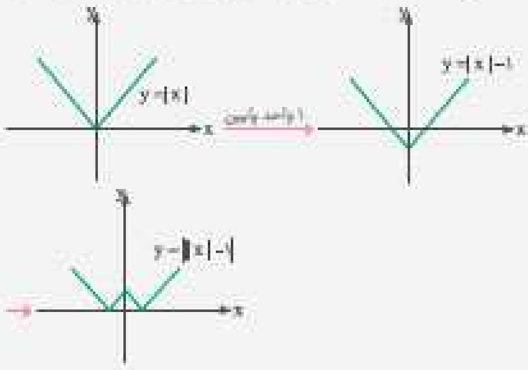


نمودار $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$

برای رسم نمودار تابع‌هایی به‌صورت $y=|f(x)|$ ، ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x قرار دارد، نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

مثال **نمودار تابع $f(x)=||x|-1|$ را رسم کنید.**

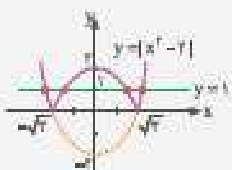
ابتدا تابع $y=|x|-1$ را رسم می‌کنیم، سپس مراحل رسم را ادامه می‌دهیم.



تست **نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ و خط $y=1$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟**

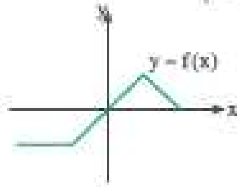
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

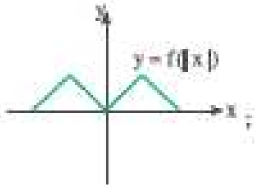
۴ نمودار تابع $y=|x^2-2|$ و خط $y=1$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به شکل واضح است این دو نمودار در ۴ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

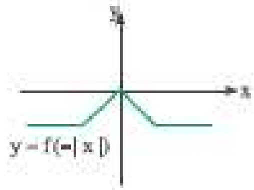


اگر در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌جای همهٔ xها، $|x|$ قرار دهیم، تابع $f(|x|)$ ساخته می‌شود. برای رسم نمودار تابع $f(|x|)$، ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی از نمودار تابع $f(x)$ را که در سمت چپ محور yها قرار دارند، حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمت‌های باقی‌مانده در سمت راست را به آن اضافه می‌کنیم. [چون اگر $x>0$ باشد، $f(|x|)$ برابر $f(x)$ است و اگر $x<0$ باشد، $f(|x|)$ برابر $f(-x)$ خواهد بود.]

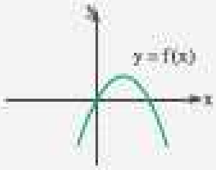
برای رسم نمودار تابع $f(-|x|)$ می‌توانیم قسمت‌های سمت راست محور yها را حذف کنیم و سپس قرینهٔ قسمت باقی‌مانده را نسبت به محور y، به آن اضافه کنیم.



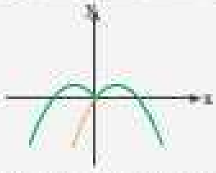




مثال اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $|f(|x|)|$ را رسم کنید.



ابتدا $f(|x|)$ را رسم می‌کنیم، برای این کار قسمت‌های سمت چپ نمودار را حذف و قرینه قسمت سمت راست را جای آن رسم می‌کنیم.



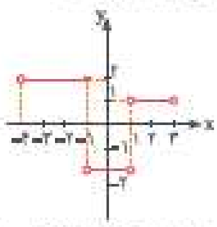
و در مرحله آخر، قسمت‌های زیر محور x را نسبت، آن محور قرینه می‌کنیم.

درس ۲ جزء صحیح

تابع پله‌ای و جزء صحیح

به هر تابعی که بتوان دامنهٔ آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد، به گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌گویند. به عنوان مثال تابع زیر تابعی پله‌ای است:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & ; -4<x\le -1 \\ -2 & ; -1<x<1 \\ 1 & ; 1<x<3 \end{cases} \Rightarrow$$

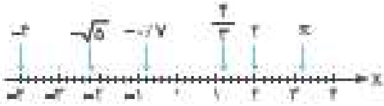


برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء‌صحیح (براکت) آن‌که بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد و آن را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر n عددی صحیح باشد آنگاه:

$$n\le x<n+1 \Leftrightarrow [x]=n$$

برای به دست آوردن جزء صحیح هر عدد باید بررسی کنیم، عدد مورد نظر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. در این شرایط جزء صحیح آن عدد، برابر عدد صحیح کوچکتر است.

به محور زیر و اعداد مشخص‌شده روی محور و جزء صحیح آن‌ها دقت کنید:



$[-4]=-4 \qquad [-\sqrt{5}]=-3 \qquad [-0/7]=-1$

$[\frac{4}{3}]=1 \qquad [2]=2 \qquad [\pi]=3$

واضح است جزء‌صحیح اعداد صحیح، با خود آن‌ها برابر است.

تست اگر $2<x<\frac{5}{2}$ باشد، حاصل $[2x+1]-[\frac{1}{2}x+3]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱ با توجه به این‌که $2<x<\frac{5}{2}$ است، داریم:

$$1)\ 4<2x<5 \Rightarrow 5<2x+1<6 \Rightarrow [2x+1]=5$$

$$2)\ 1<\frac{1}{2}x<\frac{5}{4} \Rightarrow 4<\frac{1}{2}x+3<\underbrace{\frac{5}{4}+3}_{4/25} \Rightarrow [\frac{1}{2}x+3]=4$$

بنابراین $[2x+1]-[\frac{1}{2}x+3]=5-4=1$ است.

تست اگر $|2x-1|<3$ باشد، $[\frac{x}{2}]$ چند مقدار مختلف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ ابتدا مجموعه جواب نامعادلهٔ $|2x-1|<3$ را تعیین می‌کنیم:

$$-3<2x-1<3 \Rightarrow -2<2x<4 \Rightarrow -1<x<2 \Rightarrow \frac{-1}{2}<\frac{x}{2}<1$$

بنابراین $[\frac{x}{2}]$ می‌تواند ۲ مقدار داشته باشد. $\Rightarrow [\frac{x}{2}]=-1, 0$

تست حاصل عبارت $[\sqrt{10}]+[\sqrt{11}]+[\sqrt{12}]+\dots+[\sqrt{24}]$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۵۴

۴ اعداد ۱۰ تا ۱۵ از ۹ بزرگتر و از ۱۶ کوچک‌ترند، پس جذر آن‌ها عددی میان ۳ و ۴ می‌باشد، بنابراین جزء صحیح آن‌ها برابر ۳ است. جذر عدد ۱۶ برابر ۴ و اعداد ۱۷ تا ۲۴ بزرگتر از ۱۶ و کوچکتر از ۲۵ هستند، پس جذر آن‌ها عددی بین ۴ و ۵ می‌باشد؛ بنابراین جزء صحیح آن‌ها برابر ۴ است. بنابراین:

$$[\sqrt{10}]+[\sqrt{11}]+\dots+[\sqrt{15}]+[\sqrt{16}]+[\sqrt{17}]+\dots+[\sqrt{24}]$$

$$=\underbrace{3+3+\dots+3}_{6}+\underbrace{4+4+\dots+4}_{9}=6\times3+9\times4=54$$

ویژگی‌های جزء صحیح

۱ جزءصحیح هر عدد، کوچکتر یا مساوی با خود آن عدد است:

$$[x]\le x$$

$[1/2]=1$ $[5/9]=5$ $[0/6]=0$ $[-2/3]=-3$

۲ اگر داخل جزءصحیح، یک عدد صحیح با بقیهٔ عبارت‌ها جمع شود یا از آن‌ها کم شود، می‌تواند از داخل جزءصحیح خارج شود، یعنی:

$$n\in Z\Rightarrow[x\pm n]=[x]\pm n$$

$[x^2+1]=[x^2]+1$

$[x+7]=[x]+7$

$[2(a-4)]=[2a-8]=[2a]-8$

۳ اگر a عددی صحیح باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$[x]=a\Rightarrow a\le x<a+1$$

$[x+2]=5\Rightarrow[x]+2=5\Rightarrow[x]=3\Rightarrow3\le x<4$

مثال معادلهٔ $[x+3]+2[x-1]=4$ را حل کنید.

با توجه به ویژگی‌های جزء صحیح داریم:

$[x]+3+2([x]-1)=4\Rightarrow[x]+3+2[x]-2=4\Rightarrow3[x]=3$

$\Rightarrow[x]=1\Rightarrow1\le x<2$

تست مجموعه جواب معادلهٔ $[x+7]=3[x]+2$ کدام است؟

۱) $\{1,2\}$ ۲) $[1,2)$

۳) $\{0,1,2\}$ ۴) جواب ندارد.

۴ می‌دانیم $[x+7]=[x]+7$ است، پس:

$[x]+7=3[x]+2\Rightarrow2[x]=5\Rightarrow[x]=\frac{5}{2}$

می‌دانیم حاصل $[x]$ عددی صحیح است، پس این معادله جواب ندارد.

توابع مشهور براکتی

۱ $f(x)=[x]+[-x]$

مقدار این تابع به ازای تمام اعداد صحیح برابر صفر و به‌ازای تمام اعداد غیر صحیح برابر ۱− است:

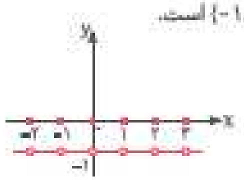
$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0\ ;\ x\in Z\\-1\ ;\ x\notin Z\end{cases}$$

مثلاً:

$\xrightarrow{x=2/75}[2/75]+[-2/75]=2+(-3)=-1$

$\xrightarrow{x=3}[3]+[-3]=3+(-3)=0$

بُرد این تابع برابر $\{-1,0\}$ است.



۲ $f(x)=x-[x]$

در خواص جز صحیح داریم:

$[x]=a\Rightarrow a\le x<a+1$

اگر طرفین رابطه را منهای a کنیم:

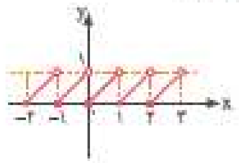
$0\le x-a<1$

با توجه به اینکه $[x]=a$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$0\le x-[x]<1$

مقدار این تابع عددی نامنفی و کوچکتر از یک است، در ضمن مقدار این عبارت در نقاط صحیح برابر صفر و در نقاط غیرصحیح عددی بین ۰ و ۱ است.

بُرد این تابع برابر $[0,1)$ است.



تذکر به $x-[x]$ جزء اعشاری عدد x گویند.

مثال ۱ حدود عبارت $A=3x-3[x]+1$ را محاسبه کنید.

می‌دانیم $0\le x-[x]<1$ است، پس:

$0\le x-[x]<1\xrightarrow{\times3}0\le3x-3[x]<3$

$\xrightarrow{+1}1\le3x-3[x]+1<4\rightarrow1\le A<4$

مثال ۲ برد تابع $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$ را به‌دست آورید.

از آن‌جایی‌که $x-[x]$ در مخرج کسر قرار دارد، پس نباید برابر صفر شود، بنابراین:

$0<x-[x]<1\Rightarrow\frac{1}{x-[x]}>1\Rightarrow$ بُرد $=(1,+\infty)$

تست معادلهٔ $2x-x^2=[x]+[-x]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ عبارت $[x]+[-x]$ به‌ازای مقادیر صحیح x برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح x برابر -1 است، پس معادله را در دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1)\ x\in\mathbb{Z}: 2x-x^2=0 \Rightarrow x(2-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$2)\ x\notin\mathbb{Z}: 2x-x^2=-1 \Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$$

هر ۴ جواب به‌دست آمده در معادله صدق می‌کنند.

تست نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{[x]+[-x]}$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) متقاطع نیست.

۱ می‌دانیم اگر $x\in\mathbb{Z}$ باشد، عبارت $[x]+[-x]$ برابر صفر است، پس تابع f به ازای $x\in\mathbb{Z}$ تعریف نشده است. اما اگر $x\notin\mathbb{Z}$، عبارت $[x]+[-x]$ برابر -1 است و $f(x)=-2x^2+3x-1$ می‌شود.
حال برای پیدا کردن محل برخورد f با محور x ها داریم:

$$f(x)=0 \Rightarrow -2x^2+3x-1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون $x\notin\mathbb{Z}$ پس فقط $x=\frac{1}{2}$ قابل‌قبول است.

تست دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{[x]+[-x]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\varnothing$

۱ عبارت $[x]+[-x]$ به‌ازای تمام اعداد صحیح برابر صفر و به‌ازای تمام اعداد غیرصحیح برابر -1 است. از آن‌جایی که این عبارت زیر رادیکال قرار دارد، پس دامنهٔ تابع f برابر اعداد صحیح است؛ یعنی $D_f=\mathbb{Z}$.

تست نمودار دو تابع $f(x)=-2x\big[[x]-x\big]+1$ و $g(x)=x^2$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) اگر $x\in\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه $x-[x]=0$ است، پس $f(x)=1$ است و محل برخورد دو نمودار f و g به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$g(x)=f(x) \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

۲) اگر $x\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه $0<x-[x]<1$ است، پس $-1<[x]-x<0$ و در نتیجه ضابطهٔ f برابر است با:

$$f(x)=-2x\big[[x]-x\big]+1=-2x(-1)+1=2x+1$$

حال نقاط برخورد نمودارهای f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=f(x) \Rightarrow x^2=2x+1 \Rightarrow x^2-2x-1=0$$

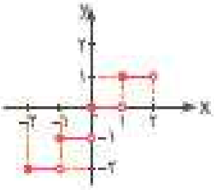
$$\xrightarrow{\Delta>0} \text{۲ ریشهٔ غیرصحیح}$$

پس نمودارهای f و g در چهار نقطه متقاطع‌اند.

رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح

برای رسم نمودار تابع $y=[x]$، باید x را بین اعداد صحیح متوالی در نظر بگیریم و مقدار تابع را در هر بازه به‌دست آوریم.
نمودار تابع $y=[x]$ در بازهٔ $[-2,2)$ به‌صورت زیر است:

$$y=[x]=\begin{cases} -2\ ; & -2\le x<-1 \\ -1\ ; & -1\le x<0 \\ 0\ ; & 0\le x<1 \\ 1\ ; & 1\le x<2 \end{cases} \Rightarrow$$



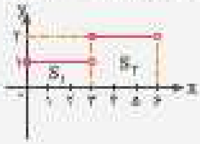
برای رسم نمودار توابعی که شامل $[ax\pm b]$ هستند، بازهٔ داده شده را به بازه‌های کوچکی به طول $\frac{1}{a}$ تقسیم می‌کنیم، سپس در هر بازه، مقدار جزءصحیح را به‌دست آورده و نمودار را رسم می‌کنیم.

تست مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y=[\frac{x}{3}]+1$ و محور xها در بازهٔ $[0,6)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۳ چون ضریب x داخل براکت برابر $\frac{1}{3}$ است، بازه‌ها را به طول ۳ واحد در نظر می‌گیریم و نمودار را رسم می‌کنیم:

$$y=[\frac{x}{3}]+1=\begin{cases} 1; & 0\le x<3 \\ 2; & 3\le x<6 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow S_1+S_2=1\times 3+2\times 3=9$$

تست نمودار تابع $f(x)=[x]+[2x]$ در بازهٔ $[0,4)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

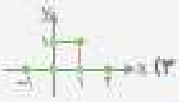
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

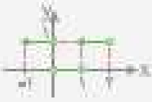
۴ به دلیل وجود $[2x]$ باید x را به‌صورت بازه‌هایی با طول $\frac{1}{2}$ محدود کنیم. بنابراین بازهٔ $[0,4)$ را می‌توانیم به ۸ بازه به طول $\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم، یعنی نمودار تابع f از ۸ پاره‌خط تشکیل می‌شود.

تست نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}[x]$ کدام است؟

۱)

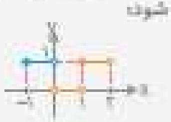

۲)


۳)


۴)


۴ ابتدا ضابطهٔ f را به‌صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس x را بین اعداد صحیح متوالی قرار می‌دهیم تا مقدار تابع در هر بازه مشخص شود.

$$f(x)=\begin{cases} [x] & ; x>0 \\ -[x] & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow$$



فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

ارتباط با فصل‌های دیگه: برای خواندن این فصل نیاز دارید تا فصل‌های توان و عبارت جبری، معادله و نامعادله، تابع و همچنین بخش دنباله هندسی از فصل مجموعه، الگو و دنباله را بلد باشید اما خود این فصل ارتباط زیادی به بخش‌های بعدی ندارد و به‌طور خاص پیش‌نیاز فصلی نیست. البته در فصل اول شیمی دوازدهم در مبحث اسید و باز با آن سروکار خواهید داشت.

توصیه: خواص اصلی لگاریتم یعنی جمع و تفریق، قاعدهٔ انتقال توان و تغییر مبنا را به همراه تیپ‌های معروف آن به خوبی یاد بگیرید. در ضمن در بررسی معادلات و نمودار توابع لگاریتمی، به دامنهٔ لگاریتم‌ها توجه کنید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۲	۲	۲	۲	۱	۲	۱	۱

درس ۱ تابع نمایی و ویژگی‌های آن

تابع نمایی

تابع $y=a^x$ که در آن، a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد را تابع نمایی می‌گویند. توابع زیر، نمایی هستند:

$$y=5^x \quad , \quad y=(\frac{1}{2})^x \quad , \quad y=(\sqrt{3}+1)^x$$

در حالت کلی هر تابع با ضابطهٔ $y=ka^x$ با شرط $a>0$ و $k\neq 0$ رفتار نمایی دارد.

تست اگر $f(x)=(\frac{3}{a+2})^x$ ضابطهٔ یک تابع نمایی باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(-2,1)\cup(1,+\infty)$ ۲) $(-2,+\infty)$

۳) $[-2,2]$ ۴) $\mathbb{R}-(-2,1)$

۱ چون تابع f نمایی است، پایه باید عددی مثبت و مخالف یک باشد:

$$1)\ \frac{3}{a+2}>0 \Rightarrow a+2>0 \Rightarrow a>-2$$

$$2)\ \frac{3}{a+2}\neq 1 \Rightarrow a+2\neq 3 \Rightarrow a\neq 1 \xrightarrow{(1),(2)} a\in(-2,1)\cup(1,+\infty)$$

رفتار تابع نمایی $y=a^x$

۱ اگر $0<a<1$ باشد با افزایش مقدار x مقادیر تابع کاهش می‌یابد و به عدد صفر نزدیک می‌شود.

x	-1	۰	۱	۲	...
$y=(\frac{1}{2})^x$	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...

۲ اگر $a>1$ باشد با افزایش مقدار x، مقادیر تابع افزایش می‌یابد.

x	-1	۰	۱	۲	...
$y=2^x$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	...

تذکر تابع نمایی $y=a^x$ همواره مقداری مثبت دارد؛ یعنی به‌ازای هر مقدار x، $y=a^x>0$.

نکته در یک تابع نمایی به‌صورت $y=ka^x$ اگر مقادیر ورودی، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند، آنگاه مقادیر خروجی تشکیل یک دنبالهٔ هندسی خواهند داد. همچنین اگر مقادیر خروجی تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند، مقادیر ورودی حتماً تشکیل یک دنبالهٔ حسابی داده‌اند.

مثال داده‌های جدول زیر، مربوط به یک تابع نمایی است.

x	۱	۳	۵
$f(x)$	۱۶	۴	۱

$+2 \quad +2$

$\times\frac{1}{4} \quad \times\frac{1}{4}$

قوانین مربوط به اعداد توان‌دار برای توان‌های حقیقی به صورت زیر است:

۱ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

۲ $(a^x)^y = a^{xy}$

۳ $a^x \times a^y = a^{x+y}$

۴ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

۵ $(ab)^x = a^x \times b^x$

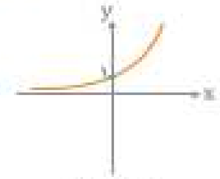
۶ $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

۷ $a^0 = 1 \quad , \quad a \neq 0$

نمودار تابع نمایی

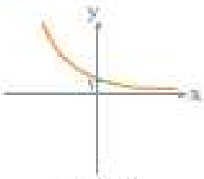
نمودار تابع نمایی $y = a^x$ با توجه این‌که a عددی بزرگ‌تر از یک باشد یا این‌که a عددی بین صفر و یک باشد، به یکی از شکل‌های زیر است:

۱ $a > 1$



اکیداً صعودی

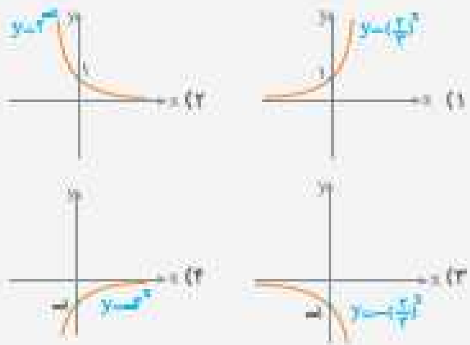
۲ $0 < a < 1$



اکیداً نزولی

- دامنهٔ این توابع برابر $\mathbb{R}$ و بُرد آن‌ها برابر $(0, +\infty)$ است.
- این توابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر هستند.
- محور yها را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع می‌کنند.
- با محور xها در هیچ نقطه‌ای برخورد ندارند.

تست **نمودار کدام تابع به درستی رسم شده است؟**

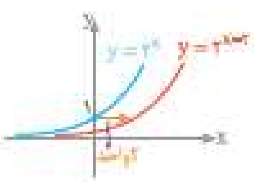


۴ در گزینهٔ (۲) ضابطهٔ تابع را به صورت $y = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$ می‌نویسیم. چون پایه عددی بین ۰ و ۱ است، پس نمودار آن نزولی است.

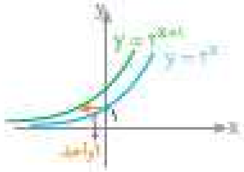
انتقال افقی در نمودار تابع نمایی

می‌دانیم که اگر بخواهیم نمودار تابع $y = f(x-a)$ را از روی نمودار $y = f(x)$ رسم کنیم:

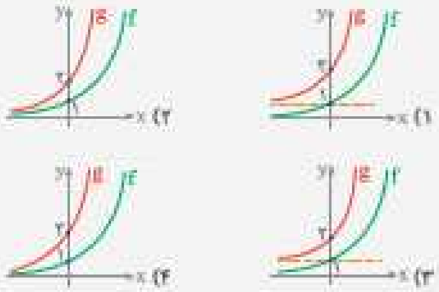
۱ اگر $a > 0$ باشد، نمودار را a واحد در راستای محور xها به راست انتقال می‌دهیم.



۲ اگر $a < 0$ باشد، نمودار را a واحد در راستای محور xها به چپ انتقال می‌دهیم.



تست **در کدام گزینه نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^x$ و $g(x) = 3^{x+1}$ به درستی رسم شده است؟**



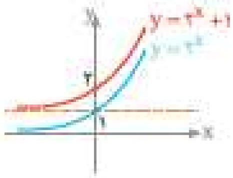
۴ نمودار تابع g محور yها را در نقطه‌ای با عرض $g(0) = 3^{0+1} = 3$ قطع می‌کند. پس گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند. از طرفی نمودار g از انتقال نمودار تابع $y = 3^x$ به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ به دست آمده است، نه یک واحد به سمت بالا. پس گزینهٔ (۴) درست است.

انتقال عمودی در نمودار تابع نمایی

می‌دانیم که برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + b$ از روی نمودار $y = f(x)$:

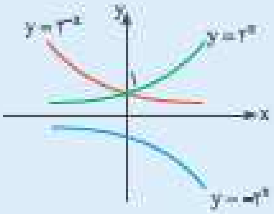
۱ اگر $b > 0$ باشد، باید نمودار $y = f(x)$ را در راستای محور yها، b واحد به بالا منتقل کنیم.

۲ اگر $b < 0$ باشد، باید نمودار $y = f(x)$ را در راستای محور yها، b واحد به پایین منتقل کنیم.

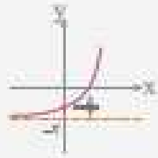


تذکر ۱ برای این‌که شکل به درستی رسم شود، یک خط‌چین افقی به موازات محور x برای نمودار رسم می‌کنیم (به این خط‌چین افقی، مجانب افقی تابع می‌گویند).

تذکر ۲ اگر نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور xها و نسبت به محور yها قرینه کنیم، به‌ترتیب نمودار $y = -f(x)$ و $y = f(-x)$ به‌دست می‌آید.



تست نمودار زیر مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y=3^{x}-2$

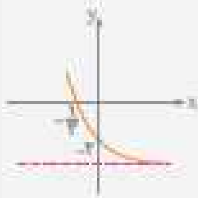
۲) $y=-2+3^{x-1}$

۳) $y=2-3^{x+1}$

۴) $y=(\frac{1}{3})^{x+1}-2$

۲ نمودار از نقطهٔ $(0,-\frac{5}{3})$ می‌گذرد پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که در آن $f(0)=-\frac{5}{3}$ باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند. از طرفی در نمودار تابع، با افزایش مقدار x مقدار y افزایش می‌یابد. بنابراین باید پایهٔ تابع نمایی بزرگ‌تر از یک باشد، پس گزینهٔ (۴) نیز نادرست است.

تست شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-4+2^{ax+b}$ است. مقدار $f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟



۱) ۵۴ (داخل - ۹۹)

۲) ۶۰

۳) ۴۸

۴) ۲۸

۲ نمودار محور yها را در نقطهٔ $(0,-2)$ و محور xها را در نقطهٔ $(-\frac{1}{3},0)$ قطع می‌کند، پس:

$$f(0)=-2 \Rightarrow -4+2^{0+b}=-2 \Rightarrow 2^{b}=2 \Rightarrow b=1$$

$$f(-\frac{1}{3})=0 \Rightarrow -4+2^{-\frac{a}{3}+1}=0 \Rightarrow 2^{-\frac{a}{3}+1}=2^{2}$$

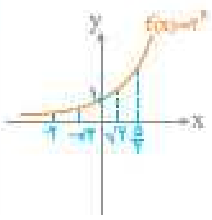
$$\Rightarrow -\frac{a}{3}+1=2 \Rightarrow a=-3$$

بنابراین $f(x)=-4+2^{-3x+1}$ است و $f(-\frac{5}{3})$ برابر است با:

$$f(-\frac{5}{3})=-4+2^{-3(-\frac{5}{3})+1}=-4+2^{6}=-4+64=60$$

نکته با کمک نمودار تابع نمایی $y=a^{x}$ می‌توانیم دو عدد a^{x_1} و a^{x_2} را مقایسه کنیم.

مثلاً برای مقایسهٔ عددهای 2^{-2}، $2^{-0/4}$، $2^{\sqrt{2}}$، $2^{\frac{5}{2}}$ می‌توانیم نمودار تابع $f(x)=2^{x}$ را رسم کنیم و عرض نقاط با طول‌های -2، $-0/4$، $\sqrt{2}$، $\frac{5}{2}$ را تعیین کنیم. بنابراین با توجه به نمودار زیر نتیجه می‌گیریم:

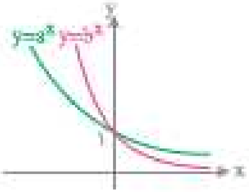


$$\Rightarrow 2^{-2}<2^{-0/4}<2^{\sqrt{2}}<2^{\frac{5}{2}}$$

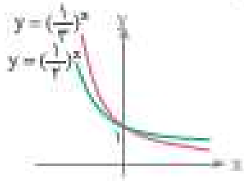
مقایسهٔ نمودارهای $y=a^{x}$ و $y=b^{x}$

وضعیت نمودار دو تابع نمایی $y=a^{x}$ و $y=b^{x}$، با توجه به مقادیر a و b به‌صورت زیر است:

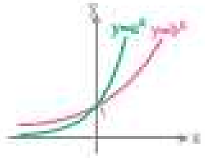
۱ $0<b<a<1$



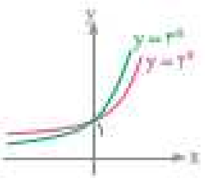
مثلاً نمودار توابع $y=(\frac{1}{2})^{x}$ و $y=(\frac{1}{3})^{x}$ به صورت مقابل است:



۲ $a>b>1$



مثلاً نمودار توابع $y=2^{x}$ و $y=3^{x}$ به صورت مقابل است:



نکته با توجه به نمودارهای فوق، اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند، به‌طوری که $a>b$ در این صورت به‌ازای $x>0$ رابطهٔ $a^{x}>b^{x}$ و به ازای $x<0$ رابطهٔ $a^{x}<b^{x}$ برقرار است. (به عبارت دیگر، به‌ازای xهای مثبت هر چه پایه بزرگ‌تر باشد، نمودارش بالاتر و به‌ازای xهای منفی نمودارش پایین‌تر است.)

تذکر با کمک نمودار دو تابع نمایی $y=a^{x}$ و $y=b^{x}$ می‌توانیم دو عدد a^{x} و b^{x} را مقایسه کنیم.

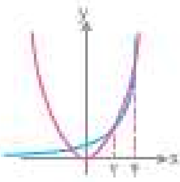
مثلاً، با توجه به نمودار تابع‌های $y=3^{x}$ و $y=5^{x}$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\Rightarrow 5^{\sqrt{2}}>3^{\sqrt{2}}$$

نمودار توابع $y=x^2$ و $y=2^x$

با توجه به نمودار دو تابع $y=x^2$ و $y=2^x$ در شکل زیر داریم:

برد تابع $y=x^2$ برابر $[0,+\infty)$ و برد تابع $y=2^x$ برابر $(0,+\infty)$ است.



این دو تابع در یک نقطه با طول منفی و دو نقطه با طول مثبت متقاطع هستند.[یعنی در ۳ نقطه متقاطع‌اند.]

این دو تابع در ربع اول، در نقاطی با طول‌های $x=2$ و $x=4$ متقاطع هستند.

در ربع اول در بازهٔ $(2,4)$ نمودار تابع $y=x^2$ بالای نمودار $y=2^x$ است.

معادلات نمایی

به معادلاتی مانند $2^x=32$ یا $3^{x-1}=81$ یا ... که مجهول در توان قرار دارد، معادلات نمایی می‌گویند. برای حل سؤال‌های مربوط به معادلات نمایی با حالت‌های کلی زیر مواجه هستیم:

۱ در بعضی از معادله‌ها، در دو طرف تساوی یک عبارت نمایی وجود دارد که می‌توانیم پایه‌های آن‌ها را یکسان کرده و معادلهٔ توان‌ها را حل کنیم:

$$2^x=(0/25)^{x-1}\Rightarrow 2^x=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}\Rightarrow 2^x=2^{-2x+2}$$

$$\Rightarrow x=-2x+2\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

تست از دو معادلهٔ $5^{x^2+x}=1$ و $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1}$ مقدار y کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{2}$ ۴) هیچ کدام

۳ در هر یک از معادله‌ها، پایه‌ها را در طرفین تساوی یکسان می‌کنیم:

$$5^{x^2+x}=1=5^0\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=0\,,\,x=-1$$

$$4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1}\Rightarrow (2^2)^x=(2^{-1})^{2y-1}\Rightarrow 2^{2x}=2^{1-2y}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0:1=2^{1-2y}\Rightarrow 1-2y=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}\\ x=-1:2^{-2}=2^{1-2y}\Rightarrow 1-2y=-2\Rightarrow 2y=3\Rightarrow y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

۲ در بعضی از معادله‌ها که معمولاً دو عبارت نمایی به همراه یک عدد ثابت با هم جمع یا از هم کم شده‌اند، می‌توانیم از روش تغییر متغیر استفاده کنیم.

$$9^x+3^x-12=0\xrightarrow{3^x=t>0}t^2+t-12=0\Rightarrow\begin{cases}t=-4 \ \times\\ t=3\Rightarrow 3^x=3\Rightarrow x=1 \ \checkmark\end{cases}$$

توجه کنید معادلهٔ $3^x=-4$ جواب ندارد، زیرا 3^x همواره عددی مثبت است.

تست از دو معادلهٔ $4^x-2^x=56$ و $2^{x-y}\times 4^{1+x}=16$ مقدار y کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

۴ ابتدا معادلهٔ $4^x-2^x=56$ را به‌صورت $(2^x)^2-2^x-56=0$ می‌نویسیم و سپس از تغییر متغیر $2^x=t>0$ استفاده می‌کنیم؛ بنابراین:

$$t^2-t-56=0\Rightarrow (t-8)(t+7)=0\Rightarrow\begin{cases}t=8 \ \checkmark\\ t=-7 \ \times\end{cases}$$

از $2^x=8$ نتیجه می‌گیریم $x=3$ است و سپس آن را در معادلهٔ دوم جایگذاری می‌کنیم:

$$2^{3-y}\times 4^{1+3}=16\Rightarrow 2^{3-y}\times 2^8=2^4\Rightarrow 2^{11-y}=2^4$$

$$\Rightarrow 11-y=4\Rightarrow y=7$$

تذکر اگر بخواهیم محل برخورد دو تابع نمایی f و g را به‌دست آوریم، باید معادلهٔ نمایی $f(x)=g(x)$ را حل کنیم.

تست نمودار یک تابع به‌صورت $f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^2-x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ نمودارها در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ متقاطع‌اند. پس این دو نقطه در معادلهٔ $-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}=x^2-x$ صدق می‌کنند:

$$1)\ x=1:-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{A+B}=1^2-1=0\Rightarrow 2^{-A-B}=2\Rightarrow -A-B=1$$

$$2)\ x=2:-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B}=2^2-2=2\Rightarrow 2^{-2A-B}=2^2\Rightarrow -2A-B=2$$

$$(2),(1)\Rightarrow A=-1\,,\,B=0$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده برای A و B خواهیم داشت:

$$f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}\Rightarrow f(3)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-2+2^3=-2+8=6$$

نامعادلات نمایی

برای حل نامعادلات نمایی، باید ابتدا پایه‌ها را یکسان کنیم. در این صورت دو حالت خواهیم داشت:

۱ اگر عدد پایه بین ۰ و ۱ باشد، پایه‌ها را از طرفین نامعادله حذف کرده و جهت نامساوی را عوض می‌کنیم.

$$a^x\geq a^y\xleftrightarrow{0<a<1}x\leq y$$

$$(0/2)^{x-1}\leq(0/04)^x\Rightarrow(0/2)^{x-1}\leq(0/2)^{2x}\Rightarrow x-1\geq 2x\Rightarrow x\leq -1$$

۲ اگر عدد پایه، بزرگتر از ۱ باشد، پایه‌ها را از طرفین نامعادله حذف کرده ولی جهت نامساوی را عوض نمی‌کنیم.

$$a^x\geq a^y\xleftrightarrow{a>1}x\geq y$$

$$3^{x+2}\geq 27^x\Rightarrow 3^{x+2}\geq 3^{3x}\Rightarrow x+2\geq 3x\Rightarrow 2x\leq 2\Rightarrow x\leq 1$$

تست مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $25^{3x-1} \le 5^{x-3}$ کدام بازه است؟

۱) $(\frac{1}{5}, +\infty)$ ۲) $(-\infty, \frac{1}{5})$

۳) $[-\frac{1}{5}, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -\frac{1}{5}]$

۴ پایه‌ها را یکسان می‌کنیم تا بتوانیم توان‌ها را باهم مقایسه کنیم:

$$25^{3x-1} \le 5^{x-3} \Rightarrow (5^2)^{3x-1} \le 5^{x-3} \Rightarrow 5^{6x-2} \le 5^{x-3}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، پایه برابر ۵ ، یعنی بزرگتر از یک است، پس جهت نامساوی بدون تغییر می‌ماند و خواهیم داشت:

$$6x-2 \le x-3 \Rightarrow 5x \le -1 \Rightarrow x \le -\frac{1}{5} \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{5}]$$

درس ۲ تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

تابع لگاریتمی

تابع نمایی $f(x)=a^x$ با توجه به نمودارش یک به یک است و بنابراین وارون‌پذیر است. وارون آن به‌صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نمایش داده می‌شود و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامند؛ به‌طوری که $a \ne 1$ و $a > 0$ است.

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

می‌دانیم بُرد تابع نمایی به‌صورت $(0, +\infty)$ است؛ پس دامنهٔ وارون آن، یعنی دامنهٔ تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ برابر $(0, +\infty)$ خواهد بود؛ بنابراین لگاریتم، فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود.

دامنهٔ توابع لگاریتمی

برای به‌دست آوردن دامنهٔ توابع لگاریتمی باید سه شرط زیر را بررسی کنیم و سپس از جواب‌ها اشتراک بگیریم:

- عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشد.
- مبنای لگاریتم مثبت باشد.
- مبنای لگاریتم یک نباشد.

$$\log_{\bigcirc} \square \Rightarrow \begin{cases} \square > 0 \\ \bigcirc > 0 \\ \bigcirc \ne 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه به‌دست می‌آید.}$$

مثال دامنهٔ $f(x) = \log_{(x-3)}(6-x)$ را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} 6-x > 0 \Rightarrow x < 6 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x-3 \ne 1 \Rightarrow x \ne 4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f = (3,6) - \{4\} = (3,4) \cup (4,6)$$

تست دامنهٔ تابع $f(x) = \log_{(2-x)}(2x^2-5x+3)$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 2)$ ۲) $(-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, 2)$

۳) $\mathbb{R} - [1, \frac{3}{2}]$ ۴) $\varnothing$

۲ دامنهٔ تابع $f(x) = \log_{(2-x)}(2x^2-5x+3)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$2x^2-5x+3 > 0 \Rightarrow (x-1)(2x-3) > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > \frac{3}{2}$$

$$2-x > 0 \Rightarrow 2 > x \quad \text{و} \quad 2-x \ne 1 \Rightarrow x \ne 1$$

بنابراین دامنهٔ تابع به صورت $D_f = (-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, 2)$ است.

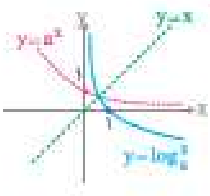
نکته در هنگام تعیین دامنه، نباید تابع را ساده کنیم.

مثلاً، دامنهٔ تابع $y = \log x^2$ به صورت $\mathbb{R} - \{0\}$ است، در حالی که دامنهٔ تابع $g(x) = 2\log x$ به صورت $(0, +\infty)$ است.

نمودار توابع لگاریتمی

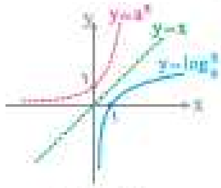
با توجه به این‌که تابع لگاریتمی، وارون تابع نمایی است، پس نمودار تابع $y = \log_a x$ با توجه به مقدار a به یکی از صورت‌های زیر است:

۱ $0 < a < 1$



اکیداً نزولی

۲ $a > 1$



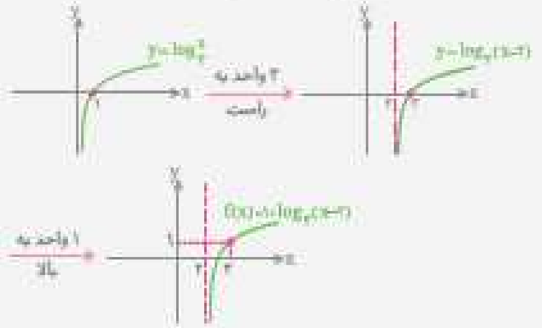
اکیداً صعودی

- دامنهٔ این توابع برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن‌ها برابر $\mathbb{R}$ است.
- این توابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر هستند.
- محور xها را در نقطه‌ای با طول ۱ قطع می‌کنند.
- با محور yها برخوردی ندارند.

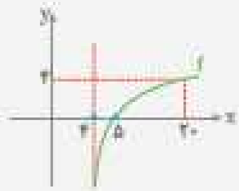
تذکر اگر در نمودارهای لگاریتم، انتقال افقی داشته باشیم، یک خط‌چین به موازات محور yها رسم می‌کنیم تا مرز دامنه مشخص باشد. (به این خط‌چین افقی، مجانب قائم تابع می‌گویند.)

مثال **نمودار تابع $f(x)=1+\log_2(x-2)$ را رسم کنید.**

چون مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ است، پس نمودار اکیداً صعودی است. حال با کمک قوانین انتقال داریم:



تست **نمودار تابع $f(x)=\log_c(ax-b)$ به‌صورت مقابل است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟**



۱) ۲

۲) ۷

۳) ۴

۴) ۵

۲ نمودار از نقطهٔ $(5,0)$ می‌گذرد، پس:

$f(5)=0 \Rightarrow \log_c(5a-b)=0 \Rightarrow 5a-b=1 \quad (1)$

از طرفی دامنهٔ تابع برابر $x>4$ است، پس $x=4$ ریشهٔ عبارت جلوی لگاریتم است:

$4a-b=0 \Rightarrow b=4a \quad (2)$

از (۱) و (۲) مقادیر $a=1$ و $b=4$ به‌دست می‌آیند. حال با توجه به این‌که نمودار از نقطهٔ $(20,4)$ می‌گذرد، داریم:

$f(20)=4 \Rightarrow \log_c(20-4)=4 \Rightarrow \log_c 16=4$

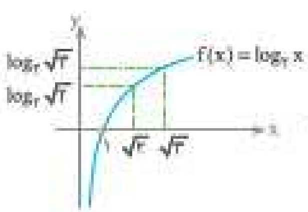
$\Rightarrow c^4=16 \xrightarrow{c>0} c=2$

پس $a+b+c=7$ است.

مقایسهٔ لگاریتم‌ها

با کمک نمودار تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ می‌توانیم دو عدد $\log_a x_1$ و $\log_a x_2$ را مقایسه کنیم.

مثلاً، برای مقایسهٔ دو عدد $\log_2\sqrt{2}$ و $\log_2\sqrt{3}$ می‌توانیم نمودار تابع $f(x)=\log_2 x$ را رسم کنیم و عرض دو نقطه با طول‌های $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ را تعیین کنیم. بنابراین با توجه به نمودار زیر نتیجه می‌گیریم:

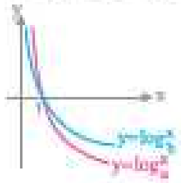


$\Rightarrow \log_2\sqrt{3} > \log_2\sqrt{2}$

مقایسهٔ نمودارهای $y=\log_a x$ و $y=\log_b x$

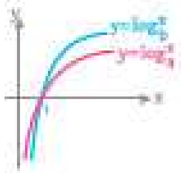
وضعیت نمودار دو تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ و $y=\log_b x$، با توجه به مقادیر a و b به‌صورت مقابل است:

۱ $0<b<a<1$

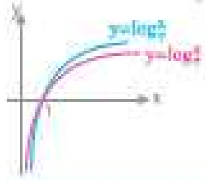


مثلاً نمودار توابع $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ و $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ به صورت زیر است:

۲ $a>b>1$



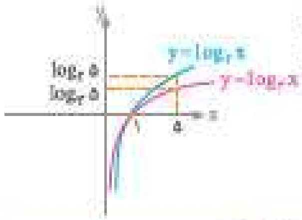
مثلاً نمودار توابع $\log_2 x$ و $\log_3 x$ به صورت زیر است:



تذکر با توجه به نمودارهای فوق، اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند، به‌طوری که $a>b$، در این صورت به‌ازای $x>1$ رابطهٔ $\log_a x < \log_b x$ و به‌ازای $0<x<1$ رابطهٔ $\log_a x > \log_b x$ برقرار است. (به عبارت دیگر به ازای $x>1$ هر چه مبنا بزرگ‌تر باشد، نمودارش پایین‌تر و به ازای $0<x<1$ نمودارش بالاتر قرار می‌گیرد.

نکته با کمک نمودار دو تابع نمایی $y=\log_a x$ و $y=\log_b x$ می‌توانیم دو عدد $\log_a x$ و $\log_b x$ را مقایسه کنیم.

مثلاً با توجه به نمودار تابع‌های $y=\log_2 x$ و $y=\log_3 x$ می‌توان نتیجه گرفت:



$\Rightarrow \log_2 5 > \log_3 5$

محاسبهٔ لگاریتم

در سؤالاتی که می‌خواهیم مقدار $\log_b a$ را به‌دست آوریم، یکی از راه‌ها این است که به سؤال [b به چه توانی برسد تا حاصل برابر a شود؟] پاسخ دهیم. مثلاً، اگر ۲ به توان عدد ۴ برسد، حاصل برابر ۱۶ می‌شود، پس:

$\log_2 16=4 \Leftrightarrow 2^4=16$

تست در کدام گزینه a بزرگتر است؟

۱) $\log_a \frac{1}{3} = -1$ ۲) $\log_{-2} a = 4$ ۳) $\log_a 2 = \frac{1}{3}$ ۴) $\log_{25} a = -\frac{1}{2}$

۳ همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ \log_a \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3$$

توجه کنید در گزینهٔ ۲ چون مبنا برابر ۲- و منفی است، پس $\log_{-2} a$ تعریف نشده است.

$$3)\ \log_a 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 3} a = 2^3 = 8$$

$$4)\ \log_{25} a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = (25)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

قوانین محاسبهٔ لگاریتم

برای محاسبه لگاریتم‌ها، قانون‌های مختلفی داریم که در ادامه آن‌ها را با جزئیات بررسی می‌کنیم.

قاعدهٔ انتقال توان

اگر عبارت جلوی لگاریتم و مبنای لگاریتم عبارت‌هایی توان‌دار باشند، با کمک قاعدهٔ انتقال توان می‌توانیم توان آن‌ها را به پشت لگاریتم منتقل کنیم:

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n}\log_b a$$

۱ اگر عبارت جلوی لگاریتم [یا مبنای لگاریتم] از ضرب دو یا چند عدد تشکیل شده باشد به‌طوری که فقط بعضی از آن‌ها توان‌دار باشند، نمی‌توانیم توان را به پشت لگاریتم منتقل کنیم.

$\log(3\times 5)^2 = 2\log(3\times 5)$ $\log(3\times 5^2) \neq 2\log(3\times 5)$

۲ توان عبارت جلوی لگاریتم را نمی‌توان به عنوان توان برای خود لگاریتم در نظر گرفت.

$(\log 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\log 3}$ $\frac{1}{2}\log 3 = \log 3^{\frac{1}{2}} = \log\sqrt{3}$

$(\log 3)^2 \neq \log 3^2$

تذکر ۱ با توجه به تعریف لگاریتم، می‌توانیم دو قانون زیر را نتیجه بگیریم:

۱ لگاریتم عدد یک در هر مبنایی برابر با صفر است.

$\log_a 1 = 0$

۲ لگاریتم هر عددی در پایهٔ خودش برابر با یک است.

$\log_a a = 1$

تذکر ۲ لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامند و معمولاً در این حالت مبنای لگاریتم نوشته نمی‌شود. یعنی:

$\log_{10} a = \log a$

$\log 1000 = \log_{10} 1000 = 3$ $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

تست حاصل $\log_3 9\sqrt{27}$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۴ عبارت جلوی لگاریتم را به‌صورت توان‌دار می‌نویسیم و از قاعدهٔ انتقال توان استفاده می‌کنیم:

$$\log_3 9\sqrt{27} = \log_3 3^2\times\sqrt{3^3} = \log_3 3^2\times 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 3^{\frac{7}{2}}$$
$$= \frac{7}{2}\log_3 3 = \frac{7}{2}\times 1 = \frac{7}{2}$$

تست اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[4]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A}-1)$ در مبنای ۴ کدام است؟

۱) ۳- ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴ ابتدا A را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \log_8 2\sqrt[4]{0/25} = \log_8 2\times(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} = \log_8 2\times(2^{-2})^{\frac{1}{4}}$$
$$= \log_{2^3} 2\times 2^{-\frac{1}{2}} = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{3}\log_2 2 = \frac{1}{9}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\log_4(\frac{1}{A}-1) = \log_4(9-1) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

تست تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x\in(-\frac{1}{2}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آنگاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟ (داخل - ۹۴)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۰/۵ ۴) ۱

۱ چون دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ است، پس $-\frac{1}{2}$ ریشهٔ عبارت جلوی لگاریتم است:

$$a(-\frac{1}{2}) + b = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (1)$$

از طرفی $f(4) = 2$ است، پس:

$$f(4) = \log_3(4a+b) = 2 \Rightarrow 4a+b = 3^2 = 9 \xrightarrow{(1)} 9b = 9$$
$$\Rightarrow b = 1, a = 2$$

بنابراین $f(x) = \log_3(2x+1)$ است و $f(-\frac{4}{9})$ برابر است با:

$$f(-\frac{4}{9}) = \log_3(2\times -\frac{4}{9}+1) = \log_3\frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$$

جمع و تفریق لگاریتم‌ها

برای به دست آوردن مجموع یا تفاضل دو لگاریتم (یا چند لگاریتم) با مبنای یکسان، از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$

$$\log_b a + \log_b c = \log_b ac$$

مثلاً، برای ساده کردن لگاریتم‌های زیر داریم:

$$2\log_6 3+\log_6 4=\log_6 3^2+\log_6 4=\log_6 9+\log_6 4=\log_6 36=2$$

$$\log_{25}3600-\log_5 12=\log_{5^2}60^2-\log_5 12=\frac{2}{2}\log_5 60-\log_5 12$$

$$=\log_5\frac{60}{12}=\log_5 5=1$$

تذکر ۱ از آن‌جایی که $\log 5+\log 2=\log 10=1$ است، می‌توانیم $\log 2$ و $\log 5$ را به صورت زیر به یکدیگر تبدیل کنیم:

$$\log 5=1-\log 2 \qquad \log 2=1-\log 5$$

تذکر ۲ اگر بخواهیم مجموع یا تفاضل یک عدد و یک عبارت لگاریتمی را پیدا کنیم، می‌توانیم عدد را به شکل لگاریتمی با مبنای لگاریتم داده شده بنویسیم و سپس از قانون جمع و تفریق دو لگاریتم استفاده کنیم.

$$\frac{1}{2}+\log_5 3=\log_5\sqrt{5}+\log_5 3=\log_5 3\sqrt{5}$$

تست اگر $\log 2=a$ و $\log 3=b$ باشد، آنگاه $\log\sqrt{12}$ کدام است؟

۱) $a+2b$ ۲) $a+\frac{b}{2}$ ۳) $2a+b$ ۴) $\frac{a}{2}+b$

۲

$$\log\sqrt{12}=\log 12^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 12=\frac{1}{2}(\log 4+\log 3)$$

$$=\frac{1}{2}(2\log 2+\log 3)=\frac{1}{2}(2a+b)=a+\frac{b}{2}$$

تست حاصل $\log\frac{3}{4}+\log\frac{4}{5}+\log\frac{5}{6}+\dots+\log\frac{29}{30}$ کدام است؟

۱) 3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) 1 ۴) -1

۴

$$\log\frac{3}{4}+\log\frac{4}{5}+\log\frac{5}{6}+\dots+\log\frac{29}{30}$$

$$=\log\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\dots\times\frac{29}{30}\right)$$

$$=\log\frac{3}{30}=\log\frac{1}{10}=-1$$

تذکر اگر مجموع یا تفاضل دو لگاریتم خواسته شود به‌طوری که عبارت جلوی لگاریتم‌ها از مجموع (یا تفاضل) دو رادیکال یا یک عدد و یک رادیکال تشکیل شده باشد، از دو اتحاد مربع دوجمله‌ای و مزدوج استفاده می‌کنیم.

تست اگر $\log 3=k$ باشد، حاصل $2\log(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\log(7+2\sqrt{10})$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $3k$ ۳) $1+k$ ۴) $2+2k$

۱ با کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای $(7+2\sqrt{10})$ را به صورت $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ می‌نویسیم. سپس با استفاده از قوانین لگاریتم و اتحاد مزدوج داریم:

$$2\log(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\log(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2=$$

$$2\log(\sqrt{5}-\sqrt{2})+2\log(\sqrt{5}+\sqrt{2})$$

$$=2\log(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=2\log(5-2)=2\log 3=2k$$

قاعدهٔ تغییر مبنا

هر لگاریتم را می‌توان با کمک قانون تغییر مبنا به‌صورت تقسیم دو لگاریتم نوشت؛ به عبارتی اگر c یک عدد حقیقی دلخواه ($c>0,\ c\neq 1$) باشد، آنگاه می‌توان از c به عنوان پایهٔ لگاریتم استفاده کرد، بنابراین:

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_3 2=\frac{\log 2}{\log 3} \qquad \frac{\log_2 9}{\log_2 6}=\log_6 9$$

مثال اگر $\log_3 2=a$ باشد، مقدار $\log_6 2$ را برحسب a به دست آورید.

$$\log_6 2=\frac{\log_3 2}{\log_3 6}=\frac{\log_3 2}{\log_3(3\times 2)}=\frac{\log_3 2}{\log_3 3+\log_3 2}$$

$$=\frac{\log_3 2}{1+\log_3 2}=\frac{a}{1+a}$$

نتایج و کاربردهای قانون تغییر مبنا

۱ به‌طور کلی می‌توان گفت $\log_b a$ و $\log_a b$ معکوس یکدیگر هستند:

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

تست حاصل $\frac{1}{\log_{54}3}-\frac{1}{\log_6 3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ با توجه به رابطهٔ $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$ داریم:

$$\frac{1}{\log_{54}3}-\frac{1}{\log_6 3}=\log_3 54-\log_3 6=\log_3\frac{54}{6}=\log_3 9=2$$

۲ اگر دو (یا چند) لگاریتم در یکدیگر ضرب شوند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\log_b a\times\log_c b=\log_c a$$

مثال حاصل $\log_7 4\times\log_{16}7$ را به دست آورید.

$$\log_7 4\times\log_{16}7=\log_{16}4=\log_{2^4}2^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

۳ اگر مقدار یک لگاریتم داده شود و از ما حاصل یک لگاریتم دیگر با مبنای متفاوت را بخواهند (در صورتی که مبناها را نتوان به هم تبدیل کرد) بهترین راهکار این است که لگاریتم خواسته‌شده را با کمک قاعدهٔ تغییر مبنا به مبنای لگاریتم داده شده ببریم.

تست اگر $\log_3 2=\frac{5}{8}$ باشد، آنگاه $\log_{18}8$ کدام است؟ (خارج - ۹۹)

۱) $\frac{15}{22}$ ۲) $\frac{5}{7}$ ۳) $\frac{8}{11}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲ از قاعدهٔ تغییر مبنا استفاده می‌کنیم:

$$\log_{18}8=\frac{\log_3 8}{\log_3 18}=\frac{\log_3 2^3}{\log_3(3^2\times 2)}=\frac{3\log_3 2}{2\log_3 3+\log_3 2}$$

$$=\frac{3\times\frac{5}{8}}{2+\frac{5}{8}}=\frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}}=\frac{5}{7}$$

قاعدهٔ اعداد با توان لگاریتمی

اگر یک عبارت لگاریتمی به عنوان توان یک عدد قرار بگیرد، می‌توانیم جای عدد و عبارت جلوی لگاریتم را با یکدیگر عوض کنیم:

$$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$$

تذکر در حالت خاص، داریم:

$$a^{\log_a b}=b$$

$$12^{\log_3 6}=6^{\log_3 12} \qquad 2^{\log_5 3}=3^{\log_5 2}$$

$$3^{\log_3 5}=5$$

تست حاصل عبارت $3^{\frac{1}{\log_5 3}}+11^{\frac{1}{\log_5 11}}$ کدام است؟

۱) ۷   ۲) ۱۰   ۳) ۱۴   ۴) ۲۵

۲ می‌دانیم $\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$ است، پس:

$$3^{\frac{1}{\log_5 3}}+11^{\frac{1}{\log_5 11}}=3^{\log_3 5}+11^{\log_{11} 5}=5^{\log_3 3}+5^{\log_{11} 11}=5+5=10$$

یافتن حدود لگاریتم

اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\log_b a$ را محاسبه کنیم، یعنی بررسی کنیم که $\log_b a$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد، باید مشخص کنیم عدد a بین کدام دو توان متوالی از b قرار دارد.

مثلاً برای این‌که ببینیم $\log_2 10$، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد و به کدام‌یک نزدیک‌تر است، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2^3<10<2^4 \xrightarrow{\text{log در مبنای ۲}} \log_2 2^3<\log_2 10<\log_2 2^4 \Rightarrow 3<\log_2 10<4$$

چون ۱۰ به $8=2^3$ نزدیک‌تر است تا به $16=2^4$، پس $\log_2 10$ هم به ۳ نزدیک‌تر است تا به ۴.

تست حاصل عبارت $[\log_{0.5} 3.5]$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۱-   ۴) ۲-

۴ می‌دانیم: $\log_{0.5} 3.5=\log_{\frac{1}{2}} 3.5=-\log_2 3.5$

از آنجایی که $2^1<3.5<2^2$، داریم:

$$\log_2 2^1<\log_2 3.5<\log_2 2^2 \Rightarrow 1<\log_2 3.5<2$$

پس $-\log_2 3.5$ بین دو عدد ۲- و ۱- قرار گرفته است. بنابراین:

$$[\log_{0.5} 3.5]=[-\log_2 3.5]=-2$$

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا به کمک قوانین لگاریتم، معادله را در صورت امکان ساده کرده و سپس پارامتر خواسته شده را به‌دست می‌آوریم. در این سؤالات با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ اگر پس از ساده‌کردن لگاریتم، معادله به‌صورت $\log_b \square=c$ دربیاید، برای حل معادله از تعریف لگاریتم استفاده می‌کنیم؛ یعنی می‌نویسیم $\square=b^c$ و ...

مثال معادلهٔ $\log_2(x+1)=3$ را حل کنید.

$$\log_2(x+1)=3 \Rightarrow x+1=2^3 \Rightarrow x=7$$

چون $x=7$ عبارت جلوی لگاریتم را منفی یا صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

۲ در بعضی از معادلات، می‌توانیم در دو طرف تساوی، دو لگاریتم با مبنای مساوی ایجاد کنیم و معادله را به شکل $\log_b \bigcirc=\log_b \square$ بنویسیم. در این معادلات، با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتم، می‌توانیم نتیجه بگیریم: $\bigcirc=\square$.

مثال معادلهٔ $2\log_4 x-\log_2(2x-1)=0$ را حل کنید.

$$2\log_4 x-\log_2(2x-1)=0 \Rightarrow 2\times\frac{1}{2}\log_2 x-\log_2(2x-1)=0$$

$$\Rightarrow \log_2 x=\log_2(2x-1) \Rightarrow x=2x-1 \Rightarrow x=1$$

از آنجایی که $x=1$ هیچ‌یک از دو عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی یا صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

تذکر پس از حل معادلهٔ لگاریتمی، جواب‌های به دست آمده را در معادله قرار می‌دهیم تا مشخص شود که در دامنهٔ لگاریتم هستند یا نه.

برای حل بعضی از معادلات لگاریتمی باید از تغییر متغیر استفاده کنیم.

$$(\log_2 x)^2-8\log_{16} x+1=0 \Rightarrow (\log_2 x)^2-8\log_{2^4} x+1=0$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)^2-\frac{8}{4}\log_2 x+1=0 \xrightarrow{\log_2 x=t} t^2-2t+1=0$$

$$\Rightarrow (t-1)^2=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \log_2 x=1 \Rightarrow x=2$$

تذکر برای حل بعضی از معادلات نمایی که در هر دو طرف تساوی یک عبارت نمایی وجود دارد، در صورتی که پایه‌های آن‌ها برابر نباشد و نتوان پایه‌های طرفین را یکسان کرد، می‌توانیم عبارت‌های شامل x را با کمک قوانین اعداد توان‌دار، تنها کنیم و سپس با استفاده از تعریف لگاریتم مقدار x را پیدا کنیم.

مثال معادلهٔ $3^x=2^{1-x}$ را حل کنید.

$$2^{1-x}=3^x \Rightarrow 2^1\times 2^{-x}=3^x \Rightarrow 2\times\frac{1}{2^x}=3^x \Rightarrow 6^x=2 \Rightarrow x=\log_6 2$$

تست از تساوی $\log(2x-1)+\frac{1}{2}\log x^2=\log 3$ مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log(2x-1)+\frac{1}{2}\log x^2=\log 3 \Rightarrow \log(2x-1)+\log\sqrt{x^2}=\log 3$$

$$\Rightarrow \log(2x-1)+\log|x|=\log 3$$

حال چون دامنهٔ معادله $x>\frac{1}{2}$ است، پس $|x|=x$ و داریم:

$$\log(2x-1)+\log x=\log 3 \Rightarrow \log(2x-1)x=\log 3$$

$$\Rightarrow 2x^2-x=3 \Rightarrow 2x^2-x-3=0 \xrightarrow{b=a+c} x=\frac{3}{2}\ ✓,\ x=-1\ ✗$$

$$\Rightarrow \log_4\frac{x}{3}=\log_4\frac{\frac{3}{2}}{3}=\log_4\frac{1}{2}=\log_{2^2}2^{-1}=-\frac{1}{2}$$

نامعادلات لگاریتمی

برای حل نامعادله‌های لگاریتمی، ابتدا دامنهٔ هر یک از لگاریتم‌ها را به‌دست می‌آوریم و نامعادله را به یکی از صورت‌های زیر حل می‌کنیم. سپس اشتراک مقادیر به‌دست آمده از دامنه و نامعادله را به عنوان جواب درنظر می‌گیریم.

حل نامعادلهٔ $\log_a x \ge \log_a y$

۱ اگر مبنا عددی بین ۰ و ۱ باشد، عبارت‌های جلوی لگاریتم را نگه داشته و جهت نامساوی را عوض می‌کنیم.

$$\log_a x \ge \log_a y \xleftrightarrow{0<a<1} x \le y$$

مثال نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 3$ را حل کنید.

دامنهٔ $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ برابر $(1,+\infty)$ است. حال داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow x-1 > 3 \Rightarrow x > 4$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برابر $(4,+\infty)$ است.

۲ اگر مبنا عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، عبارت‌های جلوی لگاریتم را نگه داشته و جهت نامساوی را عوض نمی‌کنیم.

$$\log_a x \ge \log_a y \xleftrightarrow{a>1} x \ge y$$

مثال نامعادلهٔ $\log_4(x-1) < \log_4 3$ را حل کنید.

دامنهٔ $\log_4(x-1)$ برابر $(1,+\infty)$ است. حال داریم:

$$\log_4(x-1) < \log_4 3 \Rightarrow x-1 < 3 \Rightarrow x < 4$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر $(1,4)$ است.

تذکر برای حل نامعادلات لگاریتمی، باید مبنای لگاریتم‌ها یکسان باشد.

مثال مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_4(x^2-1) < \log_4 8$، شامل چند عدد صحیح است؟

$$\log_4(x^2-1) < \log_4 8 \Rightarrow x^2-1<8 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow |x|<3$$
$$\Rightarrow -3<x<3 \quad (1)$$

تعیین دامنهٔ $\log_4(x^2-1)$: $x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow |x|>1$

$$\Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>1 \quad (2)$$

اشتراک جواب به دست آمده از (۱) و (۲) به‌صورت بازهٔ $(-3,-1)\cup(1,3)$ است که شامل ۲ عدد صحیح $x=2$ و $x=-2$ است.

کاربرد توابع نمایی و لگاریتم

رشد و زوال

در بعضی از سؤالات مقدار اولیهٔ چیزهایی مثل میزان جمعیت، باکتری، سپردهٔ یک فرد در بانک و... را می‌دهند. سپس از ما می‌خواهند طبق رابطه‌ای که در آن جمعیت زیاد می‌شود (رشد) یا کاهش می‌یابد (زوال) یا طبق فرمولی که بانک به سپرده سود می‌دهد، میزان نهایی جمعیت یا پول را به دست آوریم. در این مسائل معمولاً یک تابع نمایی داریم و برای به دست آوردن خواستهٔ مسئله باید یک معادلهٔ نمایی حل کنیم.

مثال نوعی بیماری با ۵۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم‌ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازهٔ هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ $p(t)=50\times 2^{2t}$ به‌دست می‌آید. با فرض این‌که هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده پس از ۴ ساعت را به‌دست آورید.

$$p(4)=50\times 2^{2\times 4}=50\times 2^8=50\times 256=12800$$

تذکر اگر مقدار اولیه مشخص نبود، می‌توانیم با قرار دادن $t=0$ در رابطهٔ داده شده، مقدار اولیه را به‌دست آوریم.

شدت زلزله

اگر قدرت زلزله‌ای برحسب ریشتر برابر M باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله، برابر E، برحسب ارگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5M \Rightarrow E = 10^{11/8+1/5M}$$

مثال انرژی آزادشده‌ای که در زلزله‌ای به قدرت ۲/۸ ریشتر گزارش شده، برحسب ارگ چقدر است؟

$$\log E = 11/8 + 1/5M \xrightarrow{M=2/8} \log E = 11/8 + 1/5(2/8)$$
$$\Rightarrow \log E = 16 \Rightarrow E = 10^{16}$$

تذکر هر ارگ معادل 10^{-7} ژول است؛ پس برای تبدیل ارگ به ژول، باید انرژی آزاد شده برحسب ارگ را در 10^{-7} ضرب کنیم.

در مثال قبل انرژی آزاد شده برحسب ژول برابر است با:

$$E = 10^{16}\times 10^{-7} = 10^{9} \text{ (ژول)}$$

نکته اگر میزان انرژی آزاد شده در زلزله‌ای با قدرت M_1 ریشتر برابر E_1 و میزان انرژی آزادشده در زلزله‌ای با قدرت M_2 ریشتر برابر E_2 باشد، رابطهٔ زیر برای نسبت انرژی‌های آزادشده در دو زلزله برقرار است:

$$\log\frac{E_1}{E_2} = 1/5(M_1-M_2)$$

مثال میزان انرژی آزادشده در یک زلزلهٔ ۵/۶ ریشتری چند برابر یک زلزلهٔ ۳/۶ ریشتری است؟

$$\log\frac{E_1}{E_2} = 1/5\underbrace{(5/6-3/6)}_{2} = 3 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^3 = 1000$$

فصل ۶

مثلثات

ارتباط با فصل‌های دیگه: پیش‌نیازهای این فصل معادله و نامعادله، توان و عبارت جبری و تابع است. مباحث مربوط به مثلثات، پیش‌نیاز فصل‌های حد، مشتق و کاربرد مشتق است.

توصیه: سعی کنید با تمرین و تکرار روی روابط اولیهٔ مثلثات و دایرهٔ مثلثاتی مسلط شوید. یادگیری موضوع‌های زیادی از مثلثات، نیاز به شناخت دایرهٔ مثلثاتی دارد. اگر می‌خواهید نتیجهٔ خوبی در مثلثات بگیرید فقط روی فرمول‌های اصلی یعنی روابط اولیه، روابط دو آلفا و رابطهٔ طلایی تمرکز کنید و به جای استفاده از فرمول‌های میانبر، کاربرد و نحوهٔ استفاده از فرمول‌های اصلی را یاد بگیرید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۴	۴	۳	۴	۴	۵	۴	۴

درس ۱ مقدمات و مفاهیم اولیهٔ مثلثات

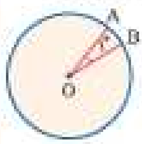
درجه و رادیان

در صفحهٔ مختصات، زاویه به وسیلهٔ دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند ایجاد می‌شود. یک نیم‌خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع دوران حول رأس مشترک است در نظر می‌گیرند و نیم‌خط دیگر را به‌عنوان ضلع انتهایی که مکان انتهای دوران است در نظر می‌گیرند.

مفهوم درجه و رادیان

برای اندازه‌گیری زاویه، از واحدهای درجه و رادیان استفاده می‌شود:

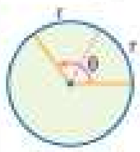
۱ اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به هر قسمت را یک درجه می‌نامند.



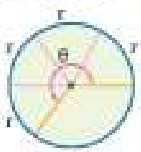
۲ اگر در هر دایرهٔ دلخواه، کمانی به اندازهٔ شعاع دایره در نظر بگیریم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن کمان را یک رادیان می‌نامند.

$\theta = 1\text{rad}$

مثلاً در دایره‌های زیر زاویه‌های ۲ رادیان و ۴ رادیان مشخص شده است:



$\theta = 2\text{rad}$



$\theta = 4\text{rad}$

زاویهٔ مرکزی برحسب طول کمان و شعاع

در هر دایره به شعاع r، اگر l طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی θ باشد اندازهٔ زاویهٔ مرکزی θ برحسب رادیان برابر است با:

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{l}{r}$$

مثال محیط دایرهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$\Rightarrow \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow 2 = \frac{4}{r} \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = 2\pi r = 4\pi$$

تبدیل واحدهای زاویه به یکدیگر

اگر D اندازهٔ زاویه برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توان درجه و رادیان را به هم تبدیل کرد: $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

تذکر با توجه به رابطهٔ $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ نتیجه می‌شود هر رادیان تقریباً 57° است؛ زیرا: $\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{3/14} \approx 57^\circ$

تست اگر مجموع دو زاویه برابر $\frac{5\pi}{12}$ رادیان و تفاضل آن‌ها ۵ درجه باشد، زاویهٔ بزرگ‌تر چند درجه است؟

۱) 40° ۲) 30° ۳) 35° ۴) 45°

۱ زاویهٔ بزرگ‌تر را x و زاویهٔ کوچک‌تر را y در نظر می‌گیریم. از آن جایی که $\frac{5\pi}{12}$ رادیان معادل $75^\circ = \frac{5 \times 180^\circ}{12}$ است، پس:

$$\begin{cases} x + y = 75^\circ \\ x - y = 5^\circ \end{cases} \Rightarrow 2x = 80^\circ \Rightarrow x = 40^\circ,\ y = 35^\circ$$

تست در دایره‌ای به قطر ۸ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویهٔ 135° کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

۳ ابتدا زاویهٔ 135° را به صورت رادیان می‌نویسیم:

$$\frac{\theta}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{135^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{3\pi}{4}$$

حال با توجه به رابطهٔ طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی θ داریم:

$$l=r\theta\Rightarrow l=\left(\frac{8}{2}\right)\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4\times\frac{3\pi}{4}=3\pi$$

زاویهٔ طی‌شده توسط عقربه‌های ساعت

اگر نوک عقربهٔ ساعت‌شمار یک دور کامل بچرخد، 2π رادیان معادل 360° دوران می‌کند؛ یعنی ۱۲ ساعت سپری شده است.

پس زاویه‌ای که در هر ساعت توسط عقربهٔ ساعت‌شمار طی می‌شود برابر 30° است؛ یعنی:

$$\Rightarrow\alpha=\frac{1}{12}\times360^\circ=30^\circ$$

اگر نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار یک دور کامل بچرخد، 2π رادیان معادل 360° دوران می‌کند؛ یعنی ۶۰ دقیقه سپری شده است. پس زاویه‌ای که در هر دقیقه توسط عقربهٔ دقیقه‌شمار طی می‌شود برابر 6° است؛ یعنی:

$$\Rightarrow\alpha=\frac{1}{60}\times360^\circ=6^\circ$$

تست پس از گذشت ۳ ساعت و ۴۰ دقیقه، نوک عقربهٔ ساعت شماری به طول ۳۶ چه مسافتی را پیموده است؟

۱) 22π ۲) 18π ۳) 26π ۴) 14π

۱ عقربهٔ ساعت شمار در ۱۲ ساعت، یعنی ۷۲۰ دقیقه، به اندازهٔ 2π دوران می‌کند، پس در ۳ ساعت و ۴۰ دقیقه، یعنی ۲۲۰ دقیقه، داریم:

$$\frac{720\ \text{دقیقه}}{220\ \text{دقیقه}}=\frac{2\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{11\pi}{18}$$

بنابراین مسافت پیموده شده توسط نوک عقربهٔ ساعت شمار برابر است با:

$$l=r\theta\Rightarrow l=36\times\frac{11\pi}{18}=22\pi$$

تست چرخی در ۵ دقیقه ۷۵۰ دور می‌چرخد. زاویهٔ چرخش این چرخ در مدت یک ثانیه چند رادیان است؟

۱) 3π ۲) 4π ۳) 5π ۴) 6π

۳ این چرخ در ۵ دقیقه یعنی $5\times60=300$ ثانیه، ۷۵۰ دور می‌چرخد. پس در هر ثانیه $\frac{750}{300}=2/5$ دور می‌چرخد. از آن‌جایی که هر دور معادل 2π رادیان است، پس $2/5\times2\pi=5\pi$.

معرفی نسبت‌های مثلثاتی

در هر مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ دلخواه α، چهار نسبت مثلثاتی مهم قابل تعریف است:

۱ $\sin\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{BC}$

۲ $\cos\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}$

۳ $\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{AB}{AC}$

۴ $\cot\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{AC}{AB}$

توجه $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ، $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

تست با توجه به مثلث مقابل، کدام نسبت مثلثاتی از بقیه کوچک‌تر است؟

۱) $\sin\hat{C}$
۲) $\tan\hat{A}$
۳) $\tan\hat{C}$
۴) $\sin\hat{A}$

۴ ابتدا به کمک رابطهٔ فیثاغورس طول ضلع AB را به دست می‌آوریم:

$$AC^2=BC^2+AB^2\Rightarrow10^2=6^2+AB^2\Rightarrow AB^2=64\Rightarrow AB=8$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{8}{6},\ \sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{6}{10}\\ \sin\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\frac{8}{10},\ \tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{6}{8}\end{cases}$$

پس $\sin\hat{A}$ از بقیهٔ نسبت‌ها کوچک‌تر است.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف مطابق جدول زیر است:

زاویهٔ α \ نسبت مثلثاتی	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	1	0	تعریف نشده
$30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ=\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ=\frac{\pi}{2}$	1	0	تعریف نشده	0
$180^\circ=\pi$	0	-1	0	تعریف نشده
$270^\circ=\frac{3\pi}{2}$	-1	0	تعریف نشده	0
$360^\circ=2\pi$	0	1	0	تعریف نشده

تست حاصل عبارت $\sin\frac{3\pi}{2}\times\cot^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\pi\times\tan\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۱

$$\sin\frac{3\pi}{2}\times\cot^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\pi\times\tan\frac{\pi}{4}$$
$$=(-1)\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(-1)^2\times 1=-1\times\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

زوایای متمم

دو زاویه را متمم می‌نامند هرگاه حاصل جمع آن‌ها، برابر با 90° باشد. ویژگی دو زاویهٔ متمم این است که سینوس یکی از آن‌ها با کسینوس دیگری برابر است و تانژانت یکی از آن‌ها با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس.

$$30^\circ+60^\circ=90^\circ\Rightarrow \sin 30^\circ=\cos 60^\circ\ ,\ \tan 30^\circ=\cot 60^\circ$$

زوایای مکمل

دو زاویه را مکمل می نامند هرگاه جمع آن‌ها، برابر با 180° باشد. اگر دو زاویه مکمل باشند، سینوس آن‌ها با هم برابر است، اما سایر نسبت‌های مثلثاتی قرینه‌اند.

$$30^\circ+150^\circ=180^\circ\Rightarrow\begin{cases}\sin 150^\circ=\sin 30^\circ\\ \cos 150^\circ=-\cos 30^\circ\\ \tan 150^\circ=-\tan 30^\circ\\ \cot 150^\circ=-\cot 30^\circ\end{cases}$$

تست حاصل $\frac{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 70^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 70^\circ+\sin 80^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱ زاویه‌های 20° و 70° و همچنین زاویه‌های 10° و 80° متمم‌اند.

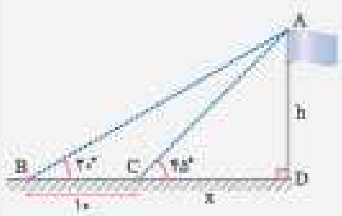
پس:

$$\frac{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 70^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 70^\circ+\sin 80^\circ}$$
$$=\frac{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\sin 20^\circ+\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\cos 20^\circ+\cos 10^\circ}=1$$

اضلاع مجهول در مثلث قائم الزاویه

در سؤالاتی که در یک مثلث قائم‌الزاویه طول یک ضلع به همراه اندازهٔ یک زاویه یا یک نسبت مثلثاتی از آن زاویه مشخص باشد، می‌توانیم به کمک تعریف نسبت‌های مثلثاتی طول بقیهٔ اضلاع مثلث را به‌دست آوریم.

مثال مطابق شکل یک فرد در نزدیکی پرچمی در نقطهٔ C قرار دارد و نوک پرچم را با زاویهٔ 45° مشاهده می‌کند. اگر ۱۰ متر به عقب برود، و در نقطهٔ B قرار گیرد نوک پرچم را با زاویهٔ 30° خواهد دید. ارتفاع پرچم را به‌دست آورید.



در مثلث‌های ABD و ACD داریم:

$$\begin{cases}\overset{\triangle}{ACD}:\tan 45^\circ=1\Rightarrow\frac{h}{x}=1\Rightarrow h=x\\ \overset{\triangle}{ABD}:\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{h}{10+x}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{h}{10+h}=\frac{\sqrt{3}}{3}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}h=\frac{10\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Rightarrow h=\frac{10}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{10(\sqrt{3}+1)}{2}=5(\sqrt{3}+1)$$

تست در مثلث قائم الزاویهٔ مقابل، اگر $\cos\hat{A}=0/8$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۶۰
۲) ۹۰
۳) ۱۲۰
۴) ۹۶

۴ چون کسینوس زاویهٔ A برابر $0/8$ است، پس:

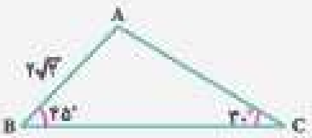
$$\cos\hat{A}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow 0/8=\frac{AC}{20}\Rightarrow AC=16$$

حال برای محاسبهٔ مساحت، ابتدا با‌استفاده از رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ ضلع BC را پیدا می‌کنیم:

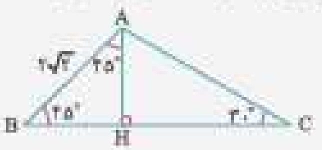
$$AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow 20^2=16^2+BC^2$$
$$\Rightarrow BC^2=20^2-16^2=400-256=144\Rightarrow BC=12$$
$$S=\frac{1}{2}AC\times BC=\frac{1}{2}\times16\times12=96$$

تذکر اگر مثلث داده‌شده قائم‌الزاویه نباشد، می‌توانیم با رسم ارتفاع، درون مثلث اولیه دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنیم. سپس به کمک تعریف نسبت‌های مثلثاتی طول اضلاع خواسته‌شده را به‌دست آوریم.

مثال در مثلث مقابل، $AB=2\sqrt{2},\hat{C}=30^\circ,\hat{B}=45^\circ$ است. طول ضلع BC را به‌دست آورید.



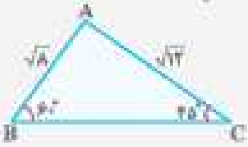
ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و در هر یک از مثلث‌های ABH و ACH داریم:



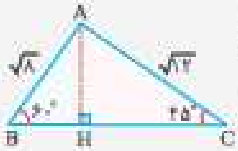
$$\begin{cases}\overset{\triangle}{ABH}:\cos\hat{B}=\cos 45^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{BH}{2\sqrt{2}}\\ \Rightarrow BH=2\Rightarrow AH=2\\ \overset{\triangle}{ACH}:\tan 30^\circ=\frac{AH}{CH}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{CH}\Rightarrow CH=2\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow BC=BH+CH=2+2\sqrt{3}$$

تست در مثلث مقابل طول ضلع BC کدام است؟



۱) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$
۲) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
۳) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
۴) $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$



۱ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و در مثلث‌های قائم الزاویهٔ AHB و AHC به ترتیب کسینوس زاویه‌های ۶۰° و ۴۵° را می‌نویسیم:

$$\cos 60^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{BH}{\sqrt{8}}\Rightarrow BH=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

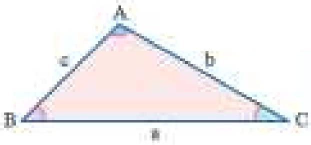
$$\cos 45^\circ=\frac{CH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{CH}{\sqrt{12}}\Rightarrow CH=\frac{\sqrt{24}}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$$

بنابراین طول ضلع BC برابر است با:

$$BC=BH+CH=\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

قضیهٔ سینوس‌ها

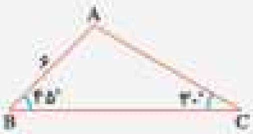
در هر مثلث رابطهٔ زیر بین اندازهٔ اضلاع و سینوس زاویه‌ها برقرار است:



$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$

به این قضیه، قضیهٔ سینوس‌ها می‌گویند.

مثال در شکل مقابل طول ضلع AC را به دست آورید.



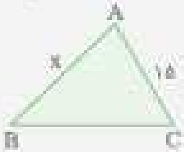
مطابق قضیهٔ سینوس‌ها:

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ}=\frac{6}{\sin 30^\circ}\Rightarrow AC=\frac{\sin 45^\circ\times 6}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times 6}{\frac{1}{2}}=6\sqrt{2}$$

تست در شکل مقابل، یک بالن توسط دو طناب به زمین بسته شده است. زاویهٔ بین طناب ۱۵ متری با زمین ۵۵° است. طول طناب دوم چقدر است؟ $(\sin 55^\circ \simeq 0/8)$

۱) $2\sqrt{2}$
۲) $4\sqrt{2}$
۳) $12\sqrt{2}$
۴) $16\sqrt{2}$

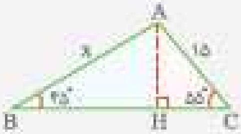
۳ روش اول: مسئله را از طریق قضیهٔ سینوس‌ها نیز حل کنیم:



$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{x}{0/8}=\frac{15}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow x=12\sqrt{2}$$

روش دوم: می‌توانستیم بدون استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها نیز این سؤال را حل کنیم.

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. سپس در مثلث AHC سینوس زاویهٔ C را می‌نویسیم:

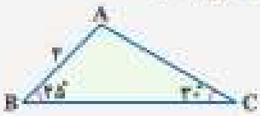


$$\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\sin 55^\circ=0/8=\frac{AH}{15}\Rightarrow AH=12$$

حال در مثلث AHB با کمک سینوس زاویهٔ B اندازهٔ ضلع AB را به دست می‌آوریم:

$$\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{12}{x}\Rightarrow x=\frac{24}{\sqrt{2}}=12\sqrt{2}$$

تست در مثلث زیر، طول ضلع BC کدام است؟



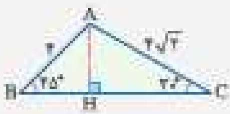
۱) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
۲) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
۳) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$
۴) $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

۴ ابتدا با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها اندازهٔ ضلع AC را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow\frac{4}{\sin 30^\circ}=\frac{AC}{\sin 45^\circ}\Rightarrow\frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow AC=4\sqrt{2}$$

حال ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم و اندازهٔ ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

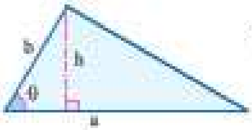


$$BC=BH+CH=4\cos 45^\circ+4\sqrt{2}\cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow BC=(4\times\frac{\sqrt{2}}{2})+(4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2})=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

مساحت مثلث

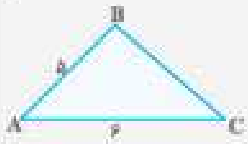
اگر در یک مثلث مطابق شکل اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها مشخص باشد، مساحت این مثلث به صورت زیر قابل محاسبه است:



$$S=\frac{1}{2}a\times h=\frac{1}{2}a\times b\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\theta}$$

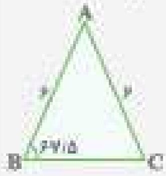
تست در شکل زیر $\sin\hat{A}=0/8$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۲ $S=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times 5\times 6\times 0/8=12$

تست مساحت مثلث متساوی‌الساقین مقابل کدام است؟



۱) $5\sqrt{2}$ ۲) $9\sqrt{2}$

۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۲ چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس: $\hat{B}=\hat{C}=67/5^\circ$

از طرفی می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی در هر مثلث برابر 180° است؛ پس:

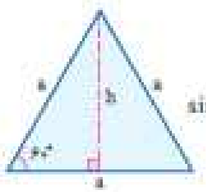
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+67/5^\circ+67/5^\circ=180^\circ$$

$$\hat{A}+135^\circ=180^\circ \Rightarrow \hat{A}=45^\circ$$

حال مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 45^\circ=18\times\frac{\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$$

در هر مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، ارتفاع مثلث به‌صورت زیر قابل محاسبه است:



$$\sin 60^\circ=\frac{h}{a}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{h}{a}\Rightarrow \boxed{h=\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

بنابراین مساحت مثلث به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a(\frac{\sqrt{3}}{2}a)\Rightarrow \boxed{S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$$

تست مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ارتفاع $6\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) $72\sqrt{3}$ ۲) $36\sqrt{3}$ ۳) $18\sqrt{3}$ ۴) $27\sqrt{3}$

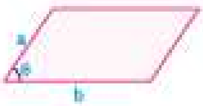
۲ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ است؛ پس:

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\Rightarrow a=12\Rightarrow S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{12^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$$

مساحت متوازی الاضلاع

در هر متوازی‌الاضلاع، با معلوم بودن دو ضلع یا دو قطر و زاویهٔ بین آن‌ها مساحت به روش‌های زیر قابل محاسبه است:

۱ اگر طول دو ضلع متوازی‌الاضلاع، a , b و زاویهٔ بین آن‌ها θ باشد، مساحت برابر است با:



$$\Rightarrow \boxed{S=ab\sin\theta}$$

تست اگر مساحت متوازی‌الاضلاع زیر برابر ۹ باشد، طول ضلع بزرگ آن کدام است؟

۱) $6\sqrt{3}$

۲) $3\sqrt{3}$

۳) $6\sqrt{2}$

۴) $3\sqrt{2}$

۴ $S=ab\sin\theta \xrightarrow{S=9\ ,\ \theta=135^\circ} 9=(3)(b)\sin 135$

$$\xrightarrow{\sin 135^\circ=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}} 9=(3)(b)(\frac{\sqrt{2}}{2})\Rightarrow b=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

۲ اگر طول دو قطر متوازی‌الاضلاع c , d و زاویهٔ بین آن‌ها α باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$\Rightarrow \boxed{S=\frac{1}{2}cd\sin\alpha}$$

تست در متوازی‌الاضلاعی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

(داخل - ۹۳)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۲ می‌دانیم اگر طول دو قطر متوازی‌الاضلاعی a و b و زاویهٔ بین آن‌ها θ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ به‌دست می‌آید؛ پس:

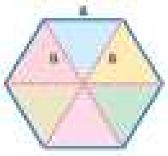
$$S=\frac{1}{2}\times 12\times 8\times\sin 135^\circ=48\sin(180^\circ-45^\circ)=48\sin 45^\circ$$

$$=48\times\frac{\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}$$

تذکر مربع، مستطیل و لوزی هم از این دو رابطه پیروی می‌کنند، چون نوعی متوازی‌الاضلاع هستند.

مساحت شش‌ضلعی منتظم

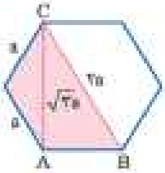
هر شش‌ضلعی منتظم مطابق شکل از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به‌هم چسبیده تشکیل شده است:



۱ مقدار مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، ۶ برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a است:

$$S_{\hexagon}=6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$$

۲ طول قطرهای بزرگ شش‌ضلعی منتظم (مثلاً BC)، و طول قطرهای کوچک (مثلاً AC) برابر است با:



$BC=2a$ $\qquad$ $AC=\sqrt{3}a$

مثال اگر کوچک‌ترین قطر یک شش ضلعی برابر $\frac{6}{\sqrt{12}}$ باشد، مساحت آن چند است؟

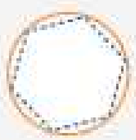
کوچکترین قطر $\sqrt{3}a$ است.

$$\sqrt{3}a=\frac{6}{\sqrt{12}}\Rightarrow a=\frac{6}{6}=1$$

مساحت یک شش ضلعی $6(\frac{\sqrt{3}}{4})a^2$ است که با توجه به اینکه $a=1$ است، داریم:

$$S=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

تست درون یک دایره به شعاع ۲، یک شش‌ضلعی منتظم محاط می‌کنیم. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $\pi-\sqrt{3}$ $\qquad$ ۲) $4\pi-4\sqrt{3}$

۳) $2\pi-\sqrt{3}$ $\qquad$ ۴) $4\pi-6\sqrt{3}$

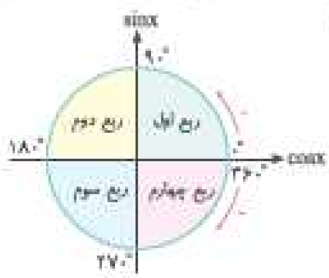
۴ شعاع دایره برابر طول ضلع شش‌ضلعی است، پس:

$$S=S_{\bigcirc}-S_{\hexagon}=\pi r^2-6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

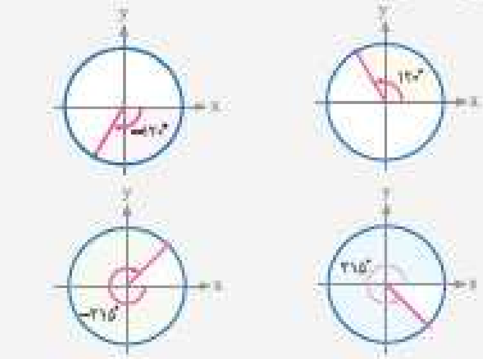
$$=\pi(2)^2-6\times\frac{(2)^2\sqrt{3}}{4}=4\pi-6\sqrt{3}$$

دایرهٔ مثلثاتی

دایره‌ای به شعاع واحد و به مرکز مبدأ مختصات را دایرهٔ مثلثاتی می‌گوییم. این دایره از چهار ربع مثلثاتی تشکیل شده که هر ربع آن معادل با °۹۰ است. جهت حرکت مثبت در این دایره در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.



مثال موقعیت زاویه‌های $315^\circ, -315^\circ, 120^\circ, -120^\circ$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید.



تست انتهای زاویه‌های ۲ و ۶ رادیان به ترتیب در کدام ربع دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند؟

۱) دوم – اول $\qquad$ ۲) سوم – دوم

۳) دوم – چهارم $\qquad$ ۴) سوم – اول

۳ می‌دانیم هر رادیان تقریباً معادل °۵۷ است، پس ۲ رادیان $2\times57^\circ=114^\circ$ و ۶ رادیان $6\times57^\circ=342^\circ$ است، یعنی انتهای زاویه‌های ۲ و ۶ رادیان به ترتیب در ربع دوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند.

تست نقطهٔ $A(0,1)$ را روی دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ در جهت مثبت مثلثاتی حرکت می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسد. سپس نقطهٔ $B(1,0)$ را نیز روی همین دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ $\frac{3\pi}{4}$ در خلاف جهت مثلثاتی حرکت می‌دهیم تا به نقطهٔ B' برسد. برای رسیدن از نقطهٔ A' به نقطهٔ B' باید روی دایرهٔ مثلثاتی چقدر حرکت کنیم؟

۱) $\frac{5\pi}{6}$ در خلاف جهت مثلثاتی $\qquad$ ۲) $\frac{5\pi}{6}$ در جهت مثبت مثلثاتی

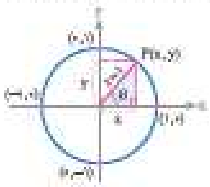
۳) $\frac{7\pi}{12}$ در خلاف جهت مثلثاتی $\qquad$ ۴) $\frac{7\pi}{12}$ در جهت مثبت مثلثاتی

۴ مطابق دایرهٔ مثلثاتی مقابل برای رسیدن از نقطهٔ A' به نقطهٔ B' باید به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$ در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کنیم.

ویژگی نقطه‌های روی دایرهٔ مثلثاتی

۱ با توجه به شکل زیر طول هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی، برابر $\cos\theta$ و عرض آن برابر $\sin\theta$ است: $P(\cos\theta, \sin\theta)$

۲ با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث رنگ شده برای هر نقطه $P(x,y)$ خواهیم داشت: $y^2+x^2=1\Leftrightarrow\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$



تست در دایرهٔ مثلثاتی مقابل اگر $\tan\theta = -۲$ باشد، مختصات نقطهٔ P کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۵}}{۵}, \frac{۲\sqrt{۵}}{۵})$
۲) $(-\frac{\sqrt{۵}}{۵}, \frac{۲\sqrt{۵}}{۵})$
۳) $(-\frac{\sqrt{۵}}{۵}, -\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})$
۴) $(\frac{\sqrt{۵}}{۵}, -\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})$

۲ نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی است و اگر مختصات نقطهٔ P به‌صورت (x, y) باشد، داریم:

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \xrightarrow{\tan\theta=-۲} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-۲ \Rightarrow \sin\theta=-۲\cos\theta \Rightarrow y=-۲x$$

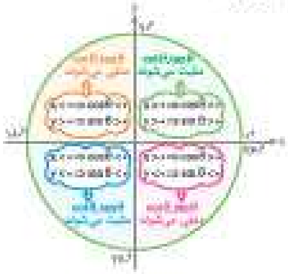
$$\Rightarrow x^۲+(-۲x)^۲=۱ \Rightarrow x^۲+۴x^۲=۱ \Rightarrow ۵x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

چون نقطهٔ P در ربع دوم مثلثاتی است، پس x منفی بوده و داریم:

$$y=-۲x \xrightarrow{x=-\frac{\sqrt{۵}}{۵}} y=(-۲)(-\frac{\sqrt{۵}}{۵}) \Rightarrow P(\frac{-\sqrt{۵}}{۵}, \frac{۲\sqrt{۵}}{۵})$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی

علامت نسبت‌های مثلثاتی در ناحیه‌های مختلف را می‌توان مطابق شکل زیر مرتب و دسته‌بندی کرد:



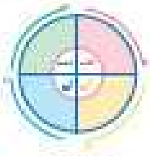
به اختصار می‌توان علامت نسبت‌های مثبت هر ربع مثلثاتی را این‌گونه به خاطر سپرد:

همه در ربع اول مثبت

سینوس در ربع دوم مثبت

تانژانت (و کتانژانت) در ربع سوم مثبت

کسینوس در ربع چهارم مثبت


هستک

تست علامت چه تعداد از نسبت‌های مثلثاتی زیر مثبت است؟

الف) $\sin ۱۵۰^\circ$ ب) $\cos ۵۶۰^\circ$ پ) $\tan ۳۴۲^\circ$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ به بررسی عبارات می‌پردازیم:

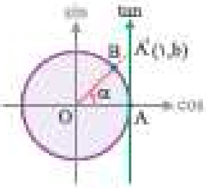
الف) چون ۱۵۰° در ربع دوم قرار دارد، پس $\sin ۱۵۰^\circ > ۰$ است.

ب) چون $۵۶۰^\circ = ۳۶۰^\circ + ۲۰۰^\circ$ در ربع سوم قرار دارد، پس $\cos ۵۶۰^\circ < ۰$ است.

پ) چون ۳۴۲° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\tan ۳۴۲^\circ < ۰$ است.

تانژانت و ویژگی آن

محور تانژانت همان خط $x=۱$ است که بر دایرهٔ مثلثاتی، مماس شده است. برای پیدا کردن تانژانت زاویهٔ α، شعاع OB را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را قطع کند. تانژانت زاویهٔ α برابر b است.



تست در دایرهٔ مثلثاتی مقابل $\tan\theta$ کدام است؟

۱) OA
۲) CH
۳) AB
۴) OH

۳ چون امتداد ضلع زاویهٔ θ محور تانژانت را در B قطع کرده است، پس: $\tan\theta = AB$

تعیین محدودهٔ نسبت‌های مثلثاتی

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، مقادیر سینوس و کسینوس هر زاویهٔ دلخواه، همواره در بازهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارد.

مثال محدودهٔ عبارت $A=۲+۳\sin x$ را تعیین کنید.

می‌دانیم $\sin x$ در بازهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارد، پس:

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \Rightarrow -۳ \le ۳\sin x \le ۳ \Rightarrow -۱ \le ۲+۳\sin x \le ۵$$
$$\Rightarrow -۱ \le A \le ۵$$

تست کم‌ترین مقدار $A=\cos^۲ x+۲\cos x-۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۴ ۴) ۴-

۴ ابتدا A را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$A=\underbrace{\cos^۲ x+۲\cos x+۱}_{(\cos x+۱)^۲}-۴=(\cos x+۱)^۲-۴$$

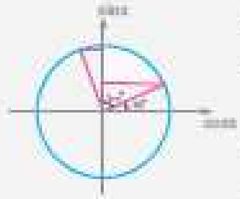
می‌دانیم $\cos x$ در بازهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارد، پس:

$$-۱ \le \cos x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \cos x+۱ \le ۲$$
$$\Rightarrow ۰ \le (\cos x+۱)^۲ \le ۴ \Rightarrow -۴ \le (\cos x+۱)^۲-۴ \le ۰$$

در برخی سؤالات حدود زاویه داده می‌شود و از ما حدود یکی از نسبت‌های مثلثاتی مربوط به آن زاویه را می‌خواهند. در این سؤالات باید ابتدا محدودهٔ زاویه را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنیم و سپس محدودهٔ نسبت مثلثاتی خواسته شده را به‌دست آوریم.

مثال اگر $15^\circ < x < 50^\circ$، $\sin 2x = \frac{m-1}{2}$ باشد حدود m را به‌دست آورید.

چون $15^\circ < x < 50^\circ$ است، پس $30^\circ < 2x < 100^\circ$ است.
با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل $\sin 2x$ در بازهٔ $(\frac{1}{2}, 1]$ قرار دارد.



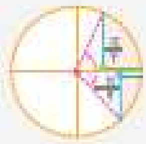
بنابراین:

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \le 1 \Rightarrow 1 < m-1 \le 2 \Rightarrow 2 < m \le 3$$

تست اگر $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{6}$ و $\cos 2x = \frac{m+1}{2}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(\sqrt{2}-1, 1]$ ۲) $(0, 1]$
۳) $[-1, 0)$ ۴) $[-\sqrt{2}, 1)$

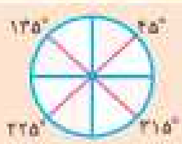
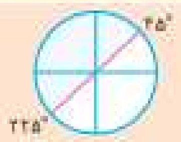
۲ از آن‌جایی که $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{6}$ است، پس $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{3}$ می‌باشد؛ بنابراین محدودهٔ $2x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت مقابل است:



$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} < \cos 2x \le \cos 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m+1}{2} \le 1$$
$$\Rightarrow 1 < m+1 \le 2 \Rightarrow 0 < m \le 1$$

مقایسهٔ مقدار نسبت‌ها

برای مقایسهٔ $\sin\alpha$ با $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ با $\cot\alpha$ از دایره‌های مثلثاتی زیر کمک می‌گیریم. اگر انتهای کمان α در ناحیه‌های رنگ‌شده باشد، آنگاه:

مقایسهٔ $\tan\alpha$ با $\cot\alpha$	مقایسهٔ $\sin\alpha$ با $\cos\alpha$
	
$\Rightarrow \tan\alpha > \cot\alpha$	$\Rightarrow \sin\alpha > \cos\alpha$

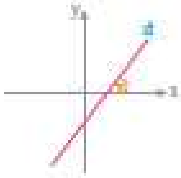
تست اگر $\tan\theta > \cot\theta$ و انتهای کمان θ در ناحیهٔ اول مثلثاتی باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $\cos\theta < \sin\theta$ ۲) $\sin\theta > \tan\theta$
۳) $\sin\theta < \cos\theta$ ۴) $\cos\theta > \tan\theta$

۱ از آن‌جایی‌که θ در ناحیهٔ اول مثلثاتی بوده و $\tan\theta > \cot\theta$ است، پس θ در ناحیهٔ رنگی زیر است:
در این ناحیهٔ رنگی $\sin\theta > \cos\theta$ است.

تانژانت و شیب خط

تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر شیب خط است:

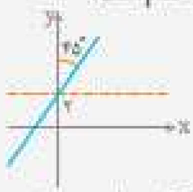


$$\Rightarrow m_d = \tan\theta$$

درصورت داشتن نقطهٔ A از خط d، معادلهٔ خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(y - y_A) = \tan\theta (x - x_A)$$

تست با توجه به شکل مقابل، معادلهٔ خط d کدام است؟



۱) $2y = x + 2$
۲) $y = -x + 2$
۳) $y = x + 2$
۴) $2y = -x + 2$

۳ خط d با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد، پس شیب آن برابر است با: $m = \tan\theta = 1$
در ضمن عرض از مبدأ خط برابر ۲ است، پس معادلهٔ آن به صورت $y = x + 2$ است.

تست کدام‌یک از خط‌های زیر با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ 135° می‌سازد و عرض از مبدأ آن برابر ۲ است؟

۱) $x - y = 2$ ۲) $x + y = 2$
۳) $y - x = 2$ ۴) $x + y = -2$

۲ می‌دانیم اگر خط با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ θ بسازد، آن‌گاه شیب خط برابر $\tan\theta$ است؛ پس:

$$\theta = 135^\circ \Rightarrow \tan\theta = -1 \Rightarrow m = -1$$

در ضمن چون عرض از مبدأ خط برابر ۲ است، پس معادلهٔ خط به‌صورت مقابل خواهد بود: $y - 2 = -1 \times (x - 0) \Rightarrow y = -x + 2$

تست عرض از مبدأ خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ 30° می‌سازد و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴ شیب خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ $\theta = 30^\circ$ می‌سازد، برابر است با: $m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

در ضمن خط محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند، پس معادلهٔ خط به‌صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$$

با قرار دادن $x=0$ در معادلهٔ خط عرض‌از مبدأ را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \xrightarrow{x=0} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

درس ۲ اتحادها و روابط مثلثاتی

اتحادهای مثلثاتی

مجموع مربعات سینوس و کسینوس هر زاویهٔ دلخواه برابر ۱ است:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

نتیجه‌های رابطهٔ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

۱ اگر $\sin^2\alpha$ را به سمت راست تساوی منتقل کنیم، مقدار $\cos^2\alpha$ به‌دست می‌آید:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

۲ اگر $\cos^2\alpha$ را به سمت راست تساوی منتقل کنیم، مقدار $\sin^2\alpha$ به‌دست می‌آید:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

۳ اگر طرفین این اتحاد را بر $\sin^2\alpha$ تقسیم کنیم، داریم:

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

۴ اگر طرفین این اتحاد را بر $\cos^2\alpha$ تقسیم کنیم، داریم:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

در سؤالاتی که $1-\sin^2\alpha$، $1-\cos^2\alpha$، $1+\cot^2\alpha$، $1+\tan^2\alpha$ زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ قرار دارند، برای حل، بهتر است به جای آن‌ها معادلشان را قرار دهیم تا بتوانیم آن‌ها را از زیر رادیکال خارج کنیم.

مثال اگر $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ باشد، حاصل $\sqrt{1+\tan^2 x}\,(1-\sqrt{1-\cos^2 x})$ را به‌دست آورید.

$$\sqrt{1+\tan^2 x}\,(1-\sqrt{1-\cos^2 x})=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,(1-\sqrt{\sin^2 x})$$

$$=\frac{1}{|\cos x|}(1-|\sin x|)$$

در $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ یعنی ربع دوم، $\sin x$ مثبت و $\cos x$ منفی است، پس:

$$\frac{1}{|\cos x|}(1-|\sin x|)=\frac{1}{-\cos x}(1-\sin x)=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}$$

$$=\tan x-\frac{1}{\cos x}$$

تست در مثلث مقابل، اگر $\cos\hat{A}=\frac{4}{5}$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۹

۳ ابتدا با مشخص بودن $\cos A$، $\tan A$ را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{1}{\cos^2 A}=1+\tan^2 A\Rightarrow \tan^2 A=\frac{1}{(\frac{4}{5})^2}-1=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \tan A=\pm\frac{3}{4}\ (\text{مقدار منفی قابل قبول نیست})\Rightarrow \tan A=\frac{3}{4}$$

در مثلث ABC داریم:

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow 3x+3=4x-4\Rightarrow x=7$$

طول ضلع BC برابر با $x-1$ است، پس برابر است با:

$$x-1=7-1=6$$

تست اگر $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ باشد، حاصل $\sqrt{(\frac{1}{\cos x}-1)(\frac{1}{\cos x}+1)}$ کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $-\tan\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $-\cot\alpha$

۲ عبارت زیر رادیکال را با اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم و داریم:

$$\sqrt{(\frac{1}{\cos x}-1).(\frac{1}{\cos x}+1)}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=(\tan^2 x+1)-1$$

$$=\sqrt{\tan^2\alpha}=|\tan\alpha|=-\tan\alpha$$

در $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ یعنی ربع دوم، $\tan\alpha$ منفی است.

تست ساده‌شدهٔ عبارت $(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta)(1-\sin\theta)$ کدام است؟

۱) $\sin\theta$ ۲) $\cos\theta$ ۳) $\sin^2\theta$ ۴) $\cos^2\theta$

۲ به جای $\tan\theta$ می‌نویسیم $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$:

$$(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta)(1-\sin\theta)=(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})(1-\sin\theta)$$

$$=(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta})(1-\sin\theta)=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

میانبُر با قرار دادن زاویهٔ دلخواه $\theta=\frac{\pi}{3}$ داریم:

$$(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}+\tan\frac{\pi}{3})(1-\sin\frac{\pi}{3})=(2+\sqrt{3})(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{2}$$

در میان گزینه‌ها فقط $\cos\theta$ به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

تعیین نسبت‌های مثلثاتی از روی یک نسبت

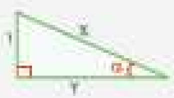
اگر یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای مشخص باشد، می‌توانیم بدون استفاده از روابط مثلثاتی مقدار بقیهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه را به ترتیب زیر مشخص کنیم:

۱ یک مثلث قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم و با توجه به نسبت مثلثاتی داده‌شده، طول ۲ ضلع مثلث را مشخص می‌کنیم.

۲ با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول ضلع سوم را تعیین می‌کنیم.

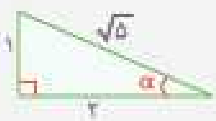
۳ مقدار سایر نسبت‌های مثلثاتی را تعیین می‌کنیم و با توجه به موقعیت زاویه، علامت هر نسبت مثلثاتی را مشخص می‌کنیم.

مثال اگر $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$، $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ باشد، مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را به دست آورید.



$$\Rightarrow x^2=2^2+1^2=5\Rightarrow x=\sqrt{5}$$

چون α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس سینوس و کسینوس منفی هستند:

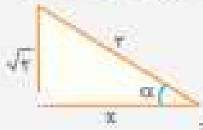


$$\Rightarrow \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

تست اگر $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$، $\cos\alpha < 0$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $-\sqrt{\frac{2}{7}}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{7}}$

۳ چون $\sin\alpha > 0$ و $\cos\alpha < 0$ است، پس α در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد و $\tan\alpha$ منفی است، بنابراین با توجه به این‌که $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ داریم:



$$\Rightarrow x^2 + (\sqrt{2})^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 = 7$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{7} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = -\sqrt{\frac{2}{7}}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم و مکمل

در صورتی که مجموع دو زاویه برابر 90° باشد، آن دو زاویه را متمم یکدیگر می‌نامند. بنابراین دو زاویهٔ θ و $\frac{\pi}{2} - \theta$ متمم یکدیگر هستند.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ متمم $\theta, \frac{\pi}{2} - \theta$	
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ $\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$
$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$ $\cot 20^\circ = \tan 70^\circ$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$ $\tan 40^\circ = \cot 50^\circ$

مثال اگر $\sin(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{8} - x)$ را به دست آورید.

چون مجموع دو زاویهٔ $x + \frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8} - x$ برابر $\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{8}$ است، پس این دو زاویه، متمم یکدیگرند. بنابراین:

$$\cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{2}{3}$$

تست اگر $\tan(\alpha + 20^\circ) = 2$ باشد مقدار $\tan(70^\circ - \alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

۱ چون مجموع زوایای $(\alpha + 20^\circ)$ و $(70^\circ - \alpha)$، ۹۰ درجه است، پس این دو زاویه متمم‌اند و داریم:

$$1)\ \tan(70^\circ - \alpha) = \cot(\alpha + 20^\circ)$$

$$2)\ \cot(\alpha + 20^\circ) = \frac{1}{\tan(\alpha + 20^\circ)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan(70^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$$

تست حاصل عبارت $\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{14}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱ دو زاویهٔ $\frac{2\pi}{7}$ و $\frac{3\pi}{14}$ متمم‌اند، چون:

$$\frac{2\pi}{7} + \frac{3\pi}{14} = \frac{4\pi + 3\pi}{14} = \frac{7\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین به جای $\sin^2\frac{3\pi}{14}$ معادل آن یعنی $\cos^2\frac{2\pi}{7}$ را قرار می‌دهیم:

$$\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{14} = \sin^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} = 1$$

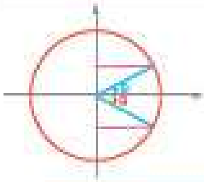
اگر مجموع دو زاویه برابر 180° باشد، آن دو زاویه را مکمل یکدیگر می‌نامند. بنابراین دو زاویهٔ $\theta, \pi - \theta$ مکمل یکدیگر هستند.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ مکمل θ و $\pi - \theta$	
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$
$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$ $\cot 140^\circ = -\cot 40^\circ$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ $\tan 100^\circ = -\tan 80^\circ$

مثال اگر $\sin 10^\circ = A$ باشد، مقدار $\cos 100^\circ$ را محاسبه کنید.

می‌دانیم $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$ است چون 10° و 80° متمم هم هستند
از طرفی: $\cos 100^\circ = \cos(180^\circ - 80^\circ) = -\cos 80^\circ = -A$

زاویهٔ $-\theta$ قرینهٔ زاویهٔ θ است. مطابق شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\theta$ به‌صورت زیر است:



نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ منفی	
$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$ $\cot(-20^\circ) = -\cot 20^\circ$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\tan(-45^\circ) = -\tan(45^\circ)$

نسبت‌های مثلثاتی $\pi \pm \theta$ و $\frac{\pi}{2} \pm \theta$

برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که به مضارب صحیح π نزدیک هستند [یعنی زوایای $k\pi \pm \theta$]، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا باید مشخص کنیم زاویه در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد و علامت نسبت مثلثاتی در آن ربع را تعیین کنیم و در طرف دوم پشت نسبت جدید قرار دهیم.

۲ سپس $k\pi$ را حذف می‌کنیم.

$$\underbrace{\cos(\pi + \frac{\pi}{4})}_{\text{ربع سوم}} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\quad \underbrace{\sin(\pi - \frac{\pi}{3})}_{\text{ربع دوم}} = +\sin\frac{\pi}{3} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تذکر در محاسبهٔ همهٔ نسبت‌های مثلثاتی می‌توانیم مضارب زوج π (مانند 2π، 4π، 6π، 8π و ...) را حذف کنیم.

$$\tan(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

$$\sin(3\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(2\pi + \pi - \frac{\pi}{6}) = \underbrace{\sin(\pi - \frac{\pi}{6})}_{\text{ربع دوم}} = +\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

تذکر در محاسبهٔ تانژانت و کتانژانت، مضارب فرد π (مانند $3\pi, 5\pi, \ldots$) نیز قابل حذف است.

$$\tan(3\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

در کمان‌هایی که به شکل $\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$ هستند، اگر k عددی فرد باشد، علاوه بر امکان تغییر علامت، جنس نسبت‌های مثلثاتی نیز تغییر می‌کند. بنابراین برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی که به مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نزدیک هستند، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا باید مشخص کنیم زاویه در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد و علامت نسبت مثلثاتی را در آن ربع، تعیین کنیم و در طرف دوم پشت نسبت جدید قرار می‌دهیم.

۲ سپس مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ را حذف کرده و نسبت مثلثاتی سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تبدیل می‌کنیم (و بالعکس).

$$\sin(\overbrace{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}^{\text{ربع دوم}})=+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \tan(\overbrace{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}}^{\text{ربع چهارم}})=-\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تست حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\tan(10\pi+\frac{\pi}{6})\cot(3\pi+\frac{\pi}{6})+\cos(4\pi-\frac{\pi}{6})\sin(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6})$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۲

$$\tan(10\pi+\frac{\pi}{6})\cot(2\pi+\pi+\frac{\pi}{6})+\cos(4\pi-\frac{\pi}{6})\sin(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6})$$
$$=\tan\frac{\pi}{6}\times\cot\frac{\pi}{6}+\cos(-\frac{\pi}{6})\times-\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\times-\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

تست اگر $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ (خارج-۹۸)

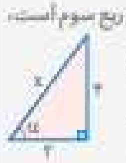
$$\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{3\pi}{2})$$

۱) $-1/33$ ۲) $-0/52$ ۳) $0/27$ ۴) $0/48$

۳ ابتدا هریک از نسبت‌های مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)=\sin(4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)=\sin(\overbrace{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\text{ربع دوم}})=+\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)=\cos(2\pi+\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cos(\overbrace{\frac{3\pi}{2}-\alpha}^{\text{ربع سوم}})=-\sin\alpha$$
$$\tan(\alpha-\frac{3\pi}{2})=-\tan(\overbrace{\frac{3\pi}{2}-\alpha}^{\text{ربع سوم}})=-(+\cot\alpha)=-\cot\alpha$$

حال با توجه به این که $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ و انتهای کمان در ربع سوم است، داریم:



$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} x=5$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \sin\alpha=-\frac{4}{5},\ \cot\alpha=\frac{3}{4}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$(\cos\alpha)(-\sin\alpha)-(-\cot\alpha)=(-\frac{3}{5})(+\frac{4}{5})+\frac{3}{4}$$
$$=-\frac{12}{25}+\frac{3}{4}=\frac{-48+75}{100}=0/27$$

تست حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ=0/28$ کدام است؟

۱) $-\frac{16}{9}$ ۲) $-\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{16}{9}$

۱ در هر یک از روابط مثلثاتی داده‌شده، زاویه‌ها را به شکلی می‌نویسیم که زاویهٔ 15° ایجاد شود:

$$\frac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}=\frac{\cos(270^\circ+15^\circ)-\sin(270^\circ-15^\circ)}{\sin(360^\circ+180^\circ-15^\circ)-\sin(90^\circ+15^\circ)}$$
$$=\frac{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}$$

حال صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan 15^\circ$ ایجاد شود:

$$\frac{\tan 15^\circ+1}{\tan 15^\circ-1}=\frac{0/28+1}{0/28-1}=\frac{1/28}{-0/72}=-\frac{16}{9}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 2α

سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\,.\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

روابط فرعی 2α

۱ اگر در رابطهٔ $\cos 2\alpha$ به جای $\cos^2\alpha$ بنویسیم $1-\sin^2\alpha$ رابطهٔ $\cos 2\alpha$ برحسب $\sin\alpha$ به‌دست می‌آید: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

۲ اگر در رابطهٔ $\cos 2\alpha$ به جای $\sin^2\alpha$ بنویسیم $1-\cos^2\alpha$ رابطهٔ $\cos 2\alpha$ برحسب $\cos\alpha$ به‌دست می‌آید: $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

۳ اگر طرفین رابطهٔ $\sin 2\alpha$ را بر ۲ تقسیم کنیم، حاصل‌ضرب $\sin\alpha$ در $\cos\alpha$ به دست می‌آید: $\sin\alpha\,.\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

مثال اگر α زاویه‌ای حاده و $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)$ کدام است؟

$$\cos(\overbrace{\frac{\pi}{2}+2\alpha}^{\text{ربع دوم}})=-\sin 2\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha$$

بنابراین باید $\cos\alpha$ را به دست آوریم:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2=\frac{2}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$
$$-\sin 2\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha=-2(\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

تست حاصل عبارت $\frac{\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $-2\sqrt{3}$

۲ در صورت کسر از رابطهٔ $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$ و در مخرج کسر از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}=2\cot 30^\circ=2\sqrt{3}$$

تست حاصل $\cos^4\frac{\pi}{8}-\sin^4\frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳ ابتدا با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت را باز می‌کنیم و سپس از رابطهٔ $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$ کمک می‌گیریم:

$$\cos^4\frac{\pi}{8}-\sin^4\frac{\pi}{8}=(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8})\underbrace{(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8})}_{1}$$

$$=\cos(2\times\frac{\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تست حاصل $\sin 7/5^\circ\cos 7/5^\circ\cos 15^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۳

$$\underbrace{\sin 7/5^\circ\cos 7/5^\circ}_{\frac{1}{2}\sin 15^\circ}\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\underbrace{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}_{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

در بعضی سؤالات، ممکن است با ضرب کسینوس چند زاویه در هم مواجه شویم به‌طوری که زاویه‌ها تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت ۲ داده باشند. برای به‌دست آوردن حاصل این عبارت‌ها، بهترین روش این است که عبارت را در سینوس کوچک‌ترین زاویه، ضرب و تقسیم کنیم و چندین بار از فرمول $\sin 2\alpha$ استفاده کنیم تا عبارت ساده شود.

مثلاً برای ساده کردن عبارت $\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$، آن را در $\sin 10^\circ$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$$

$$=\frac{1}{\sin 10^\circ}\times\underbrace{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}_{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}\times\cos 20^\circ\cos 40^\circ$$

$$=\frac{1}{2\sin 10^\circ}\times\overbrace{\underbrace{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}_{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}\cos 40^\circ}^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 80^\circ}=\frac{1}{8\sin 10^\circ}\times\sin 80^\circ$$

$$=\frac{1}{8\sin 10^\circ}\times\cos 10^\circ=\frac{1}{8}\cot 10^\circ$$

فرمول‌های طلایی

با استفاده از رابطه‌های بسیار کاربردی و مهم زیر می‌توانیم $\sin^2\alpha$ ، $\cos^2\alpha$ را برحسب کمان 2α بنویسیم. این روابط به فرمول‌های طلایی معروف هستند:

فرمول‌های طلایی	
$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

مثال مقدار $\cos 15^\circ$ را به دست آورید.

$$\cos^2 15^\circ=\frac{1+\cos 30^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

تست اگر $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=2$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) 2

۳) $4-\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

۲

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=2\Rightarrow\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=2$$

نسبت‌های مثلثاتی 2α برحسب $\tan\alpha$

با کمک روابط زیر می‌توانیم مقادیر $\sin 2x$ ، $\cos 2x$ ، $\tan 2x$ را با داشتن $\tan x$ به‌دست آوریم:

محاسبهٔ روابط 2α برحسب $\tan\alpha$		
$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$	$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

مثال اگر $\tan\alpha=-\frac{3}{2}$ باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(-\frac{3}{2})}{1+(-\frac{3}{2})^2}=\frac{-3}{1+\frac{9}{4}}=\frac{-3}{\frac{13}{4}}=-\frac{12}{13}$$

تست اگر $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=-3$ باشد، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۴

$$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=-3\Rightarrow 1+\tan\theta=-3+3\tan\theta$$

$$\Rightarrow 2\tan\theta=4\Rightarrow\tan\theta=2$$

حال با استفاده از رابطهٔ $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ داریم:

$$\sin 2\theta=\frac{2\times 2}{1+2^2}=\frac{4}{5}$$

تست اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ و $\tan 2x=\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\cot x$ کدام است؟

۱) $2/5$ ۲) 3 ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3/2$

۲

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=\frac{3}{4}\Rightarrow 3-3\tan^2x=8\tan x$$

$$\Rightarrow\underbrace{3\tan^2x+8\tan x-3}_{(3\tan x-1)(\tan x+3)}=0\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\frac{1}{3}\ \checkmark\\ \tan x=-3\ \times\end{cases}$$

چون $0<x<\frac{\pi}{2}$ پس $\tan x$ مثبت است و $\tan x=\frac{1}{3}$ قابل قبول است بنابراین $\cot x=3$ است.

کسینوس ± سینوس و کتانژانت ± تانژانت

در سؤالاتی که در آن‌ها جمع یا تفریق سینوس و کسینوس وجود دارد، می‌توانیم با به توان ۲ رساندن طرفین عبارت داده شده، برای ایجاد رابطهٔ $\sin 2x$ اقدام به حل مسئله کنیم:

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

مثال اگر $\sin x + \cos x = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\sin 2x$ را به دست آورید.

$$\sin x + \cos x = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x\cos x = \frac{9}{25}$$
$$\Rightarrow 2\sin x\cos x = -\frac{16}{25} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{16}{25}$$

تست اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $-\frac{4}{9}$ ۴) $-\frac{5}{9}$

۲ می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) = -\sin 2\alpha$ است. حال برای محاسبهٔ $\sin 2\alpha$ طرفین رابطهٔ $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = (\frac{2}{3})^2 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{4}{9}$$
$$\Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{5}{9} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -(-\frac{5}{9}) = \frac{5}{9}$$

تست اگر $\sin 2x = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\sin x - \cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۱ به کمک اتحاد $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$ داریم:

$$A = \sin x - \cos x \Rightarrow A^2 = (\sin x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$$
$$\Rightarrow A^2 = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \pm\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه (۱) پاسخ سؤال است.

روابط $\tan x + \cot x$, $\cot x - \tan x$ به‌صورت زیر است:

روابط $\cot x \pm \tan x$	
$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$	$\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

تست حاصل $\cot 22/5^\circ - \tan 22/5^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۳ با استفاده از رابطهٔ $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$ داریم:

$$\cot 22/5^\circ - \tan 22/5^\circ = 2\cot 2(22/5^\circ) = 2\cot 45^\circ = 2 \times 1 = 2$$

تست حاصل $\cot^2\frac{\pi}{8} - \tan^2\frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $-2\sqrt{2}$ ۴) $-4\sqrt{2}$

۲

$$\cot^2\frac{\pi}{8} - \tan^2\frac{\pi}{8} = (\cot\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{8})(\cot\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{8})$$
$$= 2\cot\frac{\pi}{4} \times \frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2 \times 1 \times \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

تست اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، مقدار $\tan^2 x + \cot^2 x$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳ ابتدا طرفین تساوی $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}$$
$$= \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

حال با کمک اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ داریم:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2\tan x\cot x$$
$$= (\frac{2}{\sin 2x})^2 - 2 = (\frac{2}{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = (-4)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

اتحادهای $\sin^n x + \cos^n x$

روابط $\sin^4 x + \cos^4 x$ و $\sin^6 x + \cos^6 x$ به‌صورت زیر هستند:

روابط $\sin^4 x + \cos^4 x$ و $\sin^6 x + \cos^6 x$
$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2(\sin x\cos x)^2$
$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3(\sin x\cos x)^2$

مثال اگر $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ را به‌دست آورید.

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2(\sin\theta\cos\theta)^2 = 1 - 2(\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

تست حاصل $\sin^4 75^\circ + \cos^4 75^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{5}{16}$ ۳) $\frac{13}{16}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۱ می‌دانیم $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2(\sin x\cos x)^2$ است، پس:

$$\sin^4 75^\circ + \cos^4 75^\circ = 1 - 2(\underbrace{\sin 75^\circ\cos 75^\circ}_{\frac{1}{2}\sin 150^\circ})^2 = 1 - 2(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})^2$$
$$= 1 - 2 \times \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

با کمک اتحاد چاق و لاغر، عبارت $\sin^3 x \pm \cos^3 x$ برابر است با:

روابط $\sin^3 x \pm \cos^3 x$
$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$
$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$

نکته می‌توانیم به جای $\sin x \cos x$ بنویسیم $\frac{1}{2}\sin 2x$ و این روابط را برحسب $\sin 2x$ بنویسیم.

تست اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ چقدر است؟

۱) $\frac{13}{27}$ ۲) $\frac{13}{81}$ ۳) $\frac{17}{27}$ ۴) $\frac{17}{81}$

۱ ابتدا طرفین تساوی داده‌شده را به توان ۲ می‌رسانیم تا $\sin x \cos x$ به‌دست آید:

$$(\sin x + \cos x)^2 = (\frac{1}{3})^2 \Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9}$$

با توجه به اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ داریم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x(\sin x + \cos x) = (\frac{1}{3})^3 - (3 \times -\frac{4}{9} \times \frac{1}{3})$$

$$= \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}$$

درس ۳ نمودار توابع مثلثاتی و توابع متناوب

تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$

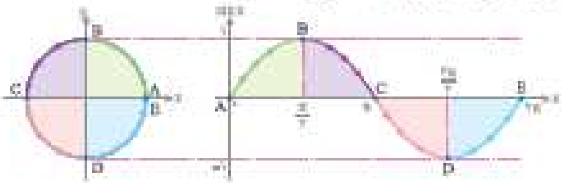
می‌خواهیم تغییرات تابع $f(x) = \sin x$ را در ۴ ناحیهٔ مثلثاتی بررسی کنیم، با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، با افزایش زاویهٔ x:

۱ در ناحیهٔ اول، وقتی از نقطهٔ A در جهت مثلثاتی (پاد ساعتگرد) شروع به حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ B برسیم مقدار $\sin x$ از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.

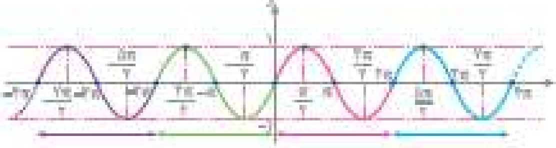
۲ در ناحیهٔ دوم، وقتی از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رویم، مقدار $\sin x$ از ۱ به صفر کاهش می‌یابد.

۳ در ناحیهٔ سوم، وقتی از نقطهٔ C به D می‌رویم، باز هم مقدار $\sin x$ کاهش می‌یابد و از ۰ به ۱- می‌رسد.

۴ در ناحیهٔ چهارم وقتی از نقطهٔ D به نقطهٔ E می‌رویم، مقدار $\sin x$ افزایش می‌یابد و از ۱- به ۰ می‌رسد.



اضافه و کم کردن مضارب زوج π به کمان، مقدار سینوس را تغییر نمی‌دهد؛ یعنی $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ است که در این رابطه k عددی صحیح است. بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌هایی به طول 2π یعنی در بازه‌های $\dots, [-4\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi]$ و ... تکرار می‌شود. به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی نیز می‌گویند.



با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ داریم:

۱ دامنهٔ تابع $y = \sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

۲ مقدار $y = \sin x$ در نقاط $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ یعنی ($\frac{5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2}$ و ...) برابر ۱ و در نقاط $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ یعنی ($\frac{7\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}$ و ...) برابر ۱- است.

۳ نمودار $y=\sin x$ در نقاط $x = k\pi$ یعنی ($\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ و ...) محور xها را قطع می‌کند. [در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.]

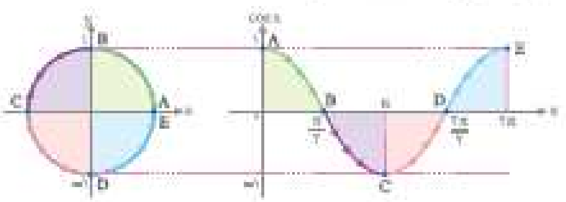
می‌خواهیم نحوهٔ تغییرات تابع $f(x) = \cos x$ را در ۴ ناحیهٔ مثلثاتی بررسی کنیم، با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، با افزایش زاویهٔ x:

۱ در ناحیهٔ اول، وقتی از نقطهٔ A در جهت مثلثاتی (پاد ساعتگرد) شروع به حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ B برسیم، با افزایش زاویهٔ x، مقدار $\cos x$ از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.

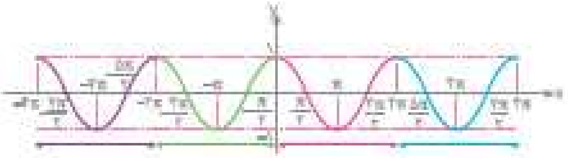
۲ در ناحیهٔ دوم، وقتی از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رویم، با افزایش زاویهٔ x، مقدار $\cos x$ از ۰ به ۱- کاهش می‌یابد.

۳ در ناحیهٔ سوم، وقتی از نقطهٔ C به نقطهٔ D می‌رویم، مقدار $\cos x$ افزایش می‌یابد و از ۱- به ۰ می‌رسد.

۴ در ناحیهٔ چهارم، وقتی از نقطهٔ D به نقطهٔ E می‌رویم، مقدار $\cos x$ باز هم افزایش می‌یابد و از ۰ به ۱ می‌رسد.



اضافه و کم کردن مضارب زوج π به کمان، مقدار کسینوس را تغییر نمی‌دهد؛ یعنی $\cos(2k\pi + x) = \cos x$ است که در این رابطه k عددی صحیح است؛ بنابراین نمودار تابع کسینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود. به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.



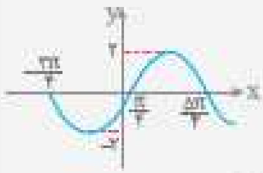
با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ داریم:

۱ دامنهٔ تابع $y=\cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1,1]$ است.

۲ مقدار تابع در مضارب زوج π یعنی $(\dots , 2\pi , -2\pi , 0)$ برابر ۱ است و مقدار تابع در مضارب فرد π یعنی $(\pi , -\pi , 3\pi , -3\pi$ و ...) برابر ۱- است.

۳ نمودار $y=\cos x$ در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ یعنی $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ و ...) محور xها را قطع می‌کند. [مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است.]

تست نمودار زیر مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y=2+\sin(x-\frac{\pi}{4})$

۲) $y=2\sin(x-\frac{\pi}{4})$

۳) $y=2+\sin(x+\frac{\pi}{4})$

۴) $y=2\sin(x+\frac{\pi}{4})$

۲ نمودار تابع $y=\sin x$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست منتقل شده، پس $\sin(x-\frac{\pi}{4})$ خواهیم داشت. از طرفی چون بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۲ و کم‌ترین مقدار آن ۲- است، پس معادلهٔ نمودار به‌صورت $y=2\sin(x-\frac{\pi}{4})$ است.

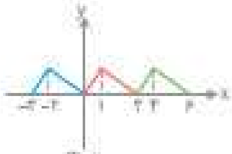
تابع متناوب

اگر نمودار تابع f در فاصله‌های مشخص و ثابت تکرار شود، آن تابع را متناوب می‌گویند. به کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع f در آن تکرار می‌شود، دورهٔ تناوب می‌گویند و آن را با T نشان می‌دهند. به عبارت دیگر در تابع متناوب f، به کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت T که در شرایط زیر صدق کند، دورهٔ تناوب می‌گویند:

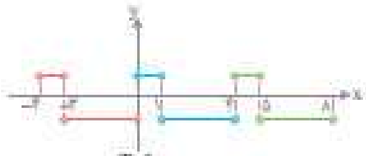
$$x\in D_f \ , \ x\pm T\in D_f \Rightarrow f(x\pm T)=f(x)$$

مثلاً توابع زیر همگی متناوب هستند:

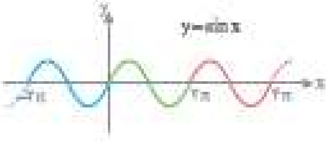
T=۱



T=۲

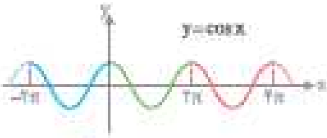


T=۴



y=sin x

T=۲π



y=cos x

T=۲π

تست بخشی از نمودار تابع f به صورت زیر است. دورهٔ تناوب این تابع کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲ با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر $T=4$ است.

تذکر توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، متناوب نیستند. مثلاً تابع $f(x)=x^3$ یک تابع اکیداً صعودی است، پس متناوب نیست.

دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی $y=k\sin(ax+b)+c$ و $y=k\cos(ax+b)+c$ از رابطهٔ $T=\frac{2\pi}{|a|}$ به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی فقط به ضریب x بستگی دارد. [یعنی فقط انبساط و انقباض افقی روی دورهٔ تناوب تأثیرگذار است.]

مثلاً دورهٔ تناوب تابع $y_1=\sin 2x$ با توجه به نمودار زیر برابر π است. درحالی‌که دورهٔ تناوب $y_2=\sin x$ برابر 2π است.

$$\Rightarrow T_1=\frac{2\pi}{|2|}=\pi , T_2=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$$

مثال دورهٔ تناوب توابع زیر را به‌دست آورید.

$$y=2\sin(3x+\frac{\pi}{8}) \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2\pi}{3}$$

$$y=5\cos(-2x+\frac{\pi}{4})+4 \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|-2|}=\pi$$

توابع مثلثاتی در صورتی متناوب هستند که توان x در کمان آن‌ها برابر با ۱ باشد.

مثلاً توابع $y=\sin\sqrt{x}$ ، $y=\cos x^2$ ، $y=\sin\frac{1}{x}$ و ... متناوب نیستند.

تست دورهٔ تناوب کدام تابع از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) $y=\cos \pi x$ ۲) $y=2\sin\frac{\pi}{2}x$

۳) $y=3+\sin 2\pi x$ ۴) $y=-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}x$

۴ دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی $y=\sin(ax)$ و $y=\cos(ax)$ از رابطهٔ $T=\frac{2\pi}{|a|}$ به‌دست می‌آید. حال دورهٔ تناوب هر یک از توابع را به‌دست می‌آوریم:

۱) $T=\frac{2\pi}{|\pi|}=2$ ۲) $T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|}=4$

۳) $T=\frac{2\pi}{|2\pi|}=1$ ۴) $T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|}=6$

تذکر برای به‌دست آوردن دورهٔ تناوب توابعی که از حاصل‌ضرب یا مجموع چند نسبت مثلثاتی تشکیل شده‌اند، ابتدا باید آن‌ها را به‌کمک روابط مثلثاتی ساده کنیم، سپس دورهٔ تناوب تابع را به‌دست آوریم.

تست دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

۲ با استفاده از رابطهٔ $\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$ ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و داریم:

$$f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$$

تست دورهٔ تناوب تابع $f(x)=1-\cos^2 3x$ کدام است؟

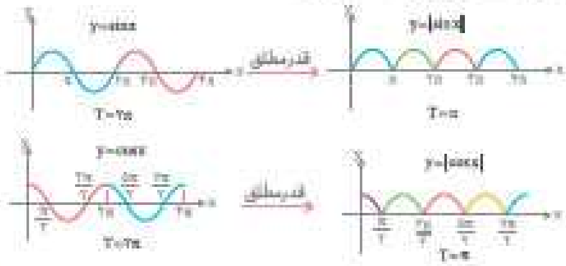
۱) 3π ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۳ با استفاده از فرمول طلایی، ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

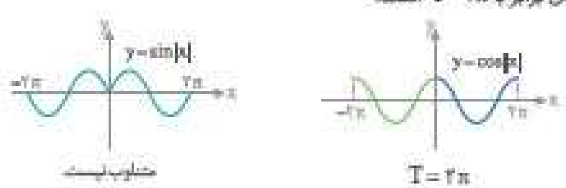
$$f(x)=1-\cos^2 3x=\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|6|}=\frac{\pi}{3}$$

اگر در یک تابع مثلثاتی، $\sin x$ و $\cos x$ درون قدر مطلق قرار گیرند، دورهٔ تناوب نصف و برابر $T=\pi$ می‌شود.



تابع $y=\sin|x|$ متناوب نیست، اما تابع $y=\cos|x|$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن برابر با $T=2\pi$ است.



تست دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\sin 2x|$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) π

۲ چون $\sin 2x$ درون قدرمطلق قرار گرفته است، پس:

$$T=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{|2|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی

بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار توابع مثلثاتی $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ با قرار دادن ۱ یا ۱- به جای سینوس و کسینوس به‌دست می‌آید؛ پس:

$$\max(y)=|a|+d \qquad \min(y)=-|a|+d$$

مثال ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید.

$$y=-2\cos x+3 \Rightarrow \begin{cases}\max(y)=|-2|+3=5\\ \min(y)=-|-2|+3=1\end{cases}$$

$$y=4\sin x-1 \Rightarrow \begin{cases}\max(y)=|4|-1=3\\ \min(y)=-|4|-1=-5\end{cases}$$

تست مجموع مقادیر ماکزیمم و دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\pi-2\sin(-x)$ کدام است؟

۱) $2+3\pi$ ۲) $2-\pi$ ۳) $1+2\pi$ ۴) $2+\pi$

۱ ابتدا ضابطهٔ f را به‌صورت $f(x)=\pi+2\sin x$ بازنویسی می‌کنیم. حال در این تابع:

۱) دورهٔ تناوب برابر است با: $T=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$

۲) بیش‌ترین مقدار تابع برابر است با: $\max(y)=\pi+2(1)=\pi+2$

پس مجموع این مقادیر برابر $2\pi+(\pi+2)=3\pi+2$ است.

واضح است که مقدار d برابر میانگین مقدار ماکزیمم و مینیمم و مقدار $|a|$ برابر نصف تفاضل مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی فوق است:

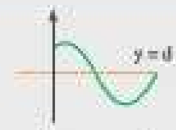
$$|a|=\frac{\max(y)-\min(y)}{2} \qquad d=\frac{\max(y)+\min(y)}{2}$$

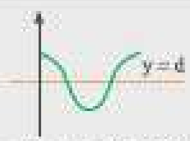
مثال اگر در تابع مثلثاتی $y=a\sin(2x-\frac{\pi}{4})+d$ مقدار ماکزیمم تابع برابر ۸ و مقدار مینیمم آن برابر ۲- باشد، مقدار $|a|$ و d را به‌دست آورید.

$$d=\frac{\max(y)+\min(y)}{2}=\frac{8+(-2)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

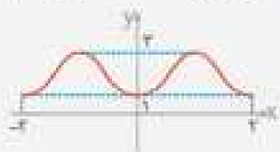
$$|a|=\frac{8-(-2)}{2}=5$$

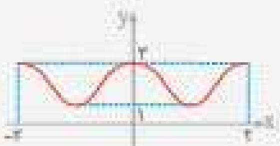
جهت حرکت نمودار تابع‌های $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ با شرط $0 \le c < \frac{\pi}{2}$ در شروع رسم از $x=0$ به‌صورت زیر است:

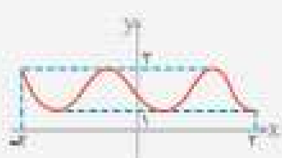
نمودار $y=a\sin(bx+c)+d$	
علامت a و b متفاوت	علامت a و b یکسان
	
در شروع از $x=0$ به پایین می‌رود. [مثل $y=-\sin x$]	در شروع از $x=0$ به بالا می‌رود. [مثل $y=\sin x$]

نمودار $y=a\cos(bx+c)+d$	
علامت a منفی	علامت a مثبت
	
در شروع از $x=0$ به بالا می‌رود. [مثل $y=-\cos x$]	در شروع از $x=0$ به پایین می‌رود. [مثل $y=\cos x$]

تست نمودار تابع $y=2-\cos\pi x$ کدام است؟

۱) 

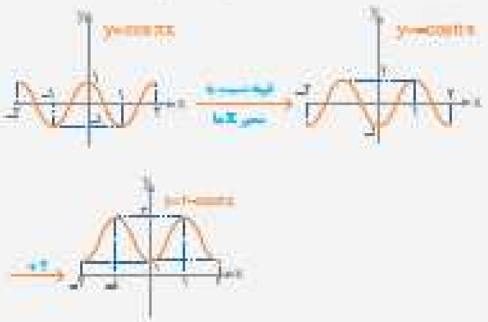
۲) 

۳) 

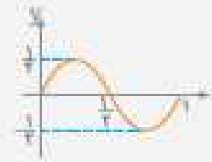
۴) 

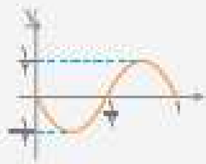
۱ در تابع $y=2-\cos\pi x$، دورهٔ تابع برابر است با: $T=\frac{2\pi}{|\pi|}=2$

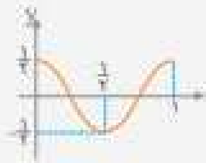
سپس با قواعد انتقال نمودار آن را رسم می‌کنیم:

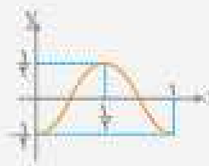


تست نمودار تابع $y=\sin\pi x\cos\pi x$ کدام است؟

۱) 

۲) 

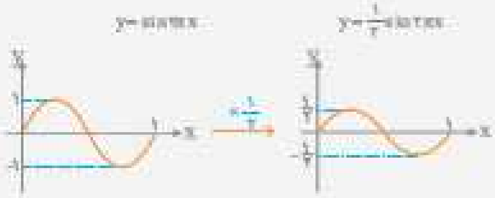
۳) 

۴) 

۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

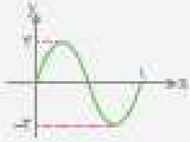
$$y=\sin\pi x\cos\pi x=\frac{1}{2}\sin 2\pi x$$

دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{2\pi}{|2\pi|}=1$ است، پس:



مهم‌ترین سؤالات این بخش، پیدا کردن پارامترهای مجهول در ضابطه تابع است. به سؤالات بعدی دقت کنید.

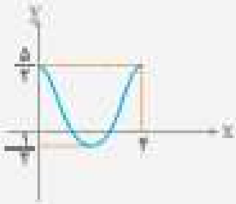
مثال قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(2\pi x)$ به‌صورت زیر است. مقدار a را به‌دست آورید.



چون نمودار در شروع رسم از $x=0$ به سمت بالا می‌رود، پس a و ضریب x یعنی 2π هم‌علامت هستند؛ بنابراین $a>0$ است. از طرفی طبق شکل، بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۳ است؛

$$\max(y)=|a|+0 \xrightarrow{a>0} a=3$$

تست شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a\cos(\frac{\pi x}{2})+b$ است. مقدار $a\times b$ کدام است؟



۱) ۳

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{5}{2}$

۴) ۲

۲ چون بیش‌ترین مقدار تابع برابر $\frac{5}{2}$ و کم‌ترین مقدار آن برابر $-\frac{1}{2}$ است؛ پس:

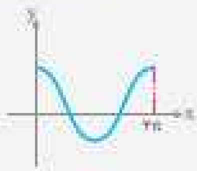
$$b=\frac{\max(y)+\min(y)}{2}=\frac{\frac{5}{2}+(-\frac{1}{2})}{2}=\frac{2}{2}=1$$

از طرفی مقدار تابع در $x=0$ برابر $\frac{5}{2}$ است؛ پس:

$$a\cos(0)+1=\frac{5}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

پس $a\times b=\frac{3}{2}$ است.

تست شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{1}{2}+2\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{16\pi}{3}$ کدام است؟ (داخل ـ ۹۹)



۱) $\frac{1}{2}$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) -1

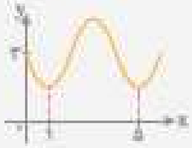
۲ با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع 4π است، پس:

$$T=\frac{2\pi}{|m|}\Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{|m|}\Rightarrow |m|=\frac{1}{2}\Rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}+2\cos(\frac{1}{2}\times\frac{16\pi}{3})=\frac{1}{2}+2\cos\frac{8\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}+2\cos(2\pi+\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2}+2(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

تست شکل زیر قسمتی از نمودار $y=a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطهٔ $x=\frac{25}{3}$ کدام است؟ (داخل ـ ۹۳)



۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

۲ مقدار تابع در $x=0$ برابر ۳ است؛ پس نقطهٔ $(0,3)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند؛

$$3=a+\underbrace{\sin 0}_{\text{صفر}}\Rightarrow a=3$$

از طرفی با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع برابر $T=5-1=4$ است؛ بنابراین:

$$T=\frac{2\pi}{|b\pi|}\Rightarrow 4=\frac{2}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

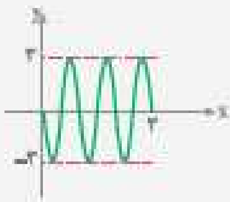
چون شکل نمودار در مبدأ ابتدا نزولی است، پس $b=-\frac{1}{2}$ قابل قبول است. در نتیجه ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$y=3-\sin(\frac{\pi}{2}x)\xrightarrow{x=\frac{25}{3}}y=3-\sin(\frac{\pi}{2}\times\frac{25}{3})$$

$$=3-\sin(\frac{25\pi}{6})=3-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})=3-\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5$$

تست شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y=a\cos\pi(\frac{1}{2}-bx)$ است. $a.b$ کدام است؟



۱) -6

۲) -3

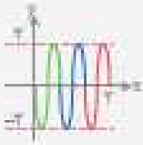
۳) ۴/۵

۴) ۶

۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=a\cos\pi(\frac{1}{2}-bx)=a\cos(\frac{\pi}{2}-b\pi x)=a\sin b\pi x$$

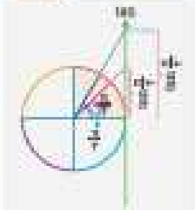
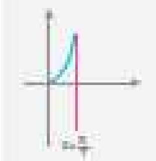
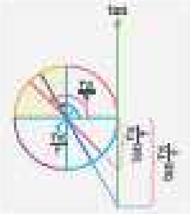
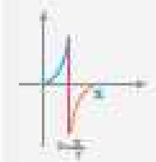
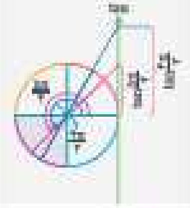
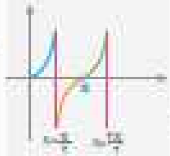
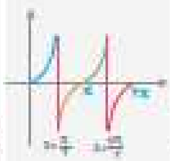
با توجه به نمودار بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۳ است؛ پس $a=\pm 3$. از طرفی دورهٔ تناوب تابع برابر ۱ است؛ پس:



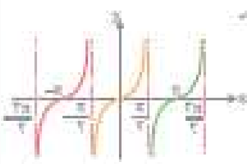
$$\Rightarrow T=1\Rightarrow\frac{2\pi}{|b\pi|}=1\Rightarrow |b|=2\Rightarrow b=\pm 2$$

از آن‌جایی که نمودار ابتدا نزولی است، پس a و b هم‌علامت نیستند. بنابراین $a.b=-6$ است.

تانژانت و تغییرات آن

نحوهٔ تغییرات تانژانت در ربع‌های مختلف			
ربع	دایرهٔ مثلثاتی	نمودار	تغییرات
اول			در بازهٔ $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ مقدار تانژانت از 0 تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.
دوم			در بازهٔ $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ مقدار تانژانت از $-\infty$ تا 0 افزایش می‌یابد.
سوم			در بازهٔ $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$ مقدار تانژانت از 0 تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.
چهارم			در بازهٔ $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$ مقدار تانژانت از $-\infty$ تا 0 افزایش می‌یابد.

نمودار تابع $y = \tan x$ به‌صورت زیر است.



با توجه به این نمودار،

1. نمودار تابع تانژانت در بازه‌های $\dots, (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), \dots$ تکرار می‌شود. از آن‌جایی‌که طول هریک از این بازه‌ها برابر π است پس $y = \tan x$، تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $T = \pi$ است.
2. این تابع در هر یک از بازه‌های $\dots, (-\frac{3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \dots$ اکیداً صعودی است؛ اما در کل $\mathbb{R}$ تابعی غیریکنوا است.
3. این تابع محور xها را در $x = k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$ قطع می‌کند. [یعنی در این نقاط، مقدار تابع برابر صفر است.]
4. دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ و برد آن برابر $\mathbb{R}$ است.

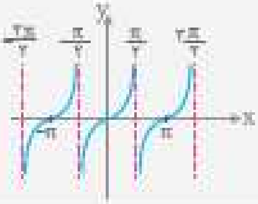
در حالت کلی، دورهٔ تناوب تابع $y = \tan ax$ از رابطهٔ $T = \frac{\pi}{|a|}$ به‌دست می‌آید.

تست نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در کدام بازهٔ زیر یکنوا است؟

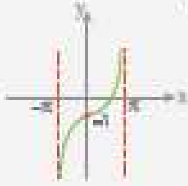
۱) $(0, \pi)$ ۲) $(-\pi, 0)$

۳) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ۴) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

۴ نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی و بنابراین یکنواست.



تست نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y = -1 + \tan x$

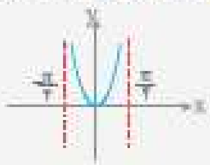
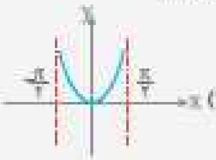
۲) $y = -1 + \tan\frac{x}{2}$

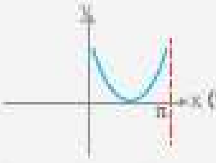
۳) $y = -1 + \tan 2x$

۴) $y = \tan(\frac{x}{2} - 1)$

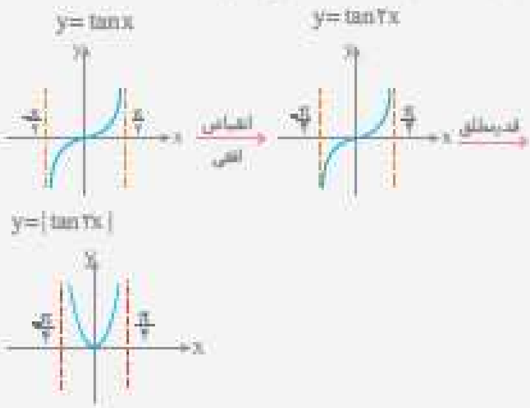
۲ با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع $T = 2\pi$ است؛ پس با توجه به رابطهٔ $T = \frac{\pi}{|a|}$ ضریب x برابر $\frac{1}{2}$ است. از طرفی نمودار ۱ واحد به پایین منتقل شده؛ پس: $y = -1 + \tan\frac{x}{2}$

تست نمودار تابع $y = |\tan 2x|$ کدام است؟

۱)  ۲) 

۳)  ۴) 

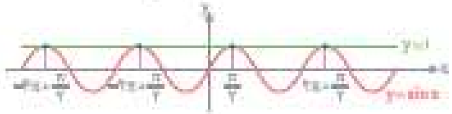
۱ ابتدا نمودار $y = \tan x$ را رسم می‌کنیم و با کمک قوانین تبدیل نمودار، به نمودار $y = |\tan 2x|$ می‌رسیم:



درس ۳ معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

به معادله‌ای که برحسب نسبت‌های مثلثاتی زوایای مجهول نوشته می‌شود، معادلهٔ مثلثاتی می‌گویند.
مثلاً معادلهٔ $\sin x = 1$، یک معادلهٔ مثلثاتی محسوب می‌شود. در واقع جواب‌های معادلهٔ $\sin x = 1$، محل برخورد دو تابع $y = \sin x$ و $y = 1$ است:



اگر بخواهیم همهٔ جواب‌های معادلهٔ $\sin x = 1$ را به صورت کلی نمایش دهیم، می‌توانیم آن را به شکل $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ بنویسیم که به آن، جواب کلی معادله می‌گویند. توجه داشته باشید که در جواب کلی، k همواره عددی صحیح است. مثلاً اگر به‌جای k عدد ۱ قرار دهیم، به جواب $2\pi + \frac{\pi}{2}$ می‌رسیم.

تذکر اگر جواب کلی یک معادلهٔ مثلثاتی را داشته باشیم، با قرار دادن $k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ می‌توانیم همهٔ جواب‌ها را به‌دست آوریم.

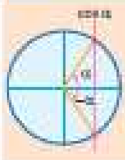
با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، جواب کلی معادله‌های $\sin x = \sin\alpha$ و $\cos x = \cos\alpha$ به صورت زیر است:

$\sin x = \sin\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha & ; k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$\cos x = \cos\alpha$



$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \; ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مثال جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin 3x = \sin x$ را به‌دست آورید.

$$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin 3x = \sin\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$
۳) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

۱
$$\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x = \cos x$ کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $\frac{k\pi}{3}$ ۴) $\frac{k\pi}{4}$

۲
$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های به دست‌آمده برابر $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

در معادلات مثلثاتی باید ضریب هر دو طرف تساوی، مثبت یک باشد. بنابراین برای حل معادله‌های $\sin x = -\sin\alpha$ و $\cos x = -\cos\alpha$ می‌توانیم ضریب منفی را با کمک روابط $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ و $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$ از بین ببریم.

مثال جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x = -\cos x$ را به‌دست آورید.

در سمت راست معادله به‌جای $-\cos x$ می‌نویسیم $\cos(\pi - x)$ و داریم:

$$\cos 2x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\pi - x) \\ 2x = 2k\pi - (\pi - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

در بعضی از معادله‌های مثلثاتی پس از ساده کردن، به معادلهٔ $\sin x = \pm\cos\alpha$ می‌رسیم. در این صورت باید نسبت‌های موجود در دو طرف تساوی را با کمک نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ هم‌نام کنیم.

تست در معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ تعداد جواب‌ها در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ با توجه به این‌که $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ است، طرف راست معادله را به کسینوس تبدیل می‌کنیم:

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \\ 2x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \xrightarrow[k=0,1]{x \in [0,\pi]} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0,\pi]} \times \end{cases}$$

معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ دارای ۲ جواب است.

مثال جواب کلی معادلهٔ $\sin 2x = \cos x$ را به‌دست آورید.

می‌توانیم با استفاده از تساوی $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ سمت راست معادله را به سینوس تبدیل کنیم:

$$\sin 2x = \cos x \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تست جواب کلی معادلهٔ $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

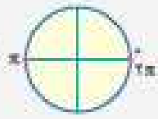
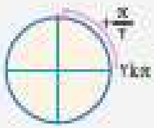
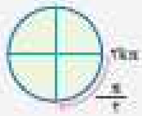
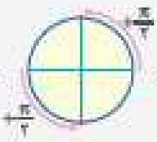
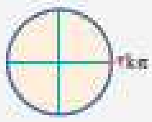
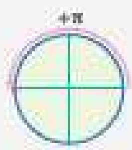
۲ ابتدا معادله را به‌صورت $\cos 3x = -\cos x$ می‌نویسیم و با استفاده از رابطهٔ $\cos(\pi - x) = -\cos x$، ضریب منفی را از بین می‌بریم:

$\cos 3x = \cos(\pi - x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \;\checkmark \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \;\times \end{cases}$$

$\cos x \neq 0$

حالت‌های خاص

معادلهٔ سینوسی	$\sin x = 0 \Rightarrow$  $\Rightarrow x = k\pi$	
	$\sin x = 1 \Rightarrow$  $\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	
	$\sin x = -1 \Rightarrow$  $\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	
معادلهٔ کسینوسی	$\cos x = 0 \Rightarrow$  $\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
	$\cos x = 1 \Rightarrow$  $\Rightarrow x = 2k\pi$	
	$\cos x = -1 \Rightarrow$  $\Rightarrow x = 2k\pi + \pi$	

تست معادلهٔ $\cos 2x \sin 3x = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳

$$\cos 2x \sin 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow[k=0,1]{x \in [0,\pi]} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{3} \xrightarrow[k=0,1,2,3]{x \in [0,\pi]} x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

پس این معادله دارای ۶ جواب است.

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x(\sin 3x - 1) = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

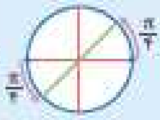
۱) $\frac{7\pi}{2}$ ۲) 2π ۳) 3π ۴) $\frac{5\pi}{2}$

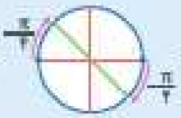
۴

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \longrightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ \sin 3x = 1 \longrightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[k=0,1,2]{x \in [0,\pi]} x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \\ \xrightarrow[k=0,1]{x \in [0,\pi]} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{5\pi}{2}$$

تذکر جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\alpha = \cos\alpha$ و $\sin\alpha = -\cos\alpha$ به صورت زیر است:

$\sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow$  $\Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}$

$\sin\alpha = -\cos\alpha \Rightarrow$  $\Rightarrow \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4}$

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۴ می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ و $\sin(\pi + x) = -\sin x$ است، پس:

$\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

برای حل معادلات مثلثاتی به‌صورت $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ حالت‌های کلی زیر مطرح می‌شود:

1. اگر a برابر با سینوس یا کسینوس یک زاویهٔ معروف باشد، می‌توانیم به‌جای a، نسبت مثلثاتی آن زاویه را قرار دهیم و سپس معادله را حل کنیم. مثلاً برای حل معادلهٔ $2\cos x - \sqrt{2} = 0$، می‌توانیم آن را به‌صورت $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بنویسیم و با قرار دادن $\cos\frac{\pi}{4}$ به جای $\frac{\sqrt{2}}{2}$، معادله را به‌صورت $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$ بازنویسی کنیم.

2. اگر a برابر با سینوس یا کسینوس یک زاویهٔ معروف نباشد، بهترین راهکار این است که نمودار تابع مثلثاتی و خط $y = a$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم تا محل برخورد آن‌ها مشخص شود. جواب‌های معادله همان طول نقاط برخورد دو نمودار هستند.

مثال مجموع جواب‌های معادلهٔ $4\sin x - 3 = 0$ در بازهٔ $[0, 3\pi]$ را به‌دست آورید.

برای پیدا کردن مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin x = \frac{3}{4}$ در بازهٔ $[0, 3\pi]$، با توجه به نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{3}{4}$ خواهیم داشت:

$\Rightarrow$ معادله ۴ جواب دارد.

مجموع جواب‌های معادله در این بازه را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \alpha + (\pi - \alpha) + (2\pi + \alpha) + (3\pi - \alpha) = 6\pi$$

تست تعداد جواب‌های معادلهٔ $4\sin x + \sqrt{8} = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲

$$4\sin x + \sqrt{8} = 0 \Rightarrow 4\sin x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow[k=1]{x\in[0,2\pi]} x = \frac{7\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{5\pi}{4}} \xrightarrow[k=0]{x\in[0,2\pi]} x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

معادله دارای ۲ جواب است.

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(2\sin x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) $\frac{5\pi}{12}$ ۳) π ۴) $\frac{5\pi}{4}$

۴ چون حاصل‌ضرب دو پرانتز برابر صفر است، پس باید هر یک از آن‌ها را برابر صفر بگذاریم:

$$\begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \\ \sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین مجموع همهٔ جواب‌ها برابر است با: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{4}$

معادلات مثلثاتی قابل تبدیل به اتحاد

برای حل معادلات مثلثاتی با ظاهر درجهٔ دوم، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

1. اگر نسبت‌های مثلثاتی یکسان باشند، می‌توانیم با استفاده از اتحادهای جبری، معادله را به‌صورت ضرب چند عامل بنویسیم.

مثلاً معادلهٔ $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ را به‌صورت $(\sin x - 1)^2 = 0$ تجزیه می‌کنیم:

$$(\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

2. اگر در معادله، هم سینوس و هم کسینوس وجود داشته باشد، ابتدا عبارت را برحسب نسبت مثلثاتی یکسان می‌نویسیم و سپس آن را تجزیه می‌کنیم. مثلاً برای حل معادلهٔ $2\sin^2 x - \cos^2 x - 2 = 0$، به‌جای $\cos^2 x$ می‌نویسیم $1 - \sin^2 x$:

$$2\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 2 = 0 \Rightarrow 3\sin^2 x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

تذکر در بعضی معادلات بهتر است ابتدا همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف تساوی منتقل کنیم، سپس با کمک دسته‌بندی عبارت‌ها و فاکتورگیری، آن را به حاصل‌ضرب تعدادی پرانتز تبدیل کنیم.

مثال جواب کلی معادلهٔ $1 + \sin x(\cos x - 1) = \cos x$ را به‌دست آورید.

ابتدا $\cos x$ را به طرف چپ معادله منتقل می‌کنیم و سپس از $(\cos x - 1)$ فاکتور می‌گیریم:

$$1 + \sin x(\cos x - 1) - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(\cos x - 1) - (\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \end{cases}$$

تست معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1 = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱ با استفاده از فاکتورگیری داریم:

$$\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x(1 + \sin x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x + 1) + \cos x(1 + \sin x) = (\sin x + 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x\in[0,\pi]} \text{جواب ندارد} \\ \cos x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi + \pi \xrightarrow[k=0]{x\in[0,\pi]} x = \pi \end{cases}$$

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x = 3\cos x$ به کدام صورت است؟

۱) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۴ به‌جای $\sin^2 x$ می‌نویسیم $1-\cos^2 x$ تا به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $\cos x$ برسیم:

$$2\sin^2 x = 3\cos x \Rightarrow 2(1-\cos^2 x) = 3\cos x$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(-2) = 25$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 \ \times \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین جواب کلی معادله $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ است.

تست معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

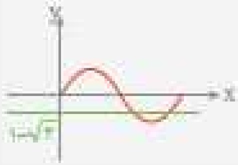
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ معادلهٔ داده‌شده، یک معادلهٔ درجه دوم برحسب $\sin x$ است:

$$\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 12} \sin x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

چون $1+\sqrt{3}$ بزرگتر از ۱ است، پس قابل قبول نیست؛ بنابراین باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin x = 1-\sqrt{3}$ را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ پیدا کنیم:



تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳) $\frac{k\pi}{2}$ ۴) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۲ به جای $\cos^2 x$ معادل آن یعنی $1-\sin^2 x$ را قرار می‌دهیم تا به یک معادلهٔ درجه دوم برحسب $\sin x$ برسیم:

$$2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2(1-\sin^2 x) - \sin x + 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x - \sin x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

معادلات مثلثاتی شامل کمان $2x$

در بعضی از معادلات مثلثاتی، علاوه بر $\sin x$ یا $\cos x$، نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویه یعنی $\sin 2x$ یا $\cos 2x$ نیز وجود دارند. در این سؤالات باید با استفاده از روابط نصف کمان و به کمک نسبت‌های مثلثاتی مانند $\sin 2x$ و $\cos 2x$ و... معادلهٔ مثلثاتی را ساده کنیم. در این صورت با دو حالت مواجه می‌شویم:

۱ اگر معادله، تبدیل به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب یک نسبت مثلثاتی شود، در این صورت باید با استفاده از روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم، جواب معادله را به‌دست آوریم.

مثلاً برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + \sin x = -2$، با استفاده از رابطهٔ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$، معادله را برحسب $\sin x$ می‌نویسیم:

$$(1-2\sin^2 x) + \sin x = -2 \Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} \sin x = -1 \ \checkmark \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{3}{2} \ \times \end{cases}$$

۲ در بعضی از سؤالات، می‌توانیم همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف تساوی منتقل کنیم و با استفاده از فاکتورگیری، آن را به‌صورت حاصل‌ضرب چند عبارت مثلثاتی بنویسیم، سپس همهٔ عبارت‌ها را برابر با صفر قرار دهیم.

مثلاً برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x - 2\cos x = 0$، از رابطهٔ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ استفاده می‌کنیم:

$$2\sin x\cos x - 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x(\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin x\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۲ می‌دانیم $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ است؛ پس:

$$\sin x\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow[k=0]{x\in[0,\pi]} x = \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow[k=0]{x\in[0,\pi]} x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازهٔ $[0, \pi]$ برابر $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ است.

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۳

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k=0,1]{x\in[0,2\pi]} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow[k=0,1]{x\in[0,2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{مجموع} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 4\pi$$

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ به کدام صورت است؟

۱) $x=\frac{k\pi}{3}$ ۲) $x=\frac{2k\pi}{3}$

۳) $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۲ می‌دانیم $\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x$ است. حال با استفاده از رابطهٔ $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ داریم:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow -\cos 2x=-\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\cos x\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi\\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

معادلات مثلثاتی کسری

در حل معادلات مثلثاتی کسری که در مخرج کسر نیز یک عبارت مثلثاتی وجود دارد، باید توجه داشت که جواب‌های به‌دست آمده، باعث صفر شدن مخرج کسر نشوند.

مثال جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ را به‌دست آورید.

از آن‌جایی که حاصل کسر برابر صفر است، باید صورت آن یعنی $\sin x$ برابر با صفر باشد. پس:

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=0,\pi,2\pi$$

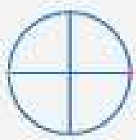
اما جواب $x=\pi$ باعث صفر شدن مخرج کسر می‌شود، پس جواب‌های این معادله در بازهٔ داده‌شده فقط $x=0, x=2\pi$ هستند.

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin x}{1-\cos x}=0$ کدام است؟

۱) $(2k+1)\pi$ ۲) $k\pi$ ۳) $2k\pi$ ۴) $\frac{k\pi}{2}$

۱ چون $1-\cos x$ در مخرج کسر قرار دارد، پس نباید صفر شود، یعنی باید $\cos x\neq 1$ باشد. پس:

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\pi$$



اما به ازای $x=2k\pi$ مقدار $\cos x$ برابر ۱ می‌شود، پس جواب معادله به صورت $x=2k\pi+\pi$ است.

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=0$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{4}$

۳) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$

۲ چون حاصل کسر برابر صفر است، پس باید صورت آن برابر صفر باشد.

$$\cos 2x=0\Rightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=0\Rightarrow \sin^2 x=\cos^2 x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-\cos x\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4} ✓\\ \sin x=\cos x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} ✗\end{cases}$$

به ازای $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ مخرج کسر یعنی $\cos(x+\frac{\pi}{4})$ صفر می‌شود.

حل معادلات شامل تانژانت و کتانژانت

برای حل معادلات مثلثاتی که در آن‌ها تانژانت یا کتانژانت وجود دارد، می‌توانیم به‌جای $\tan x$ بنویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$ و به‌جای $\cot x$ بنویسیم $\frac{\cos x}{\sin x}$، سپس معادله را بر حسب سینوس و کسینوس حل کنیم. حال از آن‌جایی که معادلات مثلثاتی شامل تانژانت، حالتی از معادلات مثلثاتی کسری هستند، پس باید بعد از حل آن‌ها، جواب‌ها در دامنه صدق کنند.

مثال مجموعه جواب معادله $(1-\sin x)\tan x=0$ را به‌دست آورید.

برای حل معادلهٔ داده‌شده به‌جای $\tan x$ می‌نویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$ داریم:

$$(1-\sin x)\frac{\sin x}{\cos x}=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=1\\ \sin x=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=k\pi$$

جواب $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ باعث صفر شدن مخرج می‌شود، پس قابل‌قبول نیست.

تست معادلهٔ $\cos x-\sin x\tan x=0$ در بازهٔ $[0,\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ به‌جای $\tan x$ معادل آن یعنی $\frac{\sin x}{\cos x}$ را قرار می‌دهیم:

$$\cos x-\sin x\tan x=0\Rightarrow \cos x=\sin x\frac{\sin x}{\cos x}\xrightarrow{\cos x\neq 0}$$

$$\cos^2 x=\sin^2 x\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\sin x\\ \cos x=-\sin x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in Z\\ x=k\pi-\frac{\pi}{4}, k\in Z\end{cases}$$

$\Rightarrow$ در بازهٔ $[0,\pi]$ دارای ۲ جواب است.

فصل

۰۷

حد و پیوستگی

ارتباط با فصل‌های دیگه: پیش‌نیازهای این فصل که خیلی هم مهم هستند شامل توان و عبارت جبری، تابع، مثلثات و معادله و تابع درجه دوم است. این فصل پیش‌نیاز فصل مهم و تأثیرگذار مشتق است.

این فصل دو بخش کلی دارد: بخش حد و بخش پیوستگی

بخش حد از حدهای نموداری و صفر صفرم سال یازدهم شروع شده و در نهایت به حدهای نامتناهی سال دوازدهم می‌رسد. بخش پیوستگی هم که کلاً مربوط به سال یازدهم و تقریباً پای ثابت کنکور است.

توصیه: برای حل حدها علاوه بر روش‌های مرسوم، روش هوپیتال را هم آورده‌ایم. پیشنهاد می‌شود بعد از آموختن مشتق‌گیری، مجدد تست‌های این بخش را با روش هوپیتال حل کنید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۴	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳

درس ۱ تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

عملیات تقسیم چندجمله‌ای‌ها

مراحل تقسیم دو عبارت چندجمله‌ای به یک دیگر در مثال زیر بیان شده است:

مثال **خارج قسمت تقسیم x^3+2x^2-5x را بر $x-x^2$ به‌دست آورید.**

۱) مقسوم و مقسوم‌علیه را به شکل استاندارد، یعنی از بزرگ‌ترین توان تا کوچک‌ترین توان می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-5x & -x^2+x \\ \hline \vdots & \vdots \end{array}$$

۲) اولین جمله از مقسوم را بر اولین جمله از مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و جواب را در خارج قسمت می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-5x & -x^2+x \\ \hline \vdots & -x \end{array}$$

۳) جواب به‌دست آمده در خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و حاصل را در زیر مقسوم نوشته و از آن کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-5x & -x^2+x \\ \hline -(x^3-x^2) & -x \\ \hline 3x^2-5x & \end{array}$$

۴) این عمل را تا جایی تکرار می‌کنیم که درجهٔ باقی‌مانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر شود.

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-5x & -x^2+x \\ \hline -(x^3-x^2) & -x-3 \\ \hline 3x^2-5x & \\ -(3x^2-3x) & \\ \hline -2x & \end{array}$$

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای باشند و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چندجمله‌ای منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری‌که تساوی زیر برقرار باشد (این تساوی را اتحاد تقسیم می‌نامند):

$$\begin{array}{l|l} f(x) & p(x) \\ \hline \vdots & q(x) \\ \hline r(x) & \end{array} \Rightarrow f(x)=p(x)\times q(x)+r(x)$$

تذکر توجه کنید در اتحاد تقسیم، درجهٔ باقی‌مانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر است.

تست **در تقسیم چندجمله‌ای x^3+2x^2-5 بر $x+1$، خارج قسمت شامل جملهٔ ax است. مقدار a کدام است؟**

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۲   ۴) ۲-

۱ عمل تقسیم را به صورت زیر انجام می‌دهیم و خارج قسمت را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-5 & x+1 \\ \hline -(x^3+x^2) & x^2+x-1 \\ \hline x^2-5 & \\ -(x^2+x) & \\ \hline -x-5 & \\ -(-x-1) & \\ \hline -4 & \end{array}$$

بنابراین $q(x)=x^2+x-1$ است و در آن ضریب x برابر ۱ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$

می‌دانیم درجهٔ باقی‌مانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر است، پس اگر مقسوم‌علیه عبارتی از درجهٔ ۱ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده عدد ثابت خواهد بود. همچنین می‌دانیم در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ اتحاد زیر برقرار است:

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+\underbrace{R}_{\text{عددثابت}}$$

در ضمن می‌دانیم یک اتحاد به ازای تمام مقادیر x برقرار است، پس می‌توانیم به جای x، ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی $-\frac{b}{a}$ را در آن قرار دهیم:

$$\xrightarrow{x=-\frac{b}{a}} f\left(-\frac{b}{a}\right)=0\times Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R=R$$

تذکر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

مثلاً باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت x^4-3x^3+x+9 بر $x-2$ برابر است با:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow r=f(2)=2^4-3\times 2^3+2+9=16-24+2+9=3$$

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^3+x^2+ax$ بر $2x-1$ چهار واحد بیشتر از باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x+3$ است. مقدار a را به‌دست آورید.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x-1$ برابر $f(\frac{1}{2})$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $2x+3$ برابر $f(-\frac{3}{2})$ است. پس داریم:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=4+f\left(-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{a}{2}=4+\frac{-27}{8}+\frac{9}{4}-\frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow 2a=\frac{10}{4}\Rightarrow a=\frac{5}{4}$$

تست فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ کدام است؟ (خارج-۹۹)

۱) ۷ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -1

۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس: $p(4)=3\ ,\ p(-2)=1$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ برابر است با:

$$p(2^2)+4p(-2)=p(4)+4p(-2)=3+4(1)=7$$

بخش‌پذیری

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر صفر شود، آن‌گاه $f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است.

مثال اگر چندجمله‌ای $f(x)=8x^3-kx+1$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار k را به دست آورید.

چون چندجمله‌ای $f(x)$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x-1$ یعنی $f(\frac{1}{2})$ برابر صفر است. بنابراین:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3-k\left(\frac{1}{2}\right)+1=2-\frac{k}{2}=0\Rightarrow \frac{k}{2}=2\Rightarrow k=4$$

تست عبارت $x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ به ازای جمیع مقادیر n بر $x+2$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم این عبارت بر $x-1$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -9 ۳) ۱ ۴) -10

۲ چون $P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، پس $P(-2)=0$ است و داریم:

$$P(-2)=0\Rightarrow (-2)^{2n+1}+2(-2)^{2n}+(-2)^5-5(-2)^3+k=0$$

$$\Rightarrow -2\times(-2)^{2n}+2(-2)^{2n}-32+40+k=0\Rightarrow k=-8$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای بر $x-1$ برابر $P(1)$ است:

$$P(1)=(1)^{2n+1}+2(1)^{2n}+1^5-5(1)^3-8=1+2+1-5-8=-9$$

اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، بر تک‌تک عوامل مقسوم‌علیه نیز بخش‌پذیر است.

مثلاً می‌دانیم اگر عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، حتماً بر ۵ و ۲ نیز بخش‌پذیر است یا اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x+1)(x-2)$ بخش‌پذیر باشد، قطعاً بر $(x-2)$ و $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

مثال اگر عبارت $x^4+ax^3+bx^2-2x-3$ بر x^2-2x-3 بخش‌پذیر باشد، مقادیر a و b را بیابید.

می‌دانیم تجزیهٔ عبارت x^2-2x-3 به صورت $(x+1)(x-3)$ است. از طرفی چون عبارت $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-2x-3$ بر x^2-2x-3 بخش‌پذیر است، پس بر هر یک از عبارت‌های $(x+1)$ و $(x-3)$ نیز بخش‌پذیر است. بنابراین داریم:

$$f(-1)=0\Rightarrow (-1)^4+a(-1)^3+b(-1)^2-2(-1)-3=0$$

$$\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b$$

$$f(3)=0\Rightarrow (3)^4+a(3)^3+b(3)^2-2(3)-3=0$$

$$\Rightarrow 27a+9b=-72\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ 3a+b=-8 \end{cases}\Rightarrow a=-2, b=-2$$

بررسی خارج قسمت در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$

در بعضی از مسائل، اطلاعاتی راجع به خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ خواسته می‌شود. برای حل این مسائل دو راهکار وجود دارد:

۱ راهکار اصلی این است که چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $ax+b$ تقسیم کرده و خارج قسمت را به‌دست آوریم.

۲ در برخی از سؤالات، می‌توانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ را محاسبه کنیم، سپس اتحاد تقسیم را نوشته و با جای‌گذاری x مناسب، اطلاعات خواسته‌شده راجع به خارج قسمت را به‌دست آوریم.

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $P(x)=x^2+4x+5$ برابر $x+2$ است. اگر $f(1)=13$ و $f(-1)=11$ باشد، خارج قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟ (خارج - ۱۴۰۱)

۱) $-x+2$ ۲) $2x-1$ ۳) $3x-2$ ۴) $-2x+3$

۴ اتحاد تقسیم را می‌نویسیم و در آن $x=1$ و $x=-1$ می‌گذاریم:

$$f(x)=(x^2+4x+5)Q(x)+x+2$$

$$1)\ f(1)=10Q(1)+3=13 \Rightarrow Q(1)=1$$

$$2)\ f(-1)=2Q(-1)+1=11 \Rightarrow Q(-1)=5$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط $Q(x)=-2x+3$ مناسب است.

تست اگر $q(x)$ خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^7-4x^5+x^2+1$ بر $x+2$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۴ ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-2)=(-2)^7-4(-2)^5+(-2)^2+1=-128+128+4+1=5$$

حال اتحاد تقسیم را نوشته و از آن‌جایی که باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ برابر $q(1)$ است، در اتحاد تقسیم $x=1$ را قرار می‌دهیم:

$$\text{اتحاد تقسیم}: x^7-4x^5+x^2+1=(x+2)q(x)+5 \xrightarrow{x=1}$$

$$1-4+1+1=(1+2)q(1)+5 \Rightarrow -6=3q(1) \Rightarrow q(1)=-2$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر مقسوم علیه درجهٔ دوم [یا بالاتر]

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر یک عبارت درجهٔ دوم [یا با درجهٔ بالاتر] راهکار کلی این است که ابتدا مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهیم. سپس در مقسوم‌علیه، جمله با درجهٔ بیشتر را برحسب سایر جملات به دست آورده و آن را در $f(x)$ قرار می‌دهیم. این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجهٔ عبارت $f(x)$ کم‌تر از درجهٔ مقسوم‌علیه شود. عبارت به‌دست آمده، همان باقی‌مانده است. [این روش به روش کاهش توان مشهور است.]

مثلاً برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ عبارت $f(x)=2x^2+5x-9$ بر x^2-x، مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^2-x=0 \Rightarrow x^2=x \xrightarrow[f(x)]{\text{جای‌گذاری}} 2x+5x-9=7x-9$$

بنابراین باقی مانده $7x-9$ است.

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر یک عبارت درجهٔ دوم [یا با درجهٔ بالاتر] اگر مقسوم‌علیه قابل تجزیه به عوامل درجهٔ اول باشد با جای‌گذاری ریشه‌های عوامل مقسوم‌علیه در اتحاد تقسیم، باقی‌مانده را به‌دست می‌آوریم.

تذکر اگر مقسوم‌علیه، یک عبارت درجهٔ دوم باشد، باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ اول خواهد بود. پس باید باقی‌مانده را به‌صورت $ax+b$ در نظر بگیریم.

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $f(x)=x^3+4x^2+1$ بر x^2+3x+2 را به‌دست آورید.

فرض می‌کنیم باقی‌مانده به صورت $ax+b$ باشد. سپس مقسوم‌علیه را به صورت $(x+1)(x+2)$ تجزیه کرده و اتحاد تقسیم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^3+4x^2+1=(x+1)(x+2)q(x)+ax+b$$

حال با جای‌گذاری $x=-1$ و $x=-2$ در اتحاد تقسیم داریم:

$$x=-1 \Rightarrow (-1)^3+4(-1)^2+1=\underbrace{(-1+1)}_{0}(-1+2)q(-1)+a(-1)+b$$

$$\Rightarrow -a+b=4$$

$$x=-2 \Rightarrow (-2)^3+4(-2)^2+1=(-2+1)\underbrace{(-2+2)}_{0}q(-2)+a(-2)+b$$

$$\Rightarrow -2a+b=9$$

با حل این معادلات $a=-5$ و $b=-1$ به‌دست می‌آید بنابراین باقی‌مانده به صورت $-5x-1$ است.

تست اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^5+ax^4+bx^3+x^2$ بر x^2-4 برابر $2x+5$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{32}$

۲ با توجه به‌صورت سؤال، اتحاد تقسیم به‌صورت زیر است:

$$x^5+ax^4+bx^3+x^2=\underbrace{(x^2-4)}_{(x-2)(x+2)}Q(x)+2x+5$$

$$1)\ x=2: 2^5+a\times 2^4+b\times 2^3+2^2=2(2)+5$$

$$\Rightarrow 32+16a+8b+4=9 \Rightarrow 16a+8b=-27$$

$$2)\ x=-2: (-2)^5+a\times(-2)^4+b(-2)^3+(-2)^2=2(-2)+5$$

$$\Rightarrow -32+16a-8b+4=1 \Rightarrow 16a-8b=29$$

با جمع کردن طرفین معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$32a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{16}$$

به‌دست آوردن ریشه‌های یک چندجمله‌ای با مشخص بودن یکی از ریشه‌ها

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، یعنی $f(a)=0$ باشد، آنگاه $x=a$ ریشهٔ $f(x)$ است. می‌توانیم با تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ سایر ریشه‌های $f(x)$ را در صورت وجود بیابیم. مثلاً در چند جمله‌ای $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ اگر $x=-1$ را قرار دهیم، داریم:

$$f(-1)=-1+2+5-6=0$$

پس چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است چون $f(-1)=0$ می‌باشد. حالا با تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ ریشه‌های دیگر $f(x)$ را در صورت وجود می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2-5x-6 & x+1 \\
\underline{-(x^3+x^2)} & \overline{x^2+x-6} \\
\quad x^2-5x-6 & \\
\underline{-(x^2+x)} & \\
\quad -6x-6 & \\
\underline{-(-6x-6)} & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد تقسیم}} x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)+0$$

حالا ریشه‌های عامل x^2+x-6 را به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{x^2+x-6}_{(x-2)(x+3)}=0 \Rightarrow x=2\ ,\ x=-3$$

پس به جز $x=-1$ ریشه‌های $x=2$ و $x=-3$ را نیز داریم.

درس ۲ مفاهیم اولیه و محاسبه حد توابع

همسایگی

اگر $x_\circ$ یک عدد حقیقی باشد، به هر بازهٔ باز شامل نقطهٔ $x_\circ$ یک همسایگی از $x_\circ$ می‌گوییم؛ بنابراین اگر $x_\circ \in (a, b)$، آن‌گاه بازهٔ (a, b) یک همسایگی $x_\circ$ است.

مثلاً $(۳,۵)$ همسایگی عدد ۴ است. با همین بازهٔ $(۳,۵)$ همسایگی اعداد ۳/۷ یا ۴/۲ یا $\sqrt{۱۱}$ نیز می‌باشد اما همسایگی اعداد ۲ یا ۶ یا صفر نیست چون شامل این اعداد نیست.

اگر $r>۰$، در این صورت بازهٔ $(x_\circ, x_\circ+r)$ را یک همسایگی راست $x_\circ$ می‌نامیم. مثلاً $(۳,۵)$ همسایگی راست عدد ۳ است.

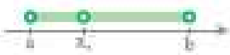
همچنین اگر $r>۰$، در این صورت بازهٔ $(x_\circ-r, x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می‌نامیم. مثلاً بازهٔ $(۳,۵)$ همسایگی چپ عدد ۵ است.

مثال **اگر بازهٔ $(x-۱, ۲x+۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به‌دست آورید.**

برای به‌دست آوردن مجموعهٔ مقادیر x، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x-۱<۲<۲x+۳ \Rightarrow \begin{cases} x-۱<۲ \Rightarrow x<۳ \\ ۲<۲x+۳ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x \end{cases} \xrightarrow{\cap} -\frac{۱}{۲}<x<۳$$

اگر $x_\circ$ را از بازهٔ (a, b) حذف کنیم، مجموعهٔ $(a, b)-\{x_\circ\}$ را یک همسایگی محذوف $x_\circ$ می‌نامیم.



تست **اگر بازهٔ $(۲x-۱, x+۴)-\{۲\}$ یک همسایگی محذوف باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟**

۱) $-۱<x<۲$ ۲) $-۲<x<۲$

۳) $-\frac{۳}{۲}<x<۳$ ۴) $-۲<x<\frac{۳}{۲}$

۴ چون نقطهٔ $x=۲$ از بازه حذف شده، پس بازهٔ داده شده همسایگی محذوف ۲ است، بنابراین:

$$۲x-۱<۲<x+۴ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱<۲ \\ ۲<x+۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{۳}{۲} \\ -۲<x \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۲<x<\frac{۳}{۲}$$

تست **دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم زیر رادیکال نباید منفی باشد، پس:

$$۰ \le ۱-x^۲ \Rightarrow x^۲ \le ۱ \Rightarrow |x| \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱$$

از طرفی مخرج کسر نیز نباید صفر باشد، بنابراین $D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$ است. دامنهٔ این تابع شامل مجموعهٔ $(-۱,۱)-\{۰\}$ است که یک همسایگی محذوف برای نقطهٔ صفر محسوب می‌شود.

مفهـوم میل کردن

اگر a یک عدد حقیقی روی محور اعداد باشد، منظور از نماد $x \to a$ این است که x بدون این‌که خود a را اختیار کند، از هر دو طرف به a نزدیک می‌شود.

تذکر توجه کنید وقتی x به سمت a میل می‌کند، لازم نیست خود a در دامنه یا بازه باشد، ولی همسایگی آن حتماً باید در دامنه باشد.

فرض کنید $a=۲$ و $x \to ۲$، در این‌صورت این نزدیک‌شدن را می‌توانیم به‌صورت جدول زیر نمایش دهیم:

x با مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود				a	x با مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود			
۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\to ۲ \leftarrow$	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۲

منظور از نماد $x \to a^+$، این است که x فقط با مقادیر بزرگتر از a به a نزدیک می‌شود و منظور از نماد $x \to a^-$، این است که x فقط با مقادیر کوچکتر از a به a نزدیک می‌شود.

میل کردن از راست میل کردن از چپ

تذکر در نماد میل کردن، علامت‌های $+$، $-$ روی عدد، نشان‌دهندهٔ جهت نزدیک شدن x به a هستند. وقتی $x \to a^+$، علامت $+$ روی a نشان‌دهندهٔ این است که x از سمت راست به a نزدیک می‌شود و نباید تصور کرد که a یک عدد مثبت است. همچنین $x \to a^-$، نشان‌دهندهٔ این است که x از چپ به a نزدیک می‌شود و هیچ ربطی به منفی بودن عدد a ندارد.

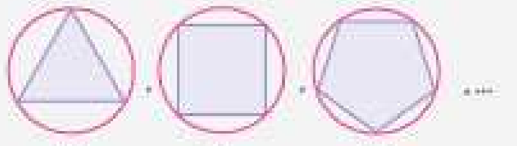
با توجه به الگوی زیر، چند ضلعی‌هایی درون دایره محاط شده است و با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی‌ها افزایش پیدا کرده و به مساحت دایره نزدیک می شود. [در یونان باستان برای رسیدن به مساحت و محیط شکل‌های هندسی از این روش استفاده می‌کردند]

تست با توجه به الگوی زیر چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف) با افزایش تعداد ضلع‌های شکل‌های درون دایره، مساحت ناحیهٔ رنگ نشده تغییری نمی‌کند.

ب) با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود.

پ) مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل دهم، کمتر از مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل نهم است.

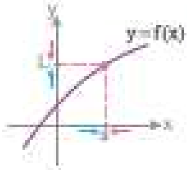


۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱ با افزایش تعداد ضلع‌های شکل‌های درون دایره، مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده افزایش می‌یابد و در نتیجه مساحت ناحیهٔ سفید کم می‌شود. پس مساحت چندضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود. پس (الف) نادرست و (ب) درست است. با توجه به این توضیحات مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل دهم بیشتر از شکل نهم است. پس (پ) نادرست است.

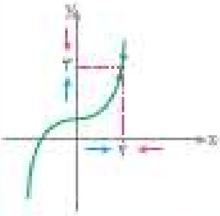
مفهوم شهودی حد

طبق شکل، وقتی $x \to a$، مقادیر تابع f به L نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد تابع f وقتی x به سمت a میل می‌کند، برابر عدد حقیقی L است. عدد L را حد تابع f در نقطهٔ a می‌نامیم و می‌نویسیم:



$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

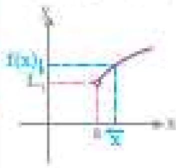
در نمودار زیر وقتی $x \to 2$، مقادیر تابع f به عدد ۳ نزدیک می‌شوند؛ در این صورت می‌نویسیم:



$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

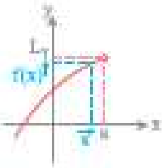
	x از چپ به ۲ نزدیک می‌شود				x از راست به ۲ نزدیک می‌شود		
x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
f(x)	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۳	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
	f(x) به ۳ نزدیک می‌شود				f(x) به ۳ نزدیک می‌شود		

با توجه به نمودار زیر، وقتی x از سمت راست و با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک می‌شود، مقادیر تابع f به L_1 نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد راست تابع f در نقطهٔ $x = a$ برابر L_1 است و به‌صورت مقابل نمایش داده می‌شود:



$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

با توجه به نمودار زیر، وقتی x از سمت چپ و با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک می‌شود، مقادیر تابع f به L_2 نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد چپ تابع f، در نقطهٔ $x = a$ برابر L_2 است و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

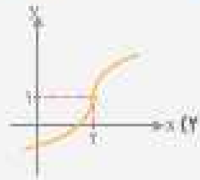


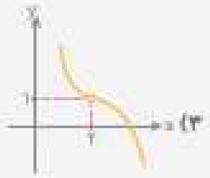
$$\Rightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

تست جدول زیر، رفتار کدام تابع را به‌درستی نشان می‌دهد؟

x	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۲	۲/۱	۲/۳	۲/۵
f(x)	۱/۳	۱/۱	۱/۰۵	۱	۰/۹۹	۰/۹	۰/۸

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳ با توجه به جدول، وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به سمت ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر f با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شوند و وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به سمت ۲ نزدیک می‌شوند، مقادیر f با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شوند که گزینهٔ ۳ به‌درستی این رفتار را نشان می‌دهد.

تعریف ریاضی حد تابع

فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (x_1, x_2) شامل نقطهٔ a [به‌جز احتمالاً در خود a] تعریف شده باشد. در این صورت تابع f در $x = a$ دارای حد است، هرگاه تابع f در $x = a$ دارای حدهای چپ و راست موجود، متناهی و برابر باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

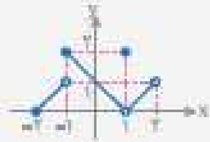
تابع f در حالت‌های زیر در نقطهٔ $x = a$ حد ندارد:

۱ تابع f در $x = a$ فقط دارای حد راست یا فقط دارای حد چپ باشد.

۲ تابع در $x = a$ حد چپ و راست نداشته باشد.

۳ هر یک از حدهای چپ و راست در $x = a$ موجود و مقداری حقیقی باشند، اما با هم برابر نباشند.

تست نمودار تابع f به‌صورت زیر است. کدام‌یک از حدهای زیر موجود است؟



۱) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

۲) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

۴) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

۳ به بررسی عبارات می‌پردازیم:

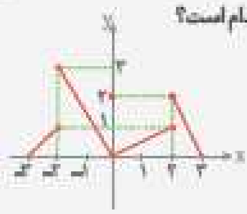
۱) حد چپ تابع در $x=-2$ وجود ندارد، پس $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ وجود ندارد.

۲) حد چپ و راست تابع در $x=-1$ برابر نیست، پس این حد وجود ندارد.

۳) حد چپ و راست تابع در $x=1$ برابر صفر و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ است.

۴) حد راست تابع در $x=2$ وجود ندارد، پس $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد.

تست شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

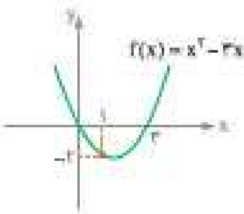
۴) صفر

۲ حاصل حد تابع f وقتی x کمی بیشتر از ۲- است برابر ۳، حاصل حد آن وقتی x کمی کمتر از ۲ است برابر ۱ است و حاصل حد آن وقتی x کمی بیشتر یا کمی کمتر از صفر است برابر صفر می‌باشد. پس:

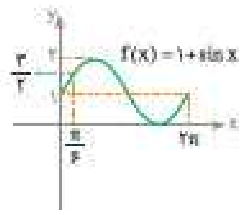
$$\lim_{x\to (-2)^+} f(x) - \lim_{x\to 2^-} f(x) + \lim_{x\to 0} f(x) = 3-1+0=2$$

حد توابع معروف زیر ذره‌بین

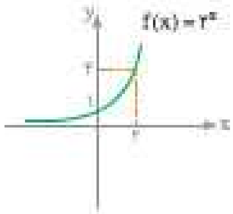
حد توابع چندجمله‌ای، سینوسی، کسینوسی و نمایی در نقطهٔ $x=a$ از دامنهٔ آن‌ها، با مقدار تابع در نقطهٔ $x=a$ برابر است. به عبارت دیگر در این توابع $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ است.



$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = -2$$



$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} f(x) = f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}$$



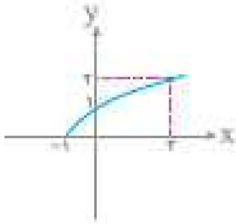
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$$

در تابع کسری f اگر $x=a$ ریشهٔ مخرج کسر نباشد، آن‌گاه حد تابع در نقطهٔ $x=a$ با مقدار تابع در این نقطه برابر است. [اگر $x=a$ ریشهٔ مخرج کسر باشد، ممکن است به ابهام $\frac{0}{0}$ برسیم و یا حاصل حد برابر عدد حقیقی نباشد که در ادامهٔ فصل به آن خواهیم پرداخت.]

حاصل حد تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+1}$ در نقطهٔ $x=-2$ برابر است با:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{2(-2)+3}{(-2)^2+1} = -\frac{1}{5}$$

برای به‌دست آوردن حد توابع رادیکالی و لگاریتمی در نقطهٔ $x=a$ ابتدا باید دامنهٔ تابع را تعیین کنیم. اگر نقطهٔ $x=a$ دارای همسایگی باشد، آن‌گاه حد تابع f در $x=a$ با مقدار تابع در این نقطه برابر است.



دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ به صورت $D_f=[-1,+\infty)$ است. مطابق شکل، تابع در $x=-1$ حد ندارد اما حد تابع در $x=3$ برابر ۲ است.

تست اگر $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$ باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

پ) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=2\sqrt{3}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x^4-x^2} \Rightarrow \underbrace{x^4-x^2}_{x^2(x^2-1)} \geq 0$$

x		-1		0		1	
x^4-x^2	+		−		−		+

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$$

چون تابع در $x=1$ فقط همسایگی راست دارد و در $x=0$ همسایگی ندارد، پس حد تابع در $x=0, x=1$ موجود نیست. یعنی (الف) و (ب) نادرست هستند. اما برای قسمت (پ) داریم:

$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4-x^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

حد توابع شامل قدر مطلق

برای محاسبهٔ حد توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح وقتی $x \to a^+$ ، از نامساوی $x > a$ استفاده می‌کنیم و منظور این است که x عددی بسیار بسیار نزدیک به a و فقط کمی بزرگتر از آن است. به‌طور مشابه وقتی $x \to a^-$ ، از نامساوی $x < a$ استفاده می‌کنیم و منظور این است که x عددی بسیار بسیار نزدیک به a و فقط کمی کوچک‌تر از آن است.

برای محاسبهٔ حد توابع شامل قدرمطلق در $x = a$ ابتدا باید قدر مطلق را حذف کنیم و سپس از تابع حد بگیریم. در این مسائل، با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ اگر $x = a$ ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق نباشد، علامت عبارت داخل قدرمطلق را به ازای $x = a$ مشخص کرده و قدرمطلق را حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overset{-}{|3x-1|} - \overset{+}{|2x+1|}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-(3x-1)-(2x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-5\cancel{x}}{\cancel{x}} = -5$$

۲ اگر $x = a$ ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق باشد، حد چپ و راست تابع را در $x = a$ به‌دست می‌آوریم. [یعنی علامت عبارت داخل قدرمطلق را به‌ازای مقادیر کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از a مشخص می‌کنیم و قدرمطلق را برمی‌داریم. سپس به سراغ محاسبهٔ حد می‌رویم.]

مثلاً برای محاسبهٔ $\lim_{x \to 2} \frac{|2-x|}{x^2-4}$ داریم:

۱ $$\lim_{x \to 2^-} \frac{\overset{+}{|2-x|}}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2-x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

۲ $$\lim_{x \to 2^+} \frac{\overset{-}{|2-x|}}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

با توجه به نابرابر بودن حد چپ و حد راست، حاصل حد داده شده موجود نمی‌باشد.

تست حاصل $\lim_{x \to 2} \frac{|x^2-3|-x}{2x^2-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱ وقتی $x \to 2$ عبارت داخل قدر مطلق مثبت است، پس:

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x^2-3|-x}{2x^2-1} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-3}{2x^2-1} = \frac{4-2-3}{8-1} = -\frac{1}{7}$$

حد توابع شامل جزء صحیح

برای محاسبه حد توابع جزء صحیح [براکت] در $x = a$ ابتدا باید جزء صحیح را حذف کنیم و سپس از تابع حد بگیریم. در این مسائل با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ اگر $x = a$ ، عبارت داخل براکت را صحیح نکند، مقدار عبارت داخل براکت را به ازای $x = a$ مشخص کرده و براکت را حذف می‌کنیم، سپس حد تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \to 3} (x + [\frac{x}{2}]) = \lim_{x \to 3} (x + [\frac{3}{2}]) = \lim_{x \to 3} (x+1) = 3+1 = 4$$

۲ اگر $x = a$ ، عبارت داخل براکت را صحیح کند، باید به‌طور مجزا حد چپ و راست تابع را در $x = a$ به‌دست آوریم.

مثال حاصل $\lim_{x \to 2^+} (x[x^2]+|x-2|)$ را به‌دست آورید.

وقتی $x \to 2^+$ یعنی $x > 2$ پس:

$$x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \quad , \quad x^2 > 4 \Rightarrow [x^2] = 4$$

$$\lim_{x \to 2} (x[x^2]+|x-2|) = \lim_{x \to 2} (4x+x-2) = \lim_{x \to 2} (5x-2) = 5(2)-2 = 8$$

تست حاصل $\lim_{x \to (-\frac{1}{11})^-} [-\frac{1}{x}] - \lim_{x \to (-\frac{1}{11})^+} [-\frac{1}{x}]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

۳ ابتدا حاصل $\lim_{x \to (-\frac{1}{11})^+} [-\frac{1}{x}]$ را پیدا می‌کنیم:

$$x > -\frac{1}{11} \Rightarrow \frac{1}{x} < -11 \Rightarrow -\frac{1}{x} > 11$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (-\frac{1}{11})^+} [-\frac{1}{x}] = [11^+] = 11$$

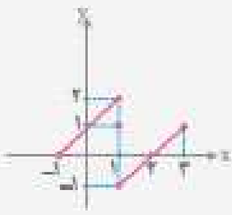
حالا حاصل $\lim_{x \to (-\frac{1}{11})^-} [-\frac{1}{x}]$ را پیدا می‌کنیم:

$$x < -\frac{1}{11} \Rightarrow \frac{1}{x} > -11 \Rightarrow -\frac{1}{x} < 11$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (-\frac{1}{11})^-} [-\frac{1}{x}] = [11^-] = 10$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (-\frac{1}{11})^+} [-\frac{1}{x}] - \lim_{x \to (-\frac{1}{11})^-} [-\frac{1}{x}] = 11 - 10 = 1$$

تست اگر $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{1+2[g(x)]}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$

۲) $-\frac{1}{3}$

۳) $-\frac{1}{4}$

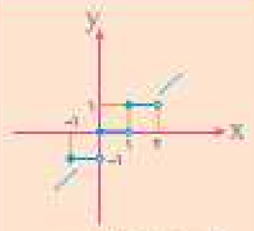
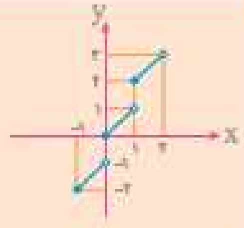
۴) 1

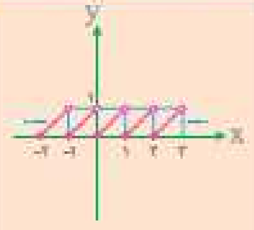
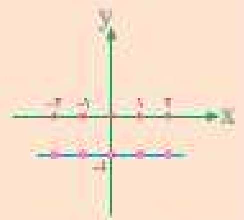
۲ می‌دانیم $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{1+2[g(x)]} = \frac{\lim_{x \to 1^-} f(x)}{1+2\lim_{x \to 1^-} [g(x)]}$ است. با توجه به نمودار تابع g در صورت سؤال $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ کمی کمتر از ۲ است. حال ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم و داریم:

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} 1 & ; x > 1 \\ -1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\lim_{x \to 1^-} f(x)}{1+2\lim_{x \to 1^-} [g(x)]}$$

$$= \frac{-1}{\underbrace{1+2 \times [2^-]}_{1+(2 \times 1)}} = -\frac{1}{3}$$

بررسی حد توابع معروف براکتی

$f(x)=[x]$	$f(x)=x+[x]$
	
تابع در تمام نقاط صحیح، فاقد حد است.	تابع در تمام نقاط صحیح، فاقد حد است.

$f(x)=x-[x]$	$f(x)=[x]+[-x]$
	
تابع در تمام نقاط صحیح، فاقد حد است.	تابع در تمام نقاط، دارای حد است و مقدار آن برابر -1 است.

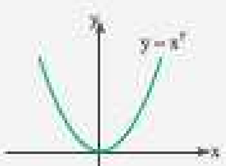
در بررسی حد توابع به شکل $[f(x)]$ وقتی $x \to x_0$ با دو حالت کلی روبه‌رو هستیم:

۱ اگر به ازای x_0 عبارت درون براکت برابر مقداری صحیح نشود، یعنی $f(x_0) \notin \mathbb{Z}$، آنگاه تابع $[f(x)]$ دارای حد می‌باشد و حد تابع با مقدار تابع برابر است. مثلاً $\lim\limits_{x\to 5}[\frac{x^2}{2}]=[\frac{25}{2}]=12$ است.

۲ اگر به ازای x_0 عبارت درون براکت مقداری صحیح شود، یعنی $f(x_0)=k \in \mathbb{Z}$، آنگاه باید حد چپ و راست تابع را پیدا کنیم. (برای این منظور می‌توانیم به نمودار تابع و وضعیت صعودی یا نزولی بودن آن در همسایگی x_0 توجه کنیم.)

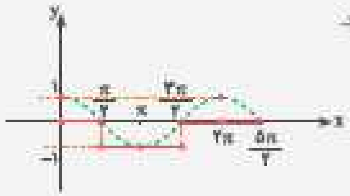
مثال بررسی کنید که تابع $y=[x^2]$ در نقاط $x=-1$ و $x=0$ و $x=1$ حد دارد یا خیر؟

با توجه به نمودار واضح است که تابع $y=[x^2]$ در نقاط $x=-1$ و $x=1$ حد ندارد و در $x=0$ دارای حد می‌باشد. همچنین با توجه به نکات ذکر شده می‌دانیم چون نمودار تابع $y=x^2$ در همسایگی نقاط $x=-1$ و $x=1$ به ترتیب رفتار نزولی و صعودی دارد، پس در این نقاط حد ندارد و چون در $x=0$ دارای مینیمم می‌باشد، پس در این نقطه حد دارد.



مثال حد تابع $y=[\cos x]$ را در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ و $x=2\pi$ به‌دست آورید.

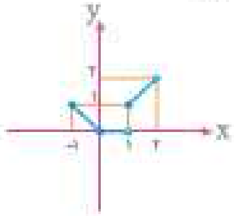
با توجه به نمودار، تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ حد ندارد و $\lim\limits_{x\to\pi}[\cos x]=-1$ و $\lim\limits_{x\to 2\pi}[\cos x]=0$ است. در ضمن با توجه به نکات ذکرشده واضح است که تابع در $x=\pi$ و $x=2\pi$ چون به ترتیب دارای ماکزیمم و مینیمم می‌باشد، پس دارای حد بوده و در $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ چون به ترتیب دارای رفتار نزولی و صعودی می‌باشد، پس حد ندارد.



نکته تابع $f(x)=(x-a)[x]$ در نقطهٔ صحیح $x=a$ دارای حد است.

مثلاً تابع $f(x)=x[x]$ در $x=0$ دارای حد است، اما در بقیهٔ نقاط صحیح حد ندارد.

$$f(x)=x[x]=\begin{cases}-x\,;\ -1\le x<0\\ 0\,;\ 0\le x<1\\ x\,;\ 1\le x<2\end{cases} \Rightarrow$$



تست اگر تابع $f(x)=(x^2-ax-3)[x]$ در $x=3$ دارای حد باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{5}{4}$

۴ به ازای $x=3$ عبارت داخل $[x]$ صحیح می‌شود، پس برای آن که تابع $f(x)$ در $x=3$ دارای حد باشد، باید $x=3$ ریشهٔ عبارت پشت براکت باشد، بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=3} x^2-ax-3=0 \Rightarrow 9-3a-3=0 \Rightarrow a=2$$

تست مجموع طول نقاط صحیحی که تابع $f(x)=(x^3-4x)[2x-1]$ در آن‌ها دارای حد می‌باشد کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۱

۱ می‌دانیم به‌ازای همهٔ نقاط صحیح عبارت داخل $[2x-1]$ مقداری صحیح خواهد شد و فاقد حد خواهد بود. بنابراین فقط به ازای ریشه‌های صحیح عبارت پشت براکت تابع f در نقاط صحیح حد دارد:

$$x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2,\ x=-2$$
$$\Rightarrow -2+0+2=0$$

اعمال جبری در حد توابع

اگر حد توابع f، g در $x=a$ موجود بوده و به ترتیب برابر اعداد حقیقی L_1، L_2 باشد، آن‌گاه می‌توانیم اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، ضرب عدد، توان رساندن و ریشهٔ nاُم را آزادانه به‌کار ببریم. البته باید توجه کرد که در تقسیم دو تابع، حد تابع واقع در مخرج کسر صفر نباشد و نیز در ریشهٔ زوج گرفتن، حد تابع زیر رادیکال مقداری منفی نباشد؛ یعنی:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=L_1\pm L_2$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{L_1}{L_2},\ L_2\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)=L_1.L_2$$

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x)=cL_1$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=(\lim_{x\to a}f(x))^n=L_1^n$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{L_1}$$

تذکر در $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}$، توجه کنید که $\sqrt[n]{f(x)}$ حتماً باید در یک همسایگی a تعریف شده باشد و برای nهای زوج $L_1\geq 0$ باشد.

مثلاً تابع $f(x)=x$ در نقطهٔ $x=0$ حد دارد، اما تابع $y=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x}$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا در همسایگی چپ $x=0$ تعریف‌شده نیست.

تست اگر تابع f در $x=1$ دارای حد باشد و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+4x-1}{2f(x)+x^2+1}=\dfrac{1}{3}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ کدام است؟

۱) -7 ۲) 9 ۳) -4 ۴) 2

۱
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+4x-1}{2f(x)+x^2+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{\lim\limits_{x\to 1}f(x)+4-1}{2\lim\limits_{x\to 1}f(x)+1+1}=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow 3\lim_{x\to 1}f(x)+9=2\lim_{x\to 1}f(x)+2\Rightarrow\lim_{x\to 1}f(x)=-7$$

تست اگر دو تابع f و g در $x=1$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to 1}(f+2g)(x)=6$ و $\lim\limits_{x\to 1}(f-g)(x)=\dfrac{3}{2}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{f^2}{g})(x)$ کدام است؟

۱) 9 ۲) 6 ۳) $\dfrac{2}{3}$ ۴) $\dfrac{4}{3}$

۲ با توجه به قوانین حد داریم:

$$1)\ \lim_{x\to 1}(f+2g)(x)=\lim_{x\to 1}f(x)+2\lim_{x\to 1}g(x)=6$$
$$2)\ \lim_{x\to 1}(f-g)(x)=\lim_{x\to 1}f(x)-\lim_{x\to 1}g(x)=\frac{3}{2}$$

از حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\dfrac{3}{2}$ است، پس:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{f^2}{g})(x)=\frac{3^2}{\frac{3}{2}}=\frac{18}{3}=6$$

بررسی حد در اعمال جبری

با داشتن دو تابع f و g برای بررسی وضعیت حد در تابع‌های $f\pm g$ و $f\times g$ و $\dfrac{f}{g}$ به موارد زیر توجه کنید:

۱ اگر دو تابع f، g در $x=a$ دارای حد باشند، در این صورت توابع $f\pm g$، $f\times g$، $\dfrac{f}{g}$ (به شرط $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$) دارای حد هستند.

۲ اگر تابع f در $x=a$ دارای حد باشد، ولی تابع g در $x=a$ حد نداشته باشد، توابع $f\pm g$ در $x=a$ فاقد حد هستند، اما توابع $f\times g$، $\dfrac{f}{g}$ ممکن است در $x=a$ دارای حد باشند یا نباشند؛ بنابراین باید وجود حد را در آن‌ها بررسی کنیم.

۳ اگر توابع f، g هر دو در $x=a$ فاقد حد باشند، توابع $\dfrac{f}{g}$، $f.g$ و $f\pm g$ ممکن است در $x=a$ دارای حد باشند یا نباشند.

مثلاً دو تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & ;x\leq 1\\ 6 & ;x>1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}5 & ;x\leq 1\\ -2 & ;x>1\end{cases}$ را در نظر بگیرید. این توابع در $x=1$ حد ندارند، اما تابع $f+g$ در این نقطه حد دارد:

$$(f+g)(x)=\begin{cases}4 & ;x\leq 1\\ 4 & ;x>1\end{cases}\xrightarrow{\text{به ازای هر مقدار } x}(f+g)(x)=4$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}(f+g)(x)=4$$

همچنین تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ;x\geq 0\\ -1 & ;x<0\end{cases}$ در $x=0$ حد ندارد ولی تابع f^2 در $x=0$ حدی برابر ۱ دارد:

$$(f^2)(x)=(f.f)(x)=\begin{cases}1 & ;x\geq 0\\ 1 & ;x<0\end{cases}\Rightarrow f^2(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}f^2(x)=1$$

تست در کدام گزینه، توابع f و g در $x=1$ حد ندارند، اما تابع $f+g$ در $x=1$ دارای حد است؟

۱) $f(x)=[x]$، $g(x)=|x|$

۲) $f(x)=|x|$، $g(x)=x$

۳) $f(x)=[x]$، $g(x)=\begin{cases}2 & ;x\geq 1\\ -2 & ;x<1\end{cases}$

۴) $f(x)=[x]$، $g(x)=[-x]$

۴ در گزینهٔ (۱) تابع g در $x=1$ حد دارد. در گزینهٔ (۲) نیز هر دو تابع f و g در $x=1$ دارای حد هستند. اما در بقیهٔ گزینه‌ها توابع f و g در $x=1$ حد ندارند. پس:

$$3)\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}[x]+\lim\limits_{x\to 1^+}2=1+2=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[x]+\lim\limits_{x\to 1^-}(-2)=0-2=-2\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}[x]+\lim\limits_{x\to 1^+}[-x]=1-2=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[x]+\lim\limits_{x\to 1^-}[-x]=0-1=-1\end{cases}$$

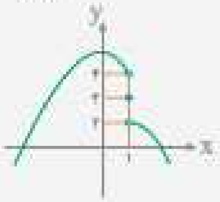
حد تابع مرکب

برای به‌دست آوردن حد تابع مرکب fog در $x=a$ ابتدا باید حد تابع درونی یعنی g را در $x=a$ به‌دست آوریم. اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=\lim_{x\to L} f(x)$$

اگر نمودار تابع f در $x=L$ دارای پرش باشد [یعنی حد چپ و راست تابع f در $x=L$ برابر نباشند] برای تعیین $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ باید مشخص کنیم که g با مقادیر بیشتر از L به L نزدیک می‌شود یا با مقادیر کمتر از آن. سپس حد تابع f را وقتی $x\to L^+$ یا $x\to L^-$ محاسبه می‌کنیم.

مثال نمودار تابع f به‌صورت زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} f(2-x)$ را به‌دست آورید.



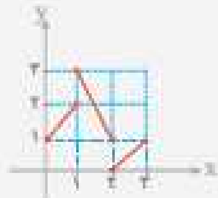
وقتی $x\to 1^-$ داریم:

$$x<1 \Rightarrow -x>-1 \Rightarrow 2-x>1$$

یعنی وقتی $x\to 1^-$ عبارت $2-x$ کمی بزرگتر از یک است. بنابراین برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(2-x)$ کافیست $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(2-x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

تست نمودار تابع f به‌صورت زیر است. حاصل چه تعداد از حدهای زیر به‌درستی محاسبه شده است؟



الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(1-x)=2$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(2-x^2)=0$

پ) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x+2)=1$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) وقتی $x\to 0^+$ یعنی $x>0$ پس $-x<0$ و $1-x<1$ است، درنتیجه $1-x\to 1^-$ و داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(1-x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$$

ب) وقتی $x\to 0$ پس $x^2\to 0^+$ و $-x^2\to 0^-$ و در نتیجه $2-x^2\to 2^-$ بنابراین:

$$\lim_{x\to 0} f(2-x^2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=1$$

پ) وقتی $x\to 0^-$ نتیجه می‌گیریم $x+2\to 2^-$ پس:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x+2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=1$$

تعیین مقدار پارامتر در حد تابع

هرگاه از ما بخواهند مقدار پارامترهای تابع را به‌گونه‌ای تعیین کنیم که تابع در یک نقطهٔ مشخص دارای حد باشد، باید حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ مشخص‌شده به‌دست آوریم و آن‌ها را مساوی قرار دهیم تا به کمک تساوی، مقدار پارامتر را تعیین کنیم.

تست به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\dfrac{a|x|}{x}-4[x]$ در $x=0$ حد دارد؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۴ برای این‌که تابع در $x=0$ دارای حد باشد، باید حد راست و حد چپ آن در این نقطه برابر باشند:

$$1)\ x\to 0^+ \Rightarrow x>0 \Rightarrow |x|=x,\ [x]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a(x)}{x}-4(0)\right)=a$$

$$2)\ x\to 0^- \Rightarrow x<0 \Rightarrow |x|=-x,\ [x]=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{a(-x)}{x}-4(-1)\right)=-a+4$$

بنابراین از (۱) و (۲) داریم: $a=-a+4 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$

حد تابع دو ضابطه‌ای

برای محاسبهٔ حد در توابع چند ضابطه‌ای به‌صورت $f(x)=\begin{cases} \bullet & ; x>a \\ \blacktriangle & ; x<a \end{cases}$ که در آن ● و ▲ عبارت‌هایی برحسب x هستند:

۱ اگر بخواهیم حد تابع را در نقطه‌ای غیر از نقطهٔ مرزی a محاسبه کنیم، باید به سراغ ضابطه‌ای برویم که نقطهٔ موردنظر متعلق به بازهٔ متناظر با آن باشد.

۲ اگر بخواهیم حد تابع را در $x=a$ [نقطهٔ مرزی] محاسبه کنیم، باید حد چپ و راست تابع را به‌دست آوریم.

مثلاً برای محاسبهٔ حد تابع $f(x)=\begin{cases} x-1 & ; x>2 \\ x^2 & ; x\le 2 \end{cases}$ در نقطهٔ مرزی $x=2$ حد راست و چپ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x)&=\lim_{x\to 2^-} x^2=2^2=4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)&=\lim_{x\to 2^+}(x-1)=2-1=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ تابع در $x=2$ حد ندارد.

تست اگر $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & ; x\ge 1 \\ x^2+6 & ; x<1 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-2 & ; x\ge 1 \\ 2x & ; x<1 \end{cases}$ کدام تابع زیر در $x=1$ حد دارد؟

۱) $f+g$ ۲) $\dfrac{f}{g}$ ۳) $f-g$ ۴) $f\times g$

۳ حد راست و چپ همهٔ توابع داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$1)\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1+x-2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+6+2x)=9 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1}{x-2}=-4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+6}{2x}=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1-(x-2))=5 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+6-2x)=5 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}((3x+1).(x-2))=-4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}((x^2+6).(2x))=14 \end{cases}$$

تست اگر $f(x)=\begin{cases}2ax-3 & ; x<-2\\ -x^2+1-a & ; x\geq -2\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)+\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=4$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۱

۲ برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$ از ضابطهٔ بالا و برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ از ضابطهٔ پایین استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(2ax-3)=-4a-3$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-x^2+1-a)=-4+1-a=-3-a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-2)^-} f(x)+\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=4 \Rightarrow \underbrace{(-4a-3)+(-3-a)}_{-5a-6}=4 \Rightarrow a=-2$$

تست اگر حد تابع $f(x)=\begin{cases}(b+1)[x]+|x| & ; x>-1\\ 3 & ; x=-1\\ a[x]+2bx-1 & ; x<-1\end{cases}$ در $x=-1$ برابر ۵ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳- ۳) ۲ ۴) ۵-

۳ چون حد تابع f در $x=-1$ برابر ۵ است، پس حد راست و حد چپ تابع نیز برابر ۵ هستند:

$$1)\ x\to(-1)^+ \Rightarrow x>-1 \Rightarrow [x]=-1, |x|=-x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\big((b+1)[x]+|x|\big)=\lim_{x\to(-1)^+}\big(-(b+1)-x\big)$$

$$=-(b+1)-(-1)=-b-1+1=-b \Rightarrow -b=5 \Rightarrow b=-5$$

$$2)\ x\to(-1)^- \Rightarrow x<-1 \Rightarrow [x]=-2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(a[x]+2bx-1)=\lim_{x\to(-1)^-}(-2a+2(-5)x-1)$$

$$=-2a-10(-1)-1=-2a+9=5 \Rightarrow -2a=-4 \Rightarrow a=2$$

در توابع چندضابطه‌ای به‌صورت $f(x)=\begin{cases}k & ; x=a\\ \blacktriangle & ; x\neq a\end{cases}$ که در آن k عددی حقیقی و ثابت باشد، برای محاسبهٔ حد تابع f در هر نقطه، از جمله خودِ نقطهٔ $x=a$، باید حد $\blacktriangle$ را در آن نقطه محاسبه کنیم؛ یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\blacktriangle$$

مثال در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}0 & ; x\in Z\\ x^2-1 & ; x\notin Z\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} f(x)$ را به دست آورید.

برای محاسبهٔ حد تابع در هر نقطه فقط از ضابطهٔ مربوط به $x\notin Z$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-1)=2^2-1=3$$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{5}}(x^2-1)=(\sqrt{5})^2-1=5-1=4$$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

اگر حد هر دو تابع f و g در $x=a$ صفر باشد، آن‌گاه حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ را نمی‌توان با جای‌گذاری $x=a$ پیدا کرد؛ چون با جای‌گذاری $x=a$ به عبارت بی‌معنی و غیرقابل محاسبهٔ $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. عبارت $\frac{0}{0}$ یکی از حالت‌هایی است که به آن مبهم می‌گویند.

در حالت مبهم $\frac{0}{0}$، صورت و مخرج دقیقاً عدد صفر نیستند، بلکه به سمت صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین می‌توانیم عامل‌های صفر شونده در صورت و مخرج را مشخص و با هم ساده کنیم. به این عمل رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می‌گویند.

مثلاً برای محاسبه حد تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-8}$ در $x=2$ داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

در توابع شامل جزء صحیح، اگر پس از حذف براکت، صورت یا مخرج دقیقاً صفر شود، حالت مبهم ایجاد نمی‌شود و به‌ترتیب، جواب صفر یا تعریف‌نشده می‌شود. به حدهای زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{[x-1]}{x-1}=\frac{[1^+-1]}{1^+-1}=\frac{[0^+]}{0^+}=\frac{0}{0^+}=0$$

$$\lim_{x\to 6^-}\frac{x^2+2}{[x-2]-3}=\frac{6^2+2}{[6^--2]-3}=\frac{38}{[4^-]-3}$$

$$=\frac{38}{3-3}=\frac{38}{0}\ \text{تعریف نشده}$$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{[x]+3}{x+2}$ کدام است؟ (داخل - ۹۹)

۱) $-\infty$ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

۳ وقتی $x\to(-2)^-$ مقدار $[x]$ برابر ۳- می‌شود، پس:

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{[x]+3}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{-3+3}{x+2}=\frac{0\ \text{مطلق}}{0\ \text{حدی}}=$$

برای رفع ابهام حد $\frac{0}{0}$ می‌توانیم به کمک فاکتورگیری و تجزیه یا گویا کردن، عوامل صفرشونده مشترک در صورت و مخرج کسر را از بین ببریم و سپس حاصل حد را به‌دست آوریم.

برای رفع ابهام حد $\frac{0}{0}$ به کمک فاکتورگیری و تجزیه به مثال زیر توجه کنید:

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^3+3(x-2)}{x^2-x-2}$ را به‌دست آورید.

۱) عامل صفرشونده را در صورت و مخرج کسر ایجاد کرده و از آن فاکتور می‌گیریم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\big((x-2)^2+3\big)}{(x-2)(x+1)}$$

۲) عامل صفرشوندهٔ صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم و حاصل را با کمک قوانین حد به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2+3}{x+1}=\frac{0+3}{2+1}=1$$

برای رفع ابهام حد $\frac{0}{0}$ به کمک گویا کردن کسرهای شامل $a+\sqrt{b}$ یا $a+\sqrt[3]{b}$ به مثال زیر توجه کنید:

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-\sqrt{x+3}}{x-1}$ را به‌دست آورید.

۱) در کسرهای شامل رادیکال با فرجهٔ ۲، صورت و مخرج کسر را در مزدوج ضرب و در کسرهای شامل رادیکال با فرجهٔ ۳ از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-\sqrt{x+3}}{x-1}\times\frac{2x+\sqrt{x+3}}{2x+\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to1}\frac{4x^2-x-3}{(x-1)(2x+\sqrt{x+3})}$$

۲) از عامل صفرشونده در صورت و مخرج کسر فاکتور گرفته و آن را ساده می‌کنیم و حاصل را با کمک قوانین محاسبهٔ حد، به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(2x+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to1}\frac{4x+3}{2x+\sqrt{x+3}}=\frac{4(1)+3}{2+2}=\frac{7}{4}$$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{12}$ ۲) $-\frac{7}{12}$ ۳) $-\frac{5}{24}$ ۴) $-\frac{7}{24}$

۴

$$\lim_{x\to-3}\frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-3}\frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3}\times\frac{x-\sqrt{x+12}}{x-\sqrt{x+12}}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\overbrace{x^2-(x+12)}^{(x-4)(x+3)}}{(x-1)(x+3)(x-\sqrt{x+12})}=\lim_{x\to-3}\frac{x-4}{(x-1)(x-\sqrt{x+12})}$$

$$=\frac{-7}{(-4)(-3-3)}=\frac{-7}{24}$$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x-[2x]}{x^2-x-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱ وقتی $x\to2^+$ یعنی $x>2$ و در نتیجه $2x>4$ است. پس در این شرایط $[2x]=4$ است و داریم:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{2x-4}{x^2-x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{2}{x+1}=\frac{2}{3}$$

قاعدهٔ هوپیتال

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر پس از جای‌گذاری $x=a$ به ابهام $\frac{0}{0}$ برسیم، برای رفع ابهام می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم. طبق این قاعده به جای $\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم از کسر $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وقتی $x\to a$ حد بگیریم، یعنی:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}\overset{Hop}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{4}}}=-2$$

در محاسبهٔ حد کسرهای شامل رادیکال، اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود، نمی‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم؛ در این حدها باید ابتدا رادیکال را از بین ببریم و سپس حد را محاسبه کنیم.

تست حاصل $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۲ با جای‌گذاری $x=2$ در کسر داده‌شده به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\lim_{x\to2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\underbrace{|x-2|}_{+}}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}\overset{Hop}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to2^+}\frac{0-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{1}$$

$$=-\frac{1}{3\underbrace{\sqrt[3]{8^2}}_{4}}=-\frac{1}{12}$$

البته بعد از برداشتن قدرمطلق، می‌توانستیم صورت کسر را گویا کنیم و رفع ابهام انجام دهیم.

هم‌ارزی کم‌توان و برنولی

برای رفع ابهام حدهای $\frac{0}{0}$ که در صورت و مخرج آن‌ها عبارت‌های چندجمله‌ای یا رادیکالی (فاقد عدد ثابت) وجود دارد، وقتی که متغیر به سمت صفر میل می‌کند، می‌توانیم عبارت با کم‌ترین درجه را در صورت و مخرج انتخاب و بقیهٔ عبارت‌ها را حذف کنیم. مثلاً:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+2x}{4x^2+3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{16x}}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $\frac{-1}{2}$

۲ با جای‌گذاری عدد صفر در تابع به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. از آن‌جایی که x به سمت 0^+ میل می‌کند برای رفع ابهام می‌توانیم عبارت‌های کم‌توان صورت و مخرج کسر را انتخاب کنیم:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{16x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x}}=\frac{1}{2}$$

طبق هم‌ارزی برنولی، برای محاسبهٔ حدهایی که شامل عبارت توان‌دار به صورت $(1+u)^n$ هستند، اگر $u\to0$ می‌توانیم به جای $(1+u)^n$ عبارت $1+nu$ قرار دهیم، یعنی:

$$(1+u)^n\approx1+nu$$

مثلاً برای محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-1}{x^2}$ می‌توانیم از هم‌ارزی برنولی استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

می‌توان از هم‌ارزی برنولی نتیجه گرفت اگر $u\to 0$ آن‌گاه هم‌ارزی $\sqrt[n]{1+u}\sim 1+\frac{1}{n}u$ برقرار است.

یک مسئلهٔ خاص در رفع ابهام $\frac{0}{0}$

اگر در محاسبهٔ حد توابع کسری که در صورت و مخرج کسر، عبارت چندجمله‌ای یا رادیکالی وجود دارد، حاصل حد یک عدد حقیقی شود اما حد صورت یا مخرج کسر برابر با صفر باشد، آن‌گاه کسر دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است و نیاز به رفع ابهام دارد.

تست اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 1

۲ صورت کسر به ازای $x=2$ برابر صفر می‌شود، اما از آن‌جایی که حاصل حد برابر عدد $\frac{1}{2}$ است، پس کسر دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.

بنابراین $x=2$ ریشهٔ مخرج کسر نیز است: $a(2)+b=0 \quad (1)$

از طرفی پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود، پس:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}\overset{\text{Hop}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a}=\frac{1-\frac{3}{4}}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

با جای‌گذاری a در (۱) داریم:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)+b=0\Rightarrow b=-1$$

تست اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟

۱) -8 ۲) -6 ۳) 4 ۴) 5

۱ مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود، اما از آن‌جایی که حاصل حد برابر عدد $\frac{3}{2}$ است، پس کسر دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.

بنابراین $x=1$ ریشهٔ صورت کسر نیز است:

$$(1)\ \sqrt{a+b}-2=0\Rightarrow \sqrt{a+b}=2\Rightarrow a+b=4$$

از طرفی پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر $\frac{3}{2}$ می‌شود، پس:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}\overset{\text{HOP}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x}=\frac{\frac{a}{2\sqrt{a+b}}}{2}$$

$$=\frac{a}{8}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2a=24\Rightarrow a=12\xrightarrow{(1)}12+b=4\Rightarrow b=-8$$

$\frac{0}{0}$ مثلثاتی

برای رفع ابهام کسرهای $\frac{0}{0}$ که در صورت و مخرج آن‌ها عبارت مثلثاتی وجود دارد، باید عامل صفرشونده در صورت و مخرج را به کمک اتحادهای جبری یا مثلثاتی، تجزیه یا فاکتورگیری از بین ببریم.

مثلاً برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3x-\sin^3x}{\cos x-\sin x}$ با جای‌گذاری $x=\frac{\pi}{4}$ در صورت و مخرج به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}\overbrace{(\cos^2x+\sin x\cos x+\sin^2x)}^{1+\sin x\cos x}}{\cancel{\cos x-\sin x}}$$

$$=1+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

برای محاسبهٔ حدهای مثلثاتی، وقتی کمان آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند، می‌توانیم از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های مثلثاتی وقتی $u\to 0$		
$\sin u\sim u$	$\cos u\sim 1-\frac{u^2}{2}$	$\tan u\sim u$
$\sin^n u\sim u^n$	$\cos^n u\sim 1-n\frac{u^2}{2}$	$\tan^n u\sim u^n$

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-2\cos 2x}}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

چون $2x\to 0^-$ می‌توانیم از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-2\cos 2x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-2\left(1-\frac{4x^2}{2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2|\overset{-}{x}|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x}=-2$$

اگر پس از استفاده از هم‌ارزی‌ها، همهٔ عبارت‌های موجود در صورت یا مخرج کسر با هم ساده شوند، حاصل حد، قابل‌اطمینان نیست. برای حل این مسائل باید از فاکتورگیری، اتحادها و گویا کردن استفاده کنیم و سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

تست حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) 1 ۲) 2 ۳) π ۴) 2π

۲ وقتی $x\to 1^+$، مقدار $[x]$ برابر ۱ است، پس:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\cos^2\pi x}{1+\cos\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\cos\pi x)\cancel{(1+\cos\pi x)}}{\cancel{1+\cos\pi x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}(1-\cos\pi x)=1-\cos\pi=1-(-1)=2$$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x-\cot x}{\sin x-\cos x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $4\sqrt{2}$

۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-\cot x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x-\cos x}$$

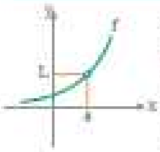
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin x\cos x}}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

نمودارهای حفره‌دار

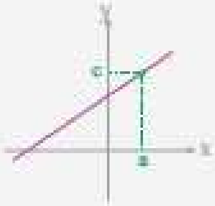
در بعضی سؤالات، نمودار تابع کسری f داده می‌شود که در نقطهٔ $x=a$ دارای حفره (نقطهٔ توخالی) است. در این سؤالات باید به دو مورد زیر توجه کرد:



۱ $x=a$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر تابع f است.

۲ حاصل حد تابع f وقتی $x\to a$ برابر L است.

تست نمودار زیر مربوط به تابع $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+b}$ است. مقدار $a-b+c$ کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۴ با توجه به شکل صورت سؤال، نمودار تابع f در سمت راست محور yها دارای حفره است، پس $x=a$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر است. از آن‌جایی که ریشه‌های صورت کسر $x=1$ و $x=-3$ هستند، پس $a=1$ بوده و مخرج کسر را نیز صفر می‌کند:

$1+b=0 \Rightarrow b=-1$

از طرفی داریم:

$$c=\lim_{x\to1} f(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1}\frac{\overbrace{x^2+2x-3}^{(x-1)(x+3)}}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

پس $a-b+c=1-(-1)+4=6$ است.

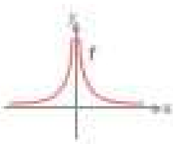
درس ۳ حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

مفهوم حد بی‌نهایت

اگر با نزدیک شدن x به a، مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش یا کاهش یابد، آن‌گاه می‌گوییم، حاصل حد به بی‌نهایت میل می‌کند و به صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ نشان داده می‌شود. این گونه حدها را حد نامتناهی می‌نامند. توجه کنید $+\infty$، $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند؛ یعنی این حدها وجود ندارند.

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این‌صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یعنی می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم، به‌شرطی که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم. به طور مشابه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ در شکل مقابل رسم شده است.



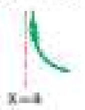
در جدول زیر، رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطهٔ $x=0$ بررسی می‌کنیم:

به صفر نزدیک می‌شویم. به صفر نزدیک می‌شویم.

x	...	$-0/1$	$-0/01$	0	$0/01$	$0/1$	...
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	...	۱۰۰	۱۰۰۰۰	تعریف نشده	۱۰۰۰۰	۱۰۰	...

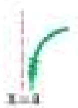
بنابراین می‌توان گفت $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ است.

فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد، رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ یعنی می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ‌تر کنیم، به‌شرطی که x با مقادیر بزرگ‌تر از a را به قدر کافی به a نزدیک کرده باشیم. سایر حدهای یک‌طرفه نامتناهی نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

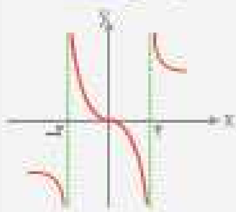
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

تست نمودار تابع f به‌صورت زیر است. کدام گزینه نادرست است؟



۱) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

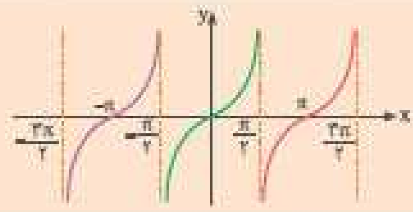
۳) $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x)=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x)=-\infty$

۳ با توجه به نمودار، وقتی $x\to(-2)^+$ شاخهٔ منحنی به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$ است.

بررسی تابع تانژانت در $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=-\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty$
$\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty$



محاسبهٔ حدود نامتناهی

در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ برابر با عدد حقیقی L و مخالف صفر و حاصل $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ برابر با صفر باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{0}=\infty$$

در حالتی که $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ است، برای مشخص‌کردن علامت ∞، علامت‌های حد صورت و صفر مخرج [یعنی 0^+ یا 0^-] را بررسی می‌کنیم که به‌صورت جدول زیر است:

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$	
۱) اگر $L>0$ و g در همسایگی محذوف a مثبت باشد و داریم: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L>0}{0^+}=+\infty$	۲) اگر $L>0$ و g در همسایگی محذوف a منفی باشد، داریم: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L>0}{0^-}=-\infty$
۳) اگر $L<0$ و g در همسایگی محذوف a مثبت باشد، داریم: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L<0}{0^+}=-\infty$	۴) اگر $L<0$ و g در همسایگی محذوف a منفی باشد، داریم: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L<0}{0^-}=+\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \quad,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty \quad,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$$

تست در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2-1}{x+|x|}$ کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

چون تابع f برای $x\le 0$ تعریف نشده است، پس $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ وجود ندارد. توجه کنید دامنهٔ تابع، بازهٔ $(0,+\infty)$ است. حال حاصل حد تابع را وقتی $x\to 0^+$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x+|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{2x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

تست مقدار $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) (داخل - ۱۴۰۰)

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

۱ وقتی $x\to(-\frac{1}{2})^-$، یعنی $x<-\frac{1}{2}$، پس:

$$x^2>\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x^2}<4\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{x^2}<12\Rightarrow[\frac{3}{x^2}]=11\\ -\frac{2}{x^2}>-8\Rightarrow[-\frac{2}{x^2}]=-8\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x+6}{16x+8}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ برابر با عدد حقیقی و مخالف صفر L و حاصل $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{\infty}=0$$

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{x+3}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

با توجه به نمودار تابع $y=\tan x$، واضح است که $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ است.

از طرفی $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(x+3)=\frac{\pi}{2}+3$، بنابراین طبق قضیهٔ فوق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{x+3}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{2}+3}{-\infty}=0$$

قضایای حدود نامتناهی

اگر حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ برابر عدد حقیقی و مخالف صفر L و حاصل $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ نامتناهی باشد، آن‌گاه:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)$
$L>0$	$+\infty$	$L+\infty=+\infty$	$L-\infty=-\infty$	$(L)(+\infty)=+\infty$
	$-\infty$	$L-\infty=-\infty$	$L-(-\infty)=+\infty$	$(L)(-\infty)=-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$L+\infty=+\infty$	$L-\infty=-\infty$	$(L)(+\infty)=-\infty$
	$-\infty$	$L-\infty=-\infty$	$L-(-\infty)=+\infty$	$(L)(-\infty)=+\infty$

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+2-\frac{1}{|x|})$ را به‌دست آورید.

از آن‌جایی که $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+2)=2$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$ است، با توجه به جدول فوق $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+2-\frac{1}{|x|})=-\infty$ است.

تست اگر $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)(\frac{1}{9-x^2})=+\infty$ تابع $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $10x+3$ ۲) $10x-3$ ۳) $10-3x$ ۴) $3x-10$

۴ وقتی $x\to 3^+$، مخرج کسر یعنی عبارت $9-x^2$ به سمت 0^- میل می‌کند. از طرفی چون حاصل حد برابر $+\infty$ است، مقدار تابع $f(x)$ در همسایگی راست ۳، منفی است؛ پس $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ عددی منفی خواهد بود. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $\lim\limits_{x\to 3^+}(10x+3)=10(3)+3=33$

۲) $\lim\limits_{x\to 3^+}(10x-3)=10(3)-3=27$

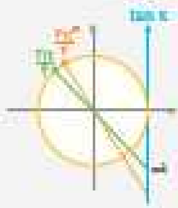
۳) $\lim\limits_{x\to 3^+}(10-3x)=10-3(3)=1$

۴) $\lim\limits_{x\to 3^+}(3x-10)=3(3)-10=-1$

حدهای نامتناهی مثلثاتی

در سوالاتی که حاصل حد یک کسر شامل عبارت‌های مثلثاتی نامتناهی خواسته می‌شود، برای این‌که تعیین کنیم حاصل $+\infty$ می‌شود یا $-\infty$ می‌توانیم از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کنیم.

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to (\frac{3}{4})^-}\frac{x+1}{1+\tan\pi x}$ را به‌دست آورید.



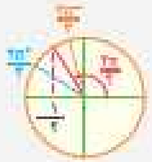
$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{3}{4})^-}\frac{x+1}{1+\tan\pi x}=\frac{\frac{3}{4}+1}{0^-}=-\infty$$

تست در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x}{1+2\cos x}$ کدام بیان، درست است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^+} f(x)=-\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^+} f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^-} f(x)=-\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to\frac{4\pi}{3}} f(x)=+\infty$

۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



در گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) با قرار دادن $x=\frac{2\pi}{3}$ در تابع f، مخرج کسر صفر می‌شود، زیرا $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ است. بنابراین:

$$1 \text{ و } 2)\ \lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^+}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-}=-\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^-}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+}=+\infty$$

۴) چون $x=\frac{4\pi}{3}$ ریشهٔ سادهٔ مخرج کسر است، پس ممکن نیست حد دوطرفه تابع فقط برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.

تعیین مقدار پارامتر در حدود نامتناهی

اگر حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، اما مشخص نباشد که x از کدام جهت به a میل می‌کند، در این صورت، وقتی $x\to a$:

۱ حاصل حد مخرج برابر با صفر است.

۲ علامت حد مخرج همواره مثبت یا همواره منفی است.

(اگر مخرج کسر عبارتی درجهٔ دوم باشد، نتیجه می‌گیریم که عبارت مربع کامل است.)

مثال اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2-2ax+b}=+\infty$ باشد، پارامترهای a، b را به‌دست آورید.

وقتی $x\to 1$، صورت کسر یعنی $2x+1$ به سمت ۳ می‌رود. حال برای آن‌که حد کسر بی‌نهایت شود، باید مخرج کسر به سمت صفر برود. پس باید $x=1$ ریشهٔ مخرج کسر باشد. از طرفی علامت بی‌نهایت مثبت است، پس با توجه به این که حد صورت کسر مثبت است، حد مخرج کسر باید همواره مثبت باشد. پس $x=1$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است، نتیجه می‌گیریم مخرج کسر به‌صورت $(x-1)^2=x^2-2x+1$ خواهد بود. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$-2=-2a\Rightarrow a=1,\ b=1$$

تست اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-5}{2x^2+ax+b}=-\infty$ مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

۲ وقتی $x\to 2$ حاصل حد مقداری نامتناهی است، پس $x=2$ ریشهٔ مخرج کسر است. از طرفی با نزدیک شدن x به عدد ۲ صورت کسر عددی منفی و حاصل حد $-\infty$ شده است، پس $x=2$ باید ریشهٔ مضاعف مخرج کسر باشد. پس مخرج کسر شامل عبارت $(x-2)^2$ است. حال با توجه به این‌که ضریب x^2 برابر ۲ می‌باشد، مخرج کسر به‌صورت $2(x-2)^2$ خواهد بود:

$$2x^2+ax+b=2(x-2)^2=2(x^2-4x+4)=2x^2-8x+8$$

پس $a=-8$ و $b=8$ و در نتیجه $a+b=0$ است.

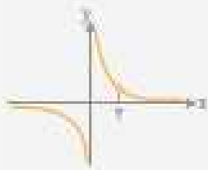
تعیین مقدار پارامتر در سؤالات نموداری

در توابع کسری، اگر نمودار تابع f را داشته باشیم، برای مشخص کردن مقادیر پارامترهای ضابطهٔ f، باید به دو مورد زیر توجه کنیم:

۱ اگر با میل کردن x به سمت a، شاخه‌های منحنی به سمت مثبت یا منفی بی‌نهایت بروند، نقطهٔ $x=a$ ریشهٔ مخرج کسر خواهد بود.

۲ طول نقطهٔ توخالی در نمودار، ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر است. اگر با میل کردن x به سمت a، هردو شاخهٔ منحنی به سمت مثبت بی‌نهایت یا منفی بی‌نهایت بروند، می‌گوییم تابع f در $x=a$ انفصال مضاعف دارد.

تست نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+bx+c}$ به صورت زیر است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



۱) -1

۲) -2

۳) -3

۴) -4

۴ چون شاخه‌های منحنی در اطراف $x=0$ به سمت بی‌نهایت می‌روند، پس $x=0$ ریشهٔ مخرج کسر است:

$$0^2+b(0)+c=0\Rightarrow c=0$$

از طرفی $x=2$ طول نقطهٔ توخالی است، پس $x=2$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر است:

$$2+a=0\Rightarrow a=-2$$

$$2^2+b(2)+0=0\Rightarrow 2b=-4\Rightarrow b=-2$$

بنابراین $a+b+c=(-2)+(-2)+0=-4$ است.

تست نمودار تابع $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ به‌صورت زیر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) -1

۱ در اطراف $x=1$، شاخه‌های منحنی تابع f به سمت $+\infty$ میل می‌کنند، پس $x=1$ ریشهٔ مضاعف مخرج است، بنابراین مخرج کسر، به‌صورت $(x-1)^2$ است و خواهیم داشت:

$$x^2+bx+c=(x-1)^2=x^2-2x+1\Rightarrow b=-2\ ,\ c=1$$

از طرفی منحنی از نقطهٔ $(0,1)$ می‌گذرد، پس:

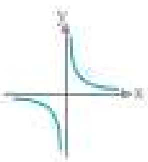
$$f(0)=1\Rightarrow\frac{a}{0+b(0)+c}=1\Rightarrow\frac{a}{1}=1\Rightarrow a=1$$

مفهوم حد در بی‌نهایت

فرض کنید تابع f در بازهٔ $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ به این معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به مقدار دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود. یعنی وقتی حد تابع در $+\infty$ برابر L می شود، نمودار تابع در $+\infty$ به خط افقی $y=L$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

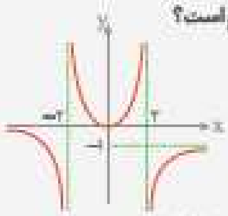
فرض کنید تابع f در بازهٔ $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به مقدار دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x به قدر کافی کوچک اختیار شود. یعنی وقتی حد تابع در $-\infty$ برابر L می‌شود، نمودار تابع در $-\infty$ به خط افقی $y=L$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

مثلاً با توجه به نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$، داریم:



$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\quad \text{و}\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

تست نمودار تابع f به‌صورت زیر است. اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$ باشد مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) -1

۲) -2

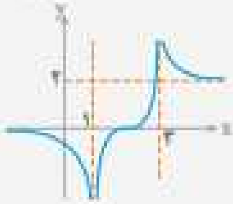
۳) -3

۴) -4

۳ با توجه به نمودار، وقتی $x\to(-2)^-$ شاخهٔ منحنی به سمت $-\infty$ میل می‌کند، پس $a=-2$ است. از طرفی وقتی $x\to+\infty$ حاصل حد برابر -1 می‌شود، پس $b=-1$ است. بنابراین:

$a+b=(-2)+(-1)=-3$

تست نمودار تابع f به‌صورت زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(f(x))$ کدام است؟



۱) $+\infty$

۲) $-\infty$

۳) 1

۴) صفر

۴ با توجه به نمودار، وقتی $x\to 1$ نتیجه می‌گیریم $f(x)\to-\infty$ پس:

$\lim\limits_{x\to 1} f(f(x))=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

قضایای محاسبهٔ حد در بی‌نهایت

اگر n عدد طبیعی باشد، قضایای زیر برای محاسبهٔ حد در بی‌نهایت برقرارند:

۱ برای nهای زوج:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n=+\infty$$

۲ برای nهای فرد:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$$

۳ اگر a عدد حقیقی باشد، برای تمام مقادیر n:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^n}=0$$

حد نامتناهی در بی‌نهایت

- فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، در این صورت:

۱ رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ به این معناست که مقادیر $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

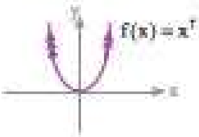
۲ رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ به این معناست که مقادیر $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که x به‌قدر کافی بزرگ اختیار شود.

- فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، در این صورت:

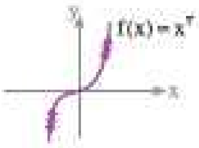
۱ رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ به این معناست که مقادیر $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که x به مقدار کافی کوچک و منفی اختیار شود.

۲ رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ به این معناست که مقادیر $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن‌که x به مقدار کافی کوچک و منفی اختیار شود.

مثلاً با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^2$ و $f(x)=x^3$ خواهیم داشت:



$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\end{cases}$$

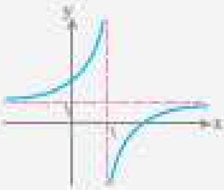


$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\end{cases}$$

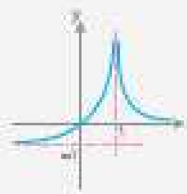
تذکر رابطه‌هایی مانند $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ را حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم. در این حالت‌ها حد وجود ندارد، زیرا $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند.

تست حد کدام‌یک از توابع زیر در بی‌نهایت، نامتناهی است؟

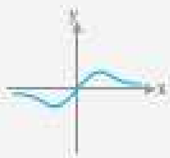
۱)



۲)



۳)



۴)

۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) حد تابع در بی‌نهایت برابر ۱ است.

۲) وقتی $x\to+\infty$ حاصل حد تابع برابر صفر و وقتی $x\to-\infty$ حاصل حد تابع برابر -1 است.

۳) حد تابع در بی‌نهایت برابر صفر است.

۴) وقتی $x\to+\infty$، حد تابع برابر $+\infty$ می‌شود.

ریزه‌کاری‌هایی در محاسبهٔ حد در بی‌نهایت

برای این‌که بتوانیم حد توابع گویا را در بی‌نهایت سریع‌تر محاسبه کنیم، می‌توانیم از قضیهٔ پرتوان استفاده کنیم.

طبق قضیهٔ پرتوان، برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0}$ کافیست در صورت و مخرج فقط جملهٔ پرتوان (جمله‌ای که بیشترین توان را دارد.) را نگه داریم و بقیهٔ جمله‌ها را حذف کنیم. به عبارت دیگر، باید حاصل $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$ را به‌دست آوریم که با توجه به مقدار m، n، با سه حالت زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر درجهٔ صورت و مخرج کسر یکسان باشند، حاصل حد برابر نسبت ضرایب آن‌ها است:

$$n=m\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\frac{a_n}{b_m}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-x^2-7}{3x^3+5x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3}{3x^3}=\frac{4}{3}$$

۲ اگر درجهٔ مخرج کسر بیشتر باشد، حاصل حد برابر صفر است:

$$n<m\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+2}{x^3-x^2+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0$$

۳ اگر درجهٔ صورت کسر بیشتر باشد، حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ است:

$$n>m\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-1}{x^3+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)^2-(x+3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)^2}$ را حساب کنید.

با انتخاب جملهٔ پرتوان در صورت و مخرج کسر داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)^2-(x+3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)^2-(x)^2}{(\sqrt{x})(\sqrt{x})^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x^2}{\sqrt{x}\,(x\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^n+x^3-5}{x^3+x^2+1}$ برابر چه تعداد از عبارت‌های زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ پ) $+\infty$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳ سه حالت برای n در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $n<3$ باشد، آنگاه جملهٔ پرتوان در صورت کسر برابر x^3 است:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^n+x^3-5}{x^3+x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

ب) اگر $n=3$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^3-5}{x^3+x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{x^3}=3$$

پ) اگر $n>3$ باشد، جملهٔ پرتوان صورت کسر برابر $2x^n$ است:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^n+x^3-5}{x^3+x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^n}{x^3}\xrightarrow{n>3}+\infty$$

تست حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x}{x^n+x^3}$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۳ درجهٔ عبارت پرتوان صورت کسر برابر ۳ است. حال با توجه به مقدار n حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$1)\ n<3:\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x}{x^n+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$$

$$2)\ n=3:\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x}{x^3+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{2x^3}=1$$

$$3)\ n>3:\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x}{x^n+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^n}\xrightarrow{n>3}0$$

برای محاسبهٔ حد توابع شامل قدرمطلق وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$، باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنیم و سپس عبارت را بدون قدرمطلق بنویسیم. مثلاً:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{3x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{3x-|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\underbrace{3x-(-x)}_{4x}}=\frac{1}{4}$$

برای محاسبهٔ حد توابع چندجمله‌ای در بی‌نهایت، اگر پس از انتخاب جملات پُرتوان، همهٔ عبارت‌ها با هم ساده شوند، عبارت به‌دست آمده قابل اطمینان نیست. در این مسائل باید ابتدا عبارت را با کمک فاکتورگیری یا اتحادها ساده کنیم و سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-1)^2}{5x-4}$ را به‌دست آورید.

جملات پرتوان صورت و مخرج را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2-(x-1)^2}{5x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2}{5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{5x}$$

چون با انتخاب جملات پرتوان در صورت کسر، عبارت‌های باقی‌مانده با یکدیگر ساده می‌شوند، جواب به‌دست آمده قابل اطمینان نیست، پس ابتدا با اتحاد مربع دوجمله‌ای، هر یک از پرانتزهای صورت کسر را باز می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2-(x-1)^2}{5x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x+4)-(x^2-2x+1)}{5x-4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+3}{5x-4}\xrightarrow{\text{انتخاب پرتوان‌ها}}\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{5x}=\frac{6}{5}$$

تست مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x^2}{x}$ کدام است؟ (خارج - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -1

۴ در صورت و مخرج کسر، جملات پُرتوان را انتخاب می‌کنیم و داریم:

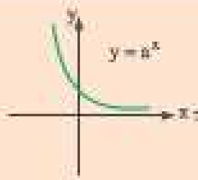
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^2}-x^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+|x|-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

حد توابع نمایی در بی‌نهایت

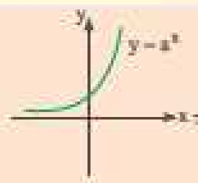
می‌دانیم در یک تابع نمایی، اگر پایه عددی بین ۰ تا ۱ باشد، این تابع اکیداً نزولی و اگر پایه عددی بزرگتر از ۱ باشد، این تابع اکیداً صعودی است. بنابراین با توجه به نمودار توابع نمایی داریم:

$0<a<1$



$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\end{cases}$$

$a>1$



$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\end{cases}$$

مثال در تابع نمایی $f(x)=(5m-2)^x$ رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ برقرار است. حدود m را به‌دست آورید.

چون در تابع نمایی $f(x)=(5m-2)^x$ رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ برقرار است، پس تابع f اکیداً نزولی است، بنابراین پایه عددی بین ۰ و ۱ است.

$$0<5m-2<1\Rightarrow 2<5m<3\Rightarrow 0/4<m<0/6$$

اگر تابع f به‌صورت مجموع چند عبارت نمایی به فرم a^{x+k} باشد، حاصل حد تابع f وقتی $x\to+\infty$ برابر حاصل حد عبارت نمایی با پایهٔ بزرگتر و وقتی $x\to-\infty$ برابر حاصل حد عبارت نمایی با پایهٔ کوچکتر است.

مثال اگر $f(x)=\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\times3^x}{3^x}=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}}{2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\times2^x}{2^x}=2$$

ترکیب حد $\frac{0}{0}$ و حد در بی‌نهایت

در بعضی سوالات پارامتری حاصل حد را وقتی $x\to\infty$ می‌دهند، سپس حاصل همان حد را در $x\to a$ می‌خواهند که معمولاً از نوع مبهم $\frac{0}{0}$ است. برای حل این‌گونه سوالات ابتدا به کمک قضیهٔ پرتوان، پارامترها را می‌یابیم، سپس تابع را بازنویسی و حد تابع را در $x\to a$ حساب می‌کنیم.

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{5}{2}$ باشد، آن‌گاه حد $f(x)$ وقتی $x\to-1$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۲ با توجه به قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{4x^2}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+|2x|}{2x}$$

$$\xrightarrow{|2x|=2x}\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+2)x}{2x}=\frac{a+2}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{a+2}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow a=3$$

با قرار دادن $x=-1$ درون کسر به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس:

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}\ \underset{\frac{0}{0}}{\overset{Hop}{=}}\ \lim_{x\to-1}\frac{3+\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+5}}}{2}=\frac{3-\dfrac{8}{2\times3}}{2}$$

$$=\frac{\frac{5}{3}}{2}=\frac{5}{6}$$

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{x^2+12}}{x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ باشد، حد $f(x)$ وقتی $x\to-2$، کدام است؟ (کنکور مجدد - ۱۴۰۱)

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۳ چون $x\to-\infty$ پس جملات پُرتوان صورت و مخرج کسر را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{x^2+12}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-1)x}{x}=a-1=1\Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{x+2}\ \underset{\frac{0}{0}}{\overset{HOP}{=}}\ \lim_{x\to-2}\frac{2+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}}{1}$$

$$=2+\frac{-2}{\sqrt{16}}=\frac{3}{2}$$

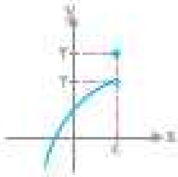
درس ۴ پیوستگی

مفهوم پیوستگی

تابع f را در نقطهٔ $x=a$ از دامنه‌اش پیوسته می‌گوییم، هرگاه حد این تابع در $x=a$ موجود و برابر $f(a)$ باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

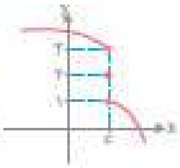
توابع زیر در نقطهٔ $x=c$ ناپیوسته‌اند و علت ناپیوستگی برای هر کدام مشخص شده است:



$\lim_{x\to c^-} f(x)=2$

$\lim_{x\to c^+} f(x)$ وجود ندارد،

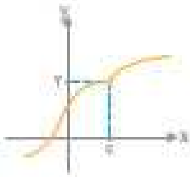
$f(c)=3$



$\lim_{x\to c^-} f(x)=3$

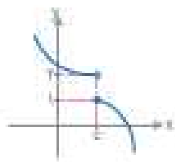
$\lim_{x\to c^+} f(x)=1$

$f(c)=2$



$\lim_{x\to c} f(x)=2$

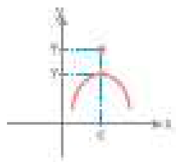
$f(c)$ وجود ندارد،



$\lim_{x\to c^+} f(x)=1$

$\lim_{x\to c^-} f(x)=2$

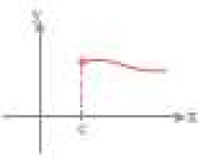
$f(c)=1$



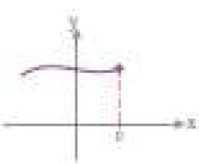
$\lim_{x\to c} f(x)=2$

$f(c)=3$

اگر $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$ یعنی حد راست تابع با مقدار تابع در $x=c$ برابر باشد، تابع f را از طرف راست پیوسته می‌نامیم.



اگر $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$ یعنی حد چپ تابع با مقدار تابع در $x=c$ برابر باشد، تابع f را از طرف چپ پیوسته می‌نامیم.

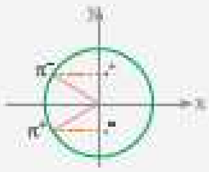


تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{1+[\sin x]}$ از نظر پیوستگی در $x=\pi$ چگونه است؟

۱) از راست پیوسته است. ۲) از چپ پیوسته است.

۳) پیوسته است. ۴) حد دارد ولی ناپیوسته است.

۲ تابع f در $x=\pi$ فقط از چپ پیوسته است، چون:



$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{1}{1+[\sin x]}=\frac{1}{1+[\sin\pi^-]}=\frac{1}{1+[0^+]}=\frac{1}{1+0}=1\\ f(\pi)=\frac{1}{1+[\sin\pi]}=\frac{1}{1+0}=1\\ \lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{1}{1+[\sin x]}=\frac{1}{1+[0^-]}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}\text{؛ تعریف نشده}\end{cases}$$

تست در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف) در $x=1$ پیوسته است.

ب) در $x=3$ پیوستگی چپ دارد.

پ) در بازهٔ $[-1,3]$ پیوسته است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$\underbrace{x^2-5x+6}_{(x-2)(x-3)}\geq 0\Rightarrow x\leq 2 \text{ یا } x\geq 3$$

تابع f در تمام نقاط بازهٔ $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ پیوسته است، پس (الف) درست است. در $x=2$ پیوستگی چپ و در $x=3$ پیوستگی راست دارد، پس (ب) نادرست است. در بازهٔ $[-1,3]$ نیز ناپیوسته است، پس (پ) نادرست است.

یافتن مقدار پارامتر برای پیوسته بودن

در بعضی سؤالات، ضابطهٔ یک تابع داده می‌شود به‌طوری که در آن یک یا چند پارامتر وجود دارد و از ما می‌خواهند که مقدار پارامترها را به‌گونه‌ای تعیین کنیم که تابع در یک نقطهٔ مشخص یا یک بازه، پیوسته باشد. در این سؤالات باید با توجه به تعریف پیوستگی تابع، مقدار پارامترها را بیابیم.

مثلاً برای این‌که تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ; x\leq 3\\ 3x+a & ; x>3\end{cases}$ در تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید در $x=3$ پیوسته باشد. پس:

$$\begin{cases}f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(1)=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3x+a)=9+a\end{cases}\Rightarrow 9+a=1\Rightarrow a=-8$$

تست به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2x-\sin x-1}{\cos^2x} & ; x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ a & ; x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ در $x=\dfrac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

۱) ۱٫۵   ۲) ۱   (خارج-۹۹)

۳) ۱-   ۴) ۱٫۵-

۴ ابتدا حد تابع f را در $x=\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2x-\sin x-1}{\underset{1-\sin^2x}{\cos^2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)(2\sin x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$=-\frac{2\sin\frac{\pi}{2}+1}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=-\frac{2+1}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

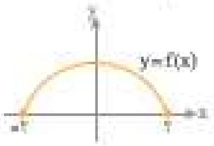
برای این‌که تابع f در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر $f(\frac{\pi}{2})$ باشد، پس $a=-\frac{3}{2}$ است.

پیوستگی روی یک بازه

تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است، هرگاه f در هر نقطه از بازهٔ (a,b) پیوسته، در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی راست و در نقطهٔ $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

مثلاً در تابع f که نمودار آن به‌صورت زیر است، داریم:



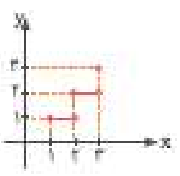
این تابع در بازهٔ $(-2,2)$ پیوسته است.
از طرفی چون در $x=2$ پیوستگی چپ و در $x=-2$ پیوستگی راست دارد، در بازهٔ $[-2,2]$ نیز پیوسته است.

تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است، هرگاه f در هر نقطه از بازهٔ (a,b) پیوسته و در نقطهٔ $x=a$ پیوسته از راست باشد.

تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ پیوسته است، هرگاه f در هر نقطه از بازهٔ (a,b) پیوسته و در نقطهٔ $x=b$ پیوسته از چپ باشد.

برای بررسی پیوستگی تابع $y=[x]$ در بازهٔ $[1,3]$ با توجه به نمودار داریم:

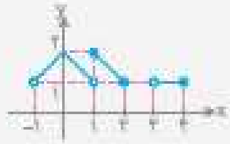
۱. تابع در $x=1$ فقط پیوستگی راست دارد.
۲. تابع در بازهٔ $[1,2)$ پیوسته است.
۳. تابع در $x=2$ حد ندارد، زیرا حد چپ و راست وجود دارند اما برابر نیستند؛ پس
۴. تابع در $[2,3)$ پیوسته است.
۵. تابع در $x=3$ حد چپ دارد، ولی پیوستگی چپ ندارد.



بنابراین می‌توان گفت تابع در بازهٔ $[1,3]$ دارای دو نقطهٔ ناپیوستگی به طول‌های $x=2$ و $x=3$ است.

تذکر اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

تست نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع در چه تعداد از بازه‌های زیر پیوسته است؟



الف) $[-1,1)$

ب) $[1,2]$

پ) $[3,4)$

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

۴ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) چون تابع f در $x=1$ از چپ پیوسته نیست، پس در بازهٔ $[-1,1)$ پیوسته نیست.

ب) تابع f در $x=1$ پیوستگی راست، در $x=2$ پیوستگی چپ دارد.

پ) تابع f در $x=4$ از چپ پیوسته است، پس در بازهٔ $[3,4)$ پیوسته است.

چند نکته دربارهٔ پیوستگی توابع به شکل $[f(x)]$

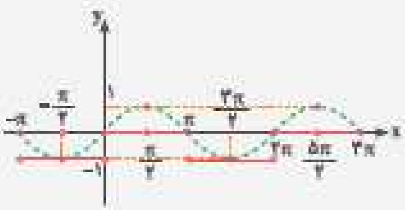
۱. در تمامی نقاطی مانند x_0 که به ازای آن عبارت درون براکت مقداری صحیح شود، یعنی $f(x_0)\in Z$، تابع $[f(x)]$ ناپیوسته خواهد بود مگر آن که x_0 طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع باشد.

۲. اگر f تابعی صعودی باشد، آنگاه $[f(x)]$ در نقاطی که ناپیوسته است، پیوستگی راست دارد.

۳. اگر f تابعی نزولی باشد، آنگاه $[f(x)]$ در نقاطی که ناپیوسته است، پیوستگی چپ دارد.

مثال پیوستگی تابع $y=[\sin x]$ را در نقاط $x=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\pi$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ بررسی کنید.

با توجه به نمودار زیر، تابع $y=[\sin x]$ فقط در $x=\frac{3\pi}{2}$ که طول نقطه مینیمم نسبی تابع است، پیوسته می‌باشد. همچنین واضح است که تابع در نقاطی مانند $x=0$ و $x=2\pi$ که در همسایگی آن‌ها رفتار صعودی دارد، از راست پیوسته و در نقاطی مانند $x=\pi$ که در همسایگی آن رفتار نزولی دارد، از چپ پیوسته است.



فصل ۰۸

مشتق

ارتباط با فصل‌های دیگه: پیش‌نیاز این فصل مهم، توان و عبارت جبری، تابع و حد و پیوستگی است و کاملاً واضح است که خود، پیش‌نیاز فصل کاربرد مشتق است. البته دانستن مشتق در خیلی از فصل‌های دیگر کاربرد دارد که در تابع و حد و پیوستگی پررنگ‌تر از سایرین است.

توصیه: سعی کنید با حل تست‌های زیاد بر روی روابط اولیهٔ مشتق‌گیری، تعریف حدی مشتق و همچنین مفهوم خط مماس مسلط شوید. در سال‌های اخیر اکثر تست‌ها از موضوع‌های مشتق تابع مرکب، مشتق چپ و راست، معادله خط مماس و آهنگ تغییر طرح شده‌اند پس به این موضوع‌ها توجه ویژه‌ای کنید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۴	۲	۲	۱	۱	۱	۲	۱

درس ۱ مفهوم هندسی مشتق و خط مماس بر نمودار

شیب خط و خط مماس بر نمودار

شیب خط برابر با نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی است و به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{شیب} = m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثلاً شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۶,۱۱)$ و $B(۸,-۳)$ برابر است با:

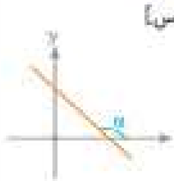
$$m = \frac{-۳-۱۱}{۸-۶} = \frac{-۱۴}{۲} = -۷$$

علامت شیب خط

۱ اگر زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد حاده باشد، آنگاه شیب خط مثبت است. [و برعکس]

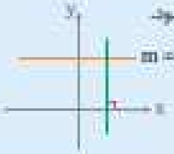
$$۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \Leftrightarrow m > ۰$$

۲ اگر زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد منفرجه باشد، آنگاه شیب خط منفی است. [و برعکس]



$$۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ \Leftrightarrow m < ۰$$

تذکر اگر خط موازی محور xها باشد، آنگاه شیب آن برابر صفر و اگر خط موازی محور yها باشد آنگاه شیب آن تعریف نمی‌شود.

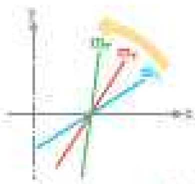


m تعریف نشده است

مقایسه شیب خط‌ها

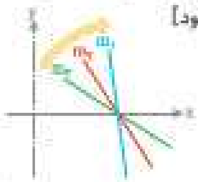
برای مقایسهٔ شیب خط‌ها به دو حالت زیر توجه کنید:

۱ اگر شیب خط مثبت باشد، هرچه زاویهٔ حادهٔ خط با جهت مثبت محور xها بیش‌تر باشد، شیب خط بزرگ‌تر می‌شود.



$$m_۳ > m_۲ > m_۱$$

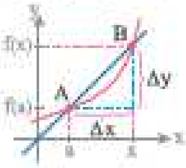
۲ اگر شیب خط منفی باشد، هرچه زاویهٔ منفرجهٔ خط با جهت مثبت محور xها کم‌تر باشد، خط‌ها به خط عمودی نزدیک‌تر شده، شیب‌ها کوچک‌تر می‌شوند. [اندازهٔ شیب‌ها بزرگ‌تر می‌شود]



$$m_۳ > m_۲ > m_۱$$

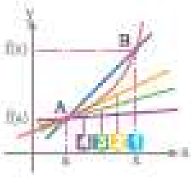
خط مماس بر نمودار

خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را خط قاطع برای نمودار تابع f می‌نامند و شیب آن برابر است با:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

در شکل مقابل اگر نقطهٔ B را روی نمودار تابع f، به نقطهٔ A نزدیک و نزدیک‌تر کنیم، طول نقطهٔ B یعنی x به‌ترتیب از روی نقاط (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و... عبور کرده و به a نزدیک می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت: نقاط A و B تقریباً بر هم منطبق خواهند شد. پس وقتی نقطهٔ B به قدر کافی به نقطهٔ A نزدیک شود، شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B برابر است با:

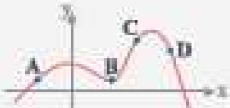


$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

این خط را خط مماس در نقطهٔ A می‌نامند.

حالا که با مفهوم خط مماس و شیب آن آشنا شدیم می‌توانیم آنها را مقایسه کنیم.

تست **با توجه به نمودار تابع f، کدام رابطه میان شیب نقاط مشخص‌شده برقرار است؟** (کتاب درسی)



۱) $m_B<m_A<m_C<m_D$

۲) $m_A<m_B<m_D<m_C$

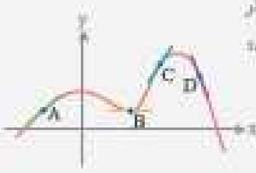
۳) $m_A<m_C<m_B<m_D$

۴) $m_D<m_B<m_A<m_C$

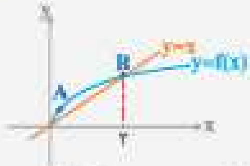
۴ خط مماس بر نمودار را در نقاط نام‌گذاری‌شده رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار شیب خط مماس در نقطهٔ D منفی و در نقطهٔ B صفر است.

از طرفی شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ C بیش‌تر از نقطهٔ A است؛ بنابراین:

$m_D<m_B<m_A<m_C$



تست **با توجه به نمودار تابع f کدام‌یک از مقادیر زیر بزرگ‌تر است؟** (کتاب درسی)



۱) شیب خط $y=2$

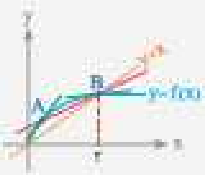
۲) شیب نمودار در نقطهٔ B

۳) شیب خط AB

۴) شیب نمودار در نقطهٔ A

۴ چون خط $y=2$ موازی محور xها است، پس شیب آن برابر صفر است. (حذف (۱))

با توجه به نمودار و خطوط رسم شده، شیب نمودار در نقطه‌های A، B و شیب خط AB به‌صورت زیر است:



$\Rightarrow m_B<m_{AB}<m_A$

می‌خواهیم مقدار عددی شیب خط مماس را به‌دست بیاوریم. به سؤال زیر دقت کنید:

مثال **شیب خط مماس بر منحنی $f(x)=x^2-2x$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ را با استفاده از تعریف شیب خط مماس به‌دست آورید.**

$$m_{\text{مماس}}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x)-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

با جای‌گذاری $x=1$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم؛ بنابراین آن را رفع ابهام می‌کنیم:

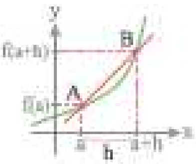
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=1-1=0\Rightarrow m_{\text{مماس}}=0$$

تعریف مشتق

دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی نمودار تابع f قرار دارند. می‌دانیم اگر نقطهٔ B را به قدر کافی به A نزدیک کنیم، شیب خط قاطع AB برابر با شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ A می‌شود و مقدار آن برابر با $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است. مقدار این حد را [اگر موجود و متناهی باشد] مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگر $x-a$ را برابر h در نظر بگیریم، آنگاه $x=a+h$ خواهد بود. در این صورت وقتی x به سمت a میل کند، مقدار h به سمت صفر میل می‌کند و تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ a به‌صورت زیر در می‌آید:



$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

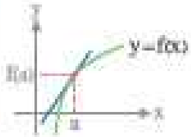
مثال **مشتق تابع $f(x)=x^2$ در نقطهٔ $x=3$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.**

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{9}+6h+h^2-\cancel{9}}{h}\overset{\div}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

تعبیر هندسی مشتق

از نظر هندسی، مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه است؛ یعنی:



$$f'(a)=\text{شیب خط مماس در } a$$

اگر خط L در نقطهٔ $x=a$ بر نمودار تابع f مماس باشد، آن‌گاه:

۱ عرض نقطه به طول $x=a$ برابر با $f(a)$ است.

۲ شیب خط L برابر با $f'(a)$ است.

تست در شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

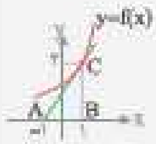
۱) ۳

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

۳ حد داده‌شده، همان مشتق تابع f در $x=1$ یعنی $f'(1)$ است. از طرفی $f'(1)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=1$ است؛ بنابراین:



$$f'(1)=\text{شیب خط مماس}=\frac{BC}{AB}=\frac{۳}{۲}$$

تست مطابق شکل، خط L به معادلهٔ $۳y+۲x=۴$ در نقطهٔ $x=1$ بر نمودار تابع f مماس است. مقدار $f(1)-f'(1)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) ۲

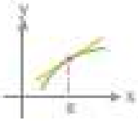
۳ معادلهٔ خط L را به صورت $y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۴}{۳}$ می‌نویسیم. عرض نقطه به طول $x=1$ برابر $y=-\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}$ است؛ پس $f(1)=\frac{۲}{۳}$.

از طرفی شیب خط L برابر $-\frac{۲}{۳}$ است، پس $f'(1)=-\frac{۲}{۳}$ و داریم:

$$f(1)-f'(1)=\frac{۲}{۳}-(-\frac{۲}{۳})=\frac{۴}{۳}$$

ارتباط علامت شیب خط مماس بر نمودار و مشتق

با توجه به مفهوم مشتق:

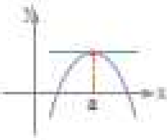


۱ اگر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=a$ مثبت باشد، آنگاه $f'(a)$ مثبت است و برعکس.

$$m_a>0 \Leftrightarrow f'(a)>0$$

۲ اگر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=a$ منفی باشد، آن‌گاه $f'(a)$ منفی است و برعکس.

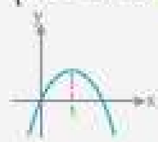
$$m_a<0 \Leftrightarrow f'(a)<0$$



۳ اگر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=a$ برابر صفر باشد، [یعنی $f'(a)$ برابر صفرباشد] آن‌گاه خط مماس بر منحنی f، موازی محور xها است.

$$m_a=0 \Leftrightarrow f'(a)=0$$

تست در کدام نمودار $f'(0)=-\frac{۳}{۲}$ و $f'(1)=0$ است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳ $f'(0)=-\frac{۳}{۲}$ است؛ بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=0$ منفی می‌باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرستند.

از طرفی چون $f'(1)=0$ است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در $x=1$ نیز موازی محور xها می‌باشد؛ بنابراین گزینهٔ (۴) نیز نادرست است.

تست با توجه به نمودار تابع f چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟ (کتاب درسی)

الف) در نقطهٔ A مقدار تابع و مقدار مشتق صفر است.

ب) در نقطهٔ B مقدار تابع برابر صفر و مقدار مشتق مثبت است.

پ) در نقطهٔ C مقدار تابع مثبت و مقدار مشتق صفر است.

ت) در نقطهٔ D مقدار تابع و مقدار مشتق مثبت است.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

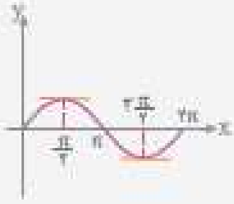
۱ موارد (الف)، (ب) و (پ) درست هستند اما در نقطهٔ D مقدار تابع مثبت است ولی چون شیب خط مماس بر نمودار در این نقطه منفی است پس مقدار مشتق منفی است.

تست مشتق تابع $f(x)=\sin x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ در چند نقطه برابر صفر است؟

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

۲ با توجه به نمودار تابع $f(x)=\sin x$ خط مماس بر نمودار در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ در دو نقطه به طول‌های $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ افقی است؛ پس مشتق تابع f در این ۲ نقطه برابر صفر است.



تعریف مشتق با ظاهری متفاوت!

در بعضی از سؤالات، رابطهٔ تعریف مشتق دستخوش تغییراتی در ظاهر خود می‌شود. در این سؤالات باید به کمک اتحاد و تجزیه، فاکتورگیری و... عبارت مربوط به تعریف مشتق را ایجاد کنیم.

مثلاً، اگر $f'(۳)=۵$ باشد، برای محاسبهٔ حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x^۲-۹}$، مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم تا بتوانیم تعریف مشتق تابع f در $x=۳$ را در آن ایجاد کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{(x+۳)(x-۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{x+۳}\times\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\frac{۱}{۳+۳}\times f'(۳)=\frac{۵}{۶}$$

وقتی مشتق تابع به‌صورت $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف می‌شود، باید ضریب متغیر h در صورت و مخرج یکسان باشد. مثلاً اگر در صورت کسر به جای h، عبارت ۴h وجود داشته باشد، باید در مخرج کسر نیز ۴h موجود باشد.

مثلاً، برای به‌دست آوردن حاصل حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+۵h)-f(۱)}{h}$، ابتدا باید ضریب h را در صورت و مخرج کسر یکسان کنیم؛ بنابراین صورت و مخرج کسر را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+۵h)-f(۱)}{h}=۵\times\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+۵h)-f(۱)}{۵h}$$

حال وقتی $h\to ۰$ میل می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت $۵h\to ۰$ میل می‌کند؛ بنابراین حاصل حد داده‌شده برابر است با:

$$۵\times\lim_{۵h\to ۰}\frac{f(۱+۵h)-f(۱)}{۵h}=۵f'(۱)$$

نکته از آن‌جایی که در این تست‌ها، با حدهایی روبه‌رو هستیم که ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارند، می‌توانیم با کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز حاصل حد را به دست آوریم.

تست اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{۳x-۶}=\frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{۲h}$ کدام است؟

۱) -۲　　۲) ۲

۳) $-\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۲}{۳}$

۱ راه اول: در مخرج حد داده‌شده، از عدد ۳ فاکتور می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{۳(x-۲)}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۳}\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۴\Rightarrow f'(۲)=۴$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{۲h}=\frac{۱}{۲}\times(-\lim_{-h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{-h})$$

$$=\frac{۱}{۲}\times(-f'(۲))=\frac{۱}{۲}\times(-۴)=-۲$$

راه دوم: حدهای داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ هستند؛ پس:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{۳x-۶}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{f'(x)}{۳}=\frac{۱}{۳}f'(۲)=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=۴$$

$$\Rightarrow\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{۲h}\overset{Hop}{=}\lim_{h\to ۰}\frac{-f'(۲-h)}{۲}=\frac{-f'(۲)}{۲}=-\frac{۴}{۲}=-۲$$

تست اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-۳h)-f(۲)}{h}=۹$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x^۲-۲x}$ کدام است؟

۱) $-۱/۵$　　۲) $-۰/۵$

۳) $۱/۵$　　۴) $۰/۵$

۱ در حد داده‌شده، ضریب h را در صورت و مخرج کسر یکسان می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-۳h)-f(۲)}{h}=-۳\underbrace{\lim_{-۳h\to ۰}\frac{f(۲-۳h)-f(۲)}{-۳h}}_{f'(۲)}=۹$$

$$\Rightarrow -۳f'(۲)=۹\Rightarrow f'(۲)=-۳$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{\underbrace{x^۲-۲x}_{x(x-۲)}}=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x}\times\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times f'(۲)=\frac{۱}{۲}\times -۳=-\frac{۳}{۲}=-۱/۵$$

درس ۲ تابع مشتق و قوانین محاسبهٔ مشتق

تابع مشتق

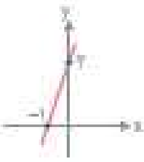
اگر x عضوی از دامنهٔ تابع $f(x)$ باشد، تابع مشتق $f(x)$ در نقطه به طول x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع مشتق، از دستور بالا استفاده می‌کنیم.

- اگر f یک تابع خطی باشد، آن‌گاه خط مماس بر نمودار f در تمام نقاط منطبق بر آن خواهد بود، پس شیب خط مماس در تمام نقاط با شیب تابع خطی f برابر است؛ یعنی مشتق تابع خطی $f(x)=mx+b$ در تمام نقاط برابر مقدار m است.

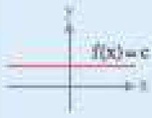
مثلاً اگر نمودار تابع خطی f به‌صورت مقابل باشد، شیب این خط در تمام نقاط برابر ۳ است؛ پس:



$$\Rightarrow m=\frac{3}{1}=3$$

$$\Rightarrow \dots=f'(-5)=f'(-4)=f'(-\frac{5}{2})=\dots=f'(0)=f'(1)=\dots=3$$

تذکر واضح است شیب خط مماس بر تابع ثابت $f(x)=c$ در تمام نقاط برابر صفر است؛ بنابراین مشتق تابع ثابت $f(x)=c$ در تمام نقاط برابر با صفر خواهد بود.



- برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=x^n$، توان n را به‌صورت ضریب پشت x می‌نویسیم و یک واحد از توان آن کم می‌کنیم:

$$y=x^n\Rightarrow y'=nx^{n-1}$$

$$y=x^4\Rightarrow y'=4x^3\ ,\ y=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow y'=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$

$$y=x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

- اگر a عددی حقیقی باشد، برای به دست آوردن مشتق تابع $y=af(x)$ ضریب a را در مشتق تابع f ضرب می‌کنیم:

$$y=af(x)\Rightarrow y'=af'(x)$$

$$y=4x^3\Rightarrow y'=4\times 3x^2=12x^2\ ,\ y=-2x^{\frac{5}{2}}\Rightarrow y'=-5x^{\frac{3}{2}}$$

- مشتق تابع رادیکالی $y=\sqrt{ax+b}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=\sqrt{ax+b}\Rightarrow y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ y=\sqrt{1-5x}\Rightarrow y'=\frac{-5}{2\sqrt{1-5x}}$$

- مشتق تابع رادیکالی $y=\sqrt[3]{ax+b}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=\sqrt[3]{ax+b}\Rightarrow y'=\frac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$$

$$y=\sqrt[3]{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ ,\ y=\sqrt[3]{1-5x}\Rightarrow y'=\frac{-5}{3\sqrt[3]{(1-5x)^2}}$$

تست شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+a}$ در نقطهٔ $x=1$ برابر $\frac{1}{3}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۳ چون شیب خط مماس بر نمودار در $x=1$ برابر $\frac{1}{3}$ است، پس $f'(1)=\frac{1}{3}$ است و داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+a}}\xrightarrow{f'(1)=\frac{1}{3}}\frac{1}{2\sqrt{1+a}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sqrt{1+a}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1+a=\frac{9}{4}\Rightarrow a=\frac{5}{4}=1/25$$

تست شیب خط مماس بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{-3x-5}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{-1}{4}$ ۴) ۲

۳ مقدار مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{-3x-5}$ را در $x=1$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-3}{3\sqrt[3]{(-3x-5)^2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{-1}{\sqrt[3]{(-8)^2}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{64}}=-\frac{1}{4}$$

مشتق مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم دو تابع

- برای محاسبهٔ مشتق مجموع یا تفاضل دو تابع، از تک تک تابع‌ها مشتق می‌گیریم:

$$y=(f-g)(x)\Rightarrow y'=f'(x)-g'(x)$$

$$y=(f+g)(x)\Rightarrow y'=f'(x)+g'(x)$$

$$y=x^2+x\Rightarrow y'=2x+1$$

$$y=3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+x^2\Rightarrow y'=\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+2x$$

تست اگر $f(x)=x^{3}+x^{-2}+2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ حد خواسته‌شده برابر مشتق تابع f در $x=1$ است، پس:

$$f(x)=x^{3}+x^{-2}+2\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=3x^{2}-2x^{-3}+2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(1)=3(1)^{2}-2(1)^{-3}+2\times\frac{1}{2\sqrt{1}}=3-2+1=2$$

■ مشتق تابع $y=f(x).g(x)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=(f.g)(x)\Rightarrow y'=\underbrace{f'(x)}_{\text{مشتق اولی}}\underbrace{g(x)}_{\text{خود دومی}}+\underbrace{g'(x)}_{\text{مشتق دومی}}\underbrace{f(x)}_{\text{خود اولی}}$$

$$y=(2x^{3}-1)(3\sqrt{x}-2)$$

$$\Rightarrow y'=\underbrace{(6x^{2})}_{\text{مشتق اولی}}\times\underbrace{(3\sqrt{x}-2)}_{\text{دومی}}+\overbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)}^{\text{مشتق دومی}}\times\overbrace{(2x^{3}-1)}^{\text{اولی}}$$

$$y=(4x^{2}-1)(3x+5)\Rightarrow y'=\underbrace{(8x)}_{\text{مشتق اولی}}\times\overbrace{(3x+5)}^{\text{دومی}}+\underbrace{(3)}_{\text{مشتق دومی}}\times\overbrace{(4x^{2}-1)}^{\text{اولی}}$$

■ مشتق تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ با شرط $g(x)\neq 0$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{\overbrace{f'(x)}^{\text{مشتق صورت}}\overbrace{g(x)}^{\text{مخرج}}-\overbrace{g'(x)}^{\text{مشتق مخرج}}\overbrace{f(x)}^{\text{صورت}}}{\underbrace{(g(x))^{2}}_{\text{مربع مخرج}}}$$

$$y=\frac{3x^{2}+4}{2x-5}\Rightarrow y'=\frac{\overbrace{(6x)}^{\text{مشتق صورت}}\overbrace{(2x-5)}^{\text{مخرج}}-\overbrace{(2)}^{\text{مشتق مخرج}}\overbrace{(3x^{2}+4)}^{\text{صورت}}}{\underbrace{(2x-5)^{2}}_{\text{مربع مخرج}}}$$

$$y=\frac{-x+2}{x^{2}-4x}\Rightarrow y'=\frac{(-1)(x^{2}-4x)-(2x-4)(-x+2)}{(x^{2}-4x)^{2}}$$

تابع قاعدهٔ مشتق تقسیم

۱ مشتق تابع $y=\dfrac{1}{f(x)}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow y'=\frac{-f'(x)}{(f(x))^{2}}$$

مشتق تابع $y=\dfrac{1}{2x-1}$ برابر است با:

$$y'=\frac{-2}{(2x-1)^{2}}$$

۲ مشتق تابع هموگرافیک با استفاده از قاعدهٔ مشتق در تقسیم برابر است با:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^{2}}$$

مشتق تابع $y=\dfrac{x-1}{3x+2}$ برابر است با:

$$y'=\frac{(1)(2)-(3)(-1)}{(3x+2)^{2}}=\frac{5}{(3x+2)^{2}}$$

تست اگر $f'(1)=6$، $f(1)=2$، $g(1)=4$ و $g'(1)=2$ باشد حاصل $(f.g)'(1)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۴ با توجه به صورت سؤال $f(1)=6$ ، $f'(1)=3$ ، $g'(1)=4$ ، $g(1)=2$ است، پس:

$$(f.g)'(1)=f'(1)g(1)+g'(1)f(1)=3\times 2+4\times 6=6+24=30$$

تست مشتق تابع $f(x)=\sqrt{3x}(x^{2}-7)$ در $x=3$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۲ از $f(x)=\sqrt{3x}(x^{2}-7)$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=3$ می‌گذاریم:

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}(x^{2}-7)+2x\sqrt{3x}$$

$$\Rightarrow f'(3)=\frac{3}{2\sqrt{9}}(9-7)+6\sqrt{9}=\frac{1}{2}\times 2+6\times 3=1+18=19$$

تست مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}-3x+1}{2x-3}$ در $x=4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۲ از تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}-3x+1}{2x-3}$ مشتق می‌گیریم و به‌جای x عدد ۴ را قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(2x-3)-(2)(x^{2}-3x+1)}{(2x-3)^{2}}$$

$$\Rightarrow f'(4)=\frac{(5)(5)-(2)(5)}{5^{2}}=\frac{25-10}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

تست مشتق تابع $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ در $x=\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -3 ۴) -4

۴ مشتق تابع $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x-\sqrt{x})-\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})^{2}}$$

به‌ازای $x=\frac{1}{4}$ حاصل $\sqrt{x}$ برابر $\frac{1}{2}$ است، پس:

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{(1)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-(1-1)\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^{2}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}}=-4$$

تست مشتق تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^{3}+2x}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -2 ۴) -1

۴ از تابع f مشتق می‌گیریم و در آن $x=1$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}\right)(x^{3}+2x)-(3x^{2}+2)(\sqrt[3]{x}+1)}{(x^{3}+2x)^{2}}$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{\frac{1}{3}\times 3-5\times 2}{(3)^{2}}=-\frac{9}{9}=-1$$

تذکر ممکن است به جای ضابطهٔ تابع، نمودار آن یا بخشی از آن را بدهند. معمولاً از نمودار تابع می‌توان مقدار تابع در $x=a$ و شیب خط مماس در آن نقطه را به‌دست آورد. به سوالات زیر توجه کنید.

تست نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مشتق $y=(\sqrt{x}+1)f(x)$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $-0/25$
۲) $-0/5$
۳) $-0/7$
۴) -1

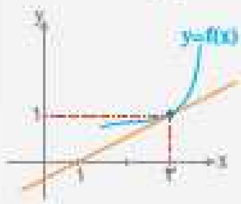
۴ از تابع $y=(\sqrt{x}+1)f(x)$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=1$ می‌گذاریم:

$$y'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)f(x)+f'(x)(\sqrt{x}+1)\xrightarrow{x=1}y'=\frac{1}{2}f(1)+2f'(1)$$

با توجه به نمودار $f(1)=3$ است. از طرفی شیب خط مماس بر نمودار f در $x=1$ برابر $-\frac{4}{4}=-1$ است، پس $f'(1)=-1$ و داریم:

$$y'=\frac{1}{2}f(1)+2f'(1)=\frac{1}{2}\times 3+2(-1)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$$

تست با توجه به شکل مقابل مشتق تابع $y=\frac{f(x)+x}{2x}$ در $x=3$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{8}$
۲) $\frac{1}{12}$
۳) $\frac{1}{24}$
۴) $\frac{1}{36}$

۴ با توجه به نمودار $f(3)=1$ و شیب خط مماس بر نمودار f در $x=3$ برابر $\frac{1}{2}$ است، پس $f'(3)=\frac{1}{2}$ بوده و داریم:

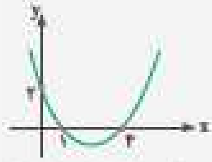
$$y=\frac{f(x)+x}{2x}\Rightarrow y'=\frac{(f'(x)+1)2x-2(f(x)+x)}{(2x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=3}y'=\frac{(f'(3)+1)\times 6-2(f(3)+3)}{6^2}$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}+1)\times 6-2\times(1+3)}{36}=\frac{\frac{3}{2}\times 6-2\times 4}{36}=\frac{9-8}{36}=\frac{1}{36}$$

حالا که بحث نمودار شد، ممکن است مجبور شویم ضابطهٔ تابع را با توجه به نمودار آن بنویسیم و سپس از آن مشتق بگیریم.

مثال اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد $f'(2)$ را به‌دست آورید.



$$f(x)=a(x-1)(x-4)$$

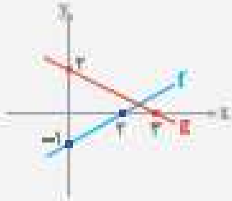
$$f(0)=a(-1)(-4)=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$$

یعنی تابع $f(x)$ به‌صورت زیر بوده است.

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^2-5x+4)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(2x-5)$$

$$f'(2)=\frac{1}{2}(-1)=-\frac{1}{2}$$

تست نمودار تابع‌های خطی f و g به صورت مقابل است. مقدار $(\frac{f}{g})'(2)$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) 1
۴) $\frac{3}{2}$

۲ با توجه به شکل داده شده شیب خط f برابر $\frac{1}{2}$ و شیب خط g برابر $-\frac{2}{3}$ است، پس $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ و $g(x)=-\frac{2}{3}x+2$ بوده و داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{1}{2}x-1}{-\frac{2}{3}x+2}\Rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{(\frac{1}{2}\times 2)-(-1\times-\frac{2}{3})}{(-\frac{2}{3}x+2)^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{1-\frac{2}{3}}{(-\frac{4}{3}+2)^2}=\frac{\frac{1}{3}}{(\frac{2}{3})^2}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{4}$$

عامل صفر شونده

اگر تابع f از ضرب چند عبارت تشکیل شده باشد، برای محاسبهٔ مشتق تابع f در $x=a$ یعنی $f'(a)$، درصورتی‌که قسمتی از تابع به‌ازای $x=a$ صفر شود، می‌توانیم فقط از قسمتی که صفر می‌شود مشتق بگیریم و سپس با جای‌گذاری a در x، مقدار $f'(a)$ را به‌دست آوریم.

مثال مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-2)\sqrt{5x-6}}{x^2-6x}$ را در $x=2$ به‌دست آورید.

چون $(x-2)$ در نقطهٔ $x=2$ صفر می‌شود، می‌توانیم فقط از $(x-2)$ مشتق بگیریم و سپس $x=2$ را در عبارت به‌دست‌آمده جای‌گذاری کنیم:

$$f(x)=\underbrace{(x-2)}_{\text{عامل صفرشونده}}\times\frac{\sqrt{5x-6}}{x^2-6x}\xrightarrow{x=2}f'(x)=(1)\times\frac{\sqrt{5x-6}}{x^2-6x}$$

مشتق

$$\Rightarrow f'(2)=(1)\times\frac{\sqrt{5(2)-6}}{2^2-6(2)}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$$

تست مشتق تابع $f(x)=(x^2-2)(x-4)(x^2-6)(x-8)$ به ازای $x=4$ کدام است؟

۱) 280 ۲) 560 ۳) -280 ۴) -560

۴ عبارت $(x-4)$ عامل صفرشونده است، پس:

$$f(x)=(x^2-2)(x-4)(x^2-6)(x-8)$$

$$\xrightarrow{x=4}f'(x)=(x^2-2)\times 1\times(x^2-6)(x-8)$$

$$\Rightarrow f'(4)=(16-2)\times 1\times(16-6)(4-8)=14\times 10\times -4=-560$$

تست اگر $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}+1}$ باشد، حاصل $f'(1)\times f'(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $-\frac{9}{2}$

۳ ابتدا تابع f را به‌صورت $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-4)}{\sqrt{x}+1}$ می‌نویسیم.

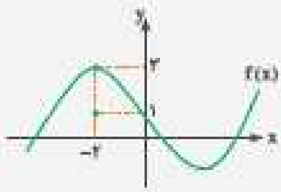
عامل $(x-1)$ در $x=1$ و عامل $(x-4)$ در $x=4$ عامل‌های صفرشونده هستند، پس:

۱) در $x=1$: $f'(x)=\dfrac{(1)(x-4)}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{-3}{2}$

۲) در $x=4$: $f'(x)=\dfrac{(x-1)(1)}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow f'(4)=\dfrac{3}{3}=1$

بنابراین $f'(1)\times f'(4)=-\frac{3}{2}\times 1=-\frac{3}{2}$ است.

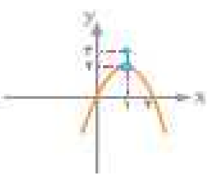
مثال با توجه به نمودار تابع f مقدار مشتق تابع $g(x)=(x^2-4)f(x)$ را در $x=-2$ محاسبه کنید.



$$g'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x^2-4)f(x)-0}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(x-2)f(x)=\lim_{x\to-2}(x-2)\times\lim_{x\to-2}f(x)=-4\times3=-12$$

اگر $f(a)$ موجود و نمودار تابع f در $x=a$ توخالی باشد، برای محاسبهٔ مشتق تابع $g(x)=(x-a)f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ باید از تعریف مشتق استفاده کنیم. مثلاً اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، برای محاسبهٔ مشتق $g(x)=(x-1)f(x)$ در $x=1$ داریم:



$$\Rightarrow g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)-0}{x-1}=\lim_{x\to1}f(x)=2$$

اگر توان عامل صفر شونده، عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، مشتق اول آن تابع در ریشهٔ عامل صفر شونده برابر صفر است.

مثال مشتق تابع $f(x)=\dfrac{(x-4)^2\sqrt{x+1}}{x}$ را در $x=4$ به‌دست آورید.

چون تابع f دارای عامل صفر شوندهٔ $(x-4)$ با مرتبهٔ ۲ است، پس مقدار f' در $x=4$ برابر صفر است.

تست مشتق تابع $f(x)=(x+1)(x^2-1)\sqrt{x^2-3x+1}$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

۴ عبارت‌های $(x+1)$ و (x^2-1) به‌ازای $x=-1$ برابر صفر می‌شوند، پس ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(x+1)\underbrace{(x^2-1)}_{(x+1)(x-1)}\sqrt{x^2-3x+1}$$

$$=(x+1)^2(x-1)\sqrt{x^2-3x+1}$$

حال با توجه به این‌که تابع f دارای عامل صفرشوندهٔ $(x+1)$ با مرتبهٔ ۲ است، پس مقدار f' در $x=-1$ برابر صفر است.

ساده کردن قبل از مشتق گیری

اگر ضابطهٔ تابع f قبل از مشتق‌گیری ساده شود، بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم.

مثال مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ را در $x=\frac{1}{2}$ به‌دست آورید.

برای محاسبهٔ مشتق تابع $f(x)$ در $x=\frac{1}{2}$، ابتدا ضابطهٔ تابع را با استفاده از اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم. سپس از عبارت حاصل مشتق گرفته و $x=\frac{1}{2}$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$$

$$\Rightarrow f'(x)=4x^3\Rightarrow f'(\tfrac{1}{2})=4(\tfrac{1}{2})^3=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

تست مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ در $x=4$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۳ صورت کسر را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر باز می‌کنیم؛ سپس از عبارت حاصل مشتق گرفته و $x=4$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2-x+1\Rightarrow f'(x)=2x-1$$

$$\Rightarrow f'(4)=8-1=7$$

تست مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ به ازای $x=\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۱-

۳ با توجه به اتحاد مزدوج، تساوی $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ برقرار است. پس ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=\frac{1}{4}}f'(\tfrac{1}{4})=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}=1$$

تست اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\,(x-2)+x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2x}}$ باشد، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۲ در صورت کسر از $\sqrt{x-2}$، $\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\,.(x-2)+x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\frac{\overbrace{\sqrt{x}\,.\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x^2-2x}}\,(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

در بعضی از سؤالات، مشتق عبارتی را می‌پرسند که شکل اولیهٔ تابع به طور مستقیم داده نشده و بنابراین باید تشخیص دهیم که عبارت داده‌شده مشتق چه تابعی است. برای مثال به جای این‌که پرسیده شود مشتق $(f.g)(x)$ کدام است، می‌گویند حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ کدام است. مهم‌ترین شکل طرح این گونه سؤالات به صورت‌های زیر است:

۱ اگر حاصل عبارت $f'(x)+g'(x)$ خواسته شود، باید مشتق تابع $(f+g)(x)$ را به‌دست آوریم.

۲ اگر حاصل عبارت $f'(x)-g'(x)$ خواسته شود، باید مشتق تابع $(f-g)(x)$ را به‌دست آوریم.

۳ اگر حاصل عبارت $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ خواسته شود، باید مشتق تابع $(f.g)(x)$ را به دست آوریم.

۴ اگر حاصل عبارت $\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$ خواسته شود، باید مشتق تابع $(\frac{f}{g})(x)$ را به‌دست آوریم.

مثال اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، حاصل $f'(2)g(2)+g'(2)f(2)$ را به دست آورید.

حاصل عبارت خواسته‌شده همان مشتق تابع $f.g$ در $x=2$ است، پس:

$$(f.g)(x)=(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})=x^2-x\Rightarrow f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$=2x-1\xrightarrow{x=2}f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=3$$

تست اگر $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ و $g(x)=\dfrac{-5}{x-2}$، حاصل $f'(x)+g'(x)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۱ می‌دانیم $f'(x)+g'(x)=(f+g)'(x)$ است. پس می‌توانیم ابتدا تابع $(f+g)(x)$ را به‌دست آوریم و سپس از آن مشتق بگیریم:

$$(f+g)(x)=\frac{x^2+1}{x-2}+\frac{-5}{x-2}=\frac{\overbrace{x^2-4}^{(x-2)(x+2)}}{x-2}$$

$$=x+2\Rightarrow f'(x)+g'(x)=1$$

تست اگر $f(x)=\sqrt{2x^2+x}+x$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x}-x}$ باشد، حاصل $f'(4)g(4)-g'(4)f(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{11}{4}$

۳ عبارت خواسته‌شده برابر صورت کسر مشتق تابع $\frac{f}{g}$ است، پس:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{2x^2+x}+x}{\frac{1}{\sqrt{2x^2+x}-x}}=(\sqrt{2x^2+x}+x)(\sqrt{2x^2+x}-x)$$

$$=(2x^2+x-x^2)=x^2+x\Rightarrow\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$=2x+1\xrightarrow{x=4}f'(4)g(4)-g'(4)f(4)$$

$$=(2\times4+1)\times(g(4))^2=9\times(\frac{1}{\underbrace{\sqrt{36}-4}_{2}})^2=\frac{9}{4}$$

مشتق مرتبهٔ دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ یعنی $y'=f'(x)$ را مشتق اول تابع f می‌نامیم. حال اگر تابع $f'(x)$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن را با نماد $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را مشتق دوم تابع f می‌نامیم.

$$y=x^2+3x+1\Rightarrow y'=2x+3\Rightarrow y''=2$$

$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow y''=\frac{2}{x^3}$$

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y''=-\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$$

تست اگر $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ باشد، $f''(1)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم تا به f' برسیم و سپس از f' مشتق می‌گیریم تا f'' به دست آید:

$$f(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-0}{(x+1)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow f''(1)=\frac{-2}{2^3}=\frac{-1}{4}$$

تست اگر $f(x)=\sqrt{3x-2}$ باشد، $f''(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $-\frac{9}{32}$ ۴) $\frac{9}{32}$

۳ مشتق تابع $f(x)=\sqrt{3x-2}$ برابر $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ است، پس:

$$f'(x)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3x-2}}\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}\times\frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{(\sqrt{3x-2})^2}$$

$$\Rightarrow f''(2)=\frac{3}{2}\times\frac{-\frac{3}{2\sqrt{4}}}{(\sqrt{4})^2}=\frac{3}{2}\times\frac{-\frac{3}{4}}{4}=-\frac{9}{32}$$

تست اگر $f(x)=\dfrac{(x^{۳}+۱)\sqrt{x}}{x^{۲}-x+۱}$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f'(۴+h)-f'(۴)}{h}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۱}{۳۲}$ ۲) $\dfrac{۱۵}{۳۲}$ ۳) $\dfrac{۱۱}{۱۶}$ ۴) $\dfrac{۱۵}{۱۶}$

۱ حاصل حد داده شده برابر است با:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f'(۴+h)-f'(۴)}{h}=f''(۴)$$

پس مشتق دوم تابع را می‌خواهیم. ابتدا ضابطه داده شده را ساده می‌کنیم و سپس از آن دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x^{۲}-x+۱)\sqrt{x}}{(x^{۲}-x+۱)}=(x+۱)(\sqrt{x})=x\sqrt{x}+\sqrt{x}$$

$$f(x)=x^{\frac{۳}{۲}}+x^{\frac{۱}{۲}}$$

$$f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}\xrightarrow{x=۴}f''(۴)=\frac{۳}{۴}(۴)^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۴}(۴)^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$=\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۳۲}=\frac{۱۱}{۳۲}$$

مشتق تابع مرکب

مشتق تابع fog به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=(fog)(x)=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x).f'(g(x))$$

مثال اگر $g(۲)=۳$ و $g'(۲)=-۵$ و $f'(۳)=۶$ باشد، مقدار $(fog)'(۲)$ را به‌دست آورید.

$$(fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))=(-۵)f'(۳)=(-۵)(۶)=-۳۰$$

تست اگر $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲x}{x-۱}$، مشتق تابع $(gof)(x)$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

۲ مشتق تابع $(gof)(x)$ برابر است با:

$$(gof)'(x)=f'(x)g'(f(x))$$

از آن جایی که $f'(x)=\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}$ و $g'(x)=\dfrac{-۲}{(x-۱)^{۲}}$، داریم:

$$(gof)'(۱)=f'(۱)g'(f(۱))=\frac{۳}{۴}g'(۲)=\frac{۳}{۴}\left(\frac{-۲}{(۲-۱)^{۲}}\right)=-\frac{۳}{۲}$$

تست اگر $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x+۲}$ باشد، $(fof)'(۱)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۹}$ ۲) $\dfrac{۵}{۹}$ ۳) $\dfrac{۷}{۹}$ ۴) ۱

۱ با توجه به مشتق تابع fof:

$$(fof)'(x)=f'(x).f'(f(x))\xrightarrow{x=۱}(fof)'(۱)=f'(۱).f'(f(۱))$$

با توجه به این‌که $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x+۲}$ و $f'(x)=\dfrac{۴-۱}{(x+۲)^{۲}}$ است، پس:

$$f(۱)=۱,\ f'(۱)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(fof)'(۱)=\frac{۱}{۳}f'(۱)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۹}$$

اگر u تابعی برحسب x باشد و $y=f(u)$ آنگاه:

$$y'=u'(x)\times f'(u)$$

مثلاً، مشتق تابع $y=f(۳x)$ برابر است با: $y'=۳\times f'(۳x)$

و مشتق تابع $y=f(x^{۲}+۱)$ برابر است با: $y'=۲x\times f'(x^{۲}+۱)$

تست اگر $f(x^{۲}+۱)=۲x^{۳}-۴x^{۲}+۵$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ از طرفین تساوی داده‌شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x^{۲}+۱)=۲x^{۳}-۴x^{۲}+۵\Rightarrow ۲xf'(x^{۲}+۱)=۶x^{۲}-۸x$$

حال برای به دست آوردن $f'(۵)$ کافیست $x=۲$ را جای‌گذاری کنیم:

$$\Rightarrow ۴f'(۵)=۶(۲)^{۲}-۸(۲)\Rightarrow ۴f'(۵)=۸\Rightarrow f'(۵)=۲$$

تست اگر مشتق تابع $f(\sqrt[۳]{۳x+۲})$ در $x=۲$ برابر $\dfrac{۱}{۳}$ باشد، مشتق $f(x+x^{۲})$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۴}$ ۲) ۲ ۳) $\dfrac{۷}{۳}$ ۴) ۴

۴ از تابع $y=f(\sqrt[۳]{۳x+۲})$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=۲$ قرار می‌دهیم:

$$y'=\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}\times f'(\sqrt[۳]{۳x+۲})\xrightarrow{x=۲}y'(۲)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۶۴}}f'(\sqrt[۳]{۸})$$

$$=\frac{۱}{۴}f'(۲)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

حال از تابع $y=f(x+x^{۲})$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=۱$ می‌گذاریم:

$$y'=(۱+۲x)f'(x+x^{۲})\xrightarrow{x=۱}y'=۳f'(۲)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$$

مشتق تابع مرکب در توابع معروف

با توجه به قاعدهٔ مشتق برای تابع مرکب، اگر در توابع، به جای x، تابعی از x مانند u باشد، آن‌گاه فرمول‌های مشتق برحسب u در u' ضرب می‌شوند:

۱ مشتق تابع $y=u^{n}$:

$$y'=nu'u^{n-1}$$

$$y=(۲x^{۳}-۱)^{۴}\Rightarrow y'=۴(۶x^{۲})(۲x^{۳}-۱)^{۳}$$

۲ مشتق تابع $y=\sqrt{u}$:

$$y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

$$y=\sqrt{۲x^{۳}-۱}\Rightarrow y'=\frac{۶x^{۲}}{۲\sqrt{۲x^{۳}-۱}}$$

۳ مشتق تابع $y=\sqrt[۳]{u}$:

$$y'=\frac{u'}{۳\sqrt[۳]{u^{۲}}}$$

$$y=\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}\Rightarrow y'=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}+۱)^{۲}}}$$

در حالت کلی، مشتق تابع $y=\sqrt[n]{u^{m}}$ برابر است با:

$$y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

مثال مشتق تابع $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ به ازای $x=9$ را به‌دست آورید.

$$y=\sqrt[3]{(x-1)^2} \Rightarrow y'=\frac{2\times(1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^{3-2}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

$$\xrightarrow{x=9} \frac{2}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{2}{3\times2}=\frac{1}{3}$$

تست اگر $f(x)=(x+\frac{2}{x})^3$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) -18 ۲) -27 ۳) -36 ۴) -45

۲ حد خواسته‌شده برابر $f'(1)$ است، پس از تابع $f(x)=(x+\frac{2}{x})^3$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=3\times(1-\frac{2}{x^2})\times(x+\frac{2}{x})^2$$

$$\Rightarrow f'(1)=3\times(1-2)\times(1+2)^2=-27$$

تست مشتق تابع $f(x)=(\frac{3x+1}{x^2+1})^4$ در $x=1$ کدام است؟

۱) 8 ۲) 16 ۳) -8 ۴) -16

۴ از تابع $f(x)=(\frac{3x+1}{x^2+1})^4$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=1$ می‌گذاریم:

$$f'(x)=4\times\frac{3(x^2+1)-(2x)(3x+1)}{(x^2+1)^2}\times(\frac{3x+1}{x^2+1})^3$$

$$\Rightarrow f'(1)=4\times\frac{3\times2-2\times4}{(2)^2}\times(\frac{4}{2})^3=4\times-\frac{1}{2}\times8=-16$$

تست مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{(\frac{3x+2}{2x-3})^2}$ به ازای $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) $-\frac{13}{3}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۲ می‌دانیم مشتق تابع $y=\sqrt[n]{u^m}$ به صورت $y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$ است، پس:

$$f(x)=\sqrt[3]{(\frac{3x+2}{2x-3})^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(\frac{3x+2}{2x-3})^{3-2}}}\times\frac{\overbrace{3(-3)-2(2)}^{-13}}{(2x-3)^2}$$

$$f'(2)=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}\times\frac{-13}{\underbrace{(2(2)-3)^2}_{1}}=\frac{2}{3\times2}\times-13=\frac{-13}{3}$$

مشتق تابع به‌صورت $y=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$y'=\frac{ad-bc}{(cf(x)+d)^2}\times f'(x)$$

مثال مشتق تابع $y=\frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2}$ به ازای $x=4$ کدام است؟

$$y=\frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2}\Rightarrow y'=\frac{(3\times2)-(-4\times1)}{(\sqrt{x}+2)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=4} y'=\frac{10}{(\sqrt{4}+2)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{10}{16}\times\frac{1}{4}=\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$$

معادلهٔ خط مماس

برای نوشتن معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ واقع بر آن، ابتدا از ضابطهٔ f مشتق می‌گیریم و با قرار دادن x_0 در تابع مشتق، شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم. سپس با داشتن شیب خط مماس و مختصات نقطهٔ تماس، معادلهٔ خط مماس را از رابطهٔ زیر می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

مثال ۱ معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^2+1$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ واقع بر آن را به دست آورید.

مختصات نقطهٔ تماس و شیب خط مماس را محاسبه می‌کنیم و معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+1 \xrightarrow{x=2} f(2)=4+1=5 \Rightarrow A(2,5) \\ f'(x)=2x \xrightarrow{x=2} m=2(2)=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y-5=4(x-2)\Rightarrow y=4x-3$$

مثال ۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که به موازات نیمساز ربع اول و سوم بر منحنی $f(x)=-x^2+3x+1$ مماس می‌شود.

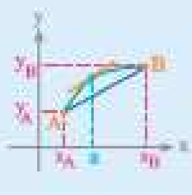
شیب خط مماس بر منحنی f که موازی خط $y=x$ است، برابر ۱ می‌باشد؛ بنابراین:

$$f(x)=-x^2+3x+1 \xrightarrow{f'(x)=1} -2x+3=1\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=3$$

پس مختصات نقطهٔ تماس برابر $A(1,3)$ بوده و معادلهٔ خط مماس برابر است با:

$$y-3=1\times(x-1)\Rightarrow y=x+2$$

تذکر اگر شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای با طول $x=a$ روی نمودار موازی با خط واصل دو نقطه از منحنی باشد، شیب خط مماس بر منحنی با شیب خط واصل برابر است؛ بنابراین $f'(a)=m_{AB}$ است.



مثال **در نقطه‌ای با کدام طول مثبت خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^3-4x$ با خط واصل دو نقطه به طول‌های ۱- و ۲ واقع بر نمودار موازی است؟**

مختصات نقاط ابتدا و انتهای خط واصل به صورت $A(-1,3)$ و $B(2,0)$ بوده و شیب پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{0-3}{2-(-1)}=\frac{-3}{3}=-1$$

حال در نقطه‌ای که خط مماس بر نمودار، موازی پاره‌خط AB است، مشتق تابع f برابر $m_{AB}=-1$ است؛ پس:

$$f'(x)=3x^2-4\xrightarrow{f'(x)=-1}3x^2-4=-1\Rightarrow 3x^2=3$$

$$\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\xrightarrow{x>0}x=1$$

بنابراین در نقطه با طول $x=1$، شیب خط مماس بر نمودار برابر با شیب پاره‌خط AB است.

تست **خط به معادلهٔ $y=-3x-4$ بر نمودار تابع $f(x)=x^2-x-3$ مماس است. طول نقطهٔ تماس کدام است؟**

۱) ۱   ۲) ۱-

۳) ۲   ۴) ۲-

۲ شیب خط مماس بر نمودار تابع f برابر ۳- است؛ پس در نقطهٔ تماس مشتق تابع برابر ۳- است:

$$f(x)=x^2-x-3\Rightarrow f'(x)=2x-1\xrightarrow{f'(x)=-3}2x-1=-3$$

$$\Rightarrow x=-1$$

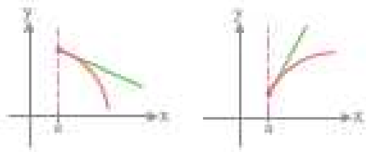
درس ۳ مشتق چپ و راست و مشتق‌پذیری

مشتق راست و مشتق چپ

اگر حد راست عبارت کسری $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در نقطهٔ a تعریف شده و موجود باشد، می‌گوییم تابع f در $x=a$ دارای مشتق راست است. مشتق راست تابع f در $x=a$ با نماد $f'_+(a)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

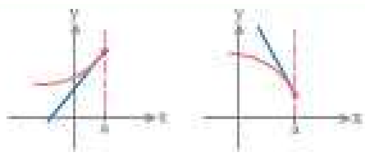
از دیدگاه هندسی مشتق راست تابع f در $x=a$، نشان‌دهندهٔ شیب نیم‌خطی است که در سمت راست نقطه‌ای به طول a بر منحنی تابع f مماس شود. (نیم‌مماس راست).



اگر حد چپ عبارت کسری $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در نقطهٔ a تعریف شده و موجود باشد، می‌گوییم تابع f در $x=a$ دارای مشتق چپ است. مشتق چپ تابع f در $x=a$ با نماد $f'_-(a)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

از دیدگاه هندسی مشتق چپ تابع f در $x=a$، نشان‌دهندهٔ شیب نیم‌خطی است که در سمت چپ نقطه‌ای به طول a بر منحنی تابع f مماس شود. (نیم‌مماس چپ).



تذکر برای این‌که $f'_+(a)$ موجود باشد، تابع f باید در $x=a$ از راست پیوسته باشد و برای این‌که $f'_-(a)$ موجود باشد، تابع f باید در $x=a$ از چپ پیوسته باشد.

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، هر گاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) تابع در $x=a$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

۲) مشتق چپ و مشتق راست در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند:

$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

تست **در تابع $f(x)=\begin{cases}4x+1\ ; x\geq 2\\ x^2+5\ ; x<2\end{cases}$، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟**

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۸   ۴) ۱۶

۲ حد خواسته شده برابر $f'(2)$ است. چون تابع f در $x=2$ پیوسته است، مشتق راست و چپ آن را در $x=2$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}4x+1\ ; x\geq 2\\ x^2+5\ ; x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}4\ ; x\geq 2\\ 2x\ ; x<2\end{cases}$$

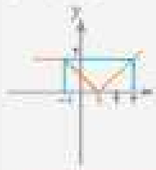
بنابراین $f'_+(2)=4$ و $f'_-(2)=2\times 2=4$ است و در نتیجه $f'(2)=4$.

تست نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) -1

۳) صفر　　۴) ۲

۲ حاصل حد خواسته‌شده برابر مشتق چپ تابع f در $x=1$ است که نشان‌دهندهٔ شیب نیم‌خطی است که از سمت چپ بر نمودار تابع گذر $x=1$ مماس شده است. با توجه به شکل، شیب این نیم‌مماس برابر است با:



$$\Rightarrow f'_-(1)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-0}{-1-1}=-1$$

محاسبهٔ مشتق توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح

برای محاسبهٔ مشتق توابع شامل قدر مطلق در $x=a$ ابتدا باید قدر مطلق را حذف کنیم و سپس مشتق بگیریم. در این مسائل با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ اگر $x=a$ ریشهٔ عبارت داخل قدر مطلق نباشد، علامت عبارت داخل قدر مطلق را به‌ازای $x=a$ مشخص کرده و قدر مطلق را حذف می‌کنیم؛ سپس از عبارت حاصل مشتق می‌گیریم.

مثال مشتق تابع $f(x)=|x^2-1|+|x-3|$ را در $x=2$ به‌دست آورید.

چون به‌ازای $x=2$ عبارت x^2-1 مثبت و عبارت $x-3$ منفی است، پس در اطراف $x=2$ داریم:

$$f(x)=|\overset{+}{x^2-1}|+|\overset{-}{x-3}|=(x^2-1)-(x-3)=x^2-x+2$$

$$\Rightarrow f'(x)=2x-1\Rightarrow f'(2)=2\times 2-1=3$$

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=|5-x\sqrt{x}|$، مقدار $f'(4)+f'(1)$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) $\frac{3}{2}$　　۳) -3　　۴) $-\frac{3}{2}$

۴ علامت عبارت داخل قدرمطلق در اطراف ۴ منفی و در اطراف ۱ مثبت است، پس:

$$x=4: f(x)=-5+x\sqrt{x}=-5+x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(4)=3$$

$$x=1: f(x)=5-x\sqrt{x}=5-x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(1)=-\frac{3}{2}$$

بنابراین $f'(4)+f'(1)=3+(-\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$ است.

۲ اگر $x=a$ ریشهٔ عبارت داخل قدر مطلق باشد، مشتق چپ و راست تابع را در $x=a$ به دست می‌آوریم.

مثال مشتق تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ به‌دست آورید.

باید مشتق چپ و راست تابع را در $x=1$ به‌دست آوریم:

$$x>1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow x^2-1>0\Rightarrow f(x)=|\overset{+}{x^2-1}|=x^2-1$$

$$\Rightarrow f'_+(x)=2x\Rightarrow f'_+(1)=2$$

$$x<1\Rightarrow x^2<1\Rightarrow x^2-1<0\Rightarrow f(x)=|\overset{-}{x^2-1}|=-x^2+1$$

$$\Rightarrow f'_-(x)=-2x\Rightarrow f'_-(1)=-2$$

$\Rightarrow$ $f'(1)$ وجود ندارد.

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=3x+\sqrt{x^2-2x+1}$ مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۱۰　　۳) ۱۴　　۴) ۲۰

۲ ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=3x+\sqrt{\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}}=3x+|x-1|$$

حال برای محاسبهٔ مشتق راست و چپ تابع در $x=1$ علامت عبارت داخل قدرمطلق را مشخص می‌کنیم:

$$x>1: f(x)=3x+|\overset{+}{x-1}|=3x+x-1=4x-1\Rightarrow f'(x)=4$$

$$\Rightarrow f'_+(1)=4$$

$$x<1: f(x)=3x+|\overset{-}{x-1}|=3x-(x-1)=2x+1$$

$$\Rightarrow f'(x)=2\Rightarrow f'_-(1)=2$$

$$\Rightarrow f'_+(1)+3f'_-(1)=4+3\times 2=10$$

برای محاسبهٔ مشتق توابع شامل براکت در $x=a$ ابتدا باید براکت را حذف کنیم و سپس مشتق بگیریم. در این مسائل با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱ اگر $x=a$ عبارت داخل براکت را صحیح نکند، مقدار براکت را به‌ازای $x=a$ مشخص کرده و براکت را حذف می‌کنیم، سپس از عبارت حاصل مشتق می‌گیریم.

مثال مشتق تابع $f(x)=x^2+[4x+1]$ را در $x=\frac{1}{4}$ به دست آورید.

در اطراف $x=\frac{1}{4}$ داریم:

$$[4x+1]=[4(\frac{1}{4})+1]=[\frac{7}{4}]=2\Rightarrow f(x)=x^2+2$$

$$\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow f'(\frac{1}{4})=\frac{2}{4}$$

تست اگر $f(x)=[x^2]x+[x]$ باشد، $f'(\frac{\sqrt{5}}{2})$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۴ در اطراف $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ داریم:

$$[x^2]=[\frac{5}{4}]=1$$

$$[\frac{\sqrt{5}}{2}]=1$$

$$\Rightarrow f(x)=x+1$$

$$f'(x)=1$$

۲ اگر $x=a$ عبارت داخل براکت را صحیح کند، باید مشتق چپ و راست تابع را در $x=a$ به دست آوریم. (البته به شرطی که تابع در $x=a$ پیوستگی چپ و راست داشته باشد، مثلاً اگر تابع پیوستگی چپ ندارد، اصلاً مشتق چپ هم ندارد)

تست **اگر $f(x)=x^2[x]+|x-2|$ باشد، مقدار $f'_+(2)$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۹ ۴) ۷

۳ چون تابع f در $x=2$ از سمت راست پیوسته است، مجاز به محاسبهٔ مشتق راست تابع f در $x=2$ هستیم. ضابطهٔ تابع $f(x)=x^2[x]+|x-2|$ را وقتی $x\to 2^+$ به‌دست می‌آوریم:

$$x\to 2^+ \Rightarrow x>2 \Rightarrow [x]=2,\ |x-2|=x-2 \Rightarrow f(x)=2x^2+x-2$$

$$\Rightarrow f'(x)=4x+1 \Rightarrow f'_+(2)=4\times 2+1=9$$

تست **اگر $f(x)=|x^2-3|+[x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{3})$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{3}+3$ ۲) $2\sqrt{3}+3$

۳) $\sqrt{3}-3$ ۴) $2\sqrt{3}-3$

۲ ضابطهٔ $f(x)=|x^2-3|+[x^2]x$ را وقتی $x>\sqrt{3}$ است را به دست می‌آوریم:

$$x>\sqrt{3} \Rightarrow x^2>3 \Rightarrow [x^2]=3,\ |x^2-3|=x^2-3$$

$$\Rightarrow f(x)=(x^2-3)+3x \Rightarrow f'(x)=2x+3$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{3})=2\sqrt{3}+3$$

تذکر ۱ برای به دست آوردن مشتق توابع شامل قدر مطلق یا جزء صحیح در $x=a$ می‌توانیم از تعریف مشتق نیز استفاده کنیم.

تذکر ۲ در درس دوم، معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=a$ را به‌صورت $y-y_0=m(x-x_0)$ نوشتیم. حالا اگر جای m مشتق راست را قرار دهیم به معادله نیم مماس راست. اگر جای m مشتق چپ تابع را قرار دهیم به نیم مماس چپ در نقطهٔ $x=a$ می‌رسیم.

تست **معادلهٔ نیم مماس راست تابع $f(x)=|x-2|+2|x-3|$ در $x=2$ کدام است؟**

۱) $y=x-4\ ;\ x\geq 4$ ۲) $y=-x+4\ ;\ x\geq 4$

۳) $y=x-4\ ;\ x\geq 2$ ۴) $y=-x+4\ ;\ x\geq 2$

۴ شیب نیم‌مماس راست تابع f در $x=2$ برابر $f'_+(2)$ است، پس:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|+2|x-3|-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overbrace{(x-2)-2(x-3)-2}^{-x+2}}{x-2}=-1$$

حال باتوجه به این‌که مقدار تابع در $x=2$ برابر ۲ است، پس معادلهٔ نیم‌مماس راست برابر است با:

$$y-2=-1\times(x-2) \Rightarrow y=-x+4\ ;\ x\geq 2$$

مشتق توابع چند ضابطه‌ای

در بعضی از سؤالات، تابعی چند ضابطه‌ای شامل یک یا چند پارامتر داده می‌شود و از ما می‌خواهند پارامترها را طوری تعیین کنیم که تابع در نقاط ذکرشده مشتق‌پذیر شود. در این سؤالات باید:

۱ تابع در نقاط موردنظر پیوسته باشد.

یادآوری شرط پیوستگی: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

۲ مشتق چپ و مشتق راست تابع در آن نقاط برابر باشند.

$$f'_-(a)=f'_+(a)$$

مثال **تابع $f(x)=\begin{cases}ax+1\ ;\ x\geq 1\\ x+a\ ;\ x<1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار a را به‌دست آورید.**

ازآن‌جایی‌که هر یک از ضابطه‌ها در بازهٔ خود پیوسته و مشتق‌پذیرند، باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد. $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+1)=a+1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+a)=1+a$$

ازآن‌جایی‌که $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$، پس تابع در $x=1$ پیوسته است. هم‌چنین باید مشتق چپ و راست تابع در $x=1$ برابر باشند:

$$f'_+(1)=f'_-(1) \Rightarrow a=1$$

تست **در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x+a\ ;\ x\leq 1\\ b\sqrt[3]{x}\ ;\ x>1\end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ برای این‌که تابع f در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، باید:

۱) تابع در $x=1$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \Rightarrow b=1+a$$

۲) مشتق چپ و راست برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}1 & ;\ x\leq 1\\ b\times\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & ;\ x>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'_-(1)=1\\ f'_+(1)=\dfrac{b}{3}\end{cases} \Rightarrow \frac{b}{3}=1$$

$$\Rightarrow b=3 \Rightarrow a=2$$

تست **تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x^2-2x| & ;\ x<2\\ \frac{1}{2}x^2+ax+b & ;\ x\geq 2\end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟** (داخل - ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱ برای این‌که مشتق تابع f در $x=2$ موجود باشد، باید:

۱) تابع در $x=2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}|x^2-2x|=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2}x^2+ax+b\right)=2+2a+b=f(2)$$

$$\Rightarrow 2+2a+b=0$$

۲) مشتق چپ و راست برابر باشند:

$$x \to 2^- \Rightarrow f(x)=|\overbrace{x(x-2)}^{-}|=-x^2+2x$$

$$\Rightarrow f'(x)=-2x+2 \Rightarrow f'_-(2)=-2$$

$$x \to 2^+ \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+b$$

$$\Rightarrow f'(x)=x+a \Rightarrow f'_+(2)=2+a$$

$$\Rightarrow 2+a=-2 \Rightarrow a=-4 \Rightarrow 2+2(-4)+b=0$$

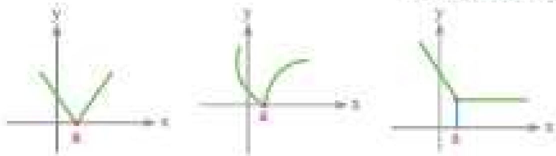
$$\Rightarrow b=6 \Rightarrow a+b=2$$

نقاط مشتق‌ناپذیر

نقاط مشتق‌ناپذیر به چهار دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند:

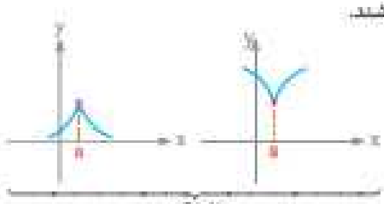
۱ تابع در $x=a$ ناپیوسته باشد.

۲ تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست هر دو موجود و متناهی باشد، اما مقدار آن‌ها با هم برابر نباشد. به چنین نقطه‌ای، نقطهٔ گوشه‌ای می‌گویند.



۳ تابع در $x=a$ پیوسته باشد و از مشتق چپ و راست، یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد. به این نقطه نیز، نقطهٔ گوشه‌ای می‌گویند.

۴ تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست، در a هر دو نامتناهی باشند.

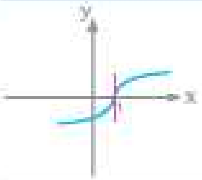


نقطهٔ بازگشتی

مماس قائم

تذکر تنها حالتی که تابع f در $x=a$ خط مماس دارد ولی مشتق ندارد، مماس قائم است.

مثلاً مطابق شکل روبه‌رو، تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در $x=1$ مماس قائم دارد، اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.



تست اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

۳ همهٔ نقاط مشخص‌شده را بررسی می‌کنیم. تابع f:

۱) در $x=a$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

۲) در $x=b$ مشتق چپ و راست هر دو نامتناهی‌اند (نقطهٔ بازگشتی)، پس مشتق‌ناپذیر است.

۳) در $x=c$ شیب خط مماس موازی محور xها است، پس $f'(c)=0$ است.

۴) در $x=d$ مشتق چپ و راست موجود و متناهی اما نابرابرند (نقطهٔ گوشه). در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

تست چه تعداد از توابع زیر در $x=0$ دارای نقطهٔ گوشه‌ای هستند؟

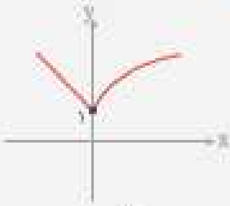
الف) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1 & ; x \geq 0 \\ 1-x & ; x<0\end{cases}$

ب) $f(x)=x^2[x]$　　پ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

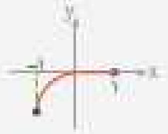
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۱ نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:

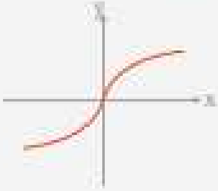
الف) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1 ; & x \geq 0 \\ 1-x ; & x<0\end{cases} \Rightarrow$



ب) $f(x)=x^2[x]=\begin{cases}0 & ; 0 \leq x<1 \\ -x^2 & ; -1 \leq x<0\end{cases} \Rightarrow$



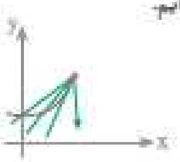
پ) $f(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow$



در تابع (الف) شیب نیم‌مماس چپ و راست در $x=0$ متفاوت است. در تابع (ب) خط مماس در $x=0$ افقی و در تابع (پ) خط مماس در $x=0$ قائم است.

اگر نمودار تابع f را داشته باشیم و شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=a$ نامتناهی (بی‌نهایت) باشد، برای مشخص کردن علامت ∞ می‌توانیم ابتدا چند خط قاطع در اطراف $x=a$ رسم و سپس این خط‌های قاطع را به خط مماس نزدیک کنیم. اگر شیب این خط‌های قاطع مثبت باشد، شیب خط مماس برابر $+\infty$ و اگر شیب این خط‌های قاطع منفی باشد، شیب این خط مماس برابر $-\infty$ خواهد بود.

مثلاً اگر قسمتی از نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد. با توجه به این که شیب نیم‌مماس چپ در $x=1$ نامتناهی است، برای مشخص کردن علامت ∞ چند خط قاطع مطابق شکل رسم کرده‌ایم.



از آن‌جایی‌که شیب این خط‌ها مثبت است، پس شیب نیم‌مماس چپ در $x=1$ برابر $+\infty$ خواهد بود.

تست اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ باشد، نمودار تابع f در اطراف $x=a$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴ از آن‌جایی که $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ است، وقتی از سمت چپ به نقطهٔ $x=a$ نزدیک می‌شویم، شیب خط‌های قاطع مثبت بوده و به $+\infty$ نزدیک می‌شوند:

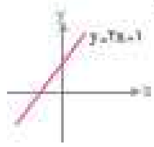
از آن‌جایی که $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ است، بنابراین وقتی از سمت راست به نقطهٔ $x=a$ نزدیک می‌شویم، شیب خط‌های قاطع منفی بوده و به $-\infty$ نزدیک می‌شوند:

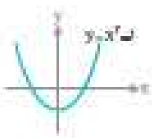
بنابراین نمودار تابع f در اطراف $x=a$ به‌صورت زیر است:

نقاط مشتق‌ناپذیری توابع معروف

- توابع چندجمله‌ای در تمام نقاط پیوسته و مشتق‌پذیر هستند.

توابع چندجمله‌ای زیر در تمام نقاط مشتق‌پذیرند:



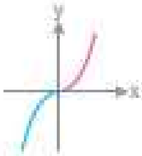


- توابع گویا در تمام نقاط به جز ریشه‌های مخرج پیوسته و مشتق‌پذیر هستند.

تابع $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ فقط در ریشهٔ مخرج یعنی $x=1$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است و تابع $y=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$ در تمام نقاط مشتق‌پذیر است؛ زیرا مخرج آن ریشه ندارد.

- برای بررسی مشتق‌پذیری توابع شامل قدر مطلق، می‌توانیم از رسم شکل و نکات زیر استفاده کنیم:

مثلاً برای بررسی نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $y=x|x|$، ابتدا ضابطهٔ آن را به‌صورت $y=\begin{cases}x^2 & ; x\geq 0\\ -x^2 & ; x<0\end{cases}$ می‌نویسیم و آن را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، تابع در تمام نقاط مشتق‌پذیر است.

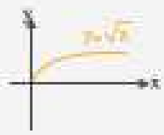


تست کدام تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر است؟

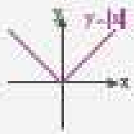
۱) $y=\sqrt{x}$　　۲) $y=\dfrac{1}{x^2}$

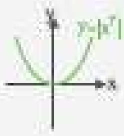
۳) $y=|x|$　　۴) $y=|x^3|$

۴ نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تابع $y=\sqrt{x}$ در $x=0$ فقط پیوستگی راست دارد، پس در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. تابع $y=\dfrac{1}{x^2}$ نیز به دلیل ناپیوستگی در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است. مشتق تابع $y=|x|$ در راست و چپ نقطهٔ $x=0$ وجود دارد اما باهم برابر نیست، پس این تابع نیز در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است.

برای بررسی نقاط مشتق‌ناپذیر در توابع قدرمطلقی از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

۱ در تابع $y=|f(x)|$ اگر $x=a$ ریشهٔ سادهٔ $f(x)$ باشد، تابع در $x=a$ دارای نقطهٔ گوشه‌ای است و مشتق‌پذیر نیست.

تابع $y=|x^2-x|$ در $x=0$ و $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.

۲ در تابع $y=g(x)|f(x)|$ اگر $x=a$ ریشهٔ مشترک $f(x)$ و $g(x)$ باشد، تابع در $x=a$ مشتق‌پذیر است.

تابع $y=x|x^2-x|$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است اما در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.

تست در نقطهٔ مشتق‌ناپذیر تابع $f(x)=x|x-4|$ اختلاف مشتق چپ و راست چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳ چون $x=4$ ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در $x=4$ مشتق‌ناپذیر است. حال برای محاسبهٔ $f'_-(4)$ و $f'_+(4)$ داریم:

$$1)\ x<4 \Rightarrow |x-4|=-(x-4) \Rightarrow f(x)=-x(x-4)=-x^2+4x$$

$$\Rightarrow f'(x)=-2x+4 \Rightarrow f'_-(4)=-8+4=-4$$

$$2)\ x>4 \Rightarrow |x-4|=x-4 \Rightarrow f(x)=x^2-4x$$

$$\Rightarrow f'(x)=2x-4 \Rightarrow f'_+(4)=8-4=4$$

پس اختلاف مشتق چپ و راست در $x=4$ برابر $4-(-4)=8$ است.

تست به‌ازای چند مقدار a تابع $f(x)=|x^2+ax-4|$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

۳ می‌دانیم تابع $y=|u(x)|$ به‌ازای ریشه‌های سادهٔ $u(x)$ دارای نقطهٔ گوشه‌ای بوده و مشتق‌ناپذیر است. پس برای این که تابع f در تمام نقاط مشتق‌پذیر باشد، دلتای معادلهٔ $x^2+ax-4=0$ باید کمتر یا مساوی صفر باشد:

$$\Delta=a^2-4(1)(-4)=a^2+16>0$$

پس جواب هیچ مقدار a است، چون همواره $\Delta>0$ است.

تست تابع $f(x)=2x|x-3|+a|x-3|$ در $x=3$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) -6 ۳) ۲ ۴) ۶

۲ ابتدا از $|x-3|$ فاکتور می‌گیریم:

$$f(x)=2x|x-3|+a|x-3|=(2x+a)|x-3|$$

چون تابع در $x=3$ مشتق‌پذیر است، پس $x=3$ ریشهٔ عبارت $2x+a$ است، پس:

$$2(3)+a=0 \Rightarrow a=-6$$

- برای بررسی نقاط مشتق‌ناپذیر توابع شامل براکت، می‌توانیم از رسم شکل و نکات زیر استفاده کنیم:

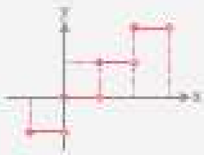
۱ تابع $f(x)=(x-a)[x]$ در نقطهٔ صحیح $x=a$ پیوسته است، اما مشتق‌پذیر نیست.

برای مثال، تابع $y=(x-1)[x]$ در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.

۲ تابع $f(x)=(x-a)^2[x]$ در نقطهٔ صحیح $x=a$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

برای مثال، تابع $y=(x-1)^2[x]$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

مثال نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $y=[x]$ را مشخص کنید.



برای پیدا کردن نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $y=[x]$، ابتدا آن را رسم می‌کنیم. طبق نمودار، این تابع در نقاط صحیح ناپیوسته بوده و مشتق‌پذیر نیست.

تست اگر تابع $f(x)=(ax^2+bx+3)[2x]$ فقط در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a\times b$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$

۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $-\frac{9}{4}$

۴ چون تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس عبارت ax^2+bx+3 به‌صورت $a(x-2)^2$ است:

$$a(x-2)^2=a(x^2-4x+4)=ax^2-4ax+4a$$

با مقایسهٔ این دو عبارت نتیجه می‌گیریم:

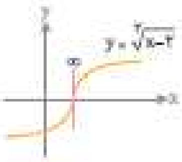
$$\left.\begin{array}{l}1)\ 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}\\ 2)\ b=-4a \Rightarrow b=-4\times\frac{3}{4}=-3\end{array}\right\} \Rightarrow$$

- توابع رادیکالی به‌صورت $y=\sqrt[n]{ax+b}$ در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال مشتق‌پذیر نیستند؛ زیرا:

۱ اگر فرجهٔ رادیکال زوج باشد، تابع در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال ناپیوسته است.

تابع $y=\sqrt{x-2}$ در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال یعنی $x=2$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

۲ اگر فرجهٔ رادیکال فرد باشد، تابع در ریشهٔ عبارت زیر رادیکال پیوسته است، اما شیب خط مماس بر نمودار در این نقطه، نامتناهی است.



تابع $y=\sqrt[3]{x-2}$ در $x=2$ مشتق ندارد؛ چون شیب خط مماس در این نقطه نامتناهی است.

تست خط‌های $x=1$ و $x=3$ برای تابع $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}$ مماس قائم هستند. مقدار $a\times b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) -8 ۳) ۱۲ ۴) -12

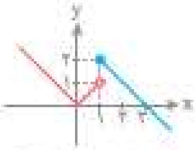
۴ چون خط‌های $x=1$ و $x=3$ برای تابع f مماس قائم هستند، پس عبارت زیر رادیکال در این دو نقطه صفر می‌شود:

$$\begin{cases}x=1: (1)^2+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1\\ x=3: (3)^2+3a+b=0 \Rightarrow 3a+b=-9\end{cases} \Rightarrow a=-4\ ,\ b=3$$

بنابراین $a\times b=-12$ است.

برای بررسی مشتق توابع چند ضابطه‌ای، باید مشتق‌پذیری را در هر یک از ضابطه‌ها و همچنین نقاط مرزی بررسی کنیم؛ در صورتی که نمودار هر یک از ضابطه‌ها قابل رسم باشد، بهترین راهکار برای بررسی مشتق‌پذیری، رسم شکل است.

مثلاً برای بررسی مشتق‌پذیری تابع $y=\begin{cases}3-x & ; x\geq 1\\ |x| & ; x<1\end{cases}$ ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل:



تابع در $x=0$ پیوسته است، اما چون شیب نیم‌مماس چپ و راست در این نقطه برابر نیست، تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

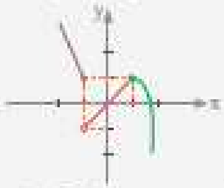
همچنین تابع در $x=1$ ناپیوسته است؛ پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

تست تابع $f(x)=\begin{cases}-2x-1 & ; x\leq -1\\ x & ; -1<x<1\\ 2-x^2 & ; x\geq 1\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-1 & ; x\leq -1\\ x & ; -1<x<1\\ 2-x^2 & ; x\geq 1\end{cases}\Rightarrow$$



با توجه به نمودار، تابع f در $x=-1$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در نقطهٔ $x=1$ نیز شیب نیم‌مماس چپ و راست یکسان نیست؛ بنابراین تابع در دو نقطه به طول‌های ۱- و ۱ مشتق‌ناپذیر است.

در مواردی که امکان رسم نبود، نقاط مشتق‌ناپذیر هر ضابطه را با توجه دامنهٔ آن، جداگانه به‌دست می‌آوریم.

سپس پیوستگی و مشتق‌پذیری نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم.

تست ضابطهٔ تابع مشتق $f(x)=\begin{cases}2x^3 & ; x<0\\ x^2+2x & ; 0\leq x\leq 2\\ 6x-4 & ; x>2\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f'(x)=\begin{cases}6x^2 & ; x\leq 0\\ 2x+2 & ; 0<x<2\\ 6 & ; x\geq 2\end{cases}$

۲) $f'(x)=\begin{cases}6x^2 & ; x<0\\ 2x+2 & ; 0<x<2\\ 6 & ; x>2\end{cases}$

۳) $f'(x)=\begin{cases}6x^2 & ; x<0\\ 2x+2 & ; 0<x\leq 2\\ 6 & ; x>2\end{cases}$

۴) $f'(x)=\begin{cases}6x^2 & ; x<0\\ 2x+2 & ; 0\leq x<2\\ 6 & ; x>2\end{cases}$

۳ هر یک از ضابطه‌ها در بازه‌های خود پیوسته و مشتق‌پذیرند. پس باید مشتق‌پذیری تابع f را در نقطهٔ مرزی $x=0$ و $x=2$ بررسی کنیم:

۱) تابع f در $x=0$ و $x=2$ پیوسته است:

$$x=0:\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2x)=0=f(0)\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x^3)=0\end{cases}$$

$$x=2:\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(6x-4)=8\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+2x)=8=f(2)\end{cases}$$

۲) مشتق چپ و راست تابع f را در $x=0$ و $x=2$ به دست می‌آوریم:

$$x<0: f(x)=2x^3\Rightarrow f'(x)=6x^2\Rightarrow f'_-(0)=0$$

$$0\leq x\leq 2: f(x)=x^2+2x\Rightarrow f'(x)=2x+2\Rightarrow\begin{cases}f'_+(0)=2\\ f'_-(2)=6\end{cases}$$

$$x>2: f(x)=6x-4\Rightarrow f'(x)=6\Rightarrow f'_+(2)=6$$

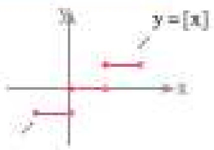
پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست اما در $x=2$ مشتق‌پذیر است:

$$f(x)=\begin{cases}2x^3 & ; x<0\\ x^2+2x & ; 0\leq x\leq 2\\ 6x-4 & ; x>2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}6x^2 & ; x<0\\ 2x+2 & ; 0<x\leq 2\\ 6 & ; x>2\end{cases}$$

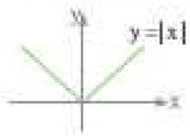
دامنهٔ تابع مشتق

دامنهٔ تابع مشتق، مجموعهٔ طول نقاطی از تابع f است که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر باشد؛ پس:

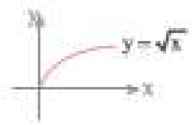
$$D_{f'}=D_f-\{\text{طول نقاط مشتق‌ناپذیر تابع } f\}$$



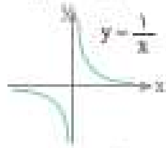
$D_{f'}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$



$D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$



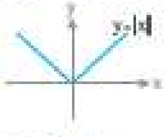
$D_{f'}=(0,+\infty)$



$D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$

برای به دست آوردن تابع مشتق در توابعی که ممکن است در بعضی نقاط مشتق‌ناپذیر باشند، مانند توابع چند ضابطه‌ای، توابع شامل جزء صحیح و... ابتدا باید نقاط مشتق‌ناپذیر تابع را مشخص کنیم، سپس از تابع مشتق بگیریم و نقاط مشتق‌ناپذیر را از دامنهٔ تابع f' حذف کنیم. مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر نیست؛ پس باید $x=0$ را از دامنهٔ تابع مشتق حذف کنیم:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & ; x\geq 0\\ -x & ; x<0\end{cases}$$



$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & ; x>0\\ -1 & ; x<0\end{cases}\Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$$

تست اگر $f(x)=|x^2-2x|$ دامنهٔ تابع مشتق کدام است؟

۱) $D_{f'}=\mathbb{R}$ ۲) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$

۳) $D_{f'}=\{0,2\}$ ۴) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,2\}$

۴ چون $x=0$ و $x=2$ ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق هستند، پس تابع f در این دو نقطه مشتق‌پذیر نیست، پس دامنهٔ تابع مشتق برابر است با: $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,2\}$

تست دامنهٔ تابع مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$ کدام است؟

۱) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$ ۲) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

۳) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ۴) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,1\}$

۴ می‌دانیم توابع رادیکالی با فرجهٔ ۳ در ریشه‌های عبارت زیر رادیکال دارای مماس قائم هستند و در این نقاط مشتق ندارند. بنابراین ریشه‌های عبارت زیر رادیکال را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

تست ضابطهٔ تابع مشتق $f(x)=\begin{cases} x^2+x & ; x\geq 1 \\ 3x^2+x & ; x<1 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & ; x>1 \\ 6x+1 & ; x<1 \end{cases}$ ۲) $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & ; x\geq 1 \\ 6x+1 & ; x<1 \end{cases}$

۳) $f'(x)=\begin{cases} 6x+1 & ; x>1 \\ 2x+1 & ; x<1 \end{cases}$ ۴) $f'(x)=\begin{cases} 6x+1 & ; x\geq 1 \\ 2x+1 & ; x<1 \end{cases}$

۱ هر یک از ضابطه‌ها در بازه‌های خود پیوسته و مشتق‌پذیرند؛ پس باید مشتق‌پذیری تابع f را در نقطهٔ مرزی $x=1$ بررسی کنیم:

۱) حد چپ و راست تابع در $x=1$ برابر نیستند:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+x)=2 \ , \ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x^2+x)=4$$

پس تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست؛ یعنی $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$ است و داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & ; x\geq 1 \\ 3x^2+x & ; x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & ; x>1 \\ 6x+1 & ; x<1 \end{cases}$$

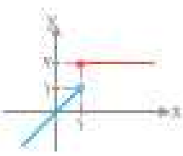
نمودار تابع مشتق

برای رسم نمودار تابع مشتق f به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f را پیدا می‌کنیم تا دامنهٔ تابع مشتق مشخص شود.

۲ از تابع f مشتق می‌گیریم و نمودار تابع f' را در دامنهٔ به‌دست‌آمده رسم می‌کنیم.

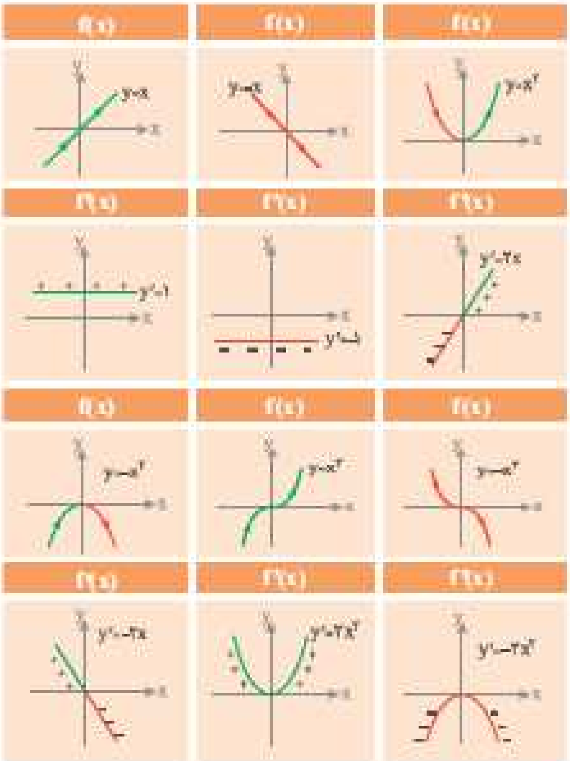
مثلاً اگر $f(x)=\begin{cases} 2 & ; x\geq 1 \\ x & ; x<1 \end{cases}$ باشد، برای رسم نمودار تابع f'، ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم تا نقاط مشتق‌ناپذیر آن مشخص شود:



چون تابع در $x=1$ ناپیوسته است، پس در این نقطه مشتق‌ناپذیر بوده و نقطهٔ $x=1$ در دامنهٔ تابع مشتق وجود ندارد:

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & ; x>1 \\ 1 & ; x<1 \end{cases} \Rightarrow$$

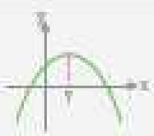
تذکر در بازه‌هایی که تابع f صعودی است، نمودار تابع f' بالای محور xها قرار دارد و در بازه‌هایی که تابع f نزولی است، نمودار تابع f' در پایین محور xها قرار دارد. توجه کنید در نقاطی که خط مماس بر نمودار f افقی است، نمودار f' محور xها را قطع می‌کند. در جدول زیر، ارتباط بین نمودار توابع معروف با نمودار تابع مشتق آن‌ها بیان شده است:

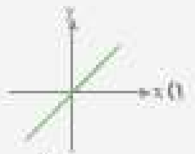


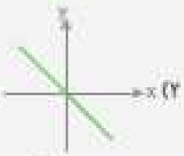
در این بخش با سه نوع سؤال مواجه هستیم:

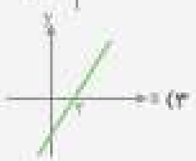
۱ رسم نمودار f' با داشتن نمودار f.

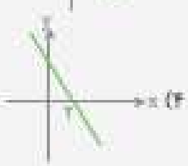
تست نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. نمودار f' کدام می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴ در بازه‌هایی که تابع f صعودی است، نمودار تابع f' بالای محور xها و در بازه‌هایی که تابع f نزولی است، نمودار تابع f' در پایین محور xها قرار دارد.

۱) نمودار تابع f در بازهٔ $(-\infty, 2]$ صعودی است؛ پس تابع f' در این بازه مثبت است؛ یعنی نمودار آن بالای محور xها قرار دارد.

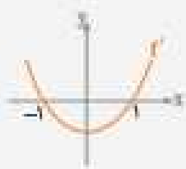
۲) تابع در بازهٔ $[2, +\infty)$ نزولی است؛ پس تابع f' در این بازه منفی است؛ یعنی نمودار آن پایین محور xها قرار دارد.

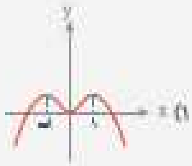
۳) توجه کنید که خط مماس بر نمودار تابع f در $x=2$ موازی محور xهاست؛ پس $f'(2)=0$ می‌باشد؛ بنابراین نمودار تابع f' محور xها را در نقطه‌ای با طول ۲ قطع می‌کند.

پس نمودار گزینهٔ (۴) می‌تواند مربوط به تابع f' باشد.

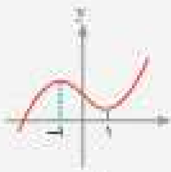
۴ رسم نمودار f با داشتن نمودار f'.

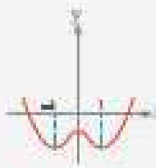
تست **نمودار تابع f' به صورت مقابل است. کدام نمودار برای f قابل قبول است؟**



۱)


۲)


۳)


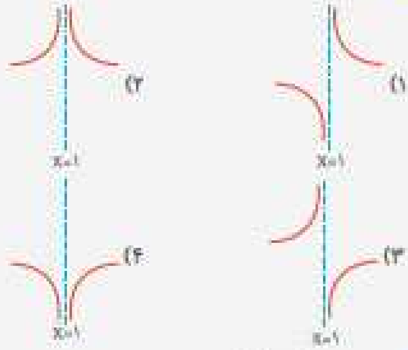
۴)


۳ نمودار f' در نقاط $x=-1$ و $x=1$ با محور xها برخورد می‌کند، پس خط مماس بر نمودار f در این دو نقطه افقی است.

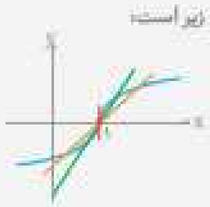
از طرفی نمودار f' در بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ در بالای محور xها است، پس نمودار تابع f در این بازه‌ها صعودی است. در بازهٔ $(-1, 1)$ نیز نمودار f' پایین محور xها است، پس در این بازه نمودار f نزولی است.

۳ رسم نمودار f' با داشتن ضابطه f.

تست **نمودار مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در اطراف $x=1$ کدام است؟**



۴ نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ به‌صورت زیر است:



با توجه به این که شیب خط‌های قاطع مثبت است، پس شیب مماس قائم در $x=1$ برابر $+\infty$ بوده و نمودار مشتق آن در اطراف $x=1$ به‌صورت مقابل است:

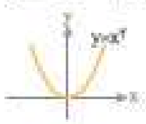
مشتق‌پذیری روی یک بازه

- تابع f روی بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر است، هر گاه در هر نقطهٔ این بازه مشتق‌پذیر باشد.

مثلاً، تابع $y=x^2$ در بازهٔ $(-1, 1)$ مشتق‌پذیر است؛ زیرا در هر نقطهٔ این بازه مشتق موجود و مقدار آن از رابطهٔ $f'(x)=2x$ به‌دست می‌آید.

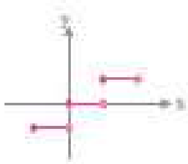
- تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ مشتق‌پذیر است، هر گاه f در بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مثلاً، تابع $y=x^2$ در بازهٔ $[-1, 1]$ مشتق‌پذیر است؛ زیرا در هر نقطهٔ متعلق به بازهٔ $(-1, 1)$ مشتق‌پذیر و در $x=1$ مشتق چپ و در $x=-1$ مشتق راست دارد.



- تابع f روی بازهٔ $[a, b)$ مشتق‌پذیر است، هر گاه f در بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست داشته باشد. به طور مشابه،
- تابع f روی بازهٔ $(a, b]$ مشتق‌پذیر است، هر گاه f در بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

مثلاً، تابع $y=[x]$ در بازهٔ $[0, 1)$ مشتق‌پذیر است؛ زیرا در هر عدد حقیقی متعلق به بازهٔ $(0, 1)$ مشتق‌پذیر و در $x=0$ مشتق راست دارد.



تست نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. این تابع در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

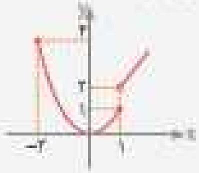
۱) $(-1,2]$
۲) $(1,3)$
۳) $[2,4]$
۴) $[-2,0)$

۲ تابع در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌ناپذیر است، چون شیب نیم‌مماس چپ و راست نابرابر دارد.
تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌ناپذیر است، چون در این نقطه ناپیوسته است.
تابع در نقطهٔ $x=4$ مشتق‌ناپذیر است، چون ناپیوسته است.
بنابراین تنها گزینهٔ (۲) صحیح است که شامل این نقاط نیست.

تست تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; -2 \le x \le 1 \\ x+1 & ; x>1 \end{cases}$ روی کدام‌یک از بازه‌های زیر مشتق‌پذیر نیست؟

۱) $[-2,1]$
۲) $(1,+\infty)$
۳) $[1,2]$
۴) $[-1,0]$

۳ با توجه به نمودار تابع f، این تابع در $x=1$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است؛ پس در بازهٔ $[1,2]$ مشتق‌پذیر نیست.



درس ۴ آهنگ تغییر

مفاهیم این درس مشابه سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای در فصل اول فیزیک دوازدهم است.

آهنگ متوسط

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[x_1, x_2]$ برابر است با نسبت تغییرات تابع به متغیر که برابر است با:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

هنگامی که متغیر x از x_1 به x_2 تغییر می‌کند، مقدار x_2-x_1 را نمو متغیر x می‌نامند و آن را با Δx یا h نشان می‌دهند؛ بنابراین آهنگ متوسط تغییر تابع عبارت است از:

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

تذکر از نظر هندسی، آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[x_1, x_2]$ برابر شیب خطی است که دو نقطه با طول‌های x_1 و x_2 از نمودار تابع f را به هم وصل می‌کند.

مثال اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ باشد.
الف) آهنگ متوسط تابع در بازهٔ $[1,8]$ را محاسبه کنید.
ب) آهنگ متوسط در $x=8$ با $\Delta x=19$ را محاسبه کنید.

الف) $\frac{f(8)-f(1)}{8-1}=\frac{(\sqrt[3]{8}+1)-(\sqrt[3]{1}+1)}{8-1}=\frac{3-2}{7}=\frac{1}{7}$

ب) می‌دانیم آهنگ متوسط تابع در x_1 با Δx به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:
$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{f(8+19)-f(8)}{19}=\frac{f(27)-f(8)}{19}=\frac{4-3}{19}=\frac{1}{19}$$

آهنگ لحظه‌ای

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=a$ برابر است با مقدار مشتق تابع f در $x=a$:

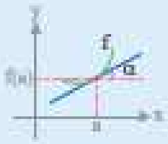
$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در } x=a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

مثلاً آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x=16$ برابر است با $f'(16)$ که به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=16} f'(16)=\frac{1}{2\sqrt{16}}=\frac{1}{2\times 4}=\frac{1}{8}$$

تذکر از نظر هندسی، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=a$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=a$ است:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } x=a = f'(a)=\tan\alpha$$



تست اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=1$ باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در $x=2$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

۳ می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ در $x=2$ برابر است با:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

اگر حد را به‌صورت زیر تفکیک کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}=\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}_{f'(2)}\times\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}}_{\frac{1}{4}}=1$$

$$\Rightarrow f'(2)\times\frac{1}{4}=1\Rightarrow f'(2)=4$$

تذکر در تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ ، آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[x_1,x_2]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در وسط این بازه، یعنی نقطه‌ای به طول $\frac{x_1+x_2}{2}$ برابر است. به عبارت دیگر در تابع درجهٔ دوم f داریم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

مثلاً، در تابع $f(x)=x^2+2x+3$ آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[1,7]$، با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=\frac{1+7}{2}=4$ برابر است.

تست در تابع $f(x)=-x^2+6x-7$ آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $-\sqrt{5}$

۲ چون تابع $f(x)$ درجهٔ دوم است، به‌جای اینکه آهنگ متوسط در بازهٔ داده شده را محاسبه کنیم، آهنگ تغییر لحظه‌ای را در نقطهٔ وسط بازه به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})}{2}=3$$

$$f'(x)=-2x+6\xrightarrow{x=3}f'(3)=-2(3)+6=0$$

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ای به طول $x=a$ است. a کدام است؟

۱) ۱۱/۷۵ ۲) ۱۲/۲۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۳/۵

۲ آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=4$ به $x=25$ برابر است با:

$$\frac{f(25)-f(4)}{25-4}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{4}}{25-4}=\frac{5-2}{21}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=a$ برابر است با مقدار مشتق تابع در $x=a$؛ پس:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{7}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{7}{2}\Rightarrow a=\frac{49}{4}=\frac{24/5}{2}=12/25$$

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x+1}$ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ $[0,4]$ از آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $x=\frac{3}{2}$ چقدر کمتر است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۶

۲ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ $[0,4]$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{\left(\sqrt{2(4)+1}+\frac{1}{4+1}\right)-\left(\sqrt{2(0)+1}+\frac{1}{0+1}\right)}{4}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{9}+\frac{1}{5}\right)-\left(\sqrt{1}+1\right)}{4}=\frac{\left(3+\frac{1}{5}\right)-(2)}{4}=\frac{1+\frac{1}{5}}{4}=\frac{\frac{6}{5}}{4}$$

$$=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=\frac{3}{2}$ برابر است با $f'(\frac{3}{2})$، پس:

$$f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$+\frac{(0)(x+1)-(1)(1)}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}+\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}}f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{\underbrace{\sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right)+1}}_{\sqrt{4}}}+\frac{-1}{\underbrace{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2}_{\left(\frac{5}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\frac{25}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{25}=\frac{25-8}{50}=\frac{17}{50}$$

بنابراین اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$\frac{17}{50}-\frac{3}{10}=\frac{17-15}{50}=\frac{2}{50}=\frac{4}{100}=0/04$$

تست آهنگ تغییر لحظه‌ای و متوسط تابع $f(x)=\frac{x^2+2}{x+1}$ در بازهٔ $[0,2]$ در چند نقطه برابر هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ ابتدا آهنگ تغییرات متوسط f را در بازهٔ $[0,2]$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2-2}{2}=0$$

حال نقاطی از تابع که آهنگ لحظه‌ای در آن‌ها برابر صفر است را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x(x+1)-(x^2+2)}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x^2+2x-2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{3}-1\notin[0,2] & ✗\\ x=\sqrt{3}-1 & ✓\end{cases}$$

مسائل کاربردی آهنگ تغییر

برخی از مسائل مربوط به آهنگ تغییر به‌صورت کاربردی مطرح می‌شوند. در این مسائل نیز آهنگ لحظه‌ای و همچنین آهنگ متوسط تغییر از روابط گفته‌شده در درسنامه‌های قبلی به‌دست می‌آید. چند نمونهٔ مشهور از این مسائل به‌صورت زیر است:

۱ مسائلی که راجع به سرعت یک متحرک مطرح می‌شوند.

مثال معادلهٔ حرکت یک گلولهٔ توپ که از زمین به‌طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود، به صورت $h(t)=-5t^2+20t$ است. سرعت لحظه‌ای این گلوله در زمان برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟

لحظه‌ای که گلوله به سطح زمین می‌رسد، $h(t)=0$ خواهد بود؛ پس:

$$h(t)=-5t^2+20t \xrightarrow{h(t)=0} -5t^2+20t=0 \Rightarrow -5t(t-4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=0\,s & \text{(لحظهٔ پرتاب) غیر قابل قبول} \\ t=4\,s & \checkmark \end{cases}$$

سرعت جسم در لحظهٔ برخورد با زمین، همان مقدار مشتق تابع مکان - زمان در لحظهٔ $t=4$ است؛ پس:

$$h'(t)=-10t+20 \xrightarrow{t=4s} h'(4)=-10(4)+20=-20\frac{m}{s}$$

تست یک دینامیت، سنگی را منفجر می‌کند و تکه‌ای از آن سنگ را با سرعت ۵۰ متر بر ثانیه به سمت بالا می‌فرستد. این تکه سنگ پس از t ثانیه به ارتفاع $h(t)=50t-5t^2$ می‌رسد. سرعت سنگ هنگامی که در ارتفاع ۸۰ متر از سطح زمین قرار دارد و رو به بالا می‌رود، چقدر است؟

۱) ۲۵　　۲) ۳۰　　۳) ۳۵　　۴) ۴۰

۴ برای یافتن سرعت سنگ، هنگامی‌که ارتفاع آن $80m$ است، ابتدا باید مقدار t را در آن موقعیت پیدا کنیم:

$$h(t)=50t-5t^2=80 \Rightarrow \underbrace{5t^2-50t+80=0}_{5(t^2-10t+16)} \Rightarrow 5(t-2)(t-8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=8 \end{cases}$$

یعنی سنگ ۲ ثانیه پس از انفجار و ۸ ثانیه پس از انفجار در ارتفاع $80m$ قرار دارد. چون سرعت سنگ را هنگامی که رو به بالا می‌رود می‌خواهیم، پس سرعت آن را در $t=2$ به‌دست می‌آوریم:

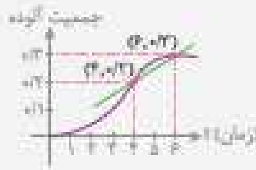
$$h(t)=50t-5t^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} v(t)=50-10t$$

$$\Rightarrow v(2)=50-20=30\frac{m}{s}$$

۴ مسائلی که راجع به رشد یک کمیت، مانند رشد جمعیت یک شهر، رشد باکتری‌ها در یک محیط و ... مطرح می‌شوند.

مثال نمودار روبه‌رو جمعیت آلوده به یک ویروس را برحسب زمان (هفته) نشان می‌دهد. آهنگ متوسط رشد جمعیت آلوده از هفتهٔ چهارم تا هفتهٔ ششم را محاسبه کنید.

آهنگ متوسط رشد از هفتهٔ چهارم تا هفتهٔ ششم همان شیب خط واصل آن‌ها است:



$$\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=\frac{\overbrace{0/3-0/2}^{0/1}}{2}=0/05$$

تست با افزودن مقداری سم به یک تشت رشد باکتری، برای مدتی جمعیت هم‌چنان افزایش می‌یابد، اما این افزایش متوقف می‌شود و جمعیت شروع به افت می‌کند. میزان جمعیت این باکتری‌ها برحسب t از رابطهٔ $m(t)=10^6+10^4t-10^3t^2$ به‌دست می‌آید. رشد جمعیت در کدام لحظه متوقف می‌شود؟

۱) $t=1/5$　　۲) $t=2/5$　　۳) $t=4$　　۴) $t=5$

۴ باید از تابع $m(t)$ مشتق بگیریم و آن را صفر بگذاریم:

$$m(t)=10^6+10^4t-10^3t^2 \Rightarrow m'(t)=0+10^4-2\times10^3t=0$$

$$2\times10^3t=10^4 \Rightarrow 2\times10^3t=10\times10^3 \Rightarrow 2t=10 \Rightarrow t=5$$

۳ مسائلی که راجع به جرم یا حجم یک کمیت مطرح می‌شوند.

مثال جرم یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت از رابطهٔ $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ به دست می‌آید. آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری در لحظهٔ $t=4$ را به‌دست آورید.

باید $m'(4)$ را به‌دست آوریم:

$$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \xrightarrow{t=4} m'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}+6(4)^2$$

$$=\frac{1}{4}+96=96/25$$

تست حجم یک بالن کروی در حال باد شدن از رابطهٔ $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ به‌دست می‌آید. با تغییر شعاع بالن از $2m$ به $3m$، حجم بالن تقریباً چقدر زیاد می‌شود؟

۱) $\frac{47\pi}{3}$　　۲) $\frac{58\pi}{3}$　　۳) $\frac{39\pi}{3}$　　۴) $\frac{76\pi}{3}$

۴ آهنگ متوسط تغییر حجم بالن در بازهٔ ۲ تا ۳ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{V(3)-V(2)}{3-2}=\frac{\frac{4}{3}\pi(3)^3-\frac{4}{3}\pi(2)^3}{1}=\frac{\frac{4}{3}\pi(\overbrace{3^3-2^3}^{27-8=19})}{1}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}\pi\times19}{1}=\frac{76\pi}{3}$$

۵ در برخی مسائل، تابعی که می‌خواهیم آهنگ متوسط و یا آهنگ لحظه‌ای تغییر آن‌را محاسبه می‌کنیم به ما داده نشده است. پس باید ابتدا تابع مورد نظر را بسازیم. به تست زیر دقت کنید:

تست اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد، در لحظه‌ای که آهنگ لحظه‌ای مساحت این مستطیل برابر ۳۰ می‌باشد، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۱۵　　۲) ۲۰　　۳) ۴۰　　۴) ۶۰

۳ با توجه به این‌که طول مستطیل (y) سه برابر عرض آن (x) است، پس تابع مساحت و محیط آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$P=2(x+y) \xrightarrow{y=3x} P(x)=2(3x+x)=8x$$

$$S=xy \xrightarrow{y=3x} S(x)=3x^2$$

با توجه به این‌که $S'(x)=30$ است داریم:

$$S'(x)=6x \Rightarrow 30=6x \Rightarrow x=5$$

حال محیط مستطیل را در لحظه‌ای که عرض آن برابر ۵ است، به‌دست می‌آوریم:

$$P(x)=8x \Rightarrow P(5)=8\times5=40$$

فصل ۰۹
کاربرد مشتق

ارتباط با فصل‌های دیگه: واضح است که مشتق پیش‌نیاز این فصل است اما از اهمیت معادله و نامعادله و همچنین تسلط بر نمودار تابع درجه دوم در این فصل غافل نشوید که تسلط بر آن بسیار تعیین‌کننده و مهم است. بخش‌هایی از این فصل به کمی دانش هندسه هم نیاز دارد.

توصیه: برای اغلب سؤالات بهینه‌سازی باید بلد باشید تابع بسازید. ممکن است تابع شما از جنس طول، زمان، مساحت و یا حجم باشد که دانش شما در هندسه را هم می‌طلبد. بهترین راه برای تقویت توانایی حل مسائل بهینه‌سازی، حل چند بارهٔ سوال‌های متنوع است. معمولاً زمانی توانایی حل سؤالی از این مبحث را در جلسهٔ کنکور دارید که مشابه آن را قبلاً تمرین کرده باشید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۲	۱

درس ۱ نقاط بحرانی و اکسترمم‌های تابع

ارتباط یکنوایی با مشتق

می‌دانیم مشتق یک تابع، همان شیب خط مماس بر نمودار تابع است. بنابراین می‌توان با تحلیل آن به نتایج زیر رسید.

برای بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق‌پذیر f در بازهٔ (a, b)، مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

۱ اگر $f'(x) > ۰$ باشد، آنگاه شیب خط مماس بر f مثبت و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است.

۲ اگر $f'(x) < ۰$ باشد، آنگاه شیب خط مماس بر f منفی و در نتیجه تابع f اکیداً نزولی است.

۳ اگر در برخی نقاط، $f'(x) = ۰$ باشد، خط مماس بر نمودار f موازی محور xها است.

مثال نمودار تابع f به‌صورت زیر است. علامت مشتق تابع را در بازه‌های مختلف بررسی کنید.

در این نمودار مشتق در بازهٔ $(-\infty, -۱)$ مثبت، در بازهٔ $(-۱, ۲)$ برابر صفر و در بازهٔ $(۲, ۱۰)$ منفی است.

تست با توجه به نمودار تابع f، علامت f' در کدام بازه مثبت است؟

۱) $(-\infty, -۳)$

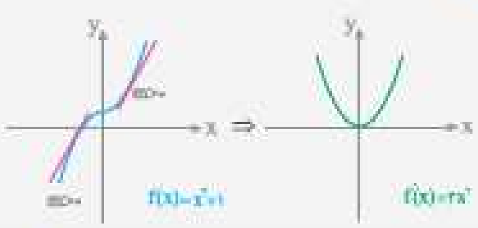
۲) $(-۳, -۱)$

۳) $(-۲, ۲)$

۴) $(-۱, ۴)$

۳ با توجه به نمودار، چون تابع f در بازهٔ $(-۲, ۲)$ اکیداً صعودی است، پس در این بازه f' مثبت است.

مثال نمودار تابع $f(x) = x^۳ + ۱$ و مشتق آن به صورت زیر است:



پس اگر ضابطهٔ تابع را داشتیم برای بررسی وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق‌پذیر f در بازهٔ (a, b) باید مشتق تابع را به‌دست آوریم؛ سپس جدول تعیین علامت را برای تابع f' رسم کنیم. در بازه‌هایی که $f'(x)$ مثبت باشد، تابع f اکیداً صعودی و در بازه‌هایی که $f'(x)$ منفی باشد، تابع f اکیداً نزولی است.

مثال وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=2x^2-8x+3$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم. $f'(x)=4x-8$

سپس جدول تعیین علامت را برای $f'(x)$ رسم می‌کنیم.

$f'(x)=0$

$4x-8=0 \Rightarrow x=2$

x		2	
f'	$-$		$+$

پس این تابع در بازه $(-\infty,2)$، $f'(x)<0$ است. پس تابع اکیداً نزولی است و در $(2,+\infty)$، $f'(x)>0$ است پس تابع اکیداً صعودی است.

تست بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^3-6x^2+4$ در آن نزولی است، کدام است؟

۱) $(-4,0)$ ۲) $(0,4)$ ۳) $(2,8)$ ۴) $(6,15)$

۲ باید جدول تعیین علامت f' را رسم کنیم:

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4) \Rightarrow$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

با توجه به جدول تعیین علامت مشتق، تابع در هریک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(4,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(0,4)$ اکیداً نزولی است.

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^4+8x^3-18x^2$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(-2,6)$

۳) $(-\infty,0)$ ۴) $\mathbb{R}-(-2,6)$

۱ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم: $f'(x)=-4x^3+24x^2-36x$

سپس جدول تعیین علامت را برای $f'(x)$ رسم می‌کنیم:

$f'(x)=0$

$-4x^3+24x^2-36x=0 \Rightarrow -4x(x^2-6x+9)=0$

$\Rightarrow -4x(x-3)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

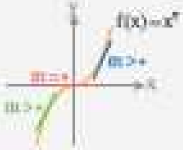
با توجه به جدول تعیین علامت، تابع در بازهٔ $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً صعودی است. با توجه به گزینه‌ها، جواب گزینه (۱) است.

تحلیل $f'(x)\geq 0, f'(x)\leq 0$

اگر در یک بازه $f'(x)\geq 0$، در صورتی‌که مشتق تابع f در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً صعودی و اگر مشتق تابع f در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f صعودی است. به همین ترتیب اگر در یک بازه $f'(x)\leq 0$، در صورتی‌که مشتق تابع f در یک یا چند نقطه برابر با صفر باشد، تابع f اکیداً نزولی و اگر مشتق تابع f در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f نزولی است.

مثال وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=x^3$ را بررسی کنید.

با تحلیل نمودار این تابع می‌بینیم که چون $f'(x)$ فقط در نقطهٔ $x=0$ برابر صفر است، پس تابع f اکیداً صعودی است.



در تحلیل ضابطه مشتق تابع هم به نتیجه‌ای مشابه می‌رسیم می‌دانیم $f'(x)=3x^2$.

جدول تعیین علامت مشتق این تابع به شکل زیر است:

$f'(x)=0$

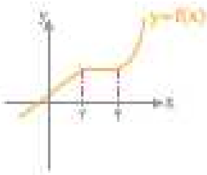
$3x^2=0 \Rightarrow x=0$

x		0	
f'	$+$		$+$

در $\mathbb{R}$، $f'(x)\geq 0$ و چون فقط در یک نقطه $f'(x)=0$ شده است تابع اکیداً صعودی است.

برای درک بهتر، نمودارهای زیر را هم ببینید.

از آن‌جایی که $f'(x)$ در بازهٔ $(2,4)$ برابر صفر است، پس تابع f صعودی است.



چون $g'(x)$ فقط در نقاط صحیح برابر صفر است، پس تابع g اکیداً صعودی است.

تست در کدام بازه تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & ;x\leq 1 \\ 0 & ;x>1 \end{cases}$ اکیداً صعودی است؟

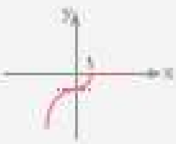
۱) $(1,+\infty)$

۲) $(0,+\infty)$

۳) $(-\infty,1)$

۴) این تابع بازهٔ اکیداً صعودی ندارد.

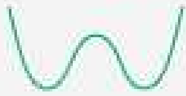
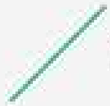
۳ ابتدا تابع چندضابطه‌ای داده شده را رسم می‌کنیم.



بازهٔ $(-\infty,1)$ را در نظر بگیرید. در این بازه مشتق فقط در یک نقطه $(x=0)$ برابر صفر شده پس این تابع در $(-\infty,1)$ اکیداً صعودی است.

نکته با داشتن مشتق توابع پیوسته، می‌توان به بازه‌های صعودی یا نزولی تابع رسید و نمودار تقریبی برای آن رسم کرد.

تست اگر $f'(x)=3x^2-3$ باشد، نمودار تابع $f(x)$ به کدام شکل است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲ ابتدا f' را تعیین علامت می‌کنیم.

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$

x		-1		+1	
f'	+		-		+

پس f در $(1,+\infty)$، اکیداً صعودی و در $(-1,+1)$ اکیداً نزولی و در $(-\infty,-1)$ نیز اکیداً صعودی است.

همین‌طور مقدار مشتق تابع در $x=1$ و $x=-1$ برابر صفر شده است، بنابراین در این نقاط خط مماس بر نمودار تابع f افقی خواهد بود. در بین گزینه‌ها، فقط گزینهٔ (۲) این شرایط را دارد.

یکنوایی توابع درجهٔ سوم

مشتق تابع درجهٔ سوم f، یک تابع درجهٔ دوم به‌صورت زیر است:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

۱ اگر بخواهیم تابع $f(x)$ نزولی باشد، باید $f'(x)\le 0$ باشد، یعنی در تابع $f'(x)$ باید $a<0$ و $\Delta_{f'}\le 0$ باشد.

مثلاً تابع $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-12x$ همواره نزولی است، زیرا

$$f'(x)=-x^2+4x-12 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \text{ ضریب } =-1<0 \\ \Delta=(4)^2-4(-1)(-12)=-32\le 0 \end{cases}$$

۲ اگر بخواهیم تابع $f(x)$ صعودی باشد، باید $f'(x)\ge 0$ باشد. یعنی در تابع $f'(x)$ باید $a>0$ و $\Delta_{f'}\le 0$ باشد.

مثلاً تابع $f(x)=x^3-3x^2+4x$ همواره صعودی است، زیرا

$$f'(x)=3x^2-6x+4 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \text{ ضریب } =3>0 \\ \Delta=(-6)^2-4(3)(4)=-12\le 0 \end{cases}$$

۳ اگر بخواهیم تابع $f(x)$ فقط در بازهٔ (a,b) اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، باید $x=a$ و $x=b$ ریشه‌های $f'(x)$ باشند. یعنی جدول تعیین علامت مشتق تابع به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

x		a		b	
f'	+		-		+

یا

x		a		b	
f'	-		+		-

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^3+2x^2+\frac{m}{3}x-1$ همواره صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $(-\infty,-2]$ ۳) $[-2,0)$ ۴) $[2,+\infty)$

۴ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=3mx^2+4x+\frac{m}{3}$$

برای این‌که تابع f همواره صعودی باشد، باید مشتق آن بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، بنابراین در تابع $f'(x)$ باید $a>0$ و $\Delta\le 0$ باشد:

$$1)\ a>0 \Rightarrow 3m>0 \Rightarrow m>0$$

$$2)\ \Delta=\underbrace{4^2-4(3m)(\frac{m}{3})}_{16-4m^2}\le 0 \Rightarrow m^2\ge 4 \Rightarrow m\ge 2 \text{ یا } m\le -2$$

از اشتراک جواب‌ها، مجموعه مقادیر قابل قبول برای m به صورت $[2,+\infty)$ است.

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$ فقط در بازهٔ $(-1,2)$ صعودی است. مقدار $a\times b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۹- ۳) ۶ ۴) ۶-

۱ چون $f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$ فقط در بازهٔ $(-1,2)$ صعودی است، پس علامت $f'(x)=-3x^2+2ax+b$ فقط در این بازه مثبت است. بنابراین همان‌طور که در درسنامه گفته شد، $x=-1$ و $x=2$ ریشه‌های f' هستند، یعنی:

$$\begin{cases} f'(-1)=0 \Rightarrow -3-2a+b=0 \\ f'(2)=0 \Rightarrow -12+4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{3}{2},\ b=6 \Rightarrow a\times b=9$$

یکنوایی توابع کسری

مشابه توابع چندجمله‌ای، برای تحلیل یکنوایی این توابع، از آن‌ها مشتق گرفته و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

تست نمودار تابع $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ در بازهٔ $(-\infty,a)$ نزولی است. بیش‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $1+\sqrt{2}$

۳ ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{(1)(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

اکنون با محاسبهٔ ریشه‌های مشتق، جدول تعیین علامت $f'(x)$ را رسم می‌کنیم:

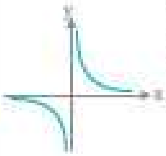
$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -x^2+2x+1=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=8} x=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{-2}=1\pm\sqrt{2}$$

با توجه به جدول تعیین علامت، تابع $f(x)$ در بازهٔ $(-\infty,1-\sqrt{2})$ نزولی است و بیش‌ترین مقدار a برابر $1-\sqrt{2}$ است.

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	-	+	-	
f	↘	↗	↘	

تابع کسری f، در بازه‌ای که شامل ریشهٔ مخرج کسر است، غیریکنوا است.



مثلاً در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$، $x=0$ ریشهٔ مخرج می‌باشد و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست، ولی مشتق این تابع ($f'(x)=-\frac{1}{x^2}$) در بقیهٔ نقاط دامنه یعنی $\mathbb{R}-\{0\}$، موجود و همواره مقداری منفی است.

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-2,0)$ ۲) $(-\infty,-2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $\mathbb{R}$

۲ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1\times(1-x^2)-(-2x)(x)}{(1-x^2)^2}=\frac{\overbrace{1-x^2+2x^2}^{x^2+1}}{(1-x^2)^2}>0$$

صورت و مخرج کسر، عبارت‌های همواره مثبت‌اند، بنابراین مشتق تابع همواره مثبت است. تابع در هر بازه‌ای که فاقد ریشهٔ مخرج باشد، صعودی است.

$$(1-x^2)^2=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

تنها گزینه‌ای که فاقد $x=1$ و $x=-1$ است، گزینهٔ (۲) است.

یکنوایی توابع چندضابطه‌ای

در این توابع، به جز بررسی یکنوایی هر ضابطه به طور جداگانه در دامنهٔ خودش، باید نگاه ویژه‌ای به نقاط مرزی داشته باشید. اگر این توابع در نقطهٔ مرزی ناپیوسته باشند، حتماً آن‌ها را رسم کنید.

تست تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & ;x\geq 0\\ 3x+1 & ;x<0\end{cases}$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-3,2)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(2,3)$

۴ واضح است که در $x=0$ تابع $f(x)$ ناپیوسته است (حد چپ و راست برابر نمی‌باشند.) پس این تابع را رسم می‌کنیم.

نمودار این تابع در $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است و جواب باید بازه‌ای باشد که شامل $x=0$ نباشد، که تنها گزینهٔ موجود «۴» است. توجه کنید که مشتق هر دو ضابطه در دامنهٔ آن‌ها مثبت بود و اگر به نقطهٔ مرزی توجه نمی‌کردیم گزینهٔ نادرست، یعنی $\mathbb{R}$ را انتخاب می‌کردیم.

$$f'(x)=\begin{cases}2x & ;x>0\\ 3 & ;x<0\end{cases}$$

نقاط بحرانی تابع

نقطه‌ای به طول c از دامنهٔ تابع f را یک نقطهٔ بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ $f'(c)$ برابر با صفر باشد. **۲** $f'(c)$ موجود نباشد.

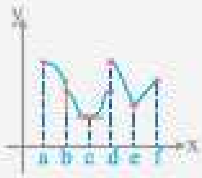
توصیف تمام حالت‌های ممکن برای نقاط بحرانی به‌صورت جدول زیر است:

انواع نقاط بحرانی		
مشتق برابر صفر است		
 خط مماس افقی است		
مشتق ندارد		
 ناپیوستگی	 مشتق چپ و راست نابرابر	 مماس یا نیم‌مماس‌های عمودی

توجه توجه کنید نقاط ابتدا و انتهای دامنه، بحرانی محسوب می‌شوند.

مثلاً در تابع $y=\sqrt{1-x^2}$، دامنه به صورت $[-1,1]$ تعریف می‌شود، پس $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ بحرانی است.

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. تعداد نقاط بحرانی تابع f کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۳ دامنهٔ تابع f به صورت $[a,e)\cup(e,f]$ است. حال تک‌تک نقاط مشخص‌شده در نمودار که عضو دامنه هستند را بررسی می‌کنیم:

چون $x=a$ و $x=f$ نقاط ابتدا و انتهای دامنه هستند، پس این نقطه‌ها بحرانی‌اند.

خط مماس در $x=b$ قائم است، پس این نقطه بحرانی است.

خط مماس بر نمودار در $x=c$ افقی است، پس مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است و این نقطه بحرانی است.

تابع در $x=d$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، پس این نقطه نیز بحرانی است.

بنابراین این تابع دارای ۵ نقطهٔ بحرانی است.

در ادامه، نقاط بحرانی توابع معروف را بررسی می‌کنیم:

۱ توابع چند جمله‌ای در تمام نقاط مشتق‌پذیر هستند، پس نقاط بحرانی آن‌ها فقط جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ می‌باشند.

مثلاً تابع $f(x)=x(2x-3)$ دارای یک نقطهٔ بحرانی است، چون:

$$f(x)=2x^2-3x \Rightarrow f'(x)=4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=4x^2-x^4$ در بازهٔ $[-1,2]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۳ ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=8x-4x^3$$

اکنون مشتق تابع f را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=8x-4x^3=0 \Rightarrow 4x(2-x^2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

چون $x=-\sqrt{2}$ در بازهٔ $[-1,2]$ وجود ندارد، پس قابل‌قبول نیست. همچنین می‌دانیم نقاط ابتدا و انتهای بازه جزء نقاط بحرانی محسوب می‌شوند. بنابراین مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع برابر $\{-1,0,\sqrt{2},2\}$ است.

تست اگر مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^3-ax^2+bx+1$ به صورت $\{1,3\}$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ چون $x=1$ و $x=3$ طول نقاط بحرانی تابع f هستند، پس $f'(1)=0$ و $f'(3)=0$ است، پس:

$$f(x)=x^3-ax^2+bx+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-2ax+b$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f'(1)=0 \Rightarrow 3-2a+b=0 \\ 2)\ f'(3)=0 \Rightarrow 27-6a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=6,\ b=9 \Rightarrow b-a=3$$

۲ می‌دانیم در توابع گویا، ریشه‌های مخرج کسر جزو نقاط مشتق‌ناپذیر هستند. اما چون این نقاط در دامنهٔ تابع وجود ندارند، پس بحرانی محسوب نمی‌شوند. در نتیجه نقاط بحرانی توابع گویا، فقط از حل معادله $f'(x)=0$ به دست می‌آیند.

مثلاً تابع $f(x)=\frac{1}{x^2+5}$ دارای یک نقطهٔ بحرانی است، چون:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+5)^2}=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$$

و تابع $f(x)=\frac{x}{x+1}$ نقطهٔ بحرانی ندارد، زیرا مشتق تابع همواره بزرگتر از صفر است:

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

تست تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ در بازهٔ $[-\frac{1}{2},2]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴ چون $x=-\frac{1}{2}$ و $x=2$ نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند، پس این دو نقطه بحرانی محسوب می‌شوند؛ درضمن چون این تابع کسری است، پس طول نقاط بحرانی به شرطی که در دامنه باشند، ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند، بنابراین داریم:

$$f'(x)=\frac{(2x)(x)-(1)(x^2+1)}{x^2}=0 \Rightarrow 2x^2-x^2-1=0$$

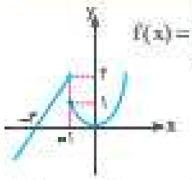
$$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$$

با توجه به بازهٔ $[-\frac{1}{2},2]$، فقط نقطهٔ $x=1$ عضو این بازه است پس این تابع دارای ۳ نقطهٔ بحرانی با طول‌های $x=-\frac{1}{2}$، $x=1$ و $x=2$ است.

۳ برای تعیین نقاط بحرانی توابع چندضابطه‌ای، باید ابتدا نقاط بحرانی هر یک از ضابطه‌ها را مشخص کنیم. سپس پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقاط مرزی بررسی و وضعیت بحرانی بودن آن را تعیین کنیم.

تذکر در صورتی که رسم نمودار هر یک از ضابطه‌ها ساده باشد، بهترین راهکار برای تعیین نقاط بحرانی رسم شکل است.

مثلاً برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases} x+3 & ; x<-1 \\ x^2 & ; x\geq -1 \end{cases}$ از رسم نمودار آن استفاده می‌کنیم و داریم:



مشتق تابع f در $x=-1$ وجود ندارد و در $x=0$ برابر صفر است. پس تابع f دارای ۲ نقطهٔ بحرانی به طول‌های $x=-1$ و $x=0$ است.

تست تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & ; x<0 \\ x^3-6x & ; x\geq 0 \end{cases}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ از هر یک از ضابطه‌ها مشتق می‌گیریم و آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x<0: f(x)=x^2+2x \Rightarrow f'(x)=2x+2 \xrightarrow[x<0]{f'(x)=0} x=-1$$

$$x\geq 0: f(x)=x^3-6x \Rightarrow f'(x)=3x^2-6 \xrightarrow[x\geq 0]{f'(x)=0} x=\sqrt{2}$$

در ضمن در نقطهٔ مرزی $x=0$ تابع پیوسته است، پس باید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را محاسبه کنیم. از آن‌جایی‌که $f'_-(0)=2$ و $f'_+(0)=-6$ است، پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست؛ بنابراین ۳ نقطه با طول‌های -1، 0، $\sqrt{2}$ نقاط بحرانی تابع f محسوب می‌شوند.

۴ برای مشخص کردن نقاط بحرانی توابع شامل قدرمطلق یک راهکار این است که تابع را به‌ازای ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسیم. سپس نقاط بحرانی هر ضابطه را در دامنه و هم‌چنین در نقاط مرزی مشخص کنیم.

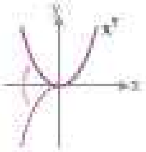
اگر تابع داده‌شده قابل رسم باشد، بهترین راهکار برای تعیین نقاط بحرانی، رسم شکل است.

مثلاً برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^2-2|x|$ ابتدا آن را در $x=0$ به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-2|x|=\begin{cases} x^2-2x & ; x\geq 0 \\ x^2+2x & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

نمودار تابع f دارای ۳ نقطهٔ بحرانی به طول‌های $x=-1$ ، $x=0$ و $x=1$ است.

برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x^3|$ از رسم شکل استفاده می‌کنیم. این تابع دارای یک نقطهٔ بحرانی به طول $x=0$ است، چون در این نقطه f' برابر صفر است.



نکته طول نقاط بحرانی در توابع به فرم $y=|f(x)|$ از حل معادلات $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ به‌دست می‌آیند.

مثلاً برای به دست آوردن طول نقاط بحرانی تابع $y=|x^2-4x|$ می‌توانیم معادلات زیر را حل کنیم:

$$y=|x^2-4x| \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0, x=4 \\ f'(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

نکته در تابع $y=g(x)|f(x)|$ اگر $x=a$ ریشهٔ $f(x)$ باشد، آن‌گاه $x=a$ طول نقطهٔ بحرانی است و برای پیدا کردن سایر نقاط بحرانی مشتق با حذف قدرمطلق، مشتق تابع $y=g(x)f(x)$ را بررسی می‌کنیم.

تست مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^2|x-2|$ کدام است؟

۱) $\{0,2\}$ ۲) $\{0,\frac{4}{3},2\}$

۳) $\{0,1,2\}$ ۴) $\{1,\frac{4}{3}\}$

۲ چون $x=2$ ریشهٔ ساده داخل قدرمطلق است، پس $x=2$ یکی از نقاط بحرانی است.

حال مشتق $y=x^2(x-2)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y'=2x(x-2)+x^2$$

$$3x^2-4x=x(3x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی این تابع به‌صورت $\{0,\frac{4}{3},2\}$ است.

تست نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۶ ۴) ۸

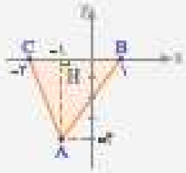
۳ ابتدا ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق را به دست می‌آوریم:

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

سپس مشتق عبارت بدون قدرمطلق را محاسبه می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y=(x-1)(x^2+x-2)$$

$$y'=(x^2+x-2)+(2x+1)(x-1)=3x^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

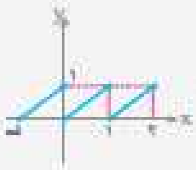


با محاسبهٔ عرض نقاط بحرانی داریم: پس $A(-1,-4)$، $B(1,0)$ و $C(-2,0)$ سه رأس مثلث هستند. برای محاسبه مساحت می‌نویسیم:

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$$

برای مشخص کردن نقاط بحرانی توابع شامل جزء صحیح یک راهکار رسم نمودار تابع است.

مثال نقاط بحرانی تابع $f(x)=x-[x]$ را در بازهٔ $[-1,2)$ به دست آورید.



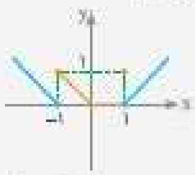
نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، چون $x=-1$ ابتدای دامنه است، پس یکی از نقاط بحرانی است. از طرفی چون در $x=0$ و $x=1$ تابع ناپیوسته است، پس این دو نقطه نیز بحرانی هستند.

تست تابع $f(x)=\begin{cases} x[x] & ; |x|\leq 1 \\ |x|-1 & ; |x|>1 \end{cases}$ چند نقطهٔ بحرانی مشتق‌ناپذیر دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۳ ابتدا ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x[x] & ; |x|\leq 1 \\ |x|-1 & ; |x|>1 \end{cases}$ را ساده می‌کنیم یعنی آن را به شکل تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & ; x<-1 \\ -x & ; -1\leq x<0 \\ 0 & ; 0\leq x<1 \\ 1 & ; x=1 \\ x-1 & ; x>1 \end{cases} \Rightarrow$$



با توجه به نمودار، ۳ نقطه به طول‌های $x=-1, x=0, x=1$ مشتق‌ناپذیر و بحرانی‌اند. [توجه کنید مشتق در بازهٔ $(0,1)$ برابر صفر است، پس همهٔ نقاط این بازه بحرانی و مشتق‌پذیرند اما در این سؤال نقاط بحرانی مشتق‌ناپذیر مدنظر است.]

در تابع رادیکالی $y=\sqrt[n]{f(x)}$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ طول نقاط بحرانی هستند؛ یعنی برای به دست آوردن طول نقاط بحرانی تابع‌های رادیکالی، باید عبارت زیر رادیکال و همچنین مشتق عبارت زیر رادیکال را برابر صفر بگذاریم. [زیرا جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ در توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، طول نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ دامنه هستند و در توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، شیب خط مماس یا نیم‌مماس، نامتناهی است.]

مثلاً در دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt[3]{x}$ نقطهٔ $x=0$ بحرانی است:

در $x=0$ شیب خط مماس نامتناهی است. — $x=0$ ابتدای بازه است.

مثال ۱ تابع $y=\sqrt[3]{x^3-8}$ دارای چند نقطهٔ بحرانی است؟

عبارت زیر رادیکال و همچنین مشتق عبارت زیر رادیکال را برابر صفر می‌گذاریم:

$$1)\ x^3-8=0 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$$

$$2)\ 3x^2=0 \Rightarrow x=0$$

مثال ۲ تابع $y=\sqrt{x^2-x}$ دارای چند نقطهٔ بحرانی است؟

عبارت زیر رادیکال و همچنین مشتق عبارت زیر رادیکال را برابر صفر می‌گذاریم:

$$1)\ x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$$

$$2)\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \notin D_f$$

چون $x=\frac{1}{2}$ در دامنهٔ تابع نیست، پس تابع دارای دو نقطهٔ بحرانی است.

تذکر برای پیدا کردن تعداد نقطهٔ بحرانی توابعی به شکل $y=g(x)\sqrt[n]{f(x)}$، همچنان جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ نقاط بحرانی هستند، اما در حل معادلهٔ $y'=0$ حتماً به دامنهٔ تابع توجه کنید.

مثال تابع $y=x\sqrt{x^2-2x}$ دارای چند نقطهٔ بحرانی است؟

عبارت زیر رادیکال را برابر صفر می‌گذاریم.

$$x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=2, x=0$$

سپس مشتق y را محاسبه می‌کنیم.

$$y'=\sqrt{x^2-2x}+\frac{x(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}=0$$

$$\sqrt{x^2-2x}=\frac{-x(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}} \Rightarrow 2x^2-4x=-x(2x-2)$$

$$\Rightarrow 4x^2-6x=0$$

$$2x(2x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

با توجه به اینکه دامنه این تابع $\mathbb{R}-(0,2)$ است، پس $x=\frac{3}{2}$ در دامنه نیست و این تابع ۲ نقطه بحرانی دارد.

توان‌های کسری

چون توان‌های کسری به شکل رادیکال قابل نمایش هستند پس در هر نقطه از دامنه که پایه صفر شود نقطهٔ بحرانی داریم. برای محاسبهٔ سایر نقاط بحرانی، ریشهٔ صورت و مخرج مشتق تابع را به دست می‌آوریم. توجه کنید که ریشه‌ها در دامنهٔ تابع باشند.

تست مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^2-28)\times\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

1) $\{-2,2\}$ 2) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$
3) $\{-2,0,2\}$ 4) $\{-7,0,1\}$

۳ می‌دانیم $f(x)=(x^2-28).x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{3}}-28x^{\frac{1}{3}}$ است. پس:

$$f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-\frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2-4)=\frac{7(x^2-4)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

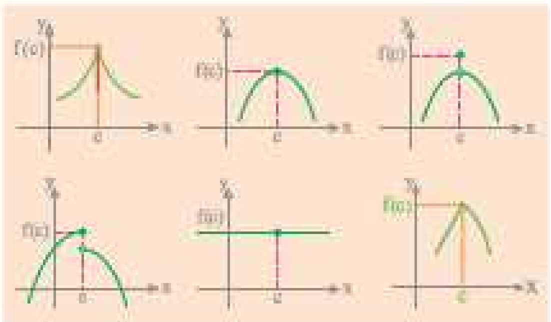
ریشه‌های صورت کسر f' برابر $x=\pm 2$ و ریشهٔ مخرج کسر $x=0$ است، در $x=0$ مشتق مخرج صفر می‌شود، پس مشتق وجود ندارد. توجه کنید که $x=0$ در دامنهٔ تابع وجود دارد پس همگی عضو دامنهٔ f هستند بنابراین مجموعهٔ طول نقاط بحرانی به صورت $\{-2,0,2\}$ است.

اکسترمم‌های نسبی تابع

ماکزیمم نسبی

اگر در تابع f، عرض نقطه‌ای، در مقایسه با عرض نقاط اطرافش بالاتر (یا مساوی) باشد، یعنی مقدار تابع در این نقطه، از مقادیر نقاط همسایگی آن بیشتر (یا مساوی) باشد، آن‌گاه تابع در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد. به بیان ریاضی تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی c مانند I ($I\subseteq D_f$) باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

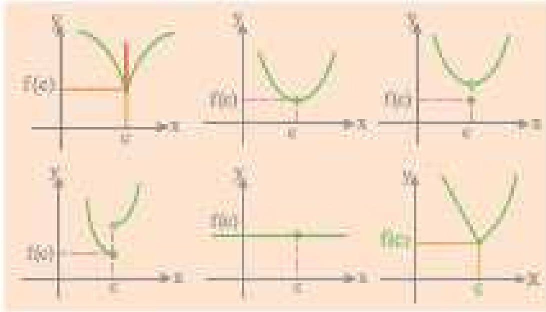
مثلاً توابع زیر در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارند:



مینیمم نسبی

اگر در تابع f، عرض نقطه‌ای، در مقایسه با عرض نقاط اطرافش پایین‌تر (یا مساوی) باشد، یعنی مقدار تابع در این نقطه، از مقادیر نقاط همسایگی آن کمتر (یا مساوی) باشد، آن‌گاه تابع در این نقطه مینیمم نسبی دارد. به بیان ریاضی تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی c مانند I ($I\subseteq D_f$) باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$. در این حالت $f(c)$، مقدار مینیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

مثلاً توابع زیر در $x = c$ مینیمم نسبی دارند:



تذکر ۱ نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترمم آن تابع هم می‌گوییم.

تذکر ۲ نقاط ابتدا و انتهای دامنه نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند، زیرا تابع در یک طرف از همسایگی آن‌ها تعریف نشده است.

تذکر ۳ نقاط واقع بر تابع ثابت هم ماکزیمم نسبی هستند و هم مینیمم نسبی.

تست نمودار تابع f به شکل زیر است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعهٔ نقاط ماکزیمم نسبی تابع $\{B, E\}$ است.

۲) نقطهٔ G اکسترمم نسبی نیست.

۳) نقطه‌ای به طول A اکسترمم نسبی نیست.

۴) مجموعهٔ نقاط مینیمم نسبی تابع $\{C, E, H\}$ است.

۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

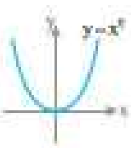
۱) چون عرض نقاط B و E نسبت به عرض نقاط اطراف آن‌ها بزرگ‌تر است، پس این نقاط ماکزیمم نسبی‌اند.

۲) عرض نقاط قبل از G کوچک‌تر از عرض نقطهٔ G و عرض نقاط بعد از G بزرگ‌تر از عرض نقطهٔ G است. پس این نقطه اکسترمم نسبی نیست.

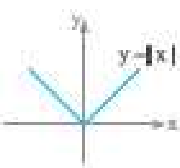
۳) ابتدا و انتهای بازه، اکسترمم نسبی نیستند.

۴) نقطهٔ E ماکزیمم نسبی است، چون عرض آن، از عرض نقاط اطرافش بیشتر است.

اگر تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c) = 0$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع یک نقطهٔ بحرانی آن است.

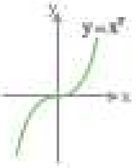


مثلاً تابع $y = x^2$ در نقطهٔ $x = 0$ دارای مینیمم نسبی است. از آن‌جایی که مشتق این تابع در $x = 0$ موجود است، طبق این قضیه $f'(0) = 0$ است.



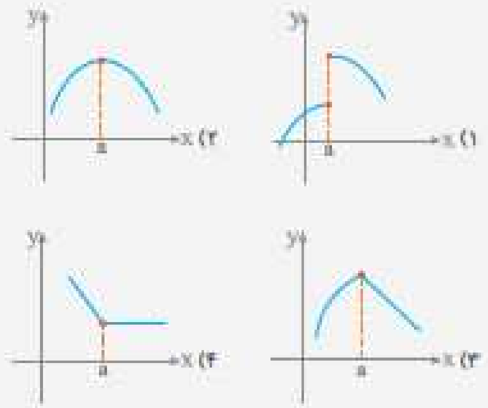
ممکن است تابع در نقطهٔ اکسترمم نسبی خود مشتق نداشته باشد. به نمودار $y = |x|$ دقت کنید. این تابع در نقطه $x = 0$ دارای مینیمم نسبی است، اما به دلیل این‌که این نقطه، گوشه‌ای است در این نقطه مشتق ندارد.

نکته توجه داشته باشید هر نقطهٔ بحرانی، لزوماً نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.



مثلاً مشتق تابع $y = x^3$ در $x = 0$ برابر صفر است. پس $x = 0$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است. اما از آن‌جایی که تابع $y = x^3$ اکیداً صعودی است، پس نمی‌تواند مینیمم یا ماکزیمم نسبی داشته باشد و در نتیجه $x = 0$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع نیست.

تست کدام نمودار مربوط به تابعی است که در نقطهٔ ماکزیمم نسبی، پیوسته و مشتق‌ناپذیر است؟



۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) نمودار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی ناپیوسته است.

۲) نمودار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۳) نمودار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی پیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

۴) نمودار تابع در $x = a$ دارای مینیمم نسبی است.

تشخیص اکسترمم نسبی (آزمون مشتق اول)

فرض کنید c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد به‌طوری که f در $x = c$ پیوسته و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای تعیین نوع اکسترمم نسبی تابع f، ضابطهٔ $f'(x)$ را به‌دست آورده و برای آن جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم. با عبور از روی c از چپ به راست، جدول تعیین علامت:

۱ اگر علامت f' از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

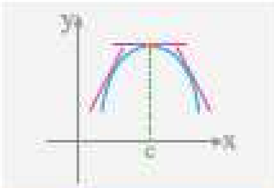
۲ اگر علامت f' از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

۳ اگر علامت f' تغییر نکند، آن‌گاه f در $x = c$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

آزمون مشتق اول

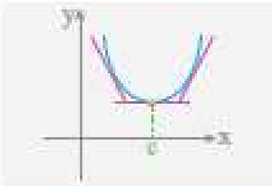
علامت f' از مثبت به منفی تغییر کند.

x		c	
f'	+		−



علامت f' از منفی به مثبت تغییر کند.

x		c	
f'	−		+

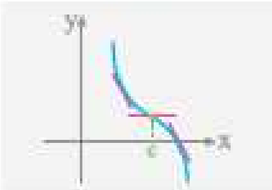


علامت f' در اطراف $x=c$ مثبت

x		c	
f'	+		+

علامت f' در اطراف $x=c$ منفی

x		c	
f'	−		−



تست اگر $f'(x)=(x+1)(x-3)$ مشتق تابع پیوسته $f(x)$ باشد، طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی این تابع کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) ۳-

۳ ابتدا جدول تعیین علامت f' را رسم می‌کنیم.

$$f'(x)=(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

x		−1		3	
f'	+		−		+

در $x=-1$ علامت مشتق از چپ به راست به صورت مثبت به منفی تغییر کرده، پس $x=-1$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است.
در $x=3$ علامت به صورت منفی به مثبت تغییر کرده است پس $x=3$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی است.

۱ در توابع چندجمله‌ای و گویا، برای به‌دست آوردن طول نقاط اکسترمم نسبی، کافیست ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $f'(x)=0$ را به‌دست آوریم. توجه داشته باشید اگر f' ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن ریشه طول نقطهٔ اکسترمم نخواهد بود.

مثلاً برای به‌دست آوردن نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^4-4x^3$، ابتدا معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=4x^3-12x^2=0 \Rightarrow 4x^2(x-3)=0$$

$x=0$ ریشهٔ مضاعف $x=3$ ریشهٔ ساده

پس این تابع، فقط یک نقطهٔ اکسترمم به طول $x=3$ دارد.

و برای به‌دست آوردن طول نقاط اکسترمم تابع $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ داریم:

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -2x^2+2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس این تابع دارای دو نقطهٔ اکسترمم به طول $x=1$ و $x=-1$ است.

تست طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ کدام‌اند و از چه نوع هستند؟

۱) $x=-1$ طول ماکزیمم و $x=2$ طول مینیمم
۲) $x=1$ طول ماکزیمم و $x=-2$ طول مینیمم
۳) $x=-1$ طول مینیمم و $x=2$ طول ماکزیمم
۴) $x=1$ طول مینیمم و $x=-2$ طول ماکزیمم

۳ می‌دانیم ریشه‌های $f'(x)$ طول نقاط بحرانی تابع هستند پس از تابع مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=-6x^2+6x+12=0 \Rightarrow \underbrace{-x^2+x+2=0}_{a+c=b} \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=2$$

حال با کمک جدول تعیین علامت f'، نحوهٔ تغییرات تابع f را مشخص می‌کنیم تا نوع اکسترمم‌های نسبی مشخص شود.

x	−∞	−1		2	+∞
f'	−		+		−
f	↘		↗		↘

در نتیجه $x=-1$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی و $x=2$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1$ به ترتیب از راست به چپ دارای چند ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی است؟

۱) ۳-۰ ۲) ۲-۱ ۳) ۱-۲ ۴) ۰-۳

۴ از تابع f مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1 \Rightarrow f'(x)=4x^3+12x^2+8x$$

$$=4x(\underbrace{x^2+3x+2}_{(x+1)(x+2)})=0 \Rightarrow x=-2,\ x=-1,\ x=0 \Rightarrow$$

x	−∞	−2		−1		0		+∞
f'	−		+		−		+	
f	↘		↗		↘		↗	

با توجه به جدول تعیین علامت f'، تابع دو مینیمم نسبی در $x=-2$ و $x=0$ و یک ماکزیمم نسبی در $x=-1$ دارد.

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{x}$ فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

۲ در توابع چند جمله‌ای و گویا ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه فرد $f'(x)$ طول نقاط اکسترمم تابع هستند. پس مشتق تابع را به دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{4x^2}=0 \Rightarrow \underbrace{x^2-4=0}_{x^2=4} \Rightarrow x=\pm 2$$

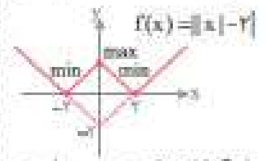
با محاسبهٔ $f(۲)$ و $f(-۲)$ عرض این نقاط را به دست می‌آوریم:

$$f(۲)=\frac{۲}{۴}+\frac{۱}{۲}=۱ \qquad f(-۲)=\frac{-۲}{۴}+\frac{۱}{-۲}=-۱$$

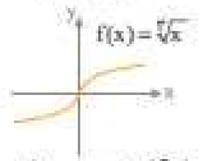
بنابراین نقاط $A(۲,۱)$ و $B(-۲,-۱)$ اکسترمم‌های تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$AB=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

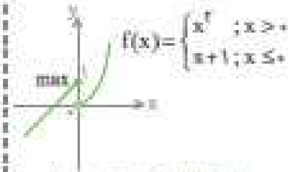
برای تعیین اکسترمم‌های نسبی توابع ناپیوسته یا مشتق‌ناپذیر، بهترین راه استفاده از رسم شکل است. مثلاً در توابع زیر داریم:



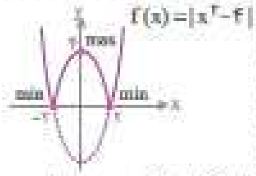
تابع f دارای ۳ اکسترمم نسبی است.



تابع f اکسترمم نسبی ندارد.



تابع f دارای یک max نسبی است.



تابع f دارای ۳ اکسترمم نسبی است.

تست در تابع $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$ نقاط به طول $x=-۲$ و $x=۱$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) ماکزیمم نسبی – مینیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی – ماکزیمم نسبی

۳) مینیمم نسبی – ماکزیمم نسبی ۴) مینیمم نسبی – مینیمم نسبی

۴ ابتدا با بازه‌بندی تابع $f(x)$، ضابطه آن را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & ; \quad x>۱ \\ ۳ & ; \quad -۲\le x\le ۱ \\ -۲x-۱ & ; \quad x<-۲ \end{cases}$$

اکنون نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

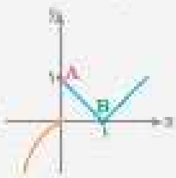
با توجه به نمودار، نقاط به طول $x=-۲$ و $x=۱$ مینیمم نسبی تابع f هستند.

تست در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} |x-۱| & ; \ x\ge ۰ \\ -x^۲ & ; \ x<۰ \end{cases}$ فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} |x-۱| & ; \ x\ge ۰ \\ -x^۲ & ; \ x<۰ \end{cases} \Rightarrow$$

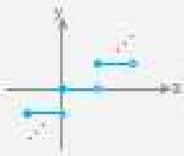


با توجه به نمودار نقطهٔ $A(۰,۱)$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $B(۱,۰)$ مینیمم نسبی تابع f است و فاصلهٔ آن‌ها برابر $AB=\sqrt{۲}$ است.

تست مجموعهٔ طول نقاط مینیمم نسبی تابع $f(x)=[x]$ کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۲ با توجه به نمودار، در تابع $y=[x]$ نقاط به طول صحیح $x\in\mathbb{Z}$ از همسایه‌های چپ خود بالاتر و با همسایه‌های راست خود مساوی‌اند. بنابراین ماکزیمم نسبی هستند. نقاط به طول غیرصحیح، با نقاط اطراف خودهم‌عرض‌اند بنابراین هم ماکزیمم نسبی‌اند و هم مینیمم نسبی. پس مجموعهٔ طول نقاط ماکزیمم نسبی نمودار برابر $\mathbb{R}$ و مجموعهٔ طول نقاط مینیمم نسبی نمودار برابر $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ است.



نکته اگر نقطهٔ $A(m\,,n)$ اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد دو نتیجه دارد:

۱) $f(m)=n$ ۲) $f'(m)=۰$

تست اگر نقطهٔ $(-۱,-۴)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^۲+bx-۳$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱ چون نمودار تابع از نقطهٔ $(-۱,-۴)$ می‌گذرد، پس این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(-۱)=-۴\Rightarrow a(-۱)^۲+b(-۱)-۳=-۴\Rightarrow a-b=-۱$$

از طرفی $x=-۱$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی است، پس $f'(-۱)=۰$ است:

$$f'(x)=۲ax+b \xrightarrow{f'(-۱)=۰} -۲a+b=۰$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} a-b=-۱ \\ -۲a+b=۰ \end{cases}\Rightarrow -a=-۱\Rightarrow a=۱\Rightarrow b=۲$$

تست اگر نقطهٔ $(-۳,۴)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+ax+b}{x+۱}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(-۳,۴)$ می‌گذرد، پس:

$$f(-۳)=۴\Rightarrow\frac{۹-۳a+b}{-۲}=۴\Rightarrow ۹-۳a+b=-۸\Rightarrow ۳a-b=۱۷$$

از طرفی $x=-۳$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است، پس $f'(-۳)=۰$ است:

$$f'(x)=\frac{\overbrace{(۲x+a)(x+۱)-(۱)(x^۲+ax+b)}^{x^۲+۲x+a-b}}{(x+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{f'(-۳)=۰} ۹-۶+a-b=۰\Rightarrow a-b=-۳$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

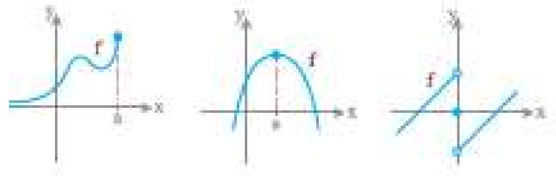
$$-۱\times\begin{cases} ۳a-b=۱۷ \\ a-b=-۳ \end{cases}\Rightarrow ۲a=۲۰\Rightarrow a=۱۰\Rightarrow b=۱۳\Rightarrow a+b=۲۳$$

اکسترمم مطلق

۱ ماکزیمم مطلق:

اگر در تابع f عرض نقطه‌ای، در مقایسه با عرض نقاط تمام دامنه، بالاتر (یا مساوی) باشد آن‌گاه تابع در این نقطه ماکزیمم مطلق دارد.

به بیان ریاضی، نقطه‌ای به طول c از دامنهٔ تابع f، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f است، هرگاه به‌ازای هر x از دامنهٔ f، داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f نامیده می‌شود.

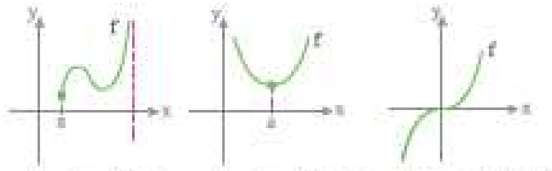


نقطه به طول صفر ماکزیمم مطلق نیست. | $\max = f(a)$ مطلق | $\max = f(a)$ مطلق

۲ مینیمم مطلق:

اگر در تابع f عرض نقطه‌ای، در مقایسه با عرض نقاط تمام دامنه، پایین‌تر (یا مساوی) باشد آن‌گاه تابع در این نقطه مینیمم مطلق دارد.

به بیان ریاضی، نقطه‌ای به طول c از دامنهٔ تابع f، یک نقطهٔ مینیمم مطلق برای تابع f است، هرگاه به‌ازای هر x از دامنهٔ f، داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت، $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق f روی D_f نامیده می‌شود.



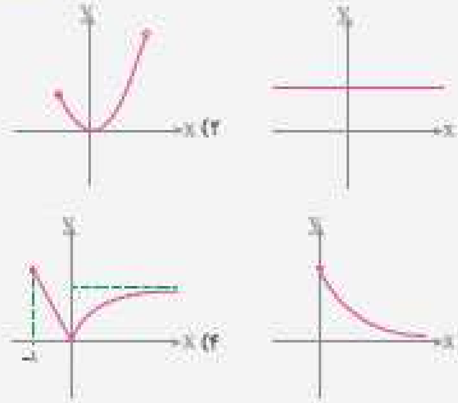
نقطه به طول صفر ماکزیمم یا مینیمم مطلق نیست. | $\min = f(a)$ مطلق | $\min = f(a)$ مطلق

نکته مقدار اکسترمم مطلق منحصر به فرد است، اما می‌تواند در طول‌های مختلف رخ دهد. مثلاً به نمودار $y = \sin x$ توجه کنید.

ماکزیمم مطلق این تابع برابر ۱ است. همان‌طور که از نمودار مشخص است، بی‌شمار نقطه، عرضی برابر ماکزیمم مطلق دارد.

توجه کنید با توجه به تعریف ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق، نقاطی که روی تابع ثابت $f(x) = c$ قرار دارند، هم ماکزیمم مطلق محسوب می‌شوند و هم مینیمم مطلق.

تست کدام نمودار زیر مینیمم مطلق دارد اما ماکزیمم مطلق ندارد؟



۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) تمام نقاط روی نمودار، هم مینیمم مطلق هستند و هم ماکزیمم مطلق.

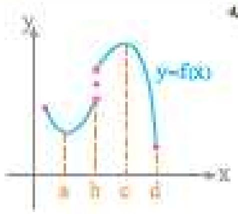
۲) تابع در $x=0$ مینیمم مطلق دارد، اما فاقد ماکزیمم مطلق است.

۳) تابع در $x=0$ ماکزیمم مطلق دارد، اما فاقد مینیمم مطلق است.

۴) تابع در $x=-1$ ماکزیمم مطلق و در $x=0$ مینیمم مطلق دارد.

نتایج مهم نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم تابع f

نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به این نمودار نتایج زیر به دست می‌آید:



۱ ممکن است نقطه‌ای اکسترمم نسبی باشد، اما اکسترمم مطلق نباشد. مثلاً نقطه به طول a مینیمم نسبی است، اما مینیمم مطلق نیست.

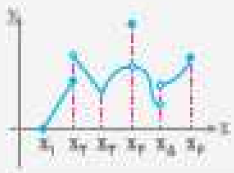
۲ ممکن است نقطه‌ای اکسترمم مطلق باشد اما اکسترمم نسبی نباشد. مثلاً نقطه به طول d مینیمم مطلق است، اما مینیمم نسبی نیست.

۳ ممکن است نقطه‌ای هم اکسترمم مطلق باشد و هم اکسترمم نسبی باشد. مثلاً نقطه به طول c هم ماکسیمم مطلق است و هم ماکسیمم نسبی.

۴ هر نقطهٔ اکسترمم، یک نقطهٔ بحرانی است، اما هر نقطهٔ بحرانی، لزوماً اکسترمم نیست.

مثلاً نقطه به طول b یک نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نیست.

تست چه تعداد از نقاط نام‌گذاری شده روی نمودار زیر، نقطهٔ بحرانی هستند اما اکسترمم نیستند؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۴ به بررسی تک‌تک نقاط می‌پردازیم:
نقطه x_1 ابتدای بازه و مینیمم مطلق است؛ بنابراین x_1 یک نقطه بحرانی است.
نقطهٔ x_2 به علت ناپیوستگی و عدم وجود مشتق، یک نقطهٔ بحرانی محسوب می‌شود ولی این نقطه اکسترمم نیست.
نقطهٔ x_3 یک نقطهٔ بحرانی و مینیمم نسبی است.
نقطهٔ x_4 یک نقطهٔ بحرانی و ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق است.
نقطهٔ x_5 چون در دامنه تابع حضور ندارد بنابراین نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود.
نقطهٔ x_6 انتهای بازه و بحرانی است ولی این نقطه اکسترمم نیست.
بنابراین دو نقطه x_2 و x_6 بحرانی هستند اما اکسترمم نیستند.

تعیین اکسترمم‌های مطلق از روی ضابطهٔ تابع

اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد. برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع f به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم. سپس طول نقاط بحرانی تابع f را در بازهٔ $[a,b]$ به‌دست می‌آوریم.
۲ عرض نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم.
۳ از بین عرض‌های به‌دست آمده، بزرگ‌ترین عدد ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین عدد مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.

مثال **اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ را در بازهٔ $[-2,2]$ به دست آورید.**

$$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

چون فقط $x=-1$ در بازهٔ $[-2,2]$ قرار دارد، پس طول نقاط بحرانی عبارتند از: $x=-2, x=-1, x=2$

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2-9(-2)+5=3$$
$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+5=10$$
$$f(2)=2^3-3(2)^2-9\times 2+5=-17$$

بیشترین مقدار ۱۰ و کمترین مقدار ۱۷- است، پس در بازهٔ $[-2,2]$ ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۱۰ و مینیمم مطلق آن برابر ۱۷- است.

تست **بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$ در بازهٔ $[-2,2]$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ مشتق $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\overbrace{6(x^2+1)-(2x)(6x)}^{-6x^2+6}}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -6x^2+6=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

حال مقدار تابع را در نقاط بحرانی به دست می‌آوریم:

$$f(-2)=\frac{6(-2)}{(-2)^2+1}=\frac{-12}{5}$$
$$f(-1)=\frac{6(-1)}{(-1)^2+1}=-3$$
$$f(1)=\frac{6(1)}{(1)^2+1}=3$$
$$f(2)=\frac{6(2)}{(2)^2+1}=\frac{12}{5}$$
$$A(-2,-\frac{12}{5}), B(-1,-3), C(1,3), D(2,\frac{12}{5})$$

پس بیش‌ترین مقدار تابع در بازه $[-2,2]$ برابر ۳ است.

تست **مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=1+x^2+\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲ ۴) ۲/۲۵

۴ ابتدا دامنهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=1+x^2+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \underbrace{1-x^2}_{(1-x)(1+x)}\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

حال از تابع f مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم تا طول نقاط بحرانی به‌دست آید:

$$f'(x)=2x+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=0 \Rightarrow 2x(1-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}})=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 1-x^2=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x^2=\dfrac{3}{4} \\ \Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

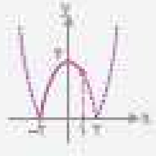
پس نقاط $x=0$، $x=\pm 1$، $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ نقاط بحرانی تابع هستند و مقدار آن‌ها برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1)=f(0)=f(1)=2 \\ f(-\frac{\sqrt{3}}{2})=f(\frac{\sqrt{3}}{2})=1+\frac{3}{4}+\sqrt{1-\frac{3}{4}} \\ =\frac{7}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}=2/25 \end{cases}$$

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲/۲۵ است.

در توابع قدر مطلقی و چندضابطه‌ای بهتر است برای یافتن اکسترمم‌های مطلق از رسم نمودار استفاده کنیم.

مثال **مقدار اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در بازهٔ $[-2,1]$ به‌دست آورید.**



$\Rightarrow$ مطلق $Min=0$

مطلق $Max=4$

مثال ۲ مقدار اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 \,;\, x\geq 0 \\ 2-x \,;\, x<0 \end{cases}$ را بیابید.

$\Rightarrow$ مطلق $Min = 1$

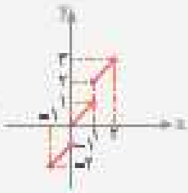
مطلق Max ندارد.

تست مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=x+[x]$ در بازهٔ $[-1,2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۲ ابتدا با ساده کردن ضابطه تابع $f(x)$، نمودار آن را در بازهٔ $[-1,2)$ رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & ; \ -1\leq x<0 \\ x & ; \ 0\leq x<1 \\ x+1 & ; \ 1\leq x<2 \end{cases} \Rightarrow$$



با توجه به شکل مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر -2 است.

نکته در بعضی سؤالات که برد یک تابع را می‌خواهند، می‌توانیم مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را تعیین کنیم. (توجه کنید که تابع پیوسته باشد.)

تست برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ در بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) $[-7,4]$ ۲) $[-4,13]$

۳) $[-7,13]$ ۴) $[-4,7]$

۳ برای به‌دست آوردن برد تابع f در بازهٔ $[-1,2]$ باید مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق آن را در این بازه محاسبه کنیم. پس ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \underbrace{6x^2+6x-12}_{6(x^2+x-2)}=0 \Rightarrow x=-2,\ x=1$$

چون فقط $x=1$ در بازهٔ $[-1,2]$ قرار دارد، پس $x=-1, x=1, x=2$ طول نقاط بحرانی هستند. مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم:

$$f(-1)=2(-1)^3+3(-1)^2-12(-1)=-2+3+12=13$$

$$f(1)=2(1)^3+3(1)^2-12(1)=2+3-12=-7$$

$$f(2)=2(2)^3+3(2)^2-12(2)=16+12-24=4$$

از بین مقادیر به‌دست آمده، ماکزیمم مطلق برابر ۱۳ و مینیمم مطلق برابر -7 است، پس برد تابع در این بازه برابر $R_f=[-7,13]$ است.

درس ۲ بهینه‌سازی

مسائل بهینه‌سازی

تلاش برای محاسبهٔ ماکزیمم یا مینیمم یک کمیت را اصطلاحاً بهینه‌سازی می‌گویند. روند حل سؤالات بهینه‌سازی به این صورت است:

۱ برای کمیتی که قصد داریم ماکزیمم یا مینیمم شود، یک تابع برحسب متغیرهای مسئله می‌نویسیم.

۲ با استفاده از فرضیات سؤال، معادله‌ای را که نوشته‌ایم تبدیل به تابع تک متغیره می‌کنیم.

۳ ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را می‌یابیم.

مثال فرض کنید تفاضل دو عدد حقیقی برابر با ۶ باشد. کمترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها را به‌دست آورید.

۱) دو عدد را x و y درنظر می‌گیریم. مینیمم xy را می‌خواهیم.

۲) چون $x-y=6$، پس xy را به‌صورت $x(x-6)$ می‌نویسیم.

۳) مینیمم مطلق تابع $f(x)=x(x-6)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x(x-6)=x^2-6x \Rightarrow f'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3$$

$$\Rightarrow f(3)=3\times(3-6)=3\times(-3)=-9$$

پس کم‌ترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها -9 است.

تست اگر $x+y=1$ باشد، آن‌گاه ماکزیمم xy^2 کدام است؟

۱) $\frac{1}{27}$ ۲) $\frac{4}{27}$

۳) $\frac{5}{26}$ ۴) $\frac{3}{26}$

۲

$$x+y=1 \Rightarrow y=1-x$$

$$xy^2=x\underbrace{(1-x)^2}_{x^2-2x+1}=x^3-2x^2+x \Rightarrow f(x)=x^3-2x^2+x$$

برای آن‌که $f(x)$ ماکزیمم شود، باید معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل کنیم:

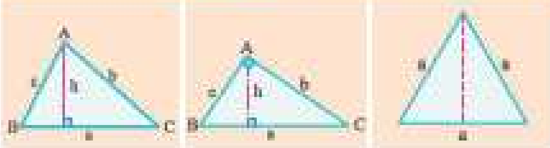
$$f'(x)=\underbrace{3x^2-4x+1}_{a+b+c=0}=0 \Rightarrow x=1,\ x=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

x		$\frac{1}{3}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\nearrow$

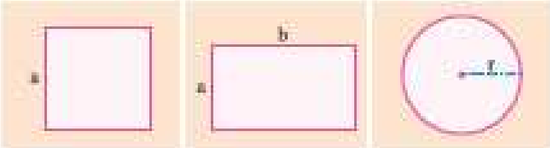
$$x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow xy^2=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$$

تذکر برای حل مسائل مربوط به بهینه‌سازی، لازم است مساحت و حجم شکل‌های معروف هندسی را یادآوری کنیم.

مساحت شکل‌های معروف

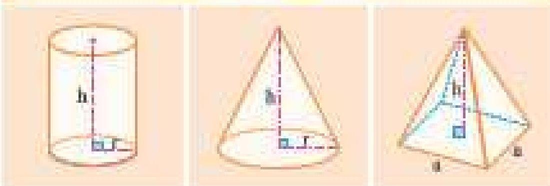


$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bc$	$S=\frac{1}{2}ah$

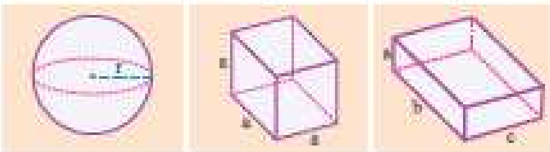


$S=\pi r^2$	$S=a.b$	$S=a^2$

حجم شکل‌های معروف



$V=\frac{1}{3}a^2h$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$	$V=\pi r^2h$



$V=abc$	$V=a^3$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

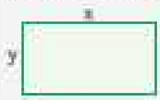
بهینه‌سازی در مساحت

بعضی از سؤالات بهینه سازی در مورد بهینه کردن مساحت است، یعنی با استفاده از داده‌های مسئله، بتوان مساحت شکل را ماکزیمم کرد.

مثال **محیط مستطیلی برابر با ۱۲ است. بیشترین اندازهٔ ممکن برای مساحت آن را بیابید.**

محیط مستطیل $=12 \Rightarrow 2x+2y=12 \Rightarrow x+y=6 \Rightarrow y=6-x$

مساحت مستطیل $=S=xy \xrightarrow{y=6-x} S(x)=x(6-x)=-x^2+6x$



حال باید ماکزیمم مطلق تابع $S(x)$ را بیابیم:

$S'(x)=-2x+6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$

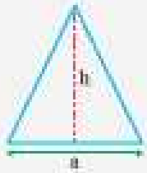
$\Rightarrow \max(S)=S(3)=-3^2+(6\times 3)=-9+18=9$

نکته در بین مستطیل‌هایی با محیط ثابت، مربع دارای بیش‌ترین مساحت است.

تست **از میان مثلث‌هایی که در آن‌ها مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن برابر ۱۶ سانتی‌متر است، مثلثی که بیش‌ترین مساحت را دارد اختیار کرده‌ایم. مساحت این مثلث چقدر است؟**

۱) ۱۸ ۲) ۲۵ ۳) ۳۲ ۴) ۳۸

۳ طول قاعده را برابر با a و ارتفاع وارد بر آن را h می‌نامیم:



$a+h=16 \Rightarrow h=16-a$

$S=\frac{1}{2}ah \xrightarrow{h=16-a} S(a)=\frac{1}{2}a(16-a)=8a-\frac{1}{2}a^2$

برای آن‌که $S(a)$ ماکزیمم شود، مشتق آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$S'(a)=8-a=0 \Rightarrow a=8$

$S(a)=8a-\frac{1}{2}a^2 \Rightarrow S(8)=8(8)-\frac{1}{2}(8)^2=64-32=32cm^2$

بهینه‌سازی در حجم

برای یافتن حجم بهینه، باید برای حجم مورد نظر معادله‌ای بنویسیم، سپس آن را تک متغیره کرده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق آن را بیابیم.

مثال **در بین استوانه‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها برابر یک است، بیش‌ترین حجم با چه شعاعی ایجاد می‌شود؟**

$V=\pi r^2h \xlongequal{r+h=1} \pi r^2(1-r)=\pi(r^2-r^3)$

حال باید ماکزیمم مطلق تابع V را بیابیم:

$V'=0 \Rightarrow \pi(2r-3r^2)=0 \Rightarrow \pi r(2-3r)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=\frac{2}{3} \end{cases}$

به‌ازای $r=0$ اصلاً استوانه‌ای تشکیل نمی‌شود، پس بیش‌ترین حجم استوانه به‌ازای $r=\frac{2}{3}$ خواهد بود.

تست **ورقهٔ فلزی مربع شکل به طول ضلع ۳۰cm را درنظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش دهیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تاکردن ورق در امتداد چین‌ها، یک جعبهٔ در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه بیش‌ترین مقدار ممکن گردد؟**

۱) $x=3$ ۲) $x=5$ ۳) $x=7$ ۴) $x=9$

۲ با توجه به شکل، حجم جعبه برابر است با:

$\Rightarrow V(x)=x(30-2x)^2$

برای ماکزیمم کردن تابع ابتدا آن را ساده و سپس مشتق $V(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$V(x)=x(30-2x)^2=x(900+4x^2-120x)=4x^3-120x^2+900x$

$V'(x)=12x^2-240x+900=0 \Rightarrow \underbrace{x^2-20x+75}_{(x-5)(x-15)}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \checkmark \\ x=15 \times \end{cases}$

بهینه‌سازی در فاصله

در برخی از سؤالات بهینه سازی، به دنبال بهینه کردن فاصله‌ها هستیم. برای محاسبهٔ فاصلهٔ مورد نظر، معادله‌ای را باتوجه به داده‌های مسئله تشکیل می‌دهیم. سپس با استفاده از فرضیات مسئله آن را یک‌متغیره کرده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را می‌یابیم.

مثال **نقطهٔ $A(۲,۰)$ با چه نقطه‌ای از نمودار $y=\sqrt{x}$ کم‌ترین فاصله را دارد؟**

فاصلهٔ AM را به‌دست آورده و مشتق آن را صفر قرار می‌دهیم:

$$AM=d=\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۰)^۲}$$

$$=\sqrt{(x-۲)^۲+(\sqrt{x})^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+x}$$

$$\Rightarrow d'=\frac{۲(x-۲)+۱}{۲\sqrt{(x-۲)^۲+x}}=۰\Rightarrow ۲(x-۲)+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow M(\frac{۳}{۲},\sqrt{\frac{۳}{۲}})$$

تست **کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$، کدام است؟** (خارج-۹۹)

۱) ۴   ۲) ۴/۵   ۳) ۵   ۴) $۳\sqrt{۲}$

۱ نقطهٔ $B(x,\sqrt{۲x+۷})$ روی نمودار قرار دارد و فاصلهٔ آن از نقطهٔ $A(۵,۰)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$(AB)'=\frac{۲x-۸}{۲\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}=۰\Rightarrow x=۴$$

پس کوتاه‌ترین فاصلهٔ A و B به ازای $x=۴$ به‌دست می‌آید و مقدار آن برابر است با:

$$AB=\sqrt{۴^۲-۸\times۴+۳۲}=\sqrt{۱۶}=۴$$

بهینه‌سازی در شکل‌های محاطی

در بعضی از سؤالات بهینه‌سازی، می‌خواهیم بزرگ‌ترین شکل ممکن را درون شکلی دیگر محاط کنیم. برای حل این سؤال‌ها باید به کمک رابطهٔ فیثاغورس، بین اجزای این دو شکل رابطه‌ای بنویسیم و از آن در فرمول حجم شکل محاطی استفاده کنیم.

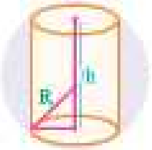
برای حل سریع‌تر برخی از تست‌های مربوط به بهینه‌سازی در شکل‌های محاطی به نکات زیر توجه کنید:

دو نکتهٔ خاص در شکل‌های محاطی:

۱ ارتفاع بزرگ‌ترین مخروطی که می‌تواند درون کره‌ای به شعاع R محاط شود، برابر $\frac{۴}{۳}R$ است.

$$\Rightarrow h=\frac{۴}{۳}R$$

۲ ارتفاع بزرگ‌ترین استوانه‌ای که می‌تواند درون کره‌ای به شعاع R محاط شود، برابر $\frac{۲}{\sqrt{۳}}R$ است.



$$\Rightarrow h=\frac{۲}{\sqrt{۳}}R$$

تست **حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می‌شود، کدام است؟** (داخل-۱۴۰۰)

۱) ۳۲π ۲) ۶۴π ۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵۱۲\pi}{۳}$

۲ ارتفاع استوانه را $۲h$ و شعاع قاعدهٔ استوانه را r فرض می‌کنیم. بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$\Rightarrow h^۲+r^۲=(۴\sqrt{۲})^۲=۳۲$$

از طرفی می‌دانیم مساحت جانبی استوانه از رابطهٔ $S=۲\pi r(۲h)$ به‌دست می‌آید، پس با جایگذاری $h=\sqrt{۳۲-r^۲}$ در رابطهٔ مساحت داریم:

$$S=۴\pi r\sqrt{۳۲-r^۲}=۴\pi\sqrt{۳۲r^۲-r^۴}\Rightarrow S'=۴\pi\times\frac{۶۴r-۴r^۳}{۲\sqrt{۳۲r^۲-r^۴}}=۰$$

$$\Rightarrow ۴\pi r(۱۶-r^۲)=۰\Rightarrow r^۲=۱۶\Rightarrow r=۴\xrightarrow{h^۲+r^۲=۳۲}h=۴$$

بنابراین حداکثر مساحت جانبی استوانه برابر است با:

$$S=۴\pi\times۴\times۴=۶۴\pi$$

مثال **اگر درون کره‌ای به شعاع ۳ سانتی متر بزرگ‌ترین مخروط ممکن را محاط کنیم، ارتفاع مخروط چقدر خواهد بود؟**

روش اول:

$$x^۲+r^۲=۹\Rightarrow r^۲=۹-x^۲$$

حجم مخروط $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ است. به‌جای h با توجه به شکل فوق $۳+x$ قرار می‌دهیم و به‌جای $r^۲$ از رابطهٔ بالا $۹-x^۲$ را قرار می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$V=\frac{\pi}{۳}(۹-x^۲)(۳+x)\Rightarrow V'=\frac{\pi}{۳}(-۲x(۳+x)+(۹-x^۲))=۰$$

$$\Rightarrow -۳x^۲-۶x+۹=۰\xrightarrow{\div(-۳)}\underbrace{x^۲+۲x-۳}_{(x+۳)(x-۱)}=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳ & ✗\\ x=۱ & ✓\end{cases}$$

به‌ازای $x=۱$ ارتفاع بزرگ‌ترین مخروط برابر با $h=۳+x$ یعنی $h=۴$ خواهد بود.

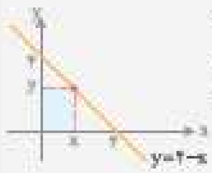
روش دوم: طبق نکته گفته شده ارتفاع بزرگ‌ترین مخروط که در کره‌ای به شعاع R محاط شود برابر $\frac{۴}{۳}R$ است، بنابراین:

$$h=\frac{۴}{۳}(۳)=۴$$

بهینه‌سازی در نمودارها

گاهی اوقات درون نمودار یک تابع، یک شکل هندسی محاط می‌کنیم و قصد داریم محیط یا مساحت آن شکل را بهینه کنیم. برای این کار فرمول محیط یا مساحت شکل محاطی را می‌نویسیم، سپس به کمک ضابطهٔ نمودار داده‌شده، فرمول را یک‌متغیره می‌کنیم.

مثال **نقطه‌ای روی خط $y = 4 - x$ انتخاب کرده و از آن دو خط بر محورهای مختصات عمود می‌کنیم تا یک چهارضلعی ایجاد شود. بیشترین مساحت این چهارضلعی چقدر است؟**

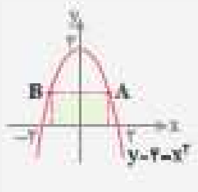


مساحت چهارضلعی برابر xy است و چون $y = 4 - x$، پس مساحت ۴ ضلعی به‌صورت $f(x) = x(4 - x)$ خواهد بود. حال ماکزیمم مطلق این تابع را می‌یابیم:

$$f'(x) = 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 4$$

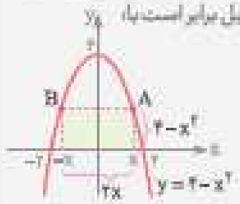
پس بیش‌ترین مساحت این چهار ضلعی برابر با ۴ است.

تست **در شکل زیر، مستطیلی که دو رأس آن روی نمودار $y = 4 - x^2$ و دو رأس دیگرش روی محور xها قرار دارد، مشاهده می‌شود. طول نقطهٔ A کدام باشد تا مساحت مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن شود؟**



۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

۴ با توجه به شکل، نقاط $A(x, 4 - x^2)$ و $B(-x, 4 - x^2)$ دو رأس مستطیل هستند. پس یک ضلع مستطیل برابر $2x$ و ضلع دیگر آن $4 - x^2$ است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:



$$S(x) = 2x(4 - x^2) = -2x^3 + 8x$$

برای این‌که ببینیم x باید چقدر باشد تا مساحت مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن شود، باید از تابع $S(x)$ مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم:

$$S'(x) = -6x^2 + 8 \xrightarrow{S'(x)=0} -6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

چند نکته برای حل سریع‌تر مسائل بهینه‌سازی

۱ اگر مجموع دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که دو عدد با هم برابر باشند.

مثلاً اگر $x + 2y = 6$ باشد، برای این‌که xy ماکزیمم شود، باید $x = 2y$ باشد، پس:

$$x + 2y = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس ماکزیمم مقدار xy برابر است با:

$$3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

۲ اگر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آن‌ها هنگامی مینیمم است که دو عدد برابر باشند.

۳ اگر مجموع دو عدد مثبت برابر مقدار ثابتی باشد $(x + y = k)$ حاصل ضرب آن‌ها با توان‌های مختلف $(x^m y^n)$ وقتی ماکزیمم است که $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ باشد.

مثال **مجموع دو عدد مثبت x و y برابر ۱۲ است.**

الف) بیشترین مقدار x^2y چند است؟

ب) بیشترین مقدار x^5y به ازای کدام مقدار x و y به دست می‌آید؟

الف) باید $\frac{x}{2} = \frac{y}{1}$ باشد پس $x = 2y$ است.

$$x + y = 12 \xrightarrow{x=2y} \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

پس حداکثر مقدار x^2y برابر است با: $8^2 \times 4 = 256$ — در متن: $4^2 \times 8 = 128$

ب) باید $\frac{x}{5} = \frac{y}{1}$ باشد، پس $x = 5y$ است.

$$x + y = 12 \xrightarrow{x=5y} \begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases}$$

تست **از بین مخروط‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع وارد بر آن برابر ۳۰ است، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم کدام است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۴ می‌دانیم $r + h = 30$ است. حال برای این که $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ماکزیمم شود، کافی است r^2h را ماکزیمم نماییم. پس با توجه به قضیهٔ بالا داریم:

$$\frac{r}{2} = \frac{h}{1} \Rightarrow r = 2h \xrightarrow{r+h=30} 2h + h = 30 \Rightarrow 3h = 30 \Rightarrow h = 10$$

یادداشت:

فصل ۱۰

مجموعه، الگو و دنباله

ارتباط با فصل‌های دیگه: بخش الگو و دنباله با فصل‌های دیگر ارتباط چندانی ندارد اما بخش روابط بین مجموعه‌ها در فصل شمارش بدون شمردن و احتمال، کاربرد دارد.

توصیه: توی بخش دنبالهٔ حسابی و هندسی فقط روابط اصلی رو بدونید و فرمول اضافی حفظ نکنید.

در بخش الگویابی هم دو تا کار بکنید:

۱- الگوهای مشهور مثل الگوی خطی، الگوی درجه دوم، الگوی فیبوناچی و ... رو با نکاتش یاد بگیرید، اما ذهنتون رو به این الگوها محدود نکنید و سعی کنید تحلیل‌تون رو قوی کنید.

۲- تست‌های متنوع رو تحلیل و موشکافی کنید. حتی اگه تست‌هارو درست حل کردید، پاسخنامه رو هم بخونید. با این کار ممکنه راه بهتری یاد بگیرید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۱	۱	صفر	۱	۳	۲	۲	۲

درس ۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

معرفی مجموعه‌های مهم

مجموعه را دسته‌ای از اشیای متمایز و مشخص در نظر می‌گیرند.

مثلاً، دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم تهران یک مجموعه محسوب می‌شود، اما دانش‌آموزان قدبلند تهران مجموعه نیست، چون بلندی قد معیار مشخصی ندارد.

انواع نمایش مجموعه‌ها

۱. **نمایش با اعضا:** اعضای مجموعه را به صورت مرتب یا نامرتب درون یک جفت آکولاد نمایش می‌دهیم. مثلاً $A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

۲. **نمایش با نماد ریاضی:** به جای نوشتن اعضا، ویژگی مشترک بین آن‌ها را می‌نویسیم. مثلاً $A=\{۲k-۱ : k\in \mathbb{N}, ۱\le k\le ۵\}$

۳. **نمایش هندسی:** اعضای مجموعه را درون یک شکل در صفحه مانند مستطیل، دایره و ... قرار می‌دهیم که به آن نمودار ون گفته می‌شود. مثلاً:

تذکر ۱ ترتیب عضوها در مجموعه اهمیتی ندارد؛ یعنی جابه‌جایی عضوها، مجموعه را تغییر نمی‌دهد. $\{۱,۲,۳\}=\{۳,۱,۲\}=\{۲,۱,۳\}$

تذکر ۲ عضوهای تکراری در مجموعه شمرده نمی‌شوند.

$\{۱,۱,۱,۲,۲,۳,۳,۳,۳\}=\{۱,۲,۳\}$

مجموعه‌های مهم اعداد

اعداد طبیعی	$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}$
اعداد حسابی	$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$
اعداد گویا	$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\}$
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}'=\{x \mid x\notin\mathbb{Q}\}$
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

مجموعهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهند و شامل همهٔ اعداد گویا و گنگ است، بنابراین روابط زیر برقرار است:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}' \quad \mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}' \quad \mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$$

تست چه تعداد از رابطه‌های زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی درست است؟

الف) $\mathbb{Q}\subseteq(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$ ب) $(\mathbb{N}\cup\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}'$

پ) $(\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}')\subseteq\mathbb{W}$ ت) $(\mathbb{Z}\cup\mathbb{N})\subseteq(\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}')$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ به بررسی موارد می‌پردازیم:
الف) مجموعهٔ $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ همهٔ اعداد غیرصحیح است که $\mathbb{Q}$ زیرمجموعهٔ آن نیست.
ب) اجتماع $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ برابر $\mathbb{Q}$ است و می‌دانیم $\mathbb{Q}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{Q}'$ نیست.
پ) اشتراک $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ مجموعهٔ تهی است و زیرمجموعه $\mathbb{W}$ خواهد بود.
ت) اجتماع $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ برابر $\mathbb{Z}$ و اجتماع $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی است. پس نتیجه می‌گیریم $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ است.

دو نکته را در رابطه با اعداد گنگ و گویا ببینیم:

۱ اگر x و y دو عدد گویا باشند، آن‌گاه $x \pm y$ ، xy ، $\frac{x}{y}$ و... هم گویا هستند، اما x^y یا y^x ممکن است گویا یا گنگ باشند.
به عنوان مثال اگر $x=5$ و $y=\frac{1}{2}$ ، در این صورت $x^y=(5)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ که عددی گنگ است، اما $y^x=(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$ که عددی گویا است.

۲ اگر x و y دو عدد گنگ باشند در رابطه با گنگ یا گویا بودن $x \pm y$ ، $\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{x}$ ، x^y ، y^x ، $x^n (n \in \mathbb{Z})$ و $y^n (n \in \mathbb{Z})$ به طور قطعی نمی‌توان اظهارنظر کرد، ممکن است حاصل آن‌ها گنگ یا گویا باشد.

انواع بازه

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ هستند که برای نمایش همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد، یا اعداد حقیقی بزرگتر یا کوچکتر از یک عدد، از آن‌ها استفاده می‌کنیم. انواع بازه‌ها عبارت‌اند از:

نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی	نوع بازه	بازه
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	a b	باز	(a,b)
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	a b	نیم‌باز	$(a,b]$
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	a b	نیم‌باز	$[a,b)$
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	a b	بسته	$[a,b]$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	a	باز	$(a,+\infty)$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	b	نیم‌باز	$(-\infty,b]$
$x \in \mathbb{R}$		باز	$(-\infty,+\infty)$

تست اگر $A=(-4,2]$ و $B=[-1,3]$ باشد، حاصل $(A \cup B) \cap \mathbb{N}$ کدام است؟

۱) $\{0,2\}$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\{0,1,2\}$ ۴) $\{1,2,3\}$

۴ با کمک نمایش هندسی بازه‌های A و B، مجموعهٔ $A \cup B$ را تعیین می‌کنیم:

$\rightarrow A \cup B=(-4,3]$

اشتراک $(-4,3]$ و مجموعهٔ اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) به‌صورت $\{1,2,3\}$ است.

گاهی اوقات ابتدا و انتهای بازه به‌صورت یک رابطهٔ ریاضی داده می‌شود. مثلاً $A_n(-n,3n)$ بازه‌هایی به‌صورت $A_1(-1,3)$ ، $A_2(-2,6)$ ، $A_3(-3,9)$ و... را نشان می‌دهد.
در سؤالات ممکن است تفاضل، اجتماع، اشتراک و ... از این بازه‌ها خواسته شود. می‌توانیم بازه‌ها را روی محور رسم کنیم و موارد خواسته شده را بدست آوریم.

تست اگر $A_n=((-1)^n-n, 2n-1)$ باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو صحیح مجموعهٔ $(A_3 \cup A_4)-(A_1 \cap A_2)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷
۳) ۶ ۴) ۹

۲ ابتدا بازه‌های A_1 تا A_4 را تعیین می‌کنیم و سپس $A_3 \cup A_4$ و $A_1 \cap A_2$ را به‌دست می‌آوریم:

$A_1=(-1-1, 2-1)=(-2,1)$, $A_2=(1-2, 4-1)=(-1,3)$

$A_3=(-1-3, 6-1)=(-4,5)$, $A_4=(1-4, 8-1)=(-3,7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_3 \cup A_4=(-4,5) \\ A_1 \cap A_2=(-2,1) \end{cases} \Rightarrow$$

بنابراین $(A_3 \cup A_4)-(A_1 \cap A_2)=(-4,-2] \cup [1,5)$ است.
بزرگ‌ترین عضو صحیح برابر ۴ و کوچک‌ترین عضو صحیح ۳- است و اختلاف آن‌ها برابر ۷ است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن با شمردن به‌دست آید، مجموعهٔ متناهی نام دارد؛ حتی اگر شمردن تعداد اعضای آن سخت و زمان‌گیر باشد. به بیان دیگر تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی، عددی حسابی است.
مثلاً، مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج یک‌رقمی به صورت $\{2,4,6,8\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی است.
مجموعه‌ای که متناهی نباشد، یعنی تعداد اعضای آن حتی با صرف زمان خیلی زیاد و امکانات کافی هم قابل شمردن نباشد، مجموعهٔ نامتناهی نام دارد. در واقع تعداد اعضای مجموعهٔ نامتناهی، با یک عدد حسابی قابل بیان نیست و از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگتر است.
مثلاً، مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۵، به صورت $\{5,10,15,...\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی است.

تذکر مجموعه‌های اعداد حقیقی، گویا، گنگ، صحیح، طبیعی و حسابی همگی مجموعه‌های نامتناهی هستند.

وقتی $B \subseteq A$ است:

۱ از نامتناهی بودن A نتیجه می‌گیریم B هم نامتناهی است.

۲ از متناهی بودن B نتیجه می‌گیریم A هم متناهی است.

تست **اگر $A \subseteq [3,6]$، $\{-3,-2,-1,\dots,99,100\} \subseteq B$، آنگاه در مورد متناهی بودن A و B کدام درست است؟**

۱) فقط A متناهی ۲) فقط B متناهی

۳) هر دو متناهی ۴) هر دو نامتناهی

۴ چون بازهٔ $[3,6]$ بازه‌ای نامتناهی است و زیر مجموعهٔ A می‌باشد، پس قطعاً A نیز این بازه را در خود دارد و نامتناهی است. چون $\{-3,-2,-1,\dots,99,100\}$ متناهی است و B زیر مجموعهٔ آن است، پس B باید قطعاً متناهی باشد تا بتواند زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ متناهی باشد.

به کمک جدول بعدی متوجه می‌شویم که ترکیب مجموعه‌های متناهی و نامتناهی چه ویژگی دارد.

A متناهی و B نامتناهی	A و B نامتناهی	A و B متناهی	وضعیت / مجموعه
نامتناهی	نامتناهی	متناهی	$A \cup B$
متناهی	نامشخص	متناهی	$A \cap B$
متناهی	نامشخص	متناهی	$A - B$
نامتناهی	نامشخص	متناهی	$B - A$

تست **کدام یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟**

۱) اعداد اول کوچکتر از ۱۰

۲) اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۵

۳) اعداد گویای موجود در بازهٔ $(4,5]$

۴) مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۰۰

۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) این مجموعه به‌صورت $\{2,3,5,7\}$ است که متناهی است. ✗

۲) این مجموعه به‌صورت $\{10,15,\dots,95\}$ است که متناهی است. ✗

۳) بی‌شمار عدد گویا در بازهٔ $(4,5]$ وجود دارد، پس نامتناهی است. ✓

۴) این مجموعه به‌صورت $\{1,2,4,5,\dots,100\}$ است که متناهی است. ✗

دانستن این دو نکته هم خالی از لطف نیست:

۱ اجتماع یک مجموعهٔ نامتناهی با هر مجموعهٔ دلخواه دیگری، نامتناهی خواهد بود. مثلاً اجتماع مجموعهٔ اعداد طبیعی با هر مجموعهٔ دلخواهی، نامتناهی است.

۲ اشتراک یک مجموعهٔ متناهی با هر مجموعهٔ دلخواه دیگری، متناهی خواهد بود. مثلاً اشتراک مجموعهٔ اعداد طبیعی تک رقمی با هر مجموعهٔ دلخواهی متناهی است.

مجموعه‌های تهی، مرجع و متمم

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

تذکر مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یک مجموعهٔ تک‌عضوی است و با مجموعهٔ $\varnothing$ متفاوت است. $\{\varnothing\} = \{\{\}\}$

پس اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، واضح است:

$A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup \varnothing = A$

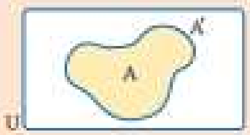
مجموعهٔ مرجع: هر مجموعه معمولاً به‌صورت $A = \{x : x \in U,\ x$ شرطی دربارهٔ $\}$ معرفی می‌شود. به مجموعهٔ U که xها از درون آن انتخاب می‌شوند، مجموعهٔ مرجع گفته می‌شود. پس مجموعهٔ مرجع، مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعهٔ آن هستند. در نمودار ون، معمولاً مستطیل بزرگی که کل فضا را نشان می‌دهد، مجموعهٔ مرجع است.

پس اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، واضح است: $A \cap U = A,\ A \cup U = U$

متمم مجموعه: فرض کنید A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعهٔ A برابر با اعضایی از U است که متعلق به مجموعهٔ A نباشد. متمم A را با A' نشان می‌دهند.

$A' = \{x \in U : x \notin A\}$

$A \cap A' = \varnothing$ $\qquad$ $A \cup A' = U$



$\varnothing' = U$ $\qquad$ $U' = \varnothing$

$(A')' = A$

تست **اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد و $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{4,5,6,7\}$ متمم مجموعهٔ $B' - A$ چند عضو دارد؟**

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۳ مجموعهٔ مرجع به‌صورت $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ است، پس:

$B' = U - B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{4,5,6,7\} = \{1,2,3,8,9\}$

$\Rightarrow B' - A = \{1,2,3,8,9\} - \{1,2,3,4,5\} = \{8,9\}$

پس متمم مجموعهٔ $B' - A$ به‌صورت $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ است که ۷ عضو دارد.

تست کدام گزینه درست است؟

۱) اگر مجموعهٔ $A\cup B$ نامتناهی و مجموعهٔ B نیز نامتناهی باشد، مجموعه A متناهی است.

۲) اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، مجموعهٔ $A\cap B$ هم نامتناهی است.

۳) اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعهٔ A' متناهی است.

۴) اگر مجموعهٔ A متناهی و مجموعهٔ B نامتناهی باشد، مجموعهٔ $B-A$ نامتناهی است.

۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) در این حالت مجموعهٔ A می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$$A\cup B=\{۰,۱,۲,...\}\ ,\ B=\{۱,۲,۳,...\}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\{۰,۲,۴,...\}\\A_2=\{۰\}\end{cases}$$

۲) در این حالت مجموعهٔ $A\cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد.

$$A_1=\{۰,۱,۲,...\},B_1=\{۱,۲,۳,...\}\Rightarrow A_1\cap B_1=\{۱,۲,۳,...\}$$

$$A_2=\{۰,۱,۲,...\}\ ,\ B_2=\{\cdots,-۲,-۱,۰\}\Rightarrow A_2\cap B_2=\{۰\}$$

۳) اگر A نامتناهی باشد، A' می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد.

$$A_1=\{۱,۳,۵,...\}\Rightarrow A_1'=\{۲,۴,۶,...\}$$
$$A_2=\{۲,۳,۴,...\}\Rightarrow A_2'=\{۱\}$$

۴) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، مجموعهٔ $B-A$ نامتناهی است.

تعلق و زیرمجموعه

نماد $\in$ به معنی تعلق داشتن و عضو بودن می‌باشد. وقتی می‌نویسیم $\in A$ باید خود عیناً درون مجموعه باشد.

$$A=\{a,\{b\}\}\Rightarrow a\in A,\ \{b\}\in A\ ,\ \{a\}\notin A\ ,b\notin A$$

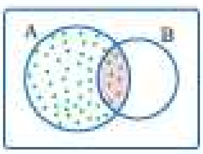
نماد $\subseteq$ به معنی زیرمجموعه است. مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B می‌نامند، هرگاه هر عضو دلخواه از مجموعهٔ A درون مجموعهٔ B باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A\subseteq B$

وقتی نوشته می‌شود $\{...,\ ,\ ,\ \}\subseteq A$ باید با حذف آکولاد، تمام عضوهای درون آن یعنی ... و ... تک‌تک درون مجموعهٔ A باشند.

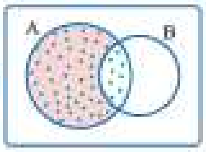
$$A=\{a,\{b\}\}\Rightarrow\{a\}\subseteq A\ ,\ \{b\}\not\subseteq A$$

چند قانون مقدماتی در زیرمجموعه

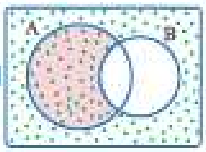
۱ $\varnothing\subseteq A$　　۲ $A\subseteq A$　　۳ $A\subseteq U$

۴ 

$\Rightarrow (A\cap B)\subseteq A$

۵ 

$\Rightarrow (A-B)\subseteq A$

۶ 

$\Rightarrow (A-B)\subseteq B'$

تذکر اگر بدانیم $A\subseteq B$ است، هرکدام از موارد زیر برقرار است. هم‌چنین از هرکدام از موارد زیر می‌توان نتیجه گرفت که $A\subseteq B$ است.

۱ $A\cup B=B$　　۲ $A\cap B=A$　　۳ $B'\subseteq A'$　　۴ $A-B=\varnothing$

تست اگر $A=\{۱,۲\},B=\{۱,۲,\{۱,۲\}\},C=\{\{۱,۲,\{۱,۲\}\}\}$ باشند، کدام بیان در مورد این مجموعه‌ها نادرست است؟ (خارج - ۹۷)

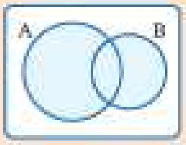
۱) $B\subseteq C$　　۲) $A\in B$　　۳) $A\subseteq B$　　۴) $B\in C$

۱ مجموعهٔ B متعلق به مجموعهٔ C است و زیرمجموعهٔ آن نیست.

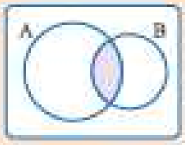
اعمال اصلی در مجموعه‌ها

اعمال روی مجموعه‌ها را می‌توانید در نمودارهای زیر ببینید:

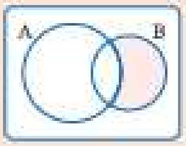
$A\cup B$



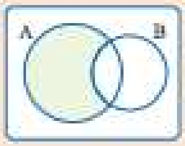
$A\cap B$



$B-A$



$A-B$



تذکر ۱ با توجه به نمودارهای بالا تعداد اعضای $A\cup B$ و $A-B$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

تذکر ۲ می‌دانیم اگر اشتراک دو مجموعهٔ A و B تهی باشد، آن دو مجموعه را جدا از هم گویند. از آن جایی که در دو مجموعهٔ جدا از هم $n(A\cap B)=۰$ است، پس:

۱ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

۲ $n(A-B)=n(A)$

تذکر ۳ در اکثر سؤالات مربوط به تعداد اعضای مجموعه‌ها، لازم است ابتدا تعداد اعضای اشتراک مجموعه‌ها را به دست آوریم.

تست اگر $n(A)=4$ ، $n(B)=7$ ، $n(A-B)=3$ ، مجموعهٔ $A\cup B$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱ برای به‌دست آوردن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعهٔ A و B، به تعداد اعضای اشتراک آن‌ها نیاز داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\Rightarrow 3=4-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=1$$

بنابراین $n(A\cup B)$ برابر است با:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=4+7-1=10$$

قوانین مجموعه‌ها

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه و A' و B' متمم‌های آن‌ها باشند، آنگاه:

دمورگان	معادل‌های تفاضل دو مجموعه	قانون متمم
$(A\cap B)'=A'\cup B'$	$A-B=A\cap B'$	$A\subseteq B\Leftrightarrow B'\subseteq A'$
$(A\cup B)'=A'\cap B'$	$A-B=B'-A'$	$A'\cap B'=A'-B$

تست ساده‌شدهٔ مجموعهٔ $(A'-B)'$ کدام است؟

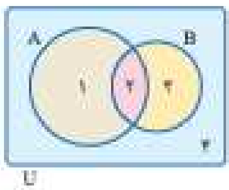
۱) $A\cup B$ ۲) $B-A$ ۳) $A\cap B$ ۴) B'

۱ ابتدا تفاضل را به اشتراک تبدیل می‌کنیم و سپس از قانون دمورگان استفاده می‌کنیم: $(A'-B)'=(A'\cap B')'=A\cup B$

ساده کردن عبارات مجموعه‌ای

برای ساده کردن عبارات مجموعه‌ای معمولاً بهترین و سریع‌ترین روش در تست‌ها استفاده از روش عددگذاری در نمودار ون است. یعنی نمودار ون را رسم کرده و در هر ناحیه یک عدد می‌نویسیم. حال عبارت داده‌شده در مسئله را برحسب آن اعداد پیدا می‌کنیم و با حاصل گزینه‌ها برحسب آن اعداد مقایسه می‌کنیم، هر گزینه با صورت مسئله اعداد یکسان داشت، جواب است.

۱ اگر دو مجموعه داده شود:



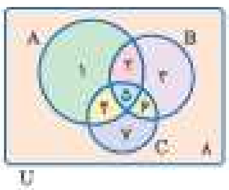
$A=\{1,2\}$

$B=\{2,3\}$

$A'=\{3,4\}$ ، $A\cap B=\{2\}$ ، $A\cup B=\{1,2,3\}$

$B'=\{1,4\}$ ، $A-B=\{1\}$ ، $B-A=\{3\}$

۲ اگر سه مجموعه داده شود:



$A=\{1,2,4,5\}$

$B=\{2,3,5,6\}$

$C=\{4,5,6,7\}$

$A\cap B=\{2,5\}$ ، $A\cap C=\{4,5\}$ ، $B\cap C=\{5,6\}$

$A-B=\{1,4\}$ ، $A-C=\{1,2\}$ ، $B-C=\{2,3\}$

تست اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، ساده‌شدهٔ مجموعهٔ $(A-B)-(B\cap A')$ کدام است؟

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$

۴ نمودار ون را برای دو مجموعهٔ A و B رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:

$$(A-B)-(B\cap A')=\underbrace{(\{1,2\}-\{2,3\})}_{\{1\}}-\underbrace{(\{2,3\}\cap\{3,4\})}_{\{3\}}=\{1\}$$

با توجه به نمودار، ناحیهٔ {۱} مجموعهٔ $A-B$ را نشان می‌دهد.

تست اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، مجموعهٔ $(A\cup B)\cap[(A-B)\cup B']'$ کدام است؟

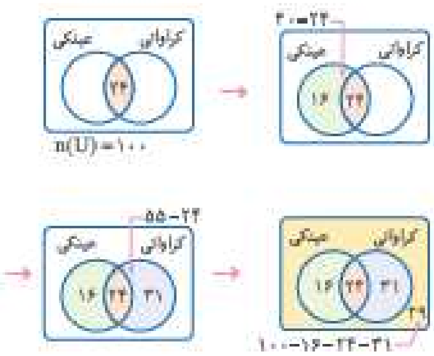
۱) A ۲) B ۳) A' ۴) B'

۲ چون دو مجموعهٔ A و B جدا از هم‌اند، پس نمودار ون آن‌ها را مطابق شکل در نظر می‌گیریم:

$$\underbrace{(A\cup B)}_{\{1,2\}}\cap[\underbrace{(A-B)}_{\{1\}}\cup\underbrace{B'}_{\{1,3\}}]'=\{1,2\}\cap\{2\}=\{2\}=B$$

به‌دست آوردن تعداد اعضای مجموعه‌ها با کمک نمودار ون

در بعضی مسائل، یک مجموعه داده می‌شود که بعضی از اعضای آن دارای ویژگی A_1 و بعضی دیگر دارای ویژگی A_2 هستند و سؤالات مختلفی را در مورد مجموعه مطرح می‌کنند؛ در این موارد بهتر است از نمودار ون استفاده کنیم. به‌ترتیب پر کردن ناحیه‌ها در نمودار ون در مثال زیر توجه کنید. در یک کنفرانس ریاضی در پاریس ۱۰۰ نفر شرکت کرده‌اند. اگر ۴۰ نفر عینک زده باشند و ۵۵ نفر کراوات بسته باشند و ۲۴ نفر هم کراوات و هم عینک زده باشند. در این‌صورت:



با توجه به آخرین مرحله از نمودار ون، می‌توان گفت:
تعداد افرادی که عینک زده‌اند ولی کراوات ندارند، برابر با ۱۶ است.
تعداد افرادی که کراوات زده‌اند ولی عینک ندارند، برابر با ۳۱ است.
تعداد افرادی که نه کراوات زده‌اند و نه عینک زده‌اند، برابر با ۲۹ است.
تعداد افرادی که کراوات دارند یا عینک دارند برابر است با:
$۱۶+۲۴+۳۱=۷۱$

تست **در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزشی هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟** (داخل - ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۴ مطابق نمودار ون روبه‌رو تعداد افرادی که عضو هیچ‌یک از گروه‌های روزنامه دیواری و ورزشی نیستند، برابر است با:

$\Rightarrow ۳۹-(۹+۷+۵)=۱۸$

تست **در یک کلاس ۵۰ نفری، ۳۵ نفر در درس ریاضی و ۳۰ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. اگر ۱۰ نفر در هر دو درس مردود شده باشند، چند نفر در هر دو درس قبول شده‌اند؟**

۱) ۱۵ ۲) ۲۵
۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۲ تعداد دانش‌آموزانی که درس ریاضی یا فیزیک را قبول شده‌اند برابر $۵۰-۱۰=۴۰$ نفر است. پس با توجه به نمودار ون زیر داریم:

$(۳۵-x)+x+(۳۰-x)=۴۰ \Rightarrow x=۲۵$

بنابراین تعداد افرادی که در هر دو درس قبول شده‌اند برابر ۲۵ نفر است.

درس ۲ الگو و دنباله

الگویابی

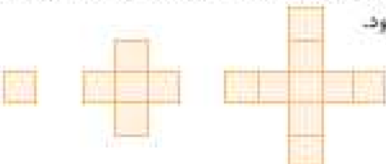
به یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد که ممکن است تکرارشونده یا رشدکننده یا ترکیبی از این دو باشند الگو می‌گویند.

تذکر جملهٔ اول الگو را با a_1، جملهٔ دوم را با a_2، ... و جملهٔ عمومی الگو را با a_n نمایش می‌دهیم. با کمک جملهٔ عمومی می‌توان هر جمله از الگو را به دست آورد.

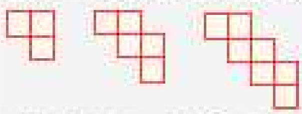
الگوی خطی

الگویی را که در آن اختلاف هر دو جملهٔ متوالی عددی ثابت باشد، الگوی خطی می‌نامند. جملهٔ عمومی این الگوها به‌صورت $t_n = an + b$ است.
[ضرایب a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.]

مثلاً در شکل‌های زیر، تعداد مربع‌ها از یک الگوی خطی پیروی می‌کنند؛ زیرا در شکل اول یک مربع داریم و در هر یک از شکل‌های بعدی، ۴ مربع به شکل قبلی اضافه می‌شود.



مثال **در الگوی زیر، تعداد مربع‌ها در شکل هجدهم را به‌دست آورید.**



در شکل اول، ۳ مربع داریم و در هر شکل، ۲ مربع به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم $۳+۲(n-۱)$ مربع داریم. بنابراین تعداد مربع‌ها در شکل هجدهم برابر است با: $۳+۲(۱۸-۱)=۳۷$

تست **با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل چندم برابر ۲۹ است؟**

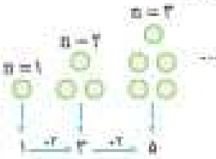
(۱) (۲) (۳)

۱) هفتم
۲) هشتم
۳) نهم
۴) دهم

۲ در شکل اول ۱ دایره داریم و در هر شکل، ۴ دایره به شکل قبلی اضافه می‌شود؛ بنابراین تعداد دایره‌ها در شکل nاُم برابر $۱+۴(n-۱)$ است. برای این‌که مشخص کنیم در شکل چندم تعداد دایره‌ها برابر ۲۹ می‌شود، داریم: $۱+۴(n-۱)=۲۹ \Rightarrow n-۱=۷ \Rightarrow n=۸$

دنباله

به هر تعداد از اعداد که پشت سر هم قرار گیرند، دنباله می‌گوییم. به هر کدام از این اعداد، جمله‌های دنباله گفته می‌شود. دنباله‌ها غالباً دارای الگوی خاصی هستند؛ ولی گاهی اوقات الگوی مشخصی ندارند و یا پیدا کردن الگوی آن‌ها سخت است. اگر بتوانیم الگوی کلی یک دنباله را پیدا کنیم، به آن جملهٔ عمومی دنباله می‌گوییم و با نمادهایی مانند a_n یا t_n یا ... نمایش می‌دهیم. مثلاً به الگوهای زیر دقت کنید:



$\Rightarrow t_n = ۲n-۱$

$\Rightarrow b_n = n^۲$

تذکر جملات یک دنباله ممکن است از الگوی خطی یا غیرخطی پیروی کنند یا فاقد الگو باشند.

مثال **جملهٔ عمومی دنباله‌های زیر را مشخص کنید.**

۱) $-1, -2, -3, -4, \dots$ $\qquad t_n = -n$

۲) $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$ $\qquad t_n = \sqrt{2n-1}$

۳) $1, 4, 9, 16, \dots$ $\qquad t_n = n^2$

۴) $0/1, 0/01, 0/001, 0/0001, \dots$ $\qquad t_n = \frac{1}{10^n}$

۵) $-1, 8, -27, 64, \dots$ $\qquad t_n = (-1)^n n^3$

۶) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ $\qquad t_n = 4(-\frac{1}{2})^n$

۷) $3, 1, 4, 1, 5, 1, \dots$ $\qquad t_n = \begin{cases} \frac{n+5}{2} & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}$

۸) $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ $\qquad t_n =$ nاُمین عدد اول

تست **جملهٔ چهل و پنجم دنبالهٔ $\dots, 1, 5, 1, 4, 1, 3, 1, 2$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۳ به جملات دنباله دقت کنید. $2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, \dots$

در دنبالهٔ داده‌شده جملات شمارهٔ فرد به‌صورت $\dots, 5, 4, 3, 2$ و جملات شمارهٔ زوج برابر ۱ هستند، پس جملهٔ عمومی این دنباله برابر است با:

$$t_n = \begin{cases} \frac{n+3}{2} & : \text{فرد } n \\ 1 & : \text{زوج } n \end{cases}$$

بنابراین جملهٔ ۴۵اُم به‌صورت $t_{45} = \frac{45+3}{2} = 24$ است.

دنبالهٔ بازگشتی و دنبالهٔ فیبوناچی

به دنباله‌ای که در آن بین هر جمله و جملات ماقبل آن یک رابطه وجود داشته باشد، دنبالهٔ بازگشتی می‌گویند.

مثلاً، اگر در یک دنباله جملهٔ اول برابر ۲ $t_1 = 2$ و برای $n \geq 2$ رابطهٔ $t_n = t_{n-1} + 2n$ برقرار باشد، برای به دست آوردن جملهٔ چهارم باید ابتدا جملات دوم و سوم را مشخص کنیم:

$$t_2 = t_1 + 4 = 2 + 4 = 6 \quad , \quad t_3 = t_2 + 6 = 6 + 6 = 12,$$
$$t_4 = t_3 + 8 = 12 + 8 = 20$$

دنبالهٔ فیبوناچی یک دنبالهٔ بازگشتی است که جملهٔ اول و دوم آن برابر ۱ بوده و از جملهٔ سوم به بعد، هر جمله از جمع دو جملهٔ قبل به دست می‌آید:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

تذکر رابطهٔ بین جملات در دنبالهٔ فیبوناچی به ازای $n \geq 3$ به صورت $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ است.

مثال **در یک دنبالهٔ اعداد $t_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ رابطهٔ $t_n = 2t_{n-1} + n$ برقرار است. جملهٔ هفتم این دنباله را به‌دست آورید.**

طبق رابطهٔ $t_n = 2t_{n-1} + n$ برای $n \geq 2$ داریم:

۱) $t_2 = 2t_1 + 2 = 2(1) + 2 = 4$

۲) $t_3 = 2t_2 + 3 = 2(4) + 3 = 11$

۳) $t_4 = 2t_3 + 4 = 2(11) + 4 = 26$

۴) $t_5 = 2t_4 + 5 = 2(26) + 5 = 57$

۵) $t_6 = 2t_5 + 6 = 2(57) + 6 = 120$

۶) $t_7 = 2t_6 + 7 = 2(120) + 7 = 247$

دنبالهٔ درجهٔ دوم

اگر در دنبالهٔ t_n، میزان افزایش جملات، ثابت نباشد اما افزایش‌ها تشکیل یک دنبالهٔ خطی بدهند، آنگاه دنبالهٔ t_n یک دنبالهٔ درجهٔ دوم است. جملهٔ عمومی این دنباله به صورت $t_n = \frac{d}{2}n^2 + bn + c$ است که در آن:

$$\underbrace{\underbrace{t_1 \; , \; t_2}_{+a_1} \; , \; \underbrace{t_3}_{+a_2} \; , \; \underbrace{t_4}_{+a_3}}_{+d \quad +d}$$

۱ مقدار c از رابطهٔ $c = t_1 - (a_1 - d)$ به‌دست می‌آید.

۲ برای به‌دست آوردن b از جملهٔ اول دنباله استفاده می‌کنیم.

مثال **جملهٔ عمومی دنبالهٔ درجهٔ دوم $\dots, 22, 14, 8, 4$ را به‌دست آورید.**

با توجه به این‌که دنبالهٔ داده‌شده یک دنبالهٔ درجهٔ دوم است، پس:

$$4, 8, 14, 22, \dots \;(+4, +6, +8;\; +2, +2) \longrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ c = 4 - (4 - 2) = 2 \end{cases} \Rightarrow t_n = 1 \times n^2 + bn + 2$$

حال برای به‌دست آوردن b از جملهٔ اول کمک می‌گیریم:

$$t_1 = 4 \Rightarrow (1)^2 + b(1) + 2 = 4 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنباله به صورت $t_n = n^2 + n + 2$ است.

تست **در دنبالهٔ اعداد $\dots, 63, x, 35, 24, 15, 8$ مقدار x کدام است؟**

۱) ۵۰ ۲) ۴۹ ۳) ۴۸ ۴) ۴۷

۳ الگوی جملات این دنباله به صورت زیر است:

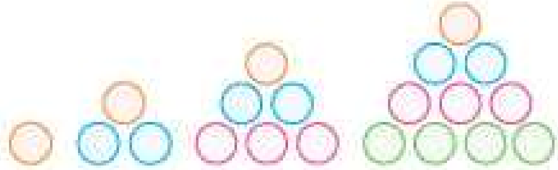
$$8, 15, 24, 35, x, 63 \quad (+7, +9, +11;\; +2, +2)$$

بنابراین اگر ۱۳ واحد به ۳۵ اضافه کنیم x به دست می‌آید، پس:

$$x = 35 + 13 = 48$$

دنبالهٔ مثلثی

در شکل‌های زیر، تعداد دایره‌های اضافه‌شده در هر شکل، برابر شمارهٔ آن شکل است. تعداد دایره‌های موجود در هر شکل، در زیر آن نوشته شده است:



1 $\quad$ $1+2=3$ $\quad$ $1+2+3=6$ $\quad$ $1+2+3+4=10$

با توجه به این شکل‌ها، دنبالهٔ مربوط به تعداد دایره‌ها به‌صورت $1, 3, 6, 10, \ldots$ بوده که یک دنبالهٔ درجهٔ دوم است.

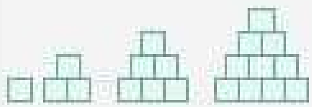
دنبالهٔ درجهٔ دوم $1, 3, 6, 10, \ldots$ را دنبالهٔ مثلثی می‌نامند. جملهٔ عمومی این دنباله برابر است با:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تذکر با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ مثلثی، مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تست در الگوی زیر تعداد مربع‌ها در کدام شکل برابر ۱۵۳ است؟



۱) چهاردهم
۲) دوازدهم
۳) پانزدهم
۴) هفدهم

۴ با توجه به این که تعداد مربع‌ها از الگوی مثلثی پیروی می‌کند، پس:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 153$$

$$\Rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = 306 \xrightarrow{17 \times 18 = 306} n = 17$$

دسته‌بندی اعداد طبیعی

در مسائلی که اعداد طبیعی را به روش‌های مختلف دسته‌بندی می‌کنند و در مورد یکی از دسته‌ها سؤال می‌پرسند، باید موارد زیر را در دستهٔ موردنظر تعیین کنیم:

۱ اولین عدد دسته ۲ آخرین عدد دسته ۳ تعداد جملات دسته

تست اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، یعنی ... , {۷, ۹, ۱۱} , {۳, ۵} , {۱}. در این صورت جملهٔ آخر واقع در دستهٔ شمارهٔ چهل، کدام است؟ (ریاضی خارج - ۹۹)

۱) ۱۵۶۳ $\quad$ ۲) ۱۵۸۹
۳) ۱۶۳۹ $\quad$ ۴) ۱۶۵۱

۳ اعداد طبیعی فرد به طریقی دسته‌بندی شده‌اند که تعداد جملات هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد. پس جملهٔ آخر در دستهٔ چهلم برابر $40 + \cdots + 2 + 1$اُمین عدد فرد است:

$$1+2+\cdots+40 = \frac{40(40+1)}{2} = 820$$

بنابراین ۸۲۰اُمین عدد فرد را می‌خواهیم که برابر است با:

$$a_n = 2n - 1 \xrightarrow{n = 820} 2 \times (820) - 1 = 1639$$

درس ۳ دنباله‌های حسابی و هندسی

دنبالهٔ حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جملهٔ اول)، با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست آید، دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود. به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً آن را با d نمایش می‌دهیم:

$$t_1 \underbrace{,}_{+d} t_2 \underbrace{,}_{+d} t_3 \underbrace{,}_{+d} t_4, \ldots$$

مثلاً دنبالهٔ زیر، یک دنباله حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت ۳ است:

$$1 \underbrace{,}_{+3} 4 \underbrace{,}_{+3} 7 \underbrace{,}_{+3} 10, \ldots$$

جملهٔ عمومی دنباله حسابی با جملهٔ اول t_1 و قدر نسبت d به‌صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

$$t_1 \underbrace{,}_{+d} t_1+d \underbrace{,}_{+d} t_1+2d \underbrace{,}_{+d} t_1+3d, \ldots$$

پس اختلاف هر دو جمله متوالی برابر d است، یعنی:

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = t_n - t_{n-1} = t_{n+1} - t_n = \ldots$$

علامت قدرنسبت در دنبالهٔ حسابی

۱ اگر $d > 0$ باشد، دنباله صعودی است. $\quad 1 \underbrace{,}_{+2} 3 \underbrace{,}_{+2} 5, \ldots$

۲ اگر $d = 0$ باشد، دنباله ثابت است. $\quad 2 \underbrace{,}_{0} 2 \underbrace{,}_{0} 2, \ldots$

۳ اگر $d < 0$ باشد، دنباله نزولی است. $\quad 11 \underbrace{,}_{-4} 7 \underbrace{,}_{-4} 3, \ldots$

تذکر اگر t_m و t_n دو جمله از دنباله‌ای حسابی باشند، آنگاه قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

مثال در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ هشتم برابر ۲۲ و جملهٔ سیزدهم برابر ۳۷ است. قدر نسبت را به‌دست آورید.

$$d = \frac{t_{13} - t_8}{13 - 8} = \frac{37 - 22}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

تست در یک دنبالهٔ حسابی جملات چهارم و هشتم به ترتیب ۶ و ۱۰ است. مجموع جملات دوم و هفتم چند برابر قدر نسبت است؟

۱) ۱۳ $\quad$ ۲) ۱۵ $\quad$ ۳) ۱۴ $\quad$ ۴) ۱۸

۱ قدرنسبت دنباله برابر است با: $d=\frac{t_8-t_4}{8-4}=\frac{10-6}{4}=1$

حال چون جملهٔ چهارم برابر ۶ است، پس:

$t_4=t_1+3d \Rightarrow t_1+3=6 \Rightarrow t_1=3$

$\Rightarrow \frac{t_2+t_7}{d}=\frac{t_1+d+t_1+6d}{d}=\frac{2t_1+7d}{d}=\frac{2\times3+7\times1}{1}=13$

میانبر بدون پیدا کردن t_1 نیز می‌توانستیم جملات دوم و هفتم را به‌دست آوریم. چون $t_4=6$ است پس:

$t_2=t_4-2d \Rightarrow t_2=6-2=4,\ t_7=t_4+3d \Rightarrow t_7=6+3=9$

برای حل مسائل دنبالهٔ حسابی، به نکات زیر توجه کنید:

۱ وقتی دو جمله از دنبالهٔ حسابی را داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی یعنی $t_n=t_1+(n-1)d$، دو جملهٔ داده‌شده را برحسب t_1 و d بنویسیم و با حل دستگاه حاصل، مقدار t_1 و d را پیدا کنیم. مثلاً، در دنبالهٔ حسابی که جملهٔ پنجم آن برابر ۹ و جملهٔ یازدهم آن برابر ۲۷ است، داریم:

$$\begin{cases}t_5=9\\t_{11}=27\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t_1+4d=9\\t_1+10d=27\end{cases} \Rightarrow d=3 \Rightarrow t_1=-3$$

۲ اگر رابطه‌ای بین جملات دنباله داده شود، می‌توانیم با استفاده از جملهٔ عمومی، هر کدام از جمله‌های رابطهٔ داده‌شده را بازنویسی کرده و عبارت را ساده کنیم.

مثال ۱ **در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات سوم و هشتم از جملهٔ هفتم یک واحد بیشتر است. جملهٔ چهارم دنباله را به‌دست آورید.**

$t_3+t_8=t_7+1 \Rightarrow (t_1+2d)+(t_1+7d)=t_1+6d+1$

$\Rightarrow t_1+3d=1 \Rightarrow t_4=1$

مثال ۲ **مجموع سه جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی، چهار برابر مجموع سه جملهٔ بعدی است. جملهٔ اول چند برابر قدرنسبت است؟**

با توجه به صورت سؤال $t_1+t_2+t_3=4(t_4+t_5+t_6)$ است، پس:

$t_1+t_1+d+t_1+2d=4(t_1+3d+t_1+4d+t_1+5d)$

$\Rightarrow 3t_1+3d=12t_1+48d \Rightarrow 9t_1=-45d \Rightarrow t_1=-5d \Rightarrow \frac{t_1}{d}=-5$

۳ در مواردی که جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را داریم ولی n (تعداد جملات یا شمارهٔ جمله) را نداریم، با نوشتن فرمول جملهٔ عمومی و حل معادله یا نامعادله، مقدار n را می‌یابیم.

مثال ۱ **کدام جمله از دنبالهٔ ... ,۳۳ ,۲۶ ,۱۹ ,۱۲ برابر با ۸۹ است؟**

$t_n=12+(n-1)(7) \Rightarrow 12+7n-7=89 \Rightarrow 7n=84 \Rightarrow n=12$

مثال ۲ **دنبالهٔ ... ,۲۵ ,۱۹ ,۱۳ ,۷ چند جملهٔ دورقمی دارد؟**

$t_n=7+(n-1)(6) \Rightarrow t_n=6n+1 \Rightarrow 10 \le 6n+1 \le 99$

$\Rightarrow 9 \le 6n \le 98 \Rightarrow 2 \le n \le 16$

پس تعداد جمله‌ها برابر است با: $16-2+1=15$

تست **در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول آن ۳۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۶۰ می‌باشد. جملهٔ هشتم آن کدام است؟**

۱) ۲۶ ۲) ۲۹ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

۲ روابط داده‌شده را باز می‌کنیم:

$1)\ t_1+t_2+t_3=t_1+(t_1+d)+(t_1+2d)=3t_1+3d=33$

$\Rightarrow t_1+d=11$

$2)\ t_4+t_5+t_6=\underbrace{(t_1+3d)+(t_1+4d)+(t_1+5d)}_{3t_1+12d}=60$

$\Rightarrow t_1+4d=20$

از روابط (۱) و (۲) مقادیر $t_1=8$ و $d=3$ به‌دست می‌آیند. بنابراین جملهٔ هشتم برابر است با: $t_8=t_1+7d=8+(7\times3)=29$

واسطهٔ حسابی

اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، مجموع جملات اول و سوم، دو برابر جملهٔ وسط است:

$$2b=a+c$$

جملهٔ وسط یعنی b را واسطهٔ حسابی a و c می‌نامند.

تست **اعداد $5p-1$، $3p+4$، $2p+3$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴ شرط تشکیل دنبالهٔ حسابی را می‌نویسیم و داریم:

$\text{جملهٔ وسط}=\frac{\text{جملهٔ اول}+\text{جملهٔ سوم}}{2} \Rightarrow 3p+4=\frac{(5p-1)+(2p+3)}{2}$

$\Rightarrow 6p+8=7p+2 \Rightarrow p=6$

پس جملات این دنباله به‌صورت ۲۹ ,۲۲ ,۱۵ هستند. بنابراین قدرنسبت آن برابر است با: $d=22-15=7$

قانون اندیس‌ها

اگر اعداد طبیعی m, n, p, q شمارهٔ جملاتی از دنبالهٔ حسابی باشند، به‌طوری‌که $m+n=p+q$ باشد، آنگاه طبق قانون اندیس‌ها رابطهٔ زیر بین جملات این دنباله برقرار است:

$$t_m+t_n=t_p+t_q$$

مثلاً، چون $3+7=4+6$ است، پس در هر دنباله حسابی $t_3+t_7=t_4+t_6$ است.

تذکر **با توجه به قانون اندیس‌ها در دنبالهٔ حسابی، مجموع هر دو جمله‌ای که از ابتدا و انتهای بخشی از دنباله فاصله یکسانی دارند، با هم برابر است.**

تست در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی t_n، رابطهٔ $t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8=63$ برقرار است. مقدار t_1+t_9 کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۰ ۳) ۲۳ ۴) ۱۸

۴ با استفاده از قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8=63 \Rightarrow 7t_5=63 \Rightarrow t_5=9$$

$2t_5$ ، $2t_5$ ، $2t_5$

بنابراین چون مجموع اندیس‌های t_1 و t_9 برابر ۱۰ است، داریم:

$$t_1+t_9=2t_5=2\times 9=18$$

درج واسطهٔ حسابی

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b تعدادی عدد دیگر قرار دهیم (درج کنیم) به‌طوری که اعداد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، کافیست اعداد موردنظر را با جاهای خالی به‌صورت ◯ نمایش داده، سپس a و b را جملات اول و آخر گرفته و مقدار قدر نسبت را بیابیم.

مثال بین دو عدد ۳ و ۱۹ سه واسطهٔ حسابی درج می‌کنیم. بزرگ‌ترین واسطهٔ درج‌شده را به‌دست آورید.

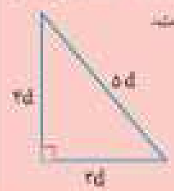
$$3, ◯, ◯, ◯, 19 \Rightarrow t_5=19 \Rightarrow t_1+4d=19 \Rightarrow 3+4d=19$$
$$\Rightarrow 4d=16 \Rightarrow d=4$$

بنابراین جملات دنباله به صورت ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹ هستند که بزرگ‌ترین عدد درج‌شده برابر ۱۵ است.

سه جملهٔ متوالی

در سؤالاتی که صحبت از مجموع سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی است اما شمارهٔ جمله‌ها مشخص نیست، می‌توانیم جمله‌ها را به‌صورت $x-d, x, x+d$ در نظر بگیریم. [این روش برای مجموع پنج جملهٔ متوالی، هفت جملهٔ متوالی و ... نیز قابل استفاده است.]

نکته اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d دهند، طول اضلاع برابر $3d, 4d, 5d$ است.



تست در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ متوالی برابر ۱۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۹۳ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

۳ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی را به صورت $a-d, a, a+d$ درنظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله برابر ۱۵ است، پس:

$$(a-d)+a+(a+d)=15 \Rightarrow 3a=15 \Rightarrow a=5$$

پس سه جملهٔ موردنظر به صورت $5-d, 5, 5+d$ هستند. حال مجموع مربعات این سه جمله را برابر ۹۳ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\underbrace{(5-d)^2}_{25-10d+d^2}+5^2+\underbrace{(5+d)^2}_{25+10d+d^2}=93$$

$$\Rightarrow \underbrace{75+2d^2=93}_{2d^2=18} \Rightarrow d^2=9 \Rightarrow d=\pm 3$$

چون نمی‌دانیم دنبالهٔ موردنظر صعودی است یا نزولی، پس هر دو جواب ۳ و ۳- برای قدرنسبت قابل قبول هستند.

جملات مشترک دو دنبالهٔ حسابی

جمله‌های مشترک دو دنبالهٔ حسابی، خود تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند به‌طوری که:

۱ جملهٔ اول آن برابر اولین جملهٔ مشترک دو دنبالهٔ اولیه است.

۲ قدرنسبت آن برابر ک.م.م قدرنسبت‌های دو دنبالهٔ اولیه است.

تست در دو دنبالهٔ حسابی ...، ۱۰، ۷، ۴، ۱ و ...، ۱۰، ۶، ۲، ۲- بعضی از جملات یکسان‌اند. هشتمین جملهٔ مشترک آن‌ها کدام است؟

۱) ۹۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۰۰

۱ قدرنسبت هر یک از دنباله‌ها و جملهٔ اول مشترک را مشخص می‌کنیم و داریم:

$$\begin{matrix} 1, 4, 7, 10, \dots \Rightarrow d_1=3 \\ -2, 2, 6, 10, \dots \Rightarrow d_2=4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} d=[3,4]=12 \\ 10=\text{اولین جملهٔ مشترک} \end{cases}$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ جمله‌های مشترک به‌صورت زیر است:

$$t_n=10+(n-1)\times 12=12n-2$$

در نتیجه جملهٔ هشتم آن برابر است با: $t_8=12\times 8-2=94$

دنبالهٔ هندسی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب عددی ثابت و غیرصفر در جملهٔ قبل از خودش به‌دست آید، دنبالهٔ هندسی نامیده می‌شود. به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً آن را با q نمایش می‌دهیم:

$$t_1 \xrightarrow{\times q} t_2 \xrightarrow{\times q} t_3 \xrightarrow{\times q} t_4, \dots$$

مثلاً، دنبالهٔ زیر یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۳ و قدر نسبت ۲ است:

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24, \dots$$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت q به‌صورت $t_n=t_1q^{n-1}$ است.

$$t_1 \xrightarrow{\times q} t_1q \xrightarrow{\times q} t_1q^2 \xrightarrow{\times q} t_1q^3, \dots$$

صعودی یا نزولی بودن دنبالهٔ هندسی

۱ اگر $q>1$ باشد، با توجه به علامت جملهٔ اول، دنباله صعودی یا نزولی است.

$1, 2, 4, \dots$ ⟵ صعودی ($\times 2$، $\times 2$) $-2, -6, -18, \dots$ ⟵ نزولی ($\times 3$، $\times 3$)

۲ اگر $0<q<1$ باشد، با توجه به علامت جملهٔ اول، دنباله صعودی یا نزولی است.

$4, 2, 1, \dots$ ⟵ نزولی ($\times\frac{1}{2}$، $\times\frac{1}{2}$) $-10, -5, -2/5, \dots$ ⟵ صعودی ($\times\frac{1}{2}$، $\times\frac{1}{2}$)

۳ اگر $q<0$ باشد، دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

$2, -6, 18, -54, \dots$ ⟵ نوسانی ($\times(-3)$، $\times(-3)$، $\times(-3)$)

تذکر اگر تمام جملات یک دنباله یکسان باشند، آن دنباله هم حسابی محسوب می‌شود و هم هندسی.
مثلاً دنبالهٔ $2, 2, 2, \dots$ را هم می‌توان یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $d=0$ در نظر گرفت و هم دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $q=1$.

تست در دنبالهٔ هندسی $t_n = 5\times 2^n$ جملهٔ ششم چند برابر جملهٔ سوم است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱ با توجه به جملهٔ عمومی دنباله یعنی $t_n = 5\times 2^n$ داریم:

$$\frac{t_6}{t_3} = \frac{5\times 2^6}{5\times 2^3} = 2^3 = 8$$

اگر رابطه‌ای بین جملات دنباله داده شود و یک جمله از دنباله یا قدرنسبت دنباله یا ... را بخواهند با استفاده از جملهٔ عمومی، هر کدام از جمله‌های رابطهٔ داده‌شده را بازنویسی کرده و عبارت را ساده می‌کنیم.

مثال در یک دنبالهٔ هندسی، حاصل‌ضرب جملات سوم و هفتم، برابر با نصف جملهٔ ششم است. جملهٔ چهارم را به‌دست آورید.

$$t_3\times t_7 = \frac{1}{2}t_6 \xrightarrow{t_n = t_1q^{n-1}} (t_1q^2)\times(t_1q^6) = \frac{1}{2}(t_1q^5)$$

$$\Rightarrow t_1q^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_4 = \frac{1}{2}$$

تست در یک دنبالهٔ هندسی $t_4 = 1$ و $\frac{t_7}{t_2} = 32$ است. جملهٔ دهم کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۶۶ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵

۳

$$\frac{t_7}{t_2} = 32 \Rightarrow \frac{t_1q^6}{t_1q} = 32 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

حال چون $t_4 = 1$ است، پس:

$$t_4 = t_1q^3 = 1 \Rightarrow t_1\times 2^3 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow t_{10} = t_1q^9 = \frac{1}{8}\times 2^9 = 2^6 = 64$$

قدر نسبت دنبالهٔ هندسی

وقتی دو جمله از دنبالهٔ هندسی را داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی یعنی $t_n = t_1q^{n-1}$ دو جملهٔ داده‌شده را برحسب t_1 و q بنویسیم و با حل دستگاه حاصل، t_1 و q را به‌دست آوریم.

مثال در یک دنبالهٔ هندسی جملات پنجم و هشتم آن به‌ترتیب ۹ و ۷۲ هستند. قدرنسبت را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} t_5 = 9 \\ t_8 = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1q^4 = 9 \\ t_1q^7 = 72 \end{cases} \xrightarrow{\div} q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

تذکر اگر t_m و t_n دو جمله از دنباله‌ای هندسی باشند، آنگاه قدرنسبت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\frac{t_m}{t_n} = q^{(m-n)}}$$

مثال در دنبالهٔ هندسی که جملات سوم و هفتم آن به‌ترتیب ۳ و ۴۸ باشند، قدر نسبت را به‌دست آورید.

$$\frac{t_7}{t_3} = q^{7-3} \Rightarrow \frac{48}{3} = q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$$

تست در دنبالهٔ هندسی $\frac{1}{2}, x, 4, y, \dots$ جملهٔ هفتم کدام است؟

۱) ۲۵۷ ۲) ۳۵۸ ۳) ۳۵۷ ۴) ۲۵۶

۴ در دنبالهٔ هندسی داده‌شده، جملهٔ اول برابر $\frac{1}{2}$ و جملهٔ سوم برابر ۴ است، پس:

$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \Rightarrow \frac{t_1q^2}{t_1} = 8 \Rightarrow q^2 = 8 \Rightarrow q = \pm\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow t_7 = t_1q^6 = \frac{1}{2}\times(\pm\sqrt{8})^6 = \frac{1}{2}\times 2^9 = 2^8 = 256$$

واسطهٔ هندسی

اگر a، b، c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، حاصل‌ضرب جملات اول و سوم برابر مربع جملهٔ وسط است، در این حالت جملهٔ وسط یعنی b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامند.

$$\boxed{b^2 = a\times c}$$

تست به ازای یک مقدار x اعداد $8-x$ ، x ، $12+x$ به ترتیب سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی نزولی‌اند. جملهٔ پنجم این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۲ اعداد $8-x$، x، $12+x$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند، پس:

$$x^2 = \underbrace{(8-x)(12+x)}_{96+8x-12x-x^2} \Rightarrow 2x^2+4x-96 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2+2x-48}_{(x+8)(x-6)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 6 \end{cases}$$

چون دنبالهٔ هندسی نزولی است، پس $x=6$ قابل قبول است.

جملات دنباله: $18, 6, 2, \dots \Rightarrow t_5 = t_1q^4 = 18\times(\frac{1}{3})^4 = \frac{2}{9}$

اگر اعداد طبیعی m, n, p, q شمارهٔ جملاتی از دنبالهٔ هندسی باشند به‌طوری‌که $m+n=p+q$ باشد، آنگاه طبق قانون اندیس‌ها رابطهٔ زیر بین جملات این دنباله برقرار است:

$$t_m \times t_n = t_p \times t_q$$

مثلاً چون ۶ + ۴ = ۸ + ۲ است پس در هر دنبالهٔ هندسی $t_2 \times t_8 = t_4 \times t_6$ است.

نکته با توجه به قانون اندیس‌ها در دنبالهٔ هندسی، حاصل‌ضرب هر دو جمله‌ای که از ابتدا و انتهای بخشی از دنباله فاصلهٔ یکسانی دارند، با هم برابر است.

تست در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی a_n که $a_7=5$ ، $a_{12}=16$ است، حاصل $a_4 \times a_{15}$ کدام است؟

۱) ۸۵ ۲) ۸۲ ۳) ۸۰ ۴) ۸۶

۳ چون مجموع اندیس‌های دو جملهٔ a_4 و a_{15} برابر مجموع اندیس‌های a_7 و a_{12} است، از قانون اندیس‌ها استفاده می‌کنیم و داریم:

$$4+15=7+12 \Rightarrow a_4 \times a_{15} = a_7 \times a_{12} \Rightarrow a_4 \times a_{15} = 5 \times 16 = 80$$

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b تعدادی عدد دیگر قرار دهیم به طوری‌که اعداد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، کافیست اعداد موردنظر را با جاهای خالی به صورت ○ نمایش داده، سپس a و b را جملات اول و آخر گرفته و مقدار قدرنسبت را بیابیم.

مثال بین دو عدد ۱ و ۳۲ چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم. کوچک‌ترین واسطهٔ درج شده چقدر است؟

$$1, ○, ○, ○, ○, 32 \Rightarrow t_6 = 32 \Rightarrow t_1 q^5 = 32$$

$$\Rightarrow 1 \times q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین جملات دنباله به صورت ۱،۲،۴،۸،۱۶،۳۲ هستند که کوچک‌ترین عدد درج شده برابر ۲ است.

تست بین دو عدد ۴ و ۹۷۲ چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم. مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این واسطه‌ها کدام است؟

۱) ۳۳۶ ۲) ۳۳۸ ۳) ۳۴۰ ۴) ۳۴۲

۱ با قرار دادن چهار عدد بین اعداد ۴ و ۹۷۲، دنبالهٔ هندسی به صورت مقابل خواهد شد: $4, ○, ○, ○, ○, 972, \ldots$

بنابراین در این دنباله، جملهٔ اول برابر ۴ و جملهٔ ششم برابر ۹۷۲ می‌شود. پس با استفاده از رابطهٔ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم:

$$t_6 = t_1 q^5 \Rightarrow 972 = 4q^5 \Rightarrow 243 = q^5 \Rightarrow q = 3$$

حال با داشتن قدرنسبت و جملهٔ اول، می‌توان جملات این دنباله را به دست آورد:

$$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{\times 3} 36 \xrightarrow{\times 3} 108 \xrightarrow{\times 3} 324 , 972 \Rightarrow 12+324=336$$

نکته در سؤالاتی که صحبت از حاصل‌ضرب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی است اما شمارهٔ جمله‌ها مشخص نیست می‌توانیم جمله‌ها را به صورت $\frac{x}{q}, x, xq$ در نظر بگیریم.

۴ حاصل‌ضرب سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی برابر ۲۱۶ است. بنابراین آن‌ها را به صورت $\frac{x}{q}, x, xq$ در نظر می‌گیریم:

$$(\frac{x}{q})(x)(xq) = 216 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$$

پس جملات دنباله $\ldots, \frac{6}{q}, 6, 6q, \ldots$ هستند. حال مجموع آن‌ها ۱۹ است، پس:

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 13$$

$$\xrightarrow{\times q} 6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ q = \frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر $q=\frac{2}{3}$ باشد، جملات دنباله به صورت ۹، ۶، ۴ و اگر $q=\frac{3}{2}$ باشد، جملات به‌صورت ۴، ۶، ۹ هستند که در هر دو حالت بزرگ‌ترین جمله برابر ۹ است.

مسائل ترکیبی دنبالهٔ حسابی و هندسی

گاهی اوقات می‌توانیم بعضی از جملات دنبالهٔ حسابی را گلچین کرده، آن‌ها را کنار هم قرار دهیم تا تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند و بالعکس. در این حالت، باید به کمک فرمول جملهٔ عمومی دنبالهٔ اولیه، جملات را باز کنیم، آن‌ها را کنار هم نوشته، سپس شرط تشکیل دنبالهٔ جدید را بنویسیم.

مثال در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم ، پنجم و دهم تشکیل دنبالهٔ هندسی داده‌اند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را به‌دست آورید.

$$\underbrace{t_1+2d}_{a}, \underbrace{t_1+4d}_{b}, \underbrace{t_1+9d}_{c} \xrightarrow{b^2=ac} \underbrace{(t_1+4d)^2}_{t_1^2+8t_1d+16d^2} = \underbrace{(t_1+2d)(t_1+9d)}_{t_1^2+11t_1d+18d^2}$$

$$\Rightarrow 3t_1d + 2d^2 = 0 \Rightarrow d(3t_1+2d) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{2}{3}d \Rightarrow q = \frac{b}{a} = \frac{t_1+4d}{t_1+2d} = \frac{10d}{4d} = \frac{5}{2}$$

نکته اگر جملات t_m, t_n, t_k از یک دنبالهٔ حسابی $(m>n>k)$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدر نسبت دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید.

$$q = \frac{m-n}{n-k}$$

مثلاً، اگر جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشد، قدر نسبت برابر $q=\frac{16-7}{7-3}=\frac{9}{4}$ است.

فصل ۱۱

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

ارتباط با فصل‌های دیگه: قوانین توان و رادیکال‌ها و گویا کردن در همهٔ مباحث ریاضی کاربرد دارد.

توصیه: به جای حفظ کردن روابط موجود در این فصل آن‌ها را با حل سؤالات یاد بگیرید، یعنی خواندن فرمول‌ها به تنهایی کافی نیست و باید سؤالات آن را حل کنید تا با تیپ آن‌ها به خوبی آشنا شوید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	صفر	۱	۱	۱	۱	صفر	۱	۲

درس ۱ ریشه و توان

ریشهٔ دوم و سوم

اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $b^n = a$ ، در این صورت می‌گوییم عدد b ریشهٔ nاُم a است [n عدد طبیعی و $n \geq ۲$]

مثلاً، چون $۹ = (-۳)^۲$ است، پس -۳ یک ریشهٔ دوم ۹ است.

مثلاً، چون $۸ = ۲^۳$ است، پس ۲ یک ریشهٔ سوم ۸ است.

نکات مربوط به محاسبهٔ ریشهٔ دوم اعداد حقیقی

۱ اعداد مثبت دو ریشهٔ دوم قرینه دارند که یکی از آن‌ها مثبت و دیگری منفی است.

مثلاً، عدد ۲۵ دو ریشهٔ دوم دارد، یکی ۵ و دیگری -۵ ، چون:

$۵^۲ = (-۵)^۲ = ۲۵$

۲ اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند، چون مربع هیچ عددی، منفی نمی‌شود.
مثلاً، عدد -۲۵ ریشهٔ دوم ندارد، چون مربع هیچ عددی -۲۵ نیست.

تذکر اگر a عددی مثبت باشد، ریشهٔ دوم مثبت عدد a را جذر عدد a می‌گوییم و با نماد $\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم.

مثلاً، ریشهٔ دوم مثبت عدد ۲۵ همان عدد ۵ است، پس $\sqrt{۲۵} = ۵$ می‌باشد.
تمام اعداد حقیقی مانند a دارای ریشهٔ سومی هم‌علامت با خودشان هستند و آن را با $\sqrt[۳]{a}$ نشان می‌دهیم. مثلاً:

$\sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵$ ، $\sqrt[۳]{-۱۲۵} = -۵$

اعداد مثبت دارای دو ریشهٔ مرتبهٔ زوج قرینه هستند و اعداد منفی ریشهٔ مرتبهٔ زوج ندارند. تمام اعداد حقیقی دارای یک ریشهٔ مرتبهٔ فرد هستند که با خودشان هم علامت است.

تست حاصل $\sqrt[۴]{۲۱-\sqrt{۲۲+\sqrt{۱۲+\sqrt[۳]{-۲۷}}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۵ ‏ ۳) ۴ ‏ ۴) ۲

۴ از درونی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم و مرحله به مرحله بیرون می‌آییم:

$$\sqrt[۴]{۲۱-\sqrt{۲۲+\sqrt{۱۲+\sqrt[۳]{-۲۷}}}} = \sqrt[۴]{۲۱-\sqrt{۲۲+\sqrt{\underbrace{۱۲+(-۳)}_{۹}}}}$$

$$= \sqrt[۴]{۲۱-\sqrt{\underbrace{۲۲+۳}_{۲۵}}} = \sqrt[۴]{۲۱-۵} = \sqrt[۴]{۱۶} = ۲$$

مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد حقیقی مثبت

برای مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد بیشتر از ۱ مطابق زیر عمل می‌کنیم:

مقایسهٔ مقادیر a^n

اعداد بزرگ‌تر از ۱ هر چه به توان بزرگ‌تری برسند، مقدارشان بزرگ‌تر می‌شود.

$۱ < a^۱ < a^۲ < a^۳ < \dots < a^{n-۱} < a^n < a^{n+۱} < \dots$

در شکل مقابل، عدد a از محور بالا به مقادیر a^n در محور پایین وصل شده است.

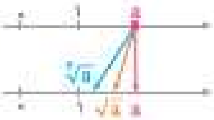
$۱ < ۵ < ۵^۲ < ۵^۳$

مقایسهٔ ریشه‌های nاُم مثبت

در اعداد بزرگ‌تر از ۱ هر چه مرتبهٔ ریشه بیشتر شود، حاصل کوچک‌تر می‌شود.

$a > \sqrt{a} > \sqrt[۳]{a} > \sqrt[۴]{a} > \dots > \sqrt[n-۱]{a} > \sqrt[n]{a} > \sqrt[n+۱]{a} > \dots > ۱$

در شکل مقابل، عدد a از محور بالا به ریشه‌های nام مثبت خود در محور پایین وصل شده است:



$$125 > \sqrt{125} > \sqrt[3]{125} > 1$$

تذکر اگر $a > 1$ باشد، حاصل a^n و $\sqrt[n]{a}$ نیز عددی بیشتر از ۱ است.

برای مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد بین صفر و یک داریم:

مقایسهٔ مقادیر a^n

اعداد بین صفر و یک هر چه به توان بزرگتری برسند، مقدارشان کوچکتر می‌شود.

$$1 > a > a^2 > a^3 > a^4 > \cdots > a^{n-1} > a^n > a^{n+1} > \cdots > 0$$

در شکل مقابل، عدد a از محور بالا به مقادیر a^n در محور پایین وصل شده است:

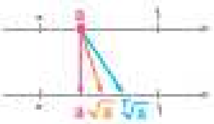
$$1 > \frac{1}{4} > \left(\frac{1}{4}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^3 > 0$$

مقایسهٔ ریشه‌های n اُم مثبت

در اعداد بین صفر و یک هر چه مرتبهٔ ریشه بیشتر شود، حاصل بزرگتر می‌شود.

$$a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \cdots < \sqrt[n-1]{a} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a} < \cdots < 1$$

در شکل مقابل، عدد a از محور بالا به ریشه‌های nام مثبت خود در محور پایین وصل شده است:



$$0 < \frac{1}{8} < \sqrt{\frac{1}{8}} < \sqrt[3]{\frac{1}{8}} < 1$$

تذکر اگر $0 < a < 1$ باشد، حاصل a^n و $\sqrt[n]{a}$ نیز عددی بین صفر و یک است.

تست اگر $a^2 - a < 0$ باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف) $a^3 < a^2$ ب) $\sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}$

پ) $\frac{1}{a} > \frac{1}{a^5}$ ت) $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{a}}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

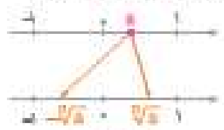
۲ ابتدا نامعادلهٔ $a^2 - a < 0$ را حل می‌کنیم:

$$a^2 - a < 0 \Rightarrow a(a-1) < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

چون a عددی بین صفر و یک است، پس رابطه‌های $\sqrt[4]{a} > \sqrt[3]{a}$ و $\frac{1}{a} < \frac{1}{a^5}$ برقرار هستند. بنابراین (ب) و (پ) نادرست هستند.

در اعداد حقیقی مثبت، اگر n زوج باشد یک ریشهٔ nام منفی نیز وجود دارد که قرینهٔ ریشهٔ مثبت است:

$a > 1$



$0 < a < 1$

مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد حقیقی منفی

برای مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد بین منفی یک و صفر مطابق زیر عمل می‌کنیم:

مقایسهٔ مقادیر a^n

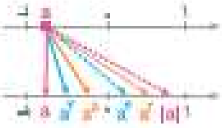
۱ توان‌های زوج a مثبت هستند و هرچه به توان بزرگ‌تری برسند، حاصل کوچک‌تر شده و به صفر نزدیک‌تر می‌شود:

$$0 < \cdots < a^n < \cdots < a^4 < a^2 < |a| < 1$$

۲ توان‌های فرد a منفی هستند و هر چه به توان بزرگ‌تری برسند، حاصل بزرگ‌تر می‌شود.

$$-1 < a < a^3 < a^5 < \cdots < a^n < \cdots < 0$$

در شکل مقابل، عدد a از محور بالا به مقادیر a^n در محور پایین وصل شده است:



$$0 < \left(-\frac{1}{2}\right)^4 < \left(-\frac{1}{2}\right)^2 < \left|-\frac{1}{2}\right| < 1 \ , \ -1 < -\frac{1}{2} < \left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \left(-\frac{1}{2}\right)^5 < 0$$

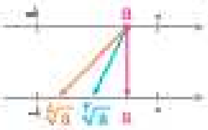
مقایسهٔ ریشه‌های n اُم

۱ در ریشه‌های مرتبهٔ فرد، هر چه مرتبهٔ ریشه بیشتر شود، حاصل کوچکتر می‌شود.

$$-1 < \cdots < \sqrt[n]{a} < \cdots < \sqrt[5]{a} < \sqrt[3]{a} < a < 0$$

۲ چون a منفی است، ریشهٔ مرتبهٔ زوج a تعریف نشده است.

در شکل مقابل، عدد a از محور بالا به ریشه‌های nاُم خود در محور پایین وصل شده است:



$$-1 < \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} < \sqrt[3]{-\frac{1}{32}} < -\frac{1}{32} < 0$$

تست اگر $a^3 + a < 0$ باشد، چه تعداد از رابطه‌های زیر صحیح است؟

الف) $a^3 < a^5$ ب) $\sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$

پ) $\frac{1}{a} < \frac{1}{a^5}$ ت) $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ ابتدا نامعادلهٔ $a^3 + a < 0$ را حل می‌نماییم:

$$a^3 + a < 0 \Rightarrow a(a^2+1) < 0 \Rightarrow a(a+1)\underbrace{(a^2-a+1)}_{\text{همواره} > 0} < 0$$

$$\Rightarrow a(a+1) < 0 \Rightarrow -1 < a < 0$$

چون a عددی بین منفی یک و صفر است، پس رابطه‌های $a^3 < a^5$ و $\sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$ و $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ صحیح هستند، پس ۳ مورد صحیح است.

تذکر اگر $-1 < a < 0$ باشد، به‌ازای nهای زوج حاصل a^n بین صفر و یک و به‌ازای nهای فرد حاصل a^n و $\sqrt[n]{a}$ بین ۱- و صفر است.

برای مقایسهٔ مقادیر ریشه‌ها و توان‌ها در اعداد کمتر از ۱- مطابق زیر عمل می‌کنیم:

مقایسهٔ مقادیر a^n

۱. توان‌های زوج a مثبت هستند و هرچه به توان بزرگ‌تری برسند، حاصل بزرگ‌تر می‌شود:
$1<|a|<a^2<a^4<a^6<\cdots<a^n$

۲. توان‌های فرد a منفی هستند و هر چه به توان بزرگ‌تری برسند، حاصل کوچک‌تر می‌شود.
$a^n<\cdots<a^5<a^3<a<-1$

در شکل زیر، عدد a از محور بالا به مقادیر a^n در محور پایین وصل شده است:

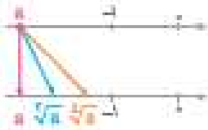
$1<|-2|<(-2)^2<(-2)^4\ ;\ \ (-2)^5<(-2)^3<-2<-1$

مقایسهٔ ریشه‌های n اُم

۱. در ریشه‌های مرتبهٔ فرد هر چه مرتبهٔ ریشه بیشتر شود، حاصل بزرگ‌تر می‌شود.
$a<\sqrt[3]{a}<\sqrt[5]{a}<\cdots<\sqrt[n]{a}<\cdots<-1$

۲. چون a منفی است، ریشهٔ مرتبهٔ زوج a تعریف نشده است.

در شکل زیر، عدد a از محور بالا به ریشه‌های n اُم خود در محور پایین وصل شده است:



$-32<\sqrt[3]{-32}<\sqrt[5]{-32}<-1$

تذکر اگر $a<-1$ باشد، به ازای nهای زوج حاصل a^n عددی بزرگ‌تر از ۱ و به ازای nهای فرد حاصل a^n و $\sqrt[n]{a}$ عددی کوچک‌تر از ۱- است.

توان و ریشهٔ اعداد ۱، ۰، ۱- مطابق زیر است:

۱. اگر $a=1$ باشد، مقدار تمام توان‌ها و ریشه‌ها برابر ۱ است.

۲. اگر $a=0$ باشد، مقدار تمام توان‌ها و ریشه‌ها برابر صفر است.

۳. اگر $a=-1$ باشد، مقدار توان‌های زوج برابر ۱ و مقدار توان‌ها و ریشه‌های فرد برابر ۱- است.

تست اگر $a<\sqrt[3]{a}$ باشد، به جای a چه تعداد از اعداد زیر را می‌توان قرار داد؟

الف) $\sqrt[5]{-\frac{1}{2}}$ ب) $\sqrt[3]{17}$ پ) $-\sqrt[3]{11}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲ می‌دانیم رابطهٔ $a<\sqrt[3]{a}$ در صورتی برقرار است که a عددی بین منفی یک و صفر باشد یا عددی مثبت و بزرگ‌تر از یک باشد. پس $\sqrt[5]{-\frac{1}{2}}$ و $\sqrt[3]{17}$ قابل قبول‌اند.

خارج کردن عدد از زیر رادیکال و مقایسهٔ $\sqrt[n]{a^n}$ و $(\sqrt[n]{a})^n$

در رادیکال‌های با فرجهٔ زوج، عبارت زیر رادیکال و همچنین حاصل رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر (نامنفی) است.

$\sqrt{(\geq 0)}=(\geq 0)$

به عنوان مثال:

$\sqrt{-25}$ تعریف نشده، $\sqrt{(-3)^4}=\sqrt{81}=9$

$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$ ، $\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$

در رادیکال‌های با فرجهٔ فرد، عبارت زیر رادیکال و همچنین حاصل رادیکال می‌توانند هر عدد حقیقی دلخواه باشند. مثلاً:

$\sqrt[5]{-32}=-2$ ، $\sqrt[3]{-20}=-\sqrt[3]{20}$

$\sqrt[3]{27}=3$ ، $\sqrt[3]{0}=0$

مقایسهٔ $(\sqrt[n]{a})^n$ و $\sqrt[n]{a^n}$

n فرد

اگر n فرد باشد، مقادیر $(\sqrt[n]{a})^n$ و $\sqrt[n]{a^n}$ برابرند:

$(\sqrt[3]{a})^3=(\sqrt[5]{a})^5=(\sqrt[7]{a})^7=\cdots=a$

$\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[5]{a^5}=\sqrt[7]{a^7}=\cdots=a$

$(\sqrt[3]{-2})^3=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2\ ;\ \ (\sqrt[3]{5})^3=\sqrt[3]{5^3}=5$

n زوج

اگر n زوج باشد، آنگاه $(\sqrt[n]{a})^n=a$ اما $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ است:

$(\sqrt{a})^2=(\sqrt[4]{a})^4=(\sqrt[6]{a})^6=\cdots=a$

$\sqrt{a^2}=\sqrt[4]{a^4}=\sqrt[6]{a^6}=\cdots=|a|$

$(\sqrt{9})^2=9\ ;\ \ \sqrt{9^2}=|9|=9\ ;\ \ \sqrt{(-9)^2}=|-9|=9$

تذکر در محاسبهٔ عبارت‌های $\sqrt{x^2}$ ، $\sqrt[4]{x^4}$ ، $\sqrt[6]{x^6}$ یا ... برای این‌که از مثبت بودن جواب مطمئن شویم، از قدر مطلق استفاده می‌کنیم، یعنی به ازای nهای زوج $\sqrt[n]{x^n}=|x|$ است.

$\sqrt{x^2}=|x|, \sqrt[3]{x^3}=x, \sqrt[4]{x^4}=|x|, \sqrt[5]{x^5}=x$

تست اگر $a<0$ باشد، حاصل $\sqrt[4]{16a^4}+\sqrt[3]{a^3}-\sqrt{25a^2}$ کدام است؟

۱) $-2a$ ۲) $4a$ ۳) $-6a$ ۴) a

۲

$\sqrt[4]{16a^4}+\sqrt[3]{a^3}-\sqrt{25a^2}=|\underbrace{2a}_{-}|+a-|\underbrace{5a}_{-}|$

$=(-2a)+a-(-5a)=-2a+a+5a=4a$

مقادیر تقریبی ریشهٔ n اُم

اگر بخواهیم مقدار تقریبی عدد $\sqrt[n]{a}$ را به‌دست آوریم، باید مشخص کنیم عدد a بین توان n اُم کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. سپس از طرفین نامساوی ایجادشده ریشه n اُم بگیریم.

مثال مقدار تقریبی $\sqrt{۱۷}$ را بیابید.

باید مشخص کنیم عدد ۱۷ بین توان دوم کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد و سپس جذر بگیریم: $4^2<17<5^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 4<\sqrt{17}<5$
دقت کنید که عدد ۱۷ به 4^2 نزدیک‌تر است تا به 5^2، پس $\sqrt{۱۷}$ هم به ۴ نزدیک‌تر است تا به ۵.

تست حاصل $[\sqrt[3]{-100}]$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -6

۳ از آن‌جایی‌که عدد -100 بین دو مکعب کامل متوالی $(-5)^3=-125$ و $(-4)^3=-64$ قرار دارد، پس:

$$(-5)^3<-100<(-4)^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} \sqrt[3]{(-5)^3}<\sqrt[3]{-100}<\sqrt[3]{(-4)^3}$$
$$\Rightarrow -5<\sqrt[3]{-100}<-4 \Rightarrow [\sqrt[3]{-100}]=-5$$

اعداد با توان گویا

اگر بخواهیم اعداد با توان گویا را ساده کنیم، از قوانینی مانند قوانین مربوط به اعداد با توان‌های طبیعی استفاده می‌کنیم:

قوانین ساده کردن اعداد با توان‌های گویا

حاصل هر عدد غیر صفری که به توان صفر برسد، برابر با ۱ است: $a\neq 0 \Rightarrow a^0=1$

عدد یک، به توان هر عددی که برسد، حاصل برابر ۱ است: $1^n=1$

اگر a عددی حقیقی و مخالف صفر باشد، داریم: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

۱) در ضرب دو عدد توان‌دار با پایه‌های یکسان، توان‌ها جمع می‌شوند.
$a^m\times a^n=a^{m+n}$

۲) در تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های یکسان، توان‌ها تفریق می‌شوند.
$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

۱) در ضرب دو عدد توان‌دار با توان‌های یکسان، پایه‌ها در هم ضرب می‌شوند.
$a^m\times b^m=(ab)^m$

۲) در تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های یکسان، پایه‌ها بر یکدیگر تقسیم می‌شوند.
$\frac{a^m}{b^m}=(\frac{a}{b})^m$

اگر یک عدد توان‌دار، به توان جدیدی برسد، توان‌ها ضرب می‌شوند.
$(a^n)^m=a^{nm}$

اگر توان عددی، خودش توان‌دار بود، ابتدا توان را محاسبه کرده، سپس پایه را به توان عدد حاصل می‌رسانیم.
$a^{m^n}=a^{(m^n)}$

تست اگر $n=3^a$ و $m=5^b$ باشد، از معادلهٔ $m^a\times n^b=225^4$، مقدار $a\times b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۸۷ ۴) ۱۲۵

۲
$$m^a\times n^b=225^4 \Rightarrow (5^b)^a\times(3^a)^b=(15^2)^4$$
$$\Rightarrow 5^{ab}\times 3^{ab}=15^8 \Rightarrow 15^{ab}=15^8 \Rightarrow ab=8$$

تذکر عدد منفی به توان گویا در کتاب درسی تعریف نشده است. مثلاً:
تعریف‌نشده: $(-2)^{\frac{1}{5}}$ ؛ تعریف‌نشده: $(-1)^{\frac{1}{3}}$

اگر عددی اعشاری باشد، برای به توان رساندن آن، بهتر است ابتدا این عدد را از حالت اعشاری خارج کرده و به‌صورت کسری بنویسیم؛ سپس عملیات ساده‌سازی و توان‌رسانی را انجام دهیم. مثلاً:

$$(0.00032)^{-4}=(\frac{32}{100000})^{-4}=(\frac{100000}{32})^4=((\frac{10}{2})^5)^4=(\frac{10}{2})^{20}=5^{20}$$

تست سادهٔ شدهٔ عبارت $(0/25)^4\times(\frac{3}{4})^{-3}\times 6^4$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳ همهٔ اعداد را ساده و به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$(0/25)^4\times(\frac{3}{4})^{-3}\times 6^4=(\frac{1}{4})^4\times(\frac{3^{-3}}{4^{-3}})\times(2^4\times 3^4)$$
$$=\frac{1}{2^8}\times\frac{3^{-3}}{2^{-6}}\times 2^4\times 3^4=\frac{3\times 2^4}{2^2}=3\times 2^2=12$$

قوانین رادیکال

اگر a عددی مثبت باشد، برای هر دو عدد طبیعی n و m داریم:

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

برای ساده کردن رادیکال‌ها [به شرط تعریف شدن]، از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

۱ وقتی دو رادیکال زیر هم باشند، فرجه‌ها می‌توانند با هم جابه‌جا شده یا در هم ضرب شوند.

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[12]{5}$

۲ فرجه و توان با هم ساده می‌شوند.

$\sqrt[mk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}$ $\sqrt[28]{3^8}=\sqrt[7\times 4]{3^{2\times 4}}=\sqrt[7]{3^2}$

۳ یک عدد دلخواه را می‌توان در فرجه و توان ضرب کرد.

$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mk]{a^{nk}}$ $\sqrt[5]{6^3}=\sqrt[5\times 4]{6^{3\times 4}}=\sqrt[20]{6^{12}}$

۴ اگر عددی بخواهد وارد رادیکال شود، باید به توان فرجه برسد.

$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\times b}$ $3\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{3^4\times 2}=\sqrt[4]{162}$

تست حاصل عبارت $\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[4]{2}$ ۲) $\sqrt[4]{8}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۴

۲
$$\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt{8}}}=\sqrt{2\sqrt[6]{8}}=\sqrt{\sqrt[6]{2^6\times 2^3}}=\sqrt[2\times 6]{2^9}=\sqrt[12]{2^9}$$
$$=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}$$

تست اگر $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{9}}}=\sqrt[15]{27^x}$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۴
$$\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{9}}}=\sqrt[15]{27^x} \Rightarrow \sqrt[5\times 2\times 3]{9}=\sqrt[15]{(3^3)^x}$$
$$\Rightarrow \sqrt[5\times 2\times 3]{3^2}=\sqrt[15]{3^{3x}} \Rightarrow \sqrt[15]{3}=\sqrt[15]{3^{3x}}$$
$$\Rightarrow 3=3^{3x} \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

اعمال رادیکال‌ها

رادیکال‌ها را به شرطی می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد که متشابه باشند، یعنی:

1. دارای فرجه‌های یکسان باشند.
2. عبارت زیر رادیکال آن‌ها یکسان باشد.

مثال حاصل $2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{1}{2}\sqrt{80}$ را به دست آورید.

$$2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{1}{2}\sqrt{80}=2\sqrt{4\times5}-\sqrt{9\times5}+\frac{1}{2}\sqrt{16\times5}$$
$$=2\times2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}=4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

در ضرب (یا تقسیم) کردن رادیکال‌ها، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

1. اگر فرجه‌ها یکسان باشند، یکی از فرجه‌ها را نوشته و عبارت‌های زیر رادیکال را در هم ضرب (یا بر هم تقسیم) می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

مثال حاصل عبارت $\sqrt[3]{18}\times\sqrt[3]{12}$ را به دست آورید.

چون فرجه‌ها برابر است، عبارت‌های زیر رادیکال را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{18}=\sqrt[3]{12\times18}=\sqrt[3]{3\times4\times2\times9}=\sqrt[3]{27\times8}$$
$$=\sqrt[3]{3^3\times2^3}=3\times2=6$$

2. اگر فرجه‌ها یکسان نباشند، ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌ها را پیدا کرده و آن را به عنوان فرجهٔ مشترک برای هر دو رادیکال می‌نویسیم، سپس مانند حالت اول عمل می‌کنیم.

مثال حاصل $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[3]{3}$ را به دست آورید.

چون ک.م.م فرجه‌ها یعنی ک . م . م اعداد ۳ و ۴ برابر ۱۲ است، داریم:

$$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[3\times4]{3^4}\times\sqrt[4\times3]{2^3}=\sqrt[12]{81}\times\sqrt[12]{8}=\sqrt[12]{81\times8}=\sqrt[12]{648}$$

نکته در ضرب و تقسیم رادیکال‌ها نیز می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت توان‌های گویا بنویسیم و ساده کنیم.

مثال عبارت $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}$ را ساده کنید.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}=a^{\frac{5}{12}}=\sqrt[12]{a^5}$$

تست حاصل عبارت $\sqrt[6]{12}\times\sqrt[4]{54}\times\sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}}$ کدام است؟ (خارج - ۹۵)

۱) $6\sqrt[3]{4}$ ۲) 6 ۳) $3\sqrt[3]{32}$ ۴) $2\sqrt[3]{9}$

۲ می‌دانیم: $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4\times6}}=\sqrt[12]{2^5\times3}$ حال همهٔ اعداد زیر رادیکال را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt[6]{12}\times\sqrt[4]{54}\times\sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}}=\sqrt[6]{3\times2^2}\times\sqrt[4]{2\times3^3}\times\sqrt[12]{2^5\times3}$$

چون فرجهٔ رادیکال‌ها متفاوت است، همهٔ فرجه‌ها را به ک.م.م اعداد ۶، ۴، ۱۲ یعنی عدد ۱۲ تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt[6]{3\times2^2}\times\sqrt[4]{2\times3^3}\times\sqrt[12]{2^5\times3}$$
$$=\sqrt[12]{3^2\times2^4}\times\sqrt[12]{2^3\times3^9}\times\sqrt[12]{2^5\times3}=\sqrt[12]{2^{12}\times3^{12}}=\sqrt[12]{6^{12}}=6$$

درس ۲ عبارت‌های جبری

اتحادها

هر تساوی که به‌ازای همهٔ مقادیر متغیرهای موجود در آن برقرار باشد اتحاد نام دارد.

اتحادهای معروف

1. اتحاد مربع مجموع و تفاضل دوجمله‌ای:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1 \quad ; \quad (x-2)^2=x^2-4x+4$$

2. اتحاد مزدوج:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^2-16b^2=(a-4b)(a+4b) \quad ; \quad x^2-9=(x-3)(x+3)$$

3. اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دوجمله‌ای:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1 \quad ; \quad (x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$$

4. اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات (چاق و لاغر):

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \ ; \ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \quad ; \quad a^3-8=(a-2)(a^2+2a+4)$$

5. اتحاد مربع سه‌جمله‌ای:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

$$(x+y+1)^2=x^2+y^2+1+2(xy+x+y)$$

6. اتحاد جملهٔ مشترک:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(x+5)(x+9)=x^2+14x+45 \quad ; \quad (x-2)(x+4)=x^2+2x-8$$

اتحاد چاق و لاغر را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۳ هم به‌کار برد:

7. برای تفاضل دو جمله با توان‌های برابر داریم ($n\in\mathbb{N}$):

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})$$

$$x^6-y^6=(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)$$

۲ برای مجموع دو جمله با توان‌های فرد و برابر داریم ($n \in N$):

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$$

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$$

تست اگر $x=\sqrt[3]{2}+1$ باشد، حاصل x^3-3x^2+3x+2 کدام است؟

۱) -1 ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) -3

۳ با استفاده از اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای داریم:

$$x^3-3x^2+3x+2=\underbrace{x^3-3x^2+3x-1}_{(x-1)^3}+3=(x-1)^3+3$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt[3]{2}+1}(\sqrt[3]{2}+1-1)^3+3=(\sqrt[3]{2})^3+3=2+3=5$$

تست اگر $\dfrac{3^{a^2}\times 3^{b^2}}{9^{ab}}=(\dfrac{1}{27})^{-3}$ باشد، مقدار $|a-b|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۳

۴ ابتدا طرف اول تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{3^{a^2}\times 3^{b^2}}{9^{ab}}=\frac{3^{a^2+b^2}}{3^{2ab}}=3^{a^2+b^2-2ab}=3^{(a-b)^2}$$

حال طبق تساوی داده شده داریم:

$$\frac{3^{a^2}\times 3^{b^2}}{9^{ab}}=(\frac{1}{27})^{-3}\Rightarrow 3^{(a-b)^2}=(3^{-3})^{-3}=3^9$$

$$\Rightarrow (a-b)^2=9\Rightarrow |a-b|=3$$

اتحادهای فرعی و کاربرد اتحادها

از اتحاد مربع دوجمله‌ای، می‌توانیم به اتحادهای فرعی زیر برسیم:

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab \qquad a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

اگر در اتحاد مکعب دوجمله‌ای، در دو جملهٔ وسطی از $3ab$ فاکتور بگیریم و عبارت حاصل را به طرف دیگر تساوی منتقل کنیم، اتحادهای فرعی زیر به‌دست می‌آید:

$$(a+b)^3=a^3+\underbrace{3a^2b+3ab^2}_{3ab(a+b)}+b^3\Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3=a^3\underbrace{-3a^2b+3ab^2}_{-3ab(a-b)}-b^3\Rightarrow a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$

مثال اگر $x+\dfrac{1}{x}=3$ باشد، حاصل $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ را به دست آورید.

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x(\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=3^3-3(1)(3)=18$$

با جمع و تفریق اتحادهای $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ و $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ می‌توانیم به اتحادهای فرعی زیر برسیم:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab \qquad (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

تست اگر $xy=\dfrac{1}{4}$ باشد، حاصل $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲ می‌دانیم $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ است، پس:

$$(2x+3y)^2-(2x-3y)^2=4(2x)(3y)=24xy=24(\frac{1}{4})=6$$

تجزیه

هرگاه یک عبارت جبری را به شکل حاصل‌ضرب چند عبارت بنویسیم، می‌گوییم تجزیه انجام داده‌ایم. برای تجزیه کردن، باید از فاکتورگیری یا اتحادها (یا هم‌زمان از هر دو) استفاده کنیم. مثلاً:

$$x^2-3x+2\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}(x-1)(x-2)$$

$$x^3-4x\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}x(x^2-4)\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}x(x-2)(x+2)$$

چند تجزیهٔ مشهور

۱ برای تجزیهٔ عبارت‌هایی که به‌صورت تفاضل دو عبارت با توان زوج هستند، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$x^2-9y^2=x^2-(3y)^2=(x-3y)(x+3y)$$

$$x^4-16=(x^2)^2-4^2=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

۲ برای تجزیهٔ عبارت‌هایی که به‌صورت جمع یا تفاضل دو عبارت با توان ۳ هستند، از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

$$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$$

$$a^5+a^2b^3\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}a^2(a^3+b^3)=a^2(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

تذکر برای تجزیهٔ بعضی از عبارت‌ها که قابل فاکتورگیری نیستند یا هیچ اتحادی در آن‌ها مشاهده نمی‌شود، می‌توانیم جمله‌ها را دسته‌بندی کنیم.

مثلاً:

$$x^3-3x^2+2x-6\xrightarrow{\text{دسته‌بندی}}(x^3-3x^2)+(2x-6)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}x^2(x-3)+2(x-3)\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}(x-3)(x^2+2)$$

برای تجزیهٔ برخی عبارت‌ها، لازم است یکی از جملات را به‌صورت مجموع دو جمله بنویسیم یا جمله‌ای را به عبارت مورد نظر اضافه و کم کنیم.

مثلاً برای تجزیهٔ عبارت x^3-3x-2 به جای جملهٔ $-3x$ می‌نویسیم $-x-2x$ و داریم:

$$x^3-x-2x-2=x(x^2-1)-2(x+1)=(x+1)(\underbrace{x^2-x-2}_{(x+1)(x-2)})=(x+1)^2(x-2)$$

برای تجزیهٔ عبارت‌های درجهٔ ۲ که ضریب x^2 عددی غیر یک است به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

تجزیهٔ عبارت درجهٔ دوم که ضریب x^2 عددی غیر یک است:

۱ ضریب x^2 را در عدد ثابت ضرب می‌کنیم.

۲ عبارت حاصل را با استفاده از اتحادها و فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم.

۳ ضریب x^2 را یک‌بار در یکی از پرانتزها، در x ضرب کرده و در پرانتز دیگر، عدد ثابت را بر آن تقسیم می‌کنیم تا تجزیهٔ عبارت اولیه به دست آید.

مثال ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-x-10=0$ را با روش تجزیه به دست آورید.

ضرب

$$2x^2-x-10 \Rightarrow x^2-x-20$$

$$x^2-x-20 \Rightarrow (x-5)(x+4)$$

$$2x^2-x-10=0 \Rightarrow (2x-5)(x+\frac{4}{2})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=-2 \end{cases}$$

تست در تجزیهٔ عبارت $8a^3-1$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $4a^2+4a+1$ ۲) $2a+1$

۳) $2a-1$ ۴) $4a^2-2a+1$

۳ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$8a^3-1=(2a)^3-1=(2a-1)(4a^2+2a+1)$$

ساده کردن عبارت‌های گویا

برای ساده‌کردن عبارت‌های گویا، از ترکیب عمل‌های مخرج مشترک‌گیری، اتحاد و تجزیه استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که:

۱ مخرج مشترک می‌گیریم.

۲ به کمک اتحاد یا فاکتورگیری صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم.

۳ صورت را با مخرج ساده می‌کنیم.

مثال عبارت $(1-\frac{1}{x})(\frac{x^3+x^2}{x^2-1})$ را ساده کنید.

$$(1-\frac{1}{x})(\frac{x^3+x^2}{x^2-1})=(\frac{x-1}{x})(\frac{x^3+x^2}{x^2-1})=(\frac{x-1}{x})(\frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)})$$

$$(\frac{\cancel{x-1}}{x})(\frac{x^2\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}})=\frac{x^2}{x}=x$$

تست سادهٔ‌شدهٔ عبارت $(x-5+\frac{6}{x+2})\times(1+\frac{1}{x+1})$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $x-2$ ۳) $x-3$ ۴) $x-4$

۴ در هر پرانتز مخرج مشترک می‌گیریم:

$$(\frac{x-5}{1}+\frac{6}{x+2})\times(1+\frac{1}{x+1})=(\frac{(x-5)(x+2)+6}{x+2})\times(\frac{x+1+1}{x+1})$$

$$=(\frac{x^2-3x-4}{x+2})\times(\frac{x+2}{x+1})=(\frac{(x+1)(x-4)}{x+2})\times(\frac{x+2}{x+1})=x-4$$

میانبر می‌توانیم تست را با عددگذاری حل کنیم. با قرار دادن عدد دلخواه $x=1$ در عبارت، حاصل عبارت برابر $(-4+\frac{6}{3})(1+\frac{1}{2})=-2\times\frac{3}{2}=-3$ می‌شود. در میان گزینه‌ها، فقط گزینهٔ (۴) به‌ازای $x=1$ برابر ۳- می‌شود.

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

برای ساده کردن برخی عبارت‌های رادیکالی به شکل $\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$ باید عبارت زیر رادیکال را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت $(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2$ بنویسیم و آن را از زیر رادیکال خارج کنیم. [در واقع x و y دو عددی هستند که مجموع آن‌ها برابر A و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر B است.]

$$\sqrt{6+2\sqrt5}=\sqrt{(\sqrt5)^2+1^2+2\times1\times\sqrt5}=\sqrt{(\sqrt5+1)^2}=|\sqrt5+1|=\sqrt5+1$$

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{(\sqrt5-\sqrt3)^2}=|\sqrt5-\sqrt3|=\sqrt5-\sqrt3$$

تست حاصل عبارت $\sqrt{28+10\sqrt3}+\sqrt{28-10\sqrt3}$ کدام است؟

۱) $6\sqrt3$ ۲) $4\sqrt3$ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۴ می‌دانیم $10\sqrt3=2\sqrt{3\times5^2}=2\sqrt{75}$، پس داریم:

$$\sqrt{28+10\sqrt3}+\sqrt{28-10\sqrt3}=\sqrt{28+2\sqrt{75}}+\sqrt{28-2\sqrt{75}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{25}+\sqrt3)^2}+\sqrt{(\sqrt{25}-\sqrt3)^2}$$

$$=|\underbrace{5+\sqrt3}_{+}|+|\underbrace{5-\sqrt3}_{+}|=5+\cancel{\sqrt3}+5-\cancel{\sqrt3}=10$$

تست حاصل عبارت $\sqrt[4]{5+2\sqrt6}\cdot\sqrt{\sqrt3-\sqrt2}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۳ از آن جایی که $5+2\sqrt6=(\sqrt3+\sqrt2)^2$ است، پس:

$$\sqrt[4]{5+2\sqrt6}\cdot\sqrt{\sqrt3-\sqrt2}=\sqrt[4]{(\sqrt3+\sqrt2)^2}\cdot\sqrt{\sqrt3-\sqrt2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\sqrt3+\sqrt2}\cdot\sqrt{\sqrt3-\sqrt2}=\sqrt{\underbrace{(\sqrt3+\sqrt2)\cdot(\sqrt3-\sqrt2)}_{3-2=1}}=1$$

گویا کردن مخرج

برای ساده‌کردن عبارت‌های کسری شامل رادیکال، بهتر است مخرج آن‌ها بدون رادیکال باشد. در واقع باید کاری کنیم تا رادیکال مخرج از بین برود. به این عمل گویاکردن مخرج می‌گوییم. برای گویاکردن، با حالت‌های زیر مواجه می‌شویم:

۱ در حالت کلی، اگر مخرج کسر شامل $\sqrt[n]{a^m}$ باشد، باید صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنیم. در واقع صورت و مخرج را در عبارتی ضرب می‌کنیم که باعث شود مخرج، عبارتی رادیکالی با توان و فرجهٔ برابر شود. یعنی اگر مخرج کسر شامل یک رادیکال به‌صورت $\sqrt{a}$ باشد، برای گویا کردن مخرج، باید صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{a}$ ضرب کنیم یا اگر مخرج کسر شامل $\sqrt[3]{a}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2}$ ضرب کنیم و ... .

مثال ۱ مخرج کسر $\frac{3}{\sqrt6}$ را گویا کنید.

$$\frac{3}{\sqrt6}=\frac{3}{\sqrt6}\times\frac{\sqrt6}{\sqrt6}=\frac{3\sqrt6}{(\sqrt6)^2}=\frac{3\sqrt6}{6}=\frac{\sqrt6}{2}$$

مثال ۲ مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ را گویا کنید.

چون مخرج شامل $\sqrt[3]{25}$، یعنی $\sqrt[3]{5^2}$ است، باید صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{5}$ ضرب کنیم تا در مخرج $\sqrt[3]{5^3}$ ایجاد شود:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}\times\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$

۲ اگر مخرج کسر، شامل جمع یا تفاضل دو رادیکال با فرجهٔ ۲ و یا یک رادیکال با یک عدد باشد، برای گویا کردن مخرج، باید صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد.

مثال مخرج کسر $\frac{۲}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}$ را گویا کنید.

برای این کار باید صورت و مخرج را در «مزدوج مخرج»، یعنی $\sqrt{۷}+\sqrt{۵}$، ضرب کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۷}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۷}+\sqrt{۵}}=\frac{۲(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})}{(\sqrt{۷})^۲-(\sqrt{۵})^۲}$$

$$=\frac{۲(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})}{۷-۵}=\sqrt{۷}+\sqrt{۵}$$

۳ اگر مخرج کسر شامل عبارت رادیکالی با فرجهٔ ۳ بود، برای گویا کردن مخرج، باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم.

مثال ۱ مخرج کسر $\frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{۲}}$ را گویا کنید.

$$\underbrace{\frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{۲}}}_{\text{لاغر}}\times\underbrace{\frac{۱-\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}}{۱-\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}}}_{\text{چاق}}=\frac{۱-\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}}{۱^۳+(\sqrt[۳]{۲})^۳}=\frac{۱-\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}}{۳}$$

مثال ۲ مخرج کسر $\frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲۵}}$ را گویا کنید.

$$\underbrace{\frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۵^۲}}}_{\text{چاق}}\times\underbrace{\frac{۱-\sqrt[۳]{۵}}{۱-\sqrt[۳]{۵}}}_{\text{لاغر}}=\frac{۱-\sqrt[۳]{۵}}{۱^۳-(\sqrt[۳]{۵})^۳}=\frac{۱-\sqrt[۳]{۵}}{-۴}$$

۴ اگر مخرج کسر شامل جمع یا تفاضل رادیکال‌هایی با فرجهٔ بزرگتر از ۳ بود، برای گویا کردن مخرج، از اتحادهای مراتب بالاتر چاق و لاغر (یعنی اتحادهای $a^n \pm b^n$) استفاده می‌کنیم.

مثال مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}-۱}$ را گویا کنید.

برای این کار طبق اتحاد $a^۴-b^۴=(a-b)(a^۳+a^۲b+ab^۲+b^۳)$ صورت و مخرج را در قسمت چاق ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}-۱}=\underbrace{\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}-۱}}_{\text{لاغر}}\times\underbrace{\frac{\sqrt[۴]{۳^۳}+\sqrt[۴]{۳^۲}+\sqrt[۴]{۳}+۱}{\sqrt[۴]{۳^۳}+\sqrt[۴]{۳^۲}+\sqrt[۴]{۳}+۱}}_{\text{چاق}}=\frac{\sqrt[۴]{۲۷}+\sqrt[۴]{۹}+\sqrt[۴]{۳}+۱}{(\sqrt[۴]{۳})^۴-۱}$$

$$=\frac{\sqrt[۴]{۲۷}+\sqrt[۴]{۹}+\sqrt[۴]{۳}+۱}{۲}$$

برای گویاکردن مخرج بعضی از کسرها، می‌توانیم صورت و مخرج کسر را چندین مرحله در عبارت‌های مختلف ضرب کنیم تا رادیکال‌های مخرج ساده شوند.

برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}-۱}$ می‌توانیم صورت و مخرج کسر را در دو مرحله در مزدوج مخرج ضرب کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}-۱}\times\frac{\sqrt[۴]{۳}+۱}{\sqrt[۴]{۳}+۱}=\frac{\sqrt[۴]{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{(\sqrt[۴]{۳}+۱)(\sqrt{۳}+۱)}{۲}$$

تست حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۲۴}\times\sqrt[۳]{۹}+\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲+\sqrt{۵}}-\sqrt{۸۰}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳

۳) $-۱-۲\sqrt{۵}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۵}$

۲ اعداد زیر رادیکال‌ها را تجزیه و مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{۳\times۸}\times\sqrt[۳]{۹}+\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲+\sqrt{۵}}\times\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲-\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۶\times۵}$$

$$=\sqrt[۳]{۲۷\times۸}+\frac{(۲-\sqrt{۵})^۲}{۴-۵}-۴\sqrt{۵}=۳\times۲+\frac{۴+۵-۴\sqrt{۵}}{-۱}-۴\sqrt{۵}$$

$$=۶-۹+۴\sqrt{۵}-۴\sqrt{۵}=-۳$$

یادداشت:

فصل ۱۲

هندسه پایه

ارتباط با فصل‌های دیگه: شناخت ویژگی‌های اولیه مثلث‌ها و نیمساز، عمودمنصف و ... که در متوسطه اول با آن آشنا شدید، برای خواندن این فصل کافیست.

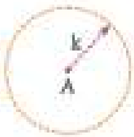
توصیه: برای حل سؤالات این فصل باید دست به قلم باشید و محاسبات را همزمان به شکل مسئله هم منتقل کنید. برای این‌که نگاه بهتری به شکل‌ها داشته باشید، تیپ‌های معروف را به همراه ویژگی‌های آن‌ها در درسنامه نوشتیم.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۲	۶	۶	۵	۲	۲	۲	۳

درس ۱ ترسیم‌های هندسی

فاصله‌های مشخص در صفحه

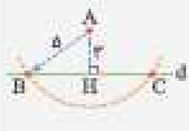
مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصلهٔ ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:



۱ مجموعهٔ نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از نقطهٔ A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.

۲ مجموعهٔ نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات خط d و به فاصلهٔ k واحد از آن هستند.

مثال **نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصلهٔ ۵ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟**

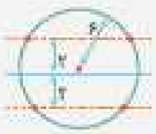


نقاطی که به فاصلهٔ ۵ واحد از نقطهٔ A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ قرار دارند و چون ۵ از ۳ بزرگ‌تر است، پس این دایره خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

تست **حداکثر چند نقطه در صفحه روی دایره به شعاع ۶ موجود است که از خط d به فاصلهٔ ۲ باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۲ هستند، روی دو خط موازی با خط d قرار دارند.



بیشترین تعداد نقاط مطلوب، زمانی اتفاق می‌افتد که دایره با هر دو خط موازی، متقاطع باشد. بنابراین حداکثر ۴ نقطه با ویژگی خواسته شده، موجود است.

نقاطی با چند ویژگی

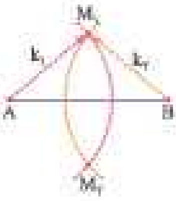
در بعضی سؤالات نقاطی را می‌خواهند که دارای دو ویژگی باشند. در این سؤالات باید نقاط مربوط به هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم و محل تلاقی آن‌ها را در صورت وجود پیدا کنیم.

تست **نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d باشد؟**

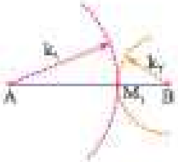
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲ نقاطی که به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ A قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A واقع‌اند؛ همچنین نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن قرار دارند. همان‌طور که در شکل مشخص است این دو شکل همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین ۲ نقطه با شرایط گفته شده وجود دارد.

نقاطی که به فاصلهٔ k_1 از نقطهٔ A و به فاصلهٔ k_2 از نقطهٔ B قرار دارند، دارای حالت‌های زیر هستند:



۱ اگر این دو دایره متقاطع باشند، **دو نقطه** با شرایط فوق وجود دارد.



۲ اگر این دو دایره مماس باشند، **فقط یک نقطه** با شرایط فوق وجود دارد.

۳ اگر این دو دایره همدیگر را قطع نکنند، **هیچ نقطه‌ای** با شرایط فوق وجود ندارند.

تست **دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۷ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۳ واحد و از B به فاصلهٔ ۲ واحد باشد؟**

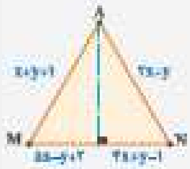
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱ با توجه به این‌که فاصلهٔ A و B از هم ۷ واحد است، دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۳ و دایرهٔ به مرکز B و به شعاع ۲ همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس گزینهٔ «۱» صحیح است.

عمودمنصف

مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

تست **نقطهٔ A روی عمود منصف پاره‌خط MN قرار گرفته است. مقدار x^2+y^2 چقدر است؟**

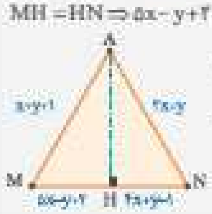


۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۳ از آن‌جایی که A روی عمود منصف MN قرار دارد، پس داریم:

$AM=AN \Rightarrow x+\cancel{y}+1=2x+\cancel{y} \Rightarrow x=1$

$MH=HN \Rightarrow 5x-y+2=4x+y-1$



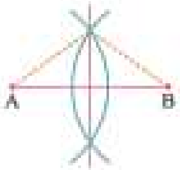
$\Rightarrow 5-y+2=4+y-1$

$\Rightarrow 7-y=3+y \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow x^2+y^2=1^2+2^2=5$

رسم عمودمنصف

برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB ، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ مناسب (بیش از نصف طول AB) باز می‌کنیم و یک‌بار به مرکز A و یک‌بار به مرکز B کمان‌هایی رسم می‌کنیم. سپس به کمک خط‌کش خطی رسم می‌کنیم که از محل تقاطع دو کمان بگذرد، این خط همان عمودمنصف AB است.



تست **برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB به طول ۸، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ R باز کرده‌ایم. کدام گزینه در مورد R درست است؟**

۱) اندازهٔ R اختیاری است.

۲) $R=4$

۳) $R>4$

۴) $R<4$

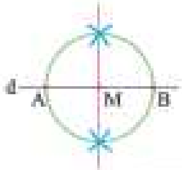
۳ چون باید کمان‌های رسم‌شده همدیگر را قطع کنند، پس شعاع باید بزرگ‌تر از نصف طول پاره‌خط باشد. $R>4$

کاربردهای رسم عمودمنصف

از رسم عمودمنصف برای رسم خطی عمود بر خط دیگر یا خطی موازی با خط دیگر استفاده می‌شود:

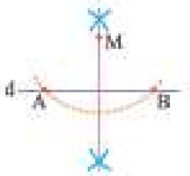
۱ رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M واقع بر آن

به مرکز M و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در A و B قطع کند. نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.



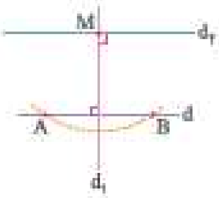
۲ رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M غیرواقع بر خط d

به مرکز M و شعاع مناسب کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.



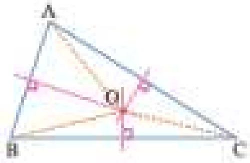
۳ رسم خط موازی خط d از نقطهٔ M خارج آن

خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد، سپس خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d_1 عمود باشد. خط d_2 با خط d موازی است.

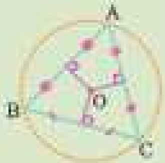


برخورد عمودمنصف‌ها در مثلث و دایرهٔ محیطی

در هر مثلث، عمودمنصف‌ها همرس هستند ونقطهٔ همرسی آن‌ها از سه‌رأس مثلث به یک فاصله است [چون هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.] یعنی در مثلث زیر $OA = OB = OC$ است.

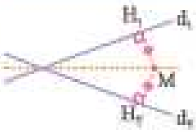


نتیجه سه رأس مثلث ABC روی یک دایرهٔ محیطی قرار دارند که مرکز آن دایره، محل برخورد عمود منصف اضلاع است.



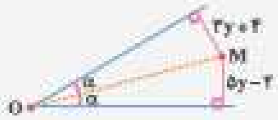
نیمساز

مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است.



نکته هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس، $MH_1 = MH_2 \Leftrightarrow$ M روی نیمساز زاویه است.

تست با توجه به شکل مقابل، مقدار y کدام است؟



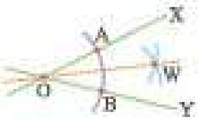
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۲ با توجه به شکل، پاره‌خط OM نیمساز است و هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

$$5y - 2 = 3y + 4 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

ترسیم نیمساز

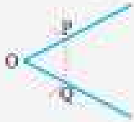
برای ترسیم نیمساز زاویهٔ $X\hat{O}Y$ مطابق شکل، ابتدا به مرکز O کمانی می‌زنیم تا اضلاع OX و OY را در نقاط A و B قطع کند. حال دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول AB باز کرده و یک‌بار به مرکز A و یک‌بار به مرکز B کمان می‌زنیم تا همدیگر را در نقطهٔ W قطع کنند و سپس با استفاده از خط‌کش خط OW را رسم می‌کنیم. خط OW همان نیمساز است.



تست در شکل زیر، $PQ = 3$ است. می‌خواهیم نیمساز زاویهٔ O را رسم کنیم. برای این کار می‌توانیم دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $5 - 2x$ باز کنیم تا دو کمان دیگر را رسم کنیم. x چند مقدار طبیعی می‌تواند داشته باشد؟

۱) هیچ ۲) یک
۳) دو ۴) سه

۲ باید دهانهٔ پرگار از نصف PQ بیش‌تر باز شود، پس:

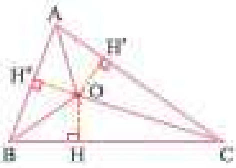


$$5 - 2x > \frac{PQ}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow 2x < 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x < \frac{7}{4}$$

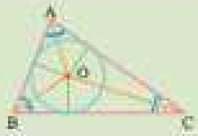
تنها عدد طبیعی در این بازه $x = 1$ است.

برخورد نیمسازها در مثلث و دایرهٔ محاطی

در هر مثلث، نیمسازهای داخلی همرس هستند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه‌ضلع مثلث به یک فاصله است [چون هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.] یعنی در مثلث زیر $OH = OH' = OH''$ است.



نتیجه محل برخورد نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث ABC، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است.



ترسیم مثلث

برای رسم مثلثی که اضلاع آن a، b، c باشد، ابتدا پاره‌خطی مانند BC به طول a رسم می‌کنیم سپس دهانهٔ پرگار را یک‌بار به اندازهٔ b باز کرده و به مرکز C کمانی می‌زنیم و بار دیگر دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ c باز کرده و به مرکز B کمانی می‌زنیم. اگر این کمان‌ها همدیگر را قطع کنند محل تلاقی آن‌ها، رأس A از مثلث ABC است.

نتیجه برای این که مثلثی با اضلاع a، b، c قابل رسم باشد، باید همواره رابطهٔ زیر بین آن‌ها برقرار باشد:

طول ضلع بزرگ‌تر < مجموع دو ضلع کوچک‌تر

تست اگر اضلاع $x+3$، $2x+1$ و ۷ سه ضلع مثلث باشند، x چند مقدار طبیعی خواهد داشت؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳ طبق نامساوی مثلثی، مجموع اندازه دو ضلع مثلث، از ضلع سوم بزرگ‌تر است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2x+1+7 > x+3 \Rightarrow x > -5 \\ x+3+7 > 2x+1 \Rightarrow x < 9 \\ 2x+1+x+3 > 7 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

از اشتراک سه بازه به‌دست آمده، محدودهٔ x برابر $1 < x < 9$ می‌شود و تعداد اعداد طبیعی در این بازه برابر ۷ عدد است.

استدلال

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است. یعنی با بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود. [در این استدلال، از جزء به کل می‌رسیم.]

مثلاً، اگر با بررسی و مشاهدهٔ مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع به این نتیجه کلی برسیم که مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی 360° است، از استدلال استقرایی استفاده کرده‌ایم.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. [این حقایق، همان اصول و قضیه‌های ریاضی هستند.]

مثلاً اگر قطر یک چهارضلعی را رسم کنیم، دو مثلث به‌وجود می‌آید. می‌دانیم مجموعهٔ زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است، پس مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی دو برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث یعنی 360° است.

اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند.

مثلاً احکام کلی زیر را در نظر بگیرید:

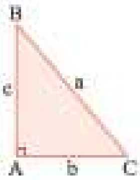
۱ توان دوم هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر از توان سوم آن است.

۲ مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180° است.

حکم کلی «توان دوم هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر از توان سوم آن است.» یک حکم کلی نادرست است اما حکم کلی «مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180° است.» یک حکم کلی درست است.

قضیه

برخی نتایج مهم و پرکاربرد را که با استدلال استنتاجی ثابت می‌شوند، قضیه می‌نامند. مثلاً قضیهٔ تالس، قضیهٔ فیثاغورس و...



اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن‌چه حاصل می‌شود عکس قضیه گفته می‌شود. [عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.]

عکس قضیهٔ فیثاغورس: «در مثلث ABC، اگر $a^2=b^2+c^2$ باشد، آن‌گاه $\hat{A}=90^\circ$ خواهد بود.»

گزاره‌های شرطی

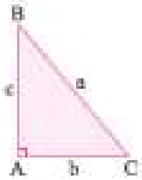
اگر گزارهٔ خبری به‌صورت شرطی بیان شود آن را گزارهٔ شرطی می‌نامند. در گزارهٔ شرطی، جملهٔ اول بعد از اگر را فرض و جملهٔ دوم را حکم می‌نامند.

مثلاً، اگر در یک مثلث، دوضلع برابر باشند آن‌گاه دو زاویهٔ مجاور به دو ضلع نیز برابر هستند.

اگر در یک گزارهٔ شرطی جای فرض و حکم عوض شود. به گزارهٔ به‌دست آمده عکس گزارهٔ شرطی گفته می‌شود.

مثلاً، اگر در یک مثلث، دو زاویهٔ مجاور به دو ضلع برابر باشند، آن‌گاه، آن دو ضلع نیز برابرند.

اگر یک گزارهٔ شرطی و عکس آن هر دو درست باشند، آن را قضیهٔ دو شرطی می‌نامند.



در مثلث مقابل، اگر $\hat{A}=90^\circ$ باشد، آن‌گاه $a^2=b^2+c^2$ و بر عکس.

قضایای دو شرطی را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهند و به صورت اگر p آن‌گاه q و بر عکس یا p اگر و تنها اگر q می‌خوانند.

قضیهٔ فیثاغورس را می‌توان به‌صورت «مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر $a^2=b^2+c^2$» نیز خواند.

روش‌های اثبات قضایا

۱ **اثبات مستقیم:** در این روش، از فرض قضیه، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم. اثبات‌هایی که با روش استدلال استنتاجی انجام شوند، از این دسته هستند. مثل اثبات قضیهٔ تالس.

۲ **برهان خلف (اثبات غیر مستقیم):** نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسه از آن استفاده می‌کنیم. در برهان خلف به جای این‌که به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف)

۲) فرض خلف را ساده می‌کنیم تا به یک تناقض و یا نتیجهٔ غیرممکن برسیم.

۳) به این ترتیب فرض خلف، باطل و در نتیجه ثابت می‌شود که حکم نمی‌تواند نادرست باشد.

مثال فرض کنید n یک عدد طبیعی و n^2 عددی فرد است؛ ثابت کنید n نیز فرد است.

فرض می‌کنیم n فرد نیست [فرض خلف] پس باید زوج باشد؛ یعنی $n=2k$ حال باید ببینیم زوج فرض کردن n چه پیامدهای زیان‌باری به‌دنبال خواهد داشت:

$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2\times\underbrace{2k^2}_{k'}=2k'=$ زوج

همان طور که می‌بینید به این نتیجه رسیدیم که n^2 زوج است در حالی که مسئله فرض کرده بود که n^2 فرد است یعنی به نتیجه‌ای خلاف فرض مسئله رسیدیم و این غیرممکن است؛ بنابراین n نمی‌تواند زوج باشد، پس فرد است.

۳ **مثال نقض:** به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی غلط است، مثال نقض گفته می‌شود.

مثال برای هر کدام از احکام کلی و نادرست زیر یک مثال نقض ذکر کنید.

الف) به ازای هر عدد طبیعی زوج n، عدد 2^n+1 عددی اول است.

ب) عبارت n^2+n+41 به ازای همهٔ nها اول است.

الف) مثال نقض: $n=6$

ب) مثال نقض: $n=41$

تذکر اگر نتوانیم برای یک حکم کلی به سادگی مثال نقض پیدا کنیم دلیلی بر درستی آن حکم کلی نیست.

نسبت و تناسب

اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند، یعنی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ در این صورت این تساوی را یک تناسب می‌نامند. در تناسب به اعداد a و d ، طرفین و به اعداد b و c، وسطین تناسب گفته می‌شود.

ویژگی‌های تناسب به صورت زیر است:

۱ طرفین وسطین

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$$

۲ معکوس کردن دو طرف

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۳ تعویض جای طرفین و وسطین

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

۴ ترکیب صورت‌ها و مخرج‌ها

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

۵ ترکیب نسبت در صورت و مخرج

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\Leftarrow \boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

۶ تفضیل نسبت در صورت و مخرج

$$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}\Leftarrow \boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}\Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

مثلاً در تناسب زیر، از خاصیت تفضیل نسبت در مخرج استفاده شده است:

$$\frac{a}{۶+a}=\frac{۳b}{۲+۳b}\Rightarrow \frac{a}{۶+a-a}=\frac{۳b}{۲+۳b-۳b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۶}=\frac{۳b}{۲}\Rightarrow \frac{a}{b}=۹$$

تست اگر $\frac{a+۲b}{۲a+b}=\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۴

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۱ از خاصیت طرفین وسطین استفاده می‌کنیم:

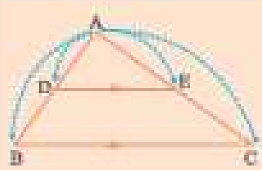
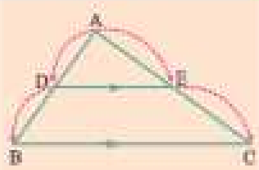
$$\frac{a+۲b}{۲a+b}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}۳(a+۲b)=۲(۲a+b)\Rightarrow ۳a+۶b=۴a+۲b$$

$$\Rightarrow a=۴b\Rightarrow \frac{a}{b}=۴$$

درس ۲ قضیهٔ تالس و ویژگی‌های آن

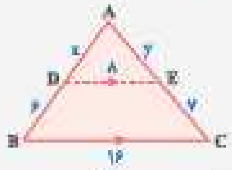
قضیهٔ تالس

اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به‌گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازهٔ آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهد.

تالس جزء به کل	تالس جزء به جزء
	
$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$	$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

نکته در مسائلی که صحبت از پاره‌خط DE است، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.

تست در شکل زیر $DE \parallel BC$ است. مقدار $x+y$ کدام است؟



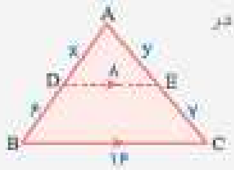
۱) ۱۱

۲) ۱۲

۳) ۱۳

۴) ۱۴

۳ با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث ABC داریم:

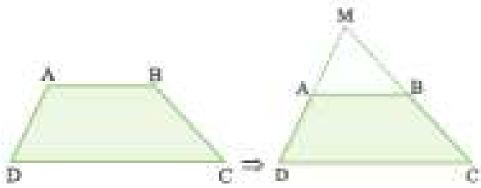


$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

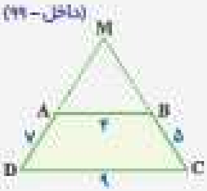
$$\Rightarrow \frac{x}{x+۶}=\frac{y}{y+۷}=\frac{۸}{۱۶}\Rightarrow x=۶\ ,\ y=۷$$

پس $x+y=۶+۷=۱۳$ است.

در مسائلی که گفته می‌شود یک چهارضلعی ذوزنقه است، باید به موازی بودن قاعده‌های آن توجه کنیم. اگر ساق‌های این ذوزنقه را امتداد دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، مثلثی ایجاد می‌شود که در آن قضیهٔ تالس برقرار است.

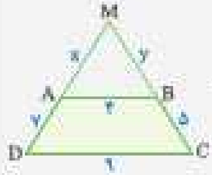


تست اندازهٔ اضلاع ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB کدام است؟ (داخل - ۹۹)



۱) ۱۳/۲
۲) ۱۳/۶
۳) ۱۴/۴
۴) ۱۴/۸

۲ با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث MDC داریم:

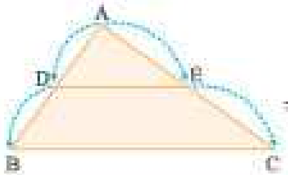


$$\Rightarrow \frac{x}{x+7}=\frac{y}{y+5}=\frac{4}{9}\Rightarrow \begin{cases}x=5/6\\ y=4\end{cases}$$

پس محیط مثلث MAB برابر است با: $4+4+5/6=13/6$

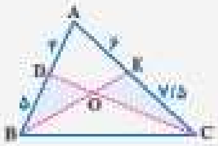
عکس قضیهٔ تالس

اگر خطی روی دو ضلع مثلث، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.



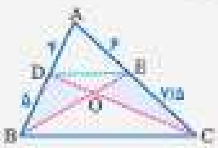
$$\Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow DE\parallel BC$$

تست در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



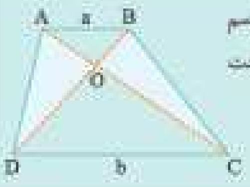
۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{4}{5}$
۳) $\frac{5}{6}$
۴) ۱

۴ با توجه به این‌که طول پاره‌خط‌های اضلاع مشخص است، نسبت آن‌ها را بررسی می‌کنیم. چون $\frac{AD}{BD}=\frac{4}{5}$ و $\frac{AE}{EC}=\frac{6}{7/5}=\frac{4}{5}$ است، پس طبق عکس قضیهٔ تالس $DE\parallel BC$ است.



پس چهارضلعی DEBC ذوزنقه است و مساحت محدود بین دو قطر و ساق با هم برابرند.

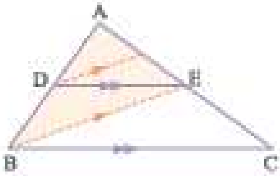
توجه اگر قطرهای یک ذوزنقه را رسم کنیم، آن‌گاه مثلث‌های رنگی هم‌مساحت هستند.



W - تالس و مقاومت معادل

در بعضی از سؤالات مربوط به تالس در مثلث‌ها، بیش از دو خط موازی وجود دارد. دو حالت معروف این مسائل به صورت زیر است:

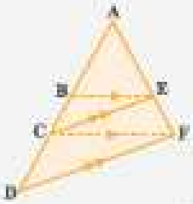
۱ اگر در مثلث، دو جفت خط موازی طوری رسم شوند که شکلی شبیه حرف W ایجاد شود، باید یک بار قضیهٔ تالس را در مثلث $\overset{\Delta}{ABE}$ و یک بار هم در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ بنویسیم.



نکته اگر از رأس A به ۳ رأس W وصل کنیم، رابطهٔ زیر برقرار است:

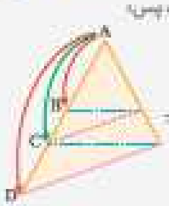
(فلش بزرگ) × (فلش کوچک) = ^{2}(فلش متوسط)

تست در شکل زیر $BE\parallel CF$ و $DF\parallel CE$ است. اگر $AB=5$ و $BC=3$، آن‌گاه اندازهٔ CD کدام است؟



۱) ۴/۵
۲) ۴/۸
۳) ۵/۴
۴) ۶/۵

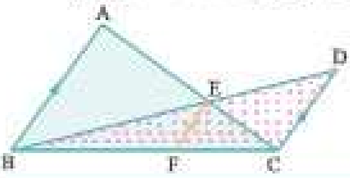
۲ در شکل مقابل یک W - تالس دیده می‌شود، پس:



$$\Rightarrow AC^2=AB\times AD\Rightarrow 8^2=5\times AD$$

$$\Rightarrow AD=\frac{64}{5}=12/8\Rightarrow 8+CD=12/8\Rightarrow CD=4/8$$

۲ اگر دو مثلث در وضعیتی مانند شکل زیر قرار گیرند، باید یک بار قضیهٔ تالس را در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و یک بار هم در مثلث $\overset{\Delta}{BCD}$ بنویسیم.

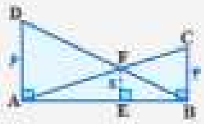


نکته طول پاره‌خط EF از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$$

این رابطه مشابه رابطهٔ مقاومت معادل در مدارهای الکتریکی است.

تست در شکل زیر اندازهٔ x کدام است؟

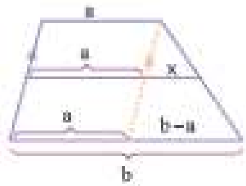


۱) ۲/۳
۲) ۲/۴
۳) ۲/۸
۴) ۳/۲۵

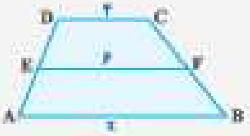
۲ با توجه به شکل رابطهٔ $\frac{۱}{FE}=\frac{۱}{BC}+\frac{۱}{AD}$ برقرار است، پس:

$$\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}\Rightarrow x=\frac{۲۴}{۱۰}=۲/۴$$

۳ اگر پاره‌خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم شود، برای به‌دست آوردن طول این پاره‌خط می‌توانیم از یک رأس ذوزنقه خطی موازی یکی از ساق‌ها رسم کنیم و قضیهٔ تالس را در مثلث ایجاد شده بنویسیم.

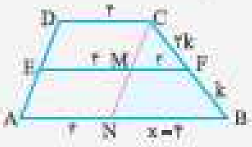


تست در شکل زیر $AB \parallel EF \parallel CD$ و $CF=۲BF$ و $CD=۴$ و $EF=۶$ است. اندازهٔ x کدام است؟



۱) ۶
۲) ۶/۵
۳) ۷
۴) ۷/۵

۳ از رأس C خطی به موازات ساق AD رسم می‌کنیم و با استفاده از تالس جزء به کل در مثلث CNB داریم:



$$\frac{MF}{NB}=\frac{CF}{BC}\Rightarrow\frac{۲}{x-۴}=\frac{۲k}{۳k}\Rightarrow\frac{۲}{x-۴}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۷$$

تالس در خطوط موازی و مورب و ذوزنقه

۱ اگر دو خط مورب، چند خط موازی را قطع کنند، پاره‌خط‌های ایجاد شده دارای نسبت‌های یکسان هستند. (این موضوع با استفاده از قضیهٔ تالس قابل نتیجه‌گیری است.)

$$\Rightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

تست در شکل زیر خطوط d_1 و d_2 و d_3 موازی‌اند. با توجه به مقادیر داده‌شده روی شکل، اندازهٔ x کدام است؟

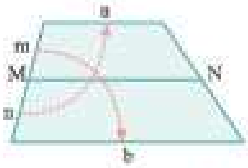
۱) ۱/۵
۲) $۲+\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) ۴

۴ طبق نتایج تالس در خطوط موازی و مورب، چهار پاره‌خط ایجادشده متناسب هستند، یعنی:

$$\frac{۳}{x}=\frac{x+۲}{۸}\Rightarrow\underbrace{x^۲+۲x-۲۴}_{(x+۶)(x-۴)}=۰\xrightarrow{x>۰}x=۴$$

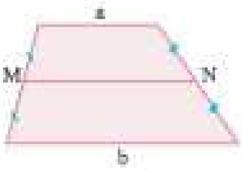
اگر در یک ذوزنقه پاره‌خطی موازی دو قاعده رسم شود، نکات زیر قابل نتیجه‌گیری است:

۱ در حالت کلی:



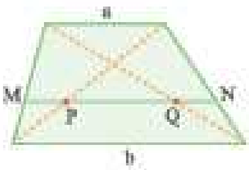
$$MN=\frac{na+mb}{n+m}$$

۲ اگر MN وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند:



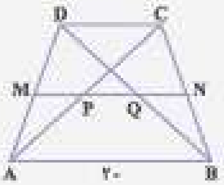
$$MN=\frac{a+b}{۲}$$

۳ اگر دو قطر ذوزنقه را رسم کنیم:



$$PQ=\frac{b-a}{۲}$$

تست در ذوزنقهٔ زیر، پاره‌خط MN در وسط ساق‌ها موازی دو قاعده رسم شده است و $AB=۲۰$ و $CD=۸$ است. طول پاره‌خط PQ چقدر است؟



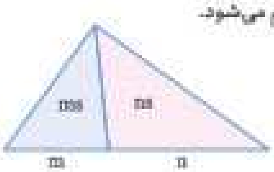
۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۶
۴) ۷

۳ چون پاره‌خط MN در وسط ساق‌ها رسم شده و همچنین دو قطر ذوزنقه رسم شده است، پس طول پاره‌خط PQ برابر است با:

$$PQ=\frac{AB-CD}{۲}=\frac{۲۰-۸}{۲}=۶$$

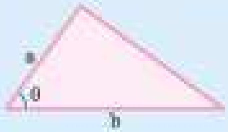
ترکیب مساحت و قضیهٔ تالس

اگر خطی قاعدهٔ مثلث را به نسبت m و n تقسیم کند، مساحت دو مثلث ایجاد شده نیز به همین نسبت تقسیم می‌شود.

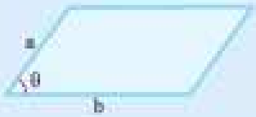


(این موضوع مهم‌ترین نکته برای حل مسائل مربوط به مساحت است.)

تذکر اگر در یک مثلث یا متوازی‌الاضلاع، اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها مشخص باشد، مساحت آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:



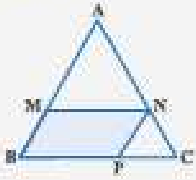
$\Rightarrow S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$



$\Rightarrow S=ab\sin\theta$

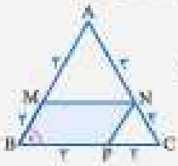
برای حل سریع سؤالاتی که نسبت دو ضلع مثلث داده می‌شود و نسبت مساحت‌ها را می‌خواهند، می‌توانیم مثلث را متساوی‌الاضلاع فرض کنیم. سپس نسبت داده‌شده را معادل طول اضلاع فرض کنیم؛ مثلاً اگر $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{2}$ است، فرض می‌کنیم $MA=3$ و $MB=2$ می‌باشد.

تست در شکل زیر $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{2}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ (خارج - ۹۰)



۱) ۴۸
۲) ۵۲
۳) ۵۴
۴) ۵۶

۱ چون نسبت اضلاع را داده و نسبت مساحت‌ها را می‌خواهد، فرض می‌کنیم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و داریم:

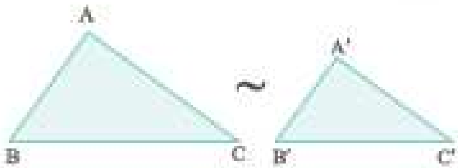


$$\frac{S_{MNPB}}{S_{ABC}}=\frac{3\times 2\times \sin\hat{B}}{\frac{1}{2}\times 5\times 5\times \sin\hat{B}}=\frac{12}{25}=\frac{48}{100}$$

درس ۳ تشابه مثلث‌ها

تشابه دو مثلث

وقتی دو مثلث متشابه‌اند که دارای زاویه‌های برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد.



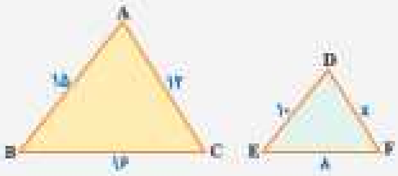
$$\Rightarrow \hat{A}=\hat{A'},\ \hat{B}=\hat{B'},\ \hat{C}=\hat{C'}$$
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

به نسبت اضلاع متناظر دو مثلث نسبت تشابه می‌گویند و آن را معمولاً با k نشان می‌دهند.

$$\Rightarrow k=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

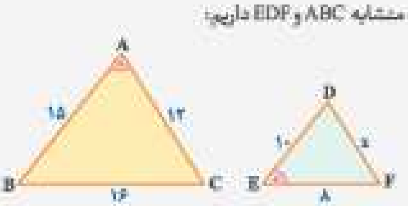
توجه کنید اگر نسبت تشابه برابر k باشد، $\frac{1}{k}$ نیز نسبت تشابه است. مثلاً اگر اضلاع مثلث ABC، ۲ برابر اضلاع مثلث A'B'C' باشند، می‌توانیم بگوییم اضلاع مثلث A'B'C'، $\frac{1}{2}$ برابر اضلاع مثلث ABC است.

تست دو مثلث ABC و DEF متشابه‌اند. اندازهٔ x چقدر است؟



۱) ۹
۲) ۱۲
۳) $\frac{25}{3}$
۴) $\frac{32}{3}$

۴ در دو مثلث متشابه ABC و EDF داریم:



$$\frac{EF}{AC}=\frac{ED}{AB}\Rightarrow \frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}\Rightarrow \hat{A}=\hat{E}$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{BC}=\frac{ED}{AB}\Rightarrow \frac{x}{16}=\frac{10}{15}\Rightarrow x=\frac{32}{3}$$

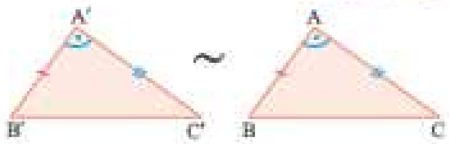
قضیه‌های تشابه

دو مثلث در حالت‌های زیر متشابه‌اند: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

۱ تناسب سه ضلع

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

۲ تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین



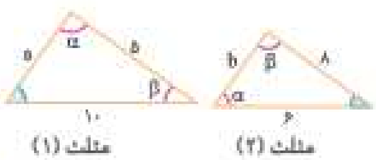
$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A}=\hat{A'}$

۳ تساوی دو زاویه

$\hat{A}=\hat{A'}$ و $\hat{B}=\hat{B'}$

نحوهٔ نوشتن نسبت تشابه

وقتی می‌دانیم دو مثلث متشابه‌اند، برای نوشتن نسبت تشابه، ۳ خط کسری را برابر هم قرار می‌دهیم. سپس اضلاع یکی از مثلث‌ها را (مثلاً مثلث (۱)) در صورت کسرها می‌نویسیم. حال اضلاع مثلث دیگر را طوری در مخرج کسرها می‌نویسیم که اضلاع روبه‌روی زاویهٔ α در دو مثلث زیر هم باشند، اضلاع روبه‌روی زاویهٔ β نیز زیر هم و ..... [به زبان ساده‌تر، اضلاع کوچک‌تر دو مثلث در یک کسر، اضلاع متوسط در یک کسر و اضلاع بزرگ‌تر در یک کسر قرار گیرند.]



$$\frac{۱۰}{۸}=\frac{a}{۶}=\frac{۵}{b}$$

تست مثلثی با اضلاع ۷ و ۸ و ۴ با مثلثی به اضلاع ۱۲ و $۲x-۱$ و ۶ متشابه است. x کدام است؟

۱) ۵/۷۵　۲) ۶/۷۵　۳) ۴/۷۵　۴) ۷/۷۵

۱ $\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۷}{۲x-۱}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{۲x-۱}$

$۴x-۲=۲۱\Rightarrow ۴x=۲۳\Rightarrow x=\frac{۲۳}{۴}=۵/۷۵$

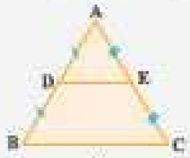
نسبت پاره‌خط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

هرگاه دو مثلث متشابه باشند، آن‌گاه:

۱ نسبت ارتفاع، میانه، نیمساز، محیط و ... برابر با نسبت تشابه، یعنی k است.

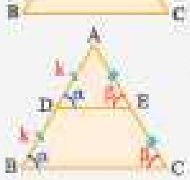
۲ نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با مربع نسبت تشابه، یعنی $k^۲$ است.

تست در شکل زیر $AD=DB$ و $AE=EC$ می‌باشد. اگر مساحت مثلث ADE برابر ۶ واحد باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۳۶

۴ چون $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$ است، پس طبق عکس قضیهٔ تالس $DE \parallel BC$ می‌باشد.



هم‌چنین مطابق شکل، مثلث‌های ABC و ADE متشابه‌اند. در نتیجه:

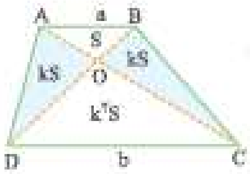
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{AD}{AB})^۲\Rightarrow\frac{۶}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{k}{k+k})^۲\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۲۴$$

ذوزنقه و مساحت

اگر قطرهای یک ذوزنقه را رسم کنیم، آن‌گاه:

۱ مثلث‌های AOB و COD متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{b}{a}=k$ است.

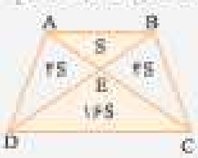
۲ مثلث‌های کناری هم‌مساحت هستند.



تست در ذوزنقهٔ زیر، اگر $CD=۴AB$ و مساحت ناحیهٔ رنگی برابر ۶۸ واحد مربع باشد، مساحت مثلث BEC چقدر است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۰

۳ چون $CD=۴AB$ است، پس نسبت تشابه دو مثلث CDE و ABE برابر $k=۴$ است. بنابراین با توجه به صورت سؤال داریم:



$\Rightarrow S+۱۶S=۶۸\Rightarrow ۱۷S=۶۸\Rightarrow S=۴$

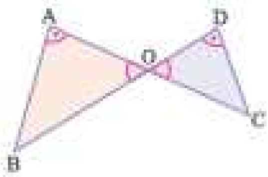
پس مساحت مثلث BEC برابر $۴S=۱۶$ است.

حالت‌های معروف برای دو مثلث متشابه

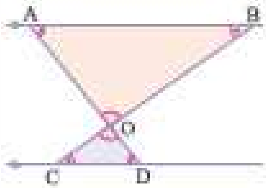
۱ بال‌های پروانه: دو مثلث که از رأس به هم چسبیده‌اند و شکلی شبیه بال‌های پروانه ایجاد می‌کنند، در حالت‌های زیر متشابه‌اند.

$[\overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OCD}]$

بال‌های پروانه با یک زاویهٔ مشترک

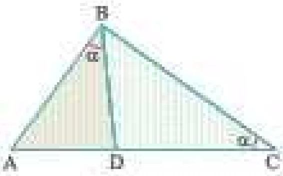


بال‌های پروانهٔ اسیر بین دو خط موازی



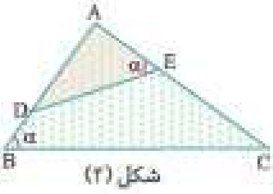
۲ مثلث گوشه‌گیر: یک مثلث در گوشه‌ای از مثلث دیگر، طوری قرار می‌گیرد که مثلث اصلی و مثلث گوشه‌گیر دارای یک زاویهٔ مشترک و یک زاویهٔ برابر باشند. [مثلث‌ها در رأس B مشترک‌اند]

- رسم خطی از رأس به ضلع مقابل



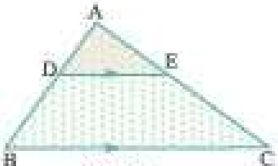
شکل (۱)

- رسم خط غیرموازی با قاعدهٔ مثلث



شکل (۲)

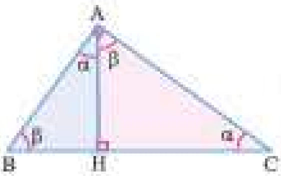
- رسم خط موازی با قاعدهٔ مثلث



شکل (۳)

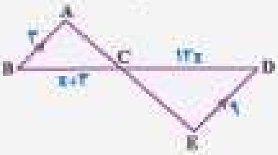
تذکر به شکل (۳) دقت کنید اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، مثلث ایجادشده طبق قضیهٔ اساسی تشابه قطعاً با مثلث اصلی متشابه‌است.

۳ رسم ارتفاع در مثلث قائم‌الزاویه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، با رسم ارتفاع وارد بر وتر، سه مثلث متشابه به وجود می‌آید:



$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH}$$

تست در شکل زیر $DE \parallel AB$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱ مطابق شکل مثلث‌های ABC و CDE متشابه‌اند، پس:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{۳}{۹} = \frac{x+۳}{۱۲x} \Rightarrow x = ۱$$

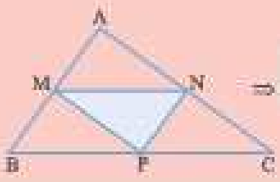
تست در شکل زیر $A\hat{B}C = D\hat{E}C$ است. اندازهٔ DE کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱ مثلث‌های ABC و DEC با دو زاویهٔ برابر متشابه‌اند، پس:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۶} = \frac{۳}{۴+۵} \Rightarrow x = ۲$$

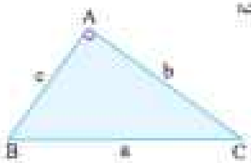
نکته اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، طبق عکس قضیهٔ تالس، اضلاع مثلث ایجادشده موازی اضلاع مثلث اصلی است. بنابراین هر یک از ۴ مثلث ایجادشده، با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ با مثلث اصلی متشابه هستند.



$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP} \sim \overset{\Delta}{AMN} \sim \cdots$$

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

طبق رابطهٔ فیثاغورس، در هر مثلث قائم‌الزاویه، همواره مربع وتر برابر با مجموع مربعات دو ضلع زاویهٔ قائمه است:

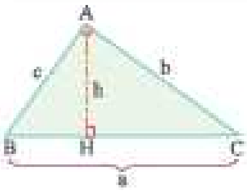


$$\Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

عکس این قضیه نیز برقرار است، یعنی اگر در مثلثی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار باشد، این مثلث در رأس $\hat{A}$ قائمه است.

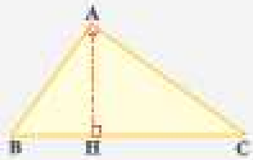
تذکر برای حل سریع‌تر سؤالات، اعداد فیثاغورسی (۳،۴،۵) و (۵،۱۲،۱۳) و (۸،۱۵،۱۷) را حفظ باشید.

در مثلث قائم‌الزاویه، برای به‌دست آوردن ارتفاع وارد بر وتر می‌توانیم مساحت را از دو رابطه محاسبه کنیم و آن‌ها را برابر هم قرار دهیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} S=\frac{۱}{۲}b\times c \\ S=\frac{۱}{۲}a\times h \end{cases} \Rightarrow a\times h=b\times c \Rightarrow \boxed{h=\frac{b\times c}{a}}$$

تست در شکل زیر، $AB=۳$ و $BC=۵$ است. ارتفاع AH کدام است؟

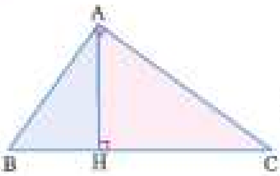


۱) ۲/۴
۲) ۲/۸
۳) ۳
۴) ۳/۲

۱ چون وتر مثلث برابر $BC=۵$ یکی از اضلاع قائم برابر $AB=۳$ است، پس با توجه به اعداد فیثاغورسی معروف، $AC=۴$ است. بنابراین طول ارتفاع AH برابر است با:

$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{۳\times۴}{۵}=۲/۴$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، با رسم ارتفاع وارد بر وتر، سه مثلث متشابه به وجود می‌آید.



$$\Rightarrow \boxed{\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}}$$

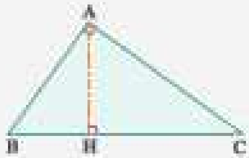
۱ از تشابه مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ACH}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\boxed{AH^۲=BH\times CH}$$

۲ از تشابه مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با هر یک از مثلث‌های کوچک‌تر، نتیجه می‌گیریم:

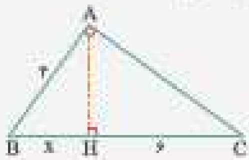
$$\boxed{AB^۲=BH\times BC} \qquad \boxed{AC^۲=CH\times BC}$$

تست در مثلث زیر، $AB=۴$ و $CH=۶$ است. مجموع طول ضلع AC و طول ارتفاع AH کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $۵\sqrt{۳}$
۳) $۶\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۳}$

۳ ابتدا باید طول پاره‌خط BH را پیدا کنیم:



$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow ۴^۲=x(x+۶)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^۲+۶x-۱۶}_{(x-۲)(x+۸)}=۰\Rightarrow x=BH=۲$$

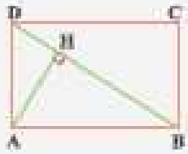
حال طول ضلع AC و ارتفاع AH را پیدا می‌کنیم:

$$AC^۲=CH\times CB\Rightarrow AC^۲=۶\times۸=۴۸\Rightarrow AC=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow AH^۲=۶\times۲=۱۲\Rightarrow AH=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

پس $AC+AH=۶\sqrt{۳}$ است.

تست در مستطیل زیر به طول $BC=۱۰$ از نقطهٔ A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $DH=۲\sqrt{۵}$ باشد، طول قطر مستطیل کدام است؟



۱) $۸\sqrt{۵}$
۲) $۹\sqrt{۵}$
۳) $۱۰\sqrt{۵}$
۴) $۱۲\sqrt{۵}$

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:

$$AD^۲=DH\times BD\Rightarrow ۱۰^۲=۲\sqrt{۵}\times BD\Rightarrow BD=\frac{۱۰۰}{۲\sqrt{۵}}=۱۰\sqrt{۵}$$

یادداشت:

هندسه تحلیلی

فصل ۱۳

■ **ارتباط با فصل‌های دیگه:** برای خواندن این فصل دانستن معادلهٔ خط، فاصلهٔ دو نقطه و فاصلهٔ نقطه از خط کافیست.

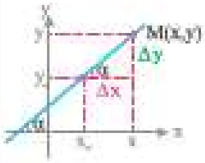
■ **توصیه:** تست‌های این فصل معمولاً ساختار مشخصی در کنکور دارند، بنابراین تست‌های سال‌های گذشته و مدل‌های معروف را به خوبی تمرین کنید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۱	۱	۳	۲	۲	۲	۲	۲

درس ۱ هندسه مختصاتی (تحلیلی)

معادلهٔ خط و شیب خط

اگر خط d از نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ بگذرد و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α بسازد، آن‌گاه با توجه به شکل می‌توانیم شیب خط d را به صورت زیر به‌دست آوریم:



$$\Rightarrow m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

معادلهٔ خط d به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(1,2)$ با شیب $\frac{-3}{5}$ را به دست آورید.

$$y - 2 = \frac{-3}{5}(x-1) \Rightarrow 5y - 10 = -3x + 3 \Rightarrow 3x + 5y - 13 = 0$$

اگر معادلهٔ خط d را مرتب کنیم آن‌گاه به معادله‌ای به شکل زیر می‌رسیم:

$$ax + by + c = 0$$

مثال ۱ اگر معادلهٔ d به‌صورت $7x + 12y = 4$ باشد شیب این خط را به دست آورید.

$$7x + 12y = 4 \Rightarrow 12y = -7x + 4 \Rightarrow y = -\frac{7}{12}x + \frac{4}{12}$$

مثال ۲ با توجه به شکل معادلهٔ خط آبی را بنویسید.

با توجه به شکل، زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر با 60° است. در ضمن این خط از نقطهٔ $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ می‌گذرد. پس معادلهٔ این خط به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow y - 0 = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 1$$

تذکر برای پیدا کردن محل برخورد یک خط با محورهای مختصات به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ اگر خط d محور xها را در نقطهٔ A قطع کند، برای یافتن مختصات نقطهٔ A کافیست که در معادلهٔ خط، y را مساوی صفر قرار دهیم.

۲ اگر خط d محور yها را در نقطهٔ B قطع کند، برای یافتن مختصات نقطهٔ B کافی است که در معادلهٔ خط، x را مساوی صفر قرار دهیم.

مثلاً خط به معادلهٔ $3x - 4y = 24$ محور xها را در نقطهٔ A و محور yها را در نقطهٔ B قطع کرده است. در این صورت مختصات A و B به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y_A = 0 \Rightarrow 3x_A = 24 \Rightarrow x_A = 8 \Rightarrow A(8, 0)$$

$$x_B = 0 \Rightarrow -4y_B = 24 \Rightarrow y_B = -6 \Rightarrow B(0, -6)$$

تست مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادله‌های $y+x=۲$ و $۲y-x=۴$ وضلع دیگرآن برمحور x هاقراردارد،کدام‌است؟

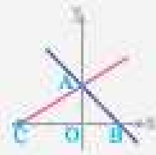
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴ ابتدامحل برخورد سه ضلع مثلث $(y=۰, ۲y-x=۴, y+x=۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲y-x=۴ \\ y+x=۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{۲}+۲=-x+۲ \Rightarrow x=۰, y=۲ \Rightarrow A(۰,۲)$$

$$\begin{cases} y=۰ \\ y+x=۲ \end{cases} \Rightarrow ۰+x=۲ \Rightarrow x=۲, y=۰ \Rightarrow B(۲,۰)$$

$$\begin{cases} y=۰ \\ ۲y-x=۴ \end{cases} \Rightarrow ۲(۰)-x=۴ \Rightarrow x=-۴, y=۰ \Rightarrow C(-۴,۰)$$



$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times AO\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶=۶$$

اگر معادلهٔ دو خط متقاطع داده شده باشد و بخواهیم مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط را پیدا کنیم، کافیست که دو معادله را در یک دستگاه بنویسیم و جواب دستگاه را به‌دست آوریم. جواب این دستگاه همان مختصات نقطهٔ تقاطع است.

مثلاً دو خط $۳x+۵y=۱۱$ و $۲x-y=۳$ متقاطع‌اند، زیرا شیب‌های آن‌ها با هم برابر نیست. برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ تقاطع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳x+۵y=۱۱ \\ ۲x-y=۳ \quad \times ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۵y=۱۱ \\ ۱۰x-۵y=۱۵ \end{cases} \Rightarrow ۱۳x=۲۶$$

$$\Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow A(۲,۱)$$

تست به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادله‌های $y+۲x=۰$، $y+۳x=a$، $۲y+ax+۵=۰$ در یک نقطه متقاطع هستند؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار

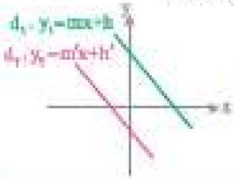
۴ برای این‌که سه خط در یک نقطه متقاطع باشند کافیست دو تا از خط‌ها را تقاطع دهیم و نقطهٔ به‌دست آمده را در خط سوم صدق دهیم. برای این منظور ابتدا خط‌های $y=-۲x$ و $y=-۳x+a$ را تقاطع می‌دهیم و نقطهٔ به‌دست آمده را در خط $۲y+ax+۵=۰$ صدق می‌دهیم:

$$-۲x=-۳x+a \Rightarrow x=a \xrightarrow{y=-۲x} A(a,-۲a) \xrightarrow{۲y+ax+۵=۰}$$

$$a^۲-۴a+۵=۰ \xrightarrow{\Delta<۰}$$ جواب ندارد

شرط موازی بودن و عمود بودن دو خط

اگر دو خط باهم موازی باشند، شیب‌های برابر دارند.



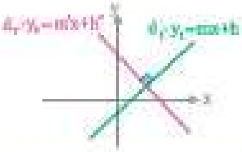
$$d_۱ \parallel d_۲ \Rightarrow m=m'$$

نکته اگر دو خط $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ با هم موازی باشند، آن‌گاه

$$m=m' \Rightarrow -\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

در حالت کلی می‌توان گفت که خط‌های $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ با هم موازی‌اند و برعکس.

اگر دو خط برهم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها -۱ است؛ یعنی شیب‌ها قرینه و معکوس یک‌دیگر هستند. (البته این خط‌ها نباید موازی محورهای مختصات باشند.)



$$d_۱ \perp d_۲ \Rightarrow mm'=-۱ \Rightarrow m'=-\frac{۱}{m}$$

تذکر اگر دو خط باهم موازی یا برهم عمود نباشند، متقاطع غیرعمود هستند.

تست اگر دو خط $L_۱, L_۲$ مطابق شکل زیر بر یک‌دیگر عمود باشند، معادلهٔ خط $L_۱$ کدام است؟

۱) $۳y+\sqrt{۳}x=۳$

۲) $۳y-\sqrt{۳}x=۹$

۳) $۳y-\sqrt{۳}x=۳$

۴) $۳y+\sqrt{۳}x=۹$

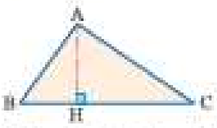
۴ خط $L_۱, L_۲$ بر یک‌دیگر عمود هستند. پس شیب آن‌ها قرینه و معکوس یک‌دیگر است. بنابراین اگر شیب خط‌ها را $m_۱, m_۲$ فرض کنیم خواهیم داشت:

$$m_۲=\tan ۶۰°=\sqrt{۳} \Rightarrow m_۱=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

معادلهٔ خط $L_۱$: $y=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+۳ \Rightarrow ۳y+\sqrt{۳}x=۹$

نوشتن معادلهٔ ارتفاع AH

در مثلث ABC، برای نوشتن معادلهٔ ارتفاع AH به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



مثلاً نقاط $A(۳,۵)$، $B(-۲,۳)$ و $C(۱,۰)$ سه رأس مثلثی هستند. معادلهٔ ارتفاع AH را به‌دست آورید.

۱ شیب خط BC را به‌دست می‌آوریم.

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۳-۰}{-۲-۱}=-۱$$

۲ شیب خط BC را قرینه و معکوس می‌کنیم تا شیب خط AH به‌دست آید.

$$m_{AH}=-\frac{۱}{-۱}=۱$$

۳ معادلهٔ ارتفاع AH را با داشتن مختصات نقطهٔ A و شیب AH می‌نویسیم.

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-۵=۱(x-۳) \Rightarrow y-x=۲$$

تست سه ضلع مثلث ABC به معادلات $AB: ۲y-x=۳$، $AC: y-۲x=۵$، $BC: ۲y+۳x=۶$ هستند. معادلهٔ ارتفاع AH از مثلث مفروض کدام است؟

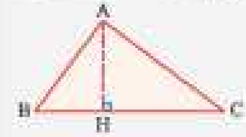
۱) $۶y-۴x=۱۵$ ۲) $۹y-۶x=۱۷$

۳) $۳y-۲x=۷$ ۴) $۳y+۲x=۹$

۴ ابتدا نقطهٔ A یعنی محل برخورد ضلع‌های AB و AC را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2y-x=3 \\ y-2x=5 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{7}{3}, y=\frac{1}{3} \Rightarrow A(-\frac{7}{3},\frac{1}{3})$$

حال شیب خط BC را قرینه و معکس می‌کنیم تا شیب AH به دست آید.



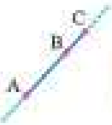
$$\Rightarrow m_{BC}=-\frac{3}{2} \Rightarrow m_{AH}=\frac{2}{3}$$

بنابراین معادلهٔ AH برابر است با:

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(x+\frac{7}{3}) \xrightarrow{\times 9} 9y-6x=17$$

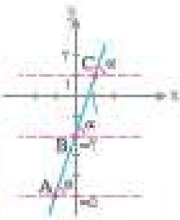
سه نقطه در یک راستا

اگر سه نقطهٔ A ، B ، C روی یک خط راست باشند، شیب خطی که از هر دو نقطهٔ دلخواه به‌دست می‌آید، باهم برابر است؛ یعنی:



$$m_{AB}=m_{AC}=m_{BC}$$

مثلاً نقاط A(−۱, −۵) ، B(۰, −۲) ، C(۱,۱) روی یک خط راست واقع هستند، زیرا:



$$m_{AB}=\frac{-2-(-5)}{0-(-1)}=3$$

$$m_{BC}=\frac{1-(-2)}{1-0}=3$$

$$m_{AC}=\frac{1-(-5)}{1-(-1)}=\frac{6}{2}=3$$

تست **اگر نقاط A(۲ ,۴) ، B(a ,۵) ، C(۲ − a, ۱) روی یک خط باشند، مقدار a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

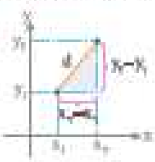
۳ شرط لازم و کافی برای این‌که نقاط A ، B ، C روی یک خط راست باشند، آن است که شیب پاره‌خط‌های AB و AC برابر باشند:

$$\begin{cases} m_{AB}=\frac{5-4}{a-2}=\frac{1}{a-2} \\ m_{AC}=\frac{1-4}{(2-a)-2}=\frac{-3}{-a}=\frac{3}{a} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m_{AB}=m_{AC}} \frac{1}{a-2}=\frac{3}{a} \Rightarrow 3a-6=a \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

فاصلهٔ دو نقطه

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو نقطهٔ (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:



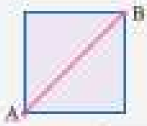
$$\Rightarrow d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال ۱ **فاصلهٔ دو نقطهٔ A(−۱,۳) و B(۲,−۱) را به‌دست آورید.**

$$d=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(-1-2)^2+(3-(-1))^2}$$

$$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

مثال ۲ **اگر A(۲,۵) و B(۴ ,۳) مختصات دو رأس غیرمجاور یک مربع باشند، مساحت مربع را به‌دست آورید.**



ابتدا اندازهٔ قطر مربع را مشخص کرده و سپس مساحت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$AB=d=\sqrt{(2-4)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}d^2=\frac{1}{2}\times 8=4$$

مثال ۳ **اگر A(۶ ,۲) و B(۲ ,۵) مختصات دو سر قطر دایره باشند، محیط دایره را به‌دست آورید.**

ابتدا طول قطر را مشخص کرده، سپس مقدار محیط را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(6-2)^2+(2-5)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5 \Rightarrow 2r=5 \Rightarrow$$

$$\text{محیط}=2\pi r=5\pi$$

مثال ۴ **اگر A(m ,۲) و B(−۱ ,۵) باشد، کمترین فاصلهٔ این دو نقطه از هم چقدر است؟**

$$AB=\sqrt{(m+1)^2+(5-2)^2}=\text{Min} \xrightarrow{(m+1)^2\to 0} \text{Min}AB=\sqrt{0+3^2}=3$$

فاصلهٔ دو نقطه هم‌طول یا هم‌عرض

۱ اگر عرض نقاط A و B با هم برابر باشند، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط AB برابر است با:

$$A(x_A,b), B(x_B,b) \Rightarrow AB=|x_A-x_B|$$

مثال **اگر A(۵, ۸) و B(−۲, ۸) آن‌گاه، اندازهٔ پاره‌خط AB را بنویسید.**

$$AB=5-(-2)=7$$

۲ اگر طول نقاط A و B با هم برابر باشند، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط AB برابر است با:

$$A(a,y_A), B(a,y_B) \Rightarrow AB=|y_A-y_B|$$

مثال **اگر A(۳ ,۷) و B(۳ ,۹) آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط AB را بنویسید.**

$$AB=9-7=2$$

تست **نقطهٔ (۲a , a) مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ (۲ ,۱) و (−۱ ,۴) است. شعاع این دایره کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۱ باید فاصلهٔ نقطهٔ (a ,۲a) از دو نقطهٔ (۲ ,۱) و (−۱ ,۴) برابر باشد پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{\underbrace{(a-2)^2+(2a-1)^2}_{5a^2-8a+5}}=\sqrt{\underbrace{(a+1)^2+(2a-4)^2}_{5a^2-14a+17}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{5a^2}-8a+5=\cancel{5a^2}-14a+17 \Rightarrow 6a=12 \Rightarrow a=2$$

پس مختصات مرکز دایره (۴ ,۲) خواهد بود و فاصلهٔ این نقطه از هر کدام از دو نقطهٔ داده شده، برابر شعاع است. از آن‌جایی که نقاط (۴ ,۲) و (۴ ,۱−) هم‌عرض هستند، پس فاصلهٔ آن‌ها برابر ۳=(۱−)−۲=r است.

تعیین نوع مثلث

اگر مختصات رأس‌های یک مثلث را داشته باشیم، برای تعیین نوع مثلث باید ابتدا طول اضلاع مثلث را به‌دست آوریم. سپس با توجه به طول اضلاع با سه حالت زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر فقط طول دو ضلع باهم برابر باشد، مثلث، متساوی‌الساقین است.

۲ اگر طول هر سه ضلع باهم برابر باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۳ برای تشخیص قائم‌الزاویه بودن مثلث، باید رابطهٔ فیثاغورس را بین اضلاع بررسی کنیم.

تست **نقاط $A(-1,0)$ ، $B(3,5)$ ، $C(4,-4)$ سه رأس یک مثلث هستند. نوع مثلث کدام است؟**

۱) متساوی‌الساقین

۲) متساوی‌الاضلاع

۳) قائم‌الزاویه

۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۴ مختصات رئوس داده شده، بنابراین ابتدا طول اضلاع را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(-1-3)^2+(0-5)^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$$

$$AC=\sqrt{(-1-4)^2+(0+4)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

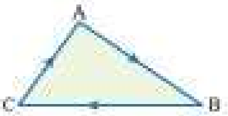
$$BC=\sqrt{(4-3)^2+(-4-5)^2}=\sqrt{1+81}=\sqrt{82}$$

چون طول اضلاع AB و AC برابر است، مثلث، متساوی‌الساقین است. هم‌چنین رابطهٔ فیثاغورس میان اضلاع آن برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه نیز هست:

$$(\sqrt{41})^2+(\sqrt{41})^2=(\sqrt{82})^2$$

مساحت مثلث

در هر مثلث دلخواه، با داشتن مختصات رئوس، می‌توانیم مساحت مثلث را از رابطهٔ زیر به‌دست آوریم:



$$S=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

تذکر برای نوشتن رابطهٔ فوق کافیست، روی اضلاع مثلث، فلش‌هایی مثلاً در جهت ساعتگرد مشخص کنیم. سپس x هر رأس را در تفاضل y های دو رأس بعدی (در جهت فلش‌ها) ضرب و در نهایت این عبارت‌ها را باهم جمع کنیم.

مثال **مساحت مثلث زیر را به‌دست آورید.**

$$S=\frac{1}{2}|2(0-0)+5(0-3)+1(3-0)|=\frac{1}{2}|-15+3|=6$$

تست **اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $x+y=0$ ، $y=x+1$ ، $y=-2x+2$ هستند. مساحت مثلث کدام است؟**

۱) $\frac{7}{6}$　۲) $\frac{25}{6}$　۳) $\frac{7}{12}$　۴) $\frac{25}{12}$

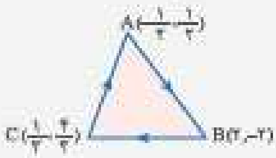
۴ محل برخورد دوبه‌دوی خط‌ها را می‌یابیم تا مختصات رئوس مثلث به‌دست آید:

$$\begin{cases}x+y=0\\y=x+1\end{cases}\Rightarrow A(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$$

$$\begin{cases}x+y=0\\y=-2x+2\end{cases}\Rightarrow B(2,-2)$$

$$\begin{cases}y=x+1\\y=-2x+2\end{cases}\Rightarrow C(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$$

حال به کمک مختصات رئوس، مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:



$$S=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}|(\frac{-1}{2})(-2-\frac{4}{3})+2(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+2)|$$

$$=\frac{1}{2}|\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{6}|=\frac{1}{2}\times\frac{25}{6}=\frac{25}{12}$$

مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط و قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

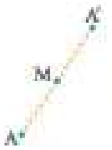
اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، طول نقطهٔ M برابر میانگین طول‌های نقاط A ، B و عرض نقطهٔ M ، برابر میانگین عرض‌های نقاط A ، B است:

$$\Rightarrow\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\\y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Rightarrow M=\frac{A+B}{2}$$

مثال **اگر نقطهٔ M وسط دو نقطهٔ $A(3,-4)$ ، $B(7,6)$ باشد، مختصات نقطه M را به‌دست آورید.**

$$M(\frac{3+7}{2},\frac{-4+6}{2})\Rightarrow M(5,1)$$

اگر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M را نقطهٔ A' بنامیم، آن‌گاه نقطهٔ M ، دقیقاً وسط پاره‌خط AA' است:



$$M=\frac{A+A'}{2}\Rightarrow 2M=A+A'\Rightarrow \boxed{A'=2M-A}$$

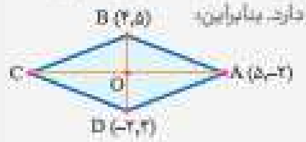
مثلاً مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(2,3)$ نسبت به نقطهٔ $B(4,1)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$B=\frac{A+A'}{2}\Rightarrow A'=2B-A\Rightarrow A'=(8,2)-(2,3)\Rightarrow A'(6,-1)$$

تست در شکل زیر مختصات رأس C کدام است؟

۱) $(-4,6)$
۲) $(-3,6)$
۳) $(-4,2)$
۴) $(-3,10)$

۴ رأس C قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به O (نقطهٔ تقاطع قطرهای لوزی) است. می‌دانیم که قطرهای لوزی یک‌دیگر را نصف می‌کنند پس نقطهٔ O وسط رأس‌های D, B قرار دارد. بنابراین:

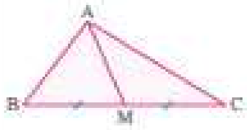


$$O=\frac{B+D}{2}\Rightarrow O=(\frac{4+(-2)}{2},\frac{5+3}{2})=(1,4)$$

$$O=\frac{A+C}{2}\Rightarrow C=2O-A\Rightarrow C=(2,8)-(5,-2)=(-3,10)$$

میانه

در یک مثلث، پاره‌خطی که یک رأس را به نقطهٔ وسط ضلع مقابل متصل می‌کند، میانه نام دارد. در شکل مقابل پاره‌خط AM میانهٔ وارد بر ضلع BC است.



برای به‌دست آوردن طول میانهٔ AM ابتدا مختصات نقطهٔ وسط ضلع BC را تعیین می‌کنیم سپس با کمک رابطهٔ فاصلهٔ دو نقطه، طول میانه AM را به‌دست آوریم.

مثال در مثلثی با رئوس $A(3,5)$, $B(-2,3)$, $C(1,0)$ طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

$$M=\frac{B+C}{2}=(\frac{-2+1}{2},\frac{3+0}{2})\Rightarrow M(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{(3+\frac{1}{2})^2+(5-\frac{3}{2})^2}=\frac{7}{2}\sqrt{2}$$

اگر بخواهیم معادلهٔ خط گذرنده از میانه AM را به‌دست آوریم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

نوشتن معادلهٔ میانهٔ AM

مثال در مثلثی با رئوس $A(-1,1)$, $B(2,-1)$, $C(0,1)$ معادلهٔ میانهٔ AM را به‌دست آورید.

۱) ابتدا مختصات نقطهٔ وسط ضلع BC را به‌دست می‌آوریم.

$$M=\frac{B+C}{2}\Rightarrow M(\frac{2+0}{2},\frac{-1+1}{2})=(1,0)$$

۲) شیب پاره‌خط AM را به‌دست می‌آوریم.

$$m_{AM}=\frac{y_A-y_M}{x_A-x_M}=\frac{1-0}{-1-1}=-\frac{1}{2}$$

۳) معادلهٔ پاره‌خط AM را به کمک نقطهٔ A و m_{AM} می‌نویسیم.
(می‌توانیم از نقطهٔ M نیز استفاده کنیم)

$$y-(1)=(-\frac{1}{2})(x-(-1))\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

تست نقاط $A(2,-1)$, $B(0,1)$, $C(-1,1)$ سه رأس مثلث هستند. طول میانهٔ CM کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) 4
۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۱ ابتدا مختصات نقطهٔ M که وسط نقاط A و B قرار دارد را به‌دست می‌آوریم:

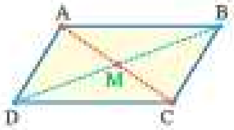
$$M=(\frac{2+0}{2},\frac{1-1}{2})=(1,0)$$

حالا فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $M(1,0)$ و $C(-1,1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$CM=\sqrt{(-1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$$

ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند؛ یعنی نقطهٔ M هم وسط پاره‌خط AC است و هم وسط پاره‌خط BD. بنابراین:



$$M=\frac{A+C}{2}=\frac{B+D}{2}$$

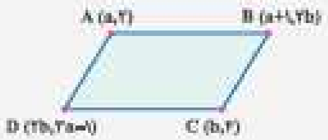
به عبارت دیگر مختصات نقطهٔ M ، محل برخورد قطرها، برابر است با:

$$M(x_M,y_M)=(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2})=(\frac{x_B+x_D}{2},\frac{y_B+y_D}{2})$$

مربع، مستطیل و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع هستند.
از عبارت بالا می‌توان نتیجه گرفت در هر متوازی‌الاضلاع همواره رابطهٔ $A+C=B+D$ برقرار است. به عبارت دیگر مجموع طول‌ها و عرض‌های دو سر قطر کوچک هر متوازی‌الاضلاع با مجموع طول‌ها و عرض‌های دو سر قطر بزرگ آن برابر است:

$$y_A+y_C=y_B+y_D \qquad x_A+x_C=x_B+x_D$$

تست در متوازی‌الاضلاع زیر، مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۷

۲ مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابر است:

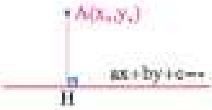
$$1)\ x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow a+b=(a+1)+2b\Rightarrow b=-1$$

$$2)\ y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow 2+4=2b+2a-1\Rightarrow 2b+2a=7$$

با جای‌گذاری $b=-1$ در معادلهٔ (۲)، مقدار $a=3$ به‌دست می‌آید. بنابراین:
$a+b=3-1=2$

فاصلهٔ نقطه از خط

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خطی به معادلهٔ $ax+by+c=0$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تذکر برای استفاده از این رابطه، باید تمام جملات معادلهٔ خط را به یک طرف تساوی ببریم و طرف دیگر صفر باشد.

مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,4)$ از خط $y=\frac{3}{4}x+2$ را به‌دست آورید.

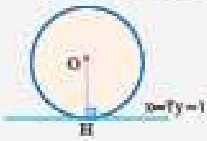
ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$y=\frac{3}{4}x+2 \xrightarrow{\times 4} 4y=3x+8 \Rightarrow 3x-4y+8=0$$

حالا می‌توانیم فاصلهٔ نقطهٔ A از این خط را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{|(3\times1)-(4\times4)+8|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

تست در شکل مقابل، مرکز دایره روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد. اگر شعاع دایره برابر $\sqrt{5}$ باشد، طول مرکز دایره کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۴

۲) ۶

۳) ۱-

۴) ۳-

۱ می‌دانیم که فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس برابر با اندازهٔ شعاع دایره است، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $x-2y-1=0$ برابر $\sqrt{5}$ است. نقطهٔ O روی نیمساز ربع اول و سوم و در نتیجه مختصات آن به‌صورت (α, α) است، بنابراین:

$$r=OH=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha-2\alpha-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|1+\alpha|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |1+\alpha|=5 \Rightarrow 1+\alpha=\pm5 \Rightarrow \alpha=4, \alpha=-6$$

با توجه به گزینه‌ها $\alpha=4$ جواب صحیح است. چون $\alpha=-6$ در گزینه‌ها نیست.

یافتن فاصلهٔ نقطه از خطوط خاص

فاصلهٔ نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ از محورهای مختصات یا خطوطی موازی محورهای مختصات، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

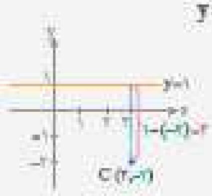
فاصله از خط $y=b$: $|\beta-b|$

فاصله از خط $x=a$: $|\alpha-a|$

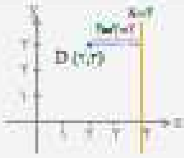
فاصله از محور oy : $|\alpha|$

فاصله از محور ox : $|\beta|$

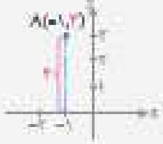
مثال ۱ فاصلهٔ نقطهٔ $C(3,-2)$ از خط $y=1$



مثال ۲ فاصلهٔ نقطهٔ $D(2,3)$ از خط $x=4$



مثال ۳ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1,3)$ از محور xها

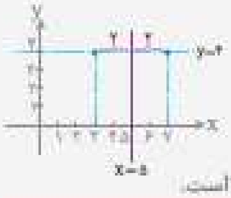


مثال ۴ فاصلهٔ نقطهٔ $B(-2,-1)$ از محور yها

تست فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,4)$ از خط $x=5$، برابر ۲ است. مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۷   ۳) ۴   ۴) ۱۰

۴ فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,4)$ از خط $x=5$ برابر با $|a-5|$ است، بنابراین:



$$|a-5|=2 \Rightarrow a-5=\pm2$$
$$\Rightarrow a=7, a=3$$

پس مجموع مقادیر a برابر $3+7=10$ است.

به دست آوردن طول ارتفاع AH

مثال در مثلثی با رئوس $A(3,5)$، $B(-2,3)$، $C(1,0)$ اندازهٔ ارتفاع AH را به دست آورید.

۱) ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از رأس‌های C، B را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{3-0}{-2-1}=-1 \xrightarrow{\text{معادلهٔ خط BC}} y-0=(-1)(x-1)$$
$$\Rightarrow y+x-1=0$$

۲) فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC برابر طول ارتفاع AH است.

$$AH=\frac{|5+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

تست مثلثی با رأس‌های $A(1,5)$، $B(7,3)$، $C(2,-2)$ مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC کدام است؟ (داخل-۹۹)

۱) ۴   ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۵   ۴) $4\sqrt{2}$

۴ معادلهٔ خط گذرنده از ضلع BC را می‌نویسیم:

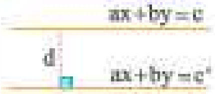
$$m_{BC}=\frac{3-(-2)}{7-2}=1 \Rightarrow \text{معادلهٔ خط}: y-(-2)=x-2 \Rightarrow x-y-4=0$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,5)$ از خط $x-y-4=0$ را به دست می‌آوریم تا طول ارتفاع AH به‌دست آید:

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1-5-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

فاصلهٔ دو خط موازی

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by=c$ ، $ax+by=c'$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثلاً برای به‌دست آوردن فاصلهٔ دو خط موازی $۲x+y=۳$ ، $۴x+۲y-۵=۰$، ابتدا طرفین معادلهٔ $۲x+y=۳$ را در ۲ ضرب می‌کنیم. سپس معادلهٔ $۴x+۲y-۵=۰$ را به‌صورت $۴x+۲y=۵$ می‌نویسیم:

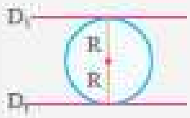
$$D_۱: ۲x+y=۳ \xrightarrow{\times ۲} ۴x+۲y=۶$$

$$D_۲: ۴x+۲y-۵=۰ \Rightarrow ۴x+۲y=۵$$ ،

بنابراین:

$$d=\frac{|۶-۵|}{\sqrt{۴^۲+۲^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$$

تست دایره‌ای بر دو خط به معادلات $y=\sqrt{۳}x+۲$ ، $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$ مماس است، قطر دایره کدام است؟



۱) $۲-\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۳}-۱$

۳) $\sqrt{۳}+۱$

۴) $۲+\sqrt{۳}$

۳ دو خط داده‌شده موازی‌اند. ابتدا ضرایب x و y را یکسان می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=\sqrt{۳}x+۲ \\ \sqrt{۳}y-۳x+۶=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۳}y-۳x-۲\sqrt{۳}=۰ \\ \sqrt{۳}y-۳x+۶=۰ \end{cases}$$

بنابراین فاصلهٔ دو خط برابر است با قطر دایره:

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۶-(-۲\sqrt{۳})|}{\sqrt{(\sqrt{۳})^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۶+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۲}}$$

$$=\frac{۲(۳+\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}+\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}+۱$$

نقطهٔ شناور

در بعضی از سؤالات، می‌خواهیم مختصات یک نقطه با ویژگی خاص که روی خطی با معادلهٔ معلوم قرار دارد را پیدا کنیم یا معادلهٔ خطی را بیابیم که ویژگی خاصی دارد.

اگر بخواهیم نقطه‌ای روی خطی با معادلهٔ معلوم پیدا کنیم، می‌توانیم طول نقطه را مثلاً a در نظر بگیریم و با جای‌گذاری a به‌جای x در معادلهٔ خط داده‌شده، y را برحسب a به‌دست آوریم و سپس با اعمال ویژگی نقطهٔ مطلوب بر مختصات نقطهٔ A، مقدار a را حساب کرده و مختصات A را بیابیم. مثلاً نقطهٔ A روی خط $y=۲x-۱$ است:

$$x_A=a \Rightarrow y_A=۲a-۱ \Rightarrow A(a, ۲a-۱)$$

مثلاً می‌خواهیم نقطه‌ای مانند A روی خط $۲x+۵y=۱۱$ پیدا کنیم که طولش ۲ واحد از عرضش بیشتر باشد. نقطهٔ A روی این خط است. پس اگر $x_A=a$ باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$۲a+۵y_A=۱۱ \Rightarrow y_A=\frac{۱۱-۲a}{۵}$$

$$x_A=y_A+۲ \Rightarrow a=\frac{۱۱-۲a}{۵}+۲ \Rightarrow ۵a=۱۱-۲a+۱۰$$

$$\Rightarrow ۷a=۲۱ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow A(۳,۱)$$

تست اگر $A(۱,۰)$ ، نقطهٔ B واقع بر نیمساز ربع دوم و طول پاره خط AB برابر $\sqrt{۵}$ باشد، مختصات نقطهٔ B کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(۱,-۱)$ ۴) $(۲,-۲)$

۲ با فرض این‌که طول نقطهٔ B برابر a است، داریم:

$$x=a \xrightarrow[y=-x]{\text{نیمساز ربع دوم}} y=-a \Rightarrow B(a,-a)$$

پس طول پاره‌خط AB برابر است با:

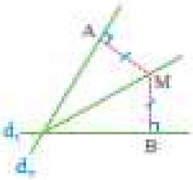
$$\sqrt{(a-۱)^۲+(-a-۰)^۲}=\sqrt{۵} \Rightarrow ۲a^۲-۲a+۱=۵$$

$$\Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ a=۲ \end{cases}$$

پس فاصلهٔ هر دو نقطهٔ $(-۱,۱)$ ، $(۲,-۲)$ از نقطهٔ $A(۱,۰)$ برابر با $\sqrt{۵}$ است. دقت کنید نقطهٔ $(۲,-۲)$ روی نیمساز ربع چهارم قرار دارد و در نتیجه قابل قبول نیست.

نوشتن معادلهٔ نیمساز زاویه

اگر معادلهٔ ضلع‌های یک زاویه را داشته باشیم، برای نوشتن معادلهٔ نیمساز زاویه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱ نقطه‌ای مانند M به مختصات $M(x,y)$ روی نیمساز در نظر می‌گیریم.

۲ با توجه به این‌که فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک اندازه است، معادلهٔ $|BM|=|AM|$ را تشکیل می‌دهیم و ساده می‌کنیم.

تست معادلهٔ نیمساز زاویهٔ حاصل از تقاطع دو خط $۲x+۳y=۲$ و $۳x+۲y=۸$ کدام است؟

۱) $x+y=۲$ ۲) $x+y=۱$ ۳) $x-y=۳$ ۴) $x-y=۱$

۱ می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع این زاویه به یک فاصله است. بنابراین اگر نقطهٔ $M(x,y)$ روی نیمساز باشد خواهیم داشت:

$$\frac{|۲x+۳y-۲|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{|۳x+۲y-۸|}{\sqrt{۹+۴}} \Rightarrow ۲x+۳y-۲=\pm(۳x+۲y-۸)$$

$$\begin{cases} d_۱: ۲x+۳y-۲=۳x+۲y-۸ \Rightarrow d_۱: x-y=۶ \\ d_۲: ۲x+۳y-۲=-۳x-۲y+۸ \Rightarrow ۵x+۵y=۱۰ \Rightarrow d_۲: x+y=۲ \end{cases}$$

$d_۱$ و $d_۲$ نیمسازهای دو زاویهٔ حاصل از تقاطع دو خط داده شده هستند که معادلهٔ خط $d_۲$ در گزینهٔ (۱) آمده است.

معادلهٔ عمود منصف

برای نوشتن معادلهٔ عمود منصف پاره خط AB به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ مختصات نقطهٔ M وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم.

۲ شیب پاره خط AB را پیدا می‌کنیم.

۳ شیب خط d عکس قرینهٔ شیب AB است.

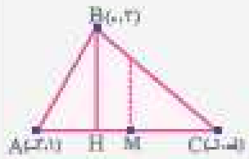
۴ با داشتن شیب خط d و نقطهٔ M معادلهٔ خط d را می‌نویسیم.

تست نقاط $A(-3,1)$، $B(0,3)$، $C(-1,-1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. فاصلهٔ عمود منصف AC از ارتفاع BH کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}-1$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

۳ برای نوشتن معادلهٔ ارتفاع BH ابتدا شیب خط AC را به دست می‌آوریم:



$$m_{AC}=\frac{1-(-1)}{-3-(-1)}=-1 \Rightarrow m_{BH}=1$$

معادلهٔ BH: $y-3=1\times(x-0) \Rightarrow x-y+3=0$

حال نقطهٔ وسط ضلع AC را به دست می‌آوریم و معادلهٔ عمود منصف آن را می‌نویسیم:

$$M=\left(\frac{(-3)+(-1)}{2},\frac{1+(-1)}{2}\right)=(-2,0)$$

$\Rightarrow$ معادلهٔ عمود منصف AC: $y-0=1\times(x+2) \Rightarrow x-y+2=0$

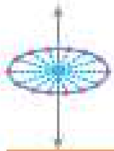
بنابراین فاصلهٔ ارتفاع BH و عمود منصف AC برابر است با:

$$\frac{|3-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

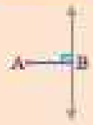
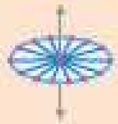
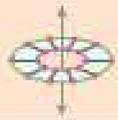
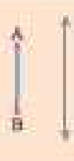
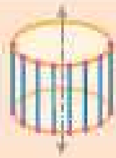
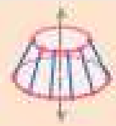
درس ۲ دوران و برش

دوران نقطه و خط حول یک محور

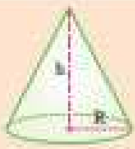
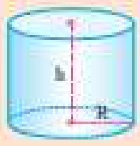
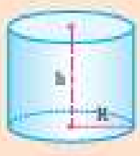
برای مشخص کردن شکلی که در اثر دوران یک نقطه حول یک محور پدید می‌آید، باید از آن نقطه عمودی بر محور دوران رسم کنیم، سپس این شعاع را به اندازهٔ 360° درجه به‌طور عمود بر محور بچرخانیم. شکل حاصل، محیط دایره است.



اگر پاره‌خط AB را حول یک محور دوران دهیم، با توجه به وضعیت پاره‌خط AB و محور دوران، سطح‌های زیر ایجاد می‌شود:

وضعیت پاره‌خط AB و محور دوران	شکل حاصل از دوران	سطح حاصل از دوران
		سطح یک دایره
		سطح بین دو دایره
		سطح جانبی استوانه
		سطح مخروط ناقص
		سطح مخروط

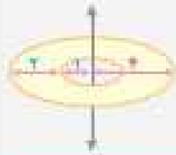
برای حل سوالات این بخش، سطح جانبی و حجم چند شکل مهم که در دوران اشکال ممکن است مورد استفاده قرار گیرد، را یادآوری کنیم:

حجم مخروط		$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$
حجم استوانه		$V=\pi R^2 h$
حجم کره		$V=\frac{4}{3}\pi R^3$
سطح جانبی مخروط قائم		$S=\pi RL$
سطح جانبی استوانه		$S=2\pi Rh$
سطح جانبی کره		$S=\pi R^2$

تست مطابق شکل، امتداد پاره‌خط AB به طول ۳ عمود بر خط D است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط D برابر ۱ باشد، از دوران AB حول D یک سطح حلقوی به وجود می‌آید. مساحت این سطح کدام است؟

۱) 15π
۲) 12π
۳) 9π
۴) 6π

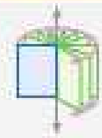
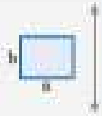
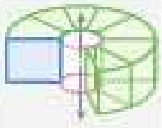
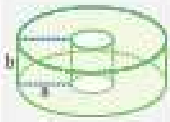
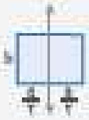
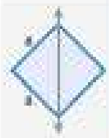
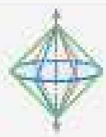
۱ باید مساحت بین دو دایره، به شعاع‌های ۱ و ۴ را پیدا کنیم.



$$\Rightarrow S=\pi(4)^2-\pi(1)^2=16\pi-\pi=15\pi$$

دوران مربع و مستطیل حول یک محور

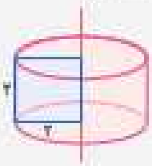
شکل حاصل از دوران یک مستطیل یا مربع، به محور دوران آن بستگی دارد که به‌صورت‌های زیر است:

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ضلع مربع یا مستطیل			
خطی موازی یک ضلع مربع یا مستطیل			
محور تقارن طول یا عرض مربع یا مستطیل			
قطر مربع			

تست اگر مربع به ضلع ۲ را حول یک ضلع دوران دهیم، شکل حاصل کدام است؟

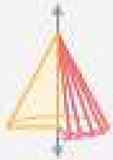
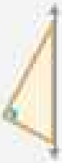
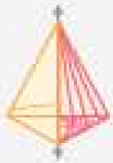
۱) استوانه به ارتفاع ۴
۲) استوانه به شعاع قاعدهٔ ۴
۳) استوانه به شعاع قاعدهٔ ۲
۴) استوانه به ارتفاع ۸

۳ مطابق شکل، از دوران یک مربع به ضلع ۲ حول یک ضلع، استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۲ حاصل می‌شود.

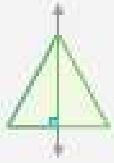
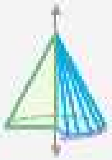
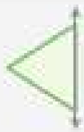
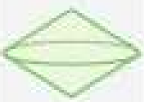


دوران مثلث

از دوران مثلث قائم الزاویه حول اضلاع قائم، یک مخروط و حول وتر، دو مخروط از قاعده به هم چسبیده حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ضلع قائم			
وتر			

از دوران مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعده، یک مخروط و حول قاعده، دو مخروط از قاعده به هم چسبیده، حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ارتفاع وارد بر قاعده			
قاعده			

از دوران لوزی، حول قطر بزرگ یا قطر کوچک آن نیز دو مخروط از قاعده به هم چسبیده، پدید می‌آید.

تست یک لوزی با طول قطرهای ۴ و ۶ را حول قطر بزرگ دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

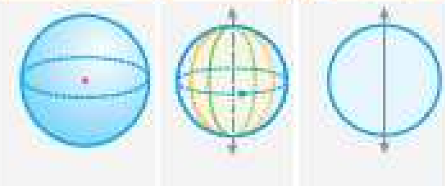
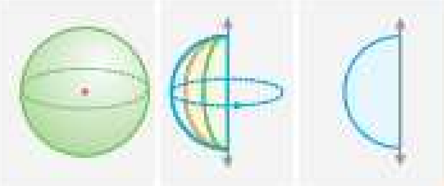
۱) 4π
۲) 8π
۳) 12π
۴) 16π

۲ از دوران لوزی حول قطر بزرگ دو مخروط مطابق شکل حاصل می‌شود:

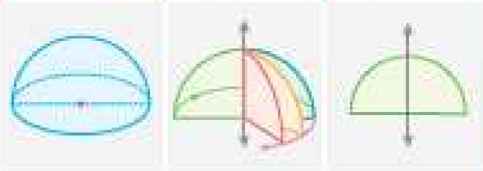
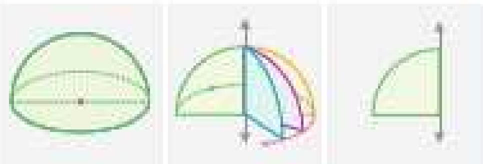
$$\rightarrow V=2\times(\frac{1}{3}\pi\times 2^2\times 3)=8\pi$$

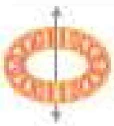
دوران دایره، نیم‌دایره، ربع دایره

از دوران دایره و نیم‌دایره حول قطرهایشان، کره به‌وجود می‌آید.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
قطر			
قطر			

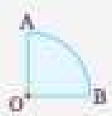
از دوران نیم‌دایره، حول محور تقارن و همچنین از دوران ربع‌دایره حول یکی از دو شعاع، نیم‌کره حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
محور تقارن			
شعاع			



از دوران دایره حول یک خط موازی با یکی از قطرهای آن، یک تونل استوانه‌ای (دونات) حاصل می‌شود.

تست یک ربع دایره مطابق شکل را حول پاره‌خط OA به طول ۳ دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل چقدر است؟

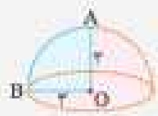


۱) 22π

۲) 18π

۳) 14π

۴) 12π

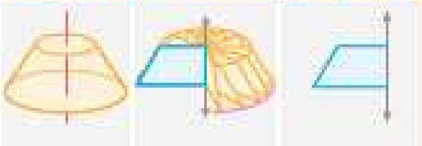
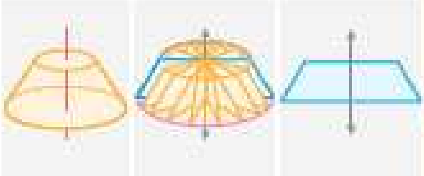


۲ از دوران ربع دایره حول یکی از شعاع‌ها، نیم‌کره به‌وجود می‌آید و حجم آن برابر است با:

$$V = \frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi$$

دوران ذوزنقه

از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم و همچنین از دوران ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول محور تقارن، مخروط ناقص حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ساق قائم (در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه)			
محور تقارن (در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین)			

تست یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه به قاعدهٔ ۳ و ۵ و ساق قائم ۴ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. جسم حاصل کدام است؟

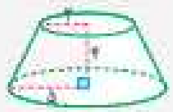
۱) مخروط قائم به شعاع قاعدهٔ ۵

۲) هرم قائم به شعاع قاعدهٔ ۵

۳) مخروط ناقص به ارتفاع ۴

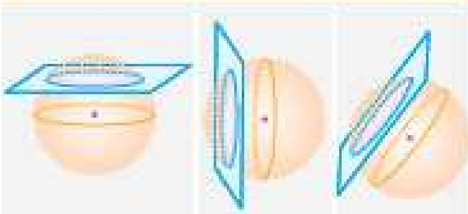
۴) مخروط ناقص به شعاع قاعدهٔ ۴

۳ جسم حاصل یک مخروط ناقص به شعاع‌های قاعده ۳ و ۵ و ارتفاع ۴ است.



بُـرش

منظور از بُرش، تقاطع دادن یک صفحه با یک جسم هندسی توپُر مانند کرهٔ توپُر، مخروط توپُر، استوانهٔ توپُر و ... است و شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی توپُر حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود. سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره، همواره یک دایره است.

نوع برش	برش مایل	برش قائم	برش افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	دایره	دایره	دایره

هرچه صفحه به مرکز نزدیک‌تر شود، دایرهٔ ایجادشده نیز بزرگ‌تر می‌شود. پس وقتی صفحه از مرکز کره بگذرد، دایره‌ای با بیش‌ترین مساحت ایجاد می‌شود.

تست **یک کرهٔ چوبی توپُر به شعاع ۵ واحد را با یک صفحه، به فاصلهٔ ۴ واحد از مرکز برش زده‌ایم. سطح مقطع حاصل چقدر است؟**

۱) 4π ۲) 6π ۳) 7π ۴) 9π

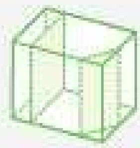
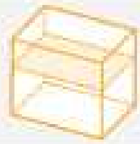
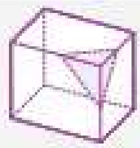
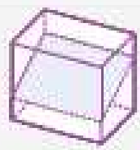
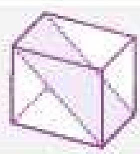
۴ در مثلث قائم الزاویهٔ مشخص‌شده، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$5^2 = 4^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

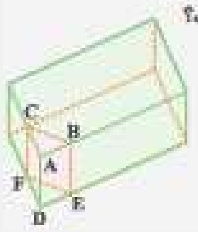
بنابراین مساحت دایرهٔ ایجاد شده برابر است با: $S = \pi r^2 = 9\pi$

بُرش مکعب

نمونه‌هایی از برش افقی، قائم و مایل یک مکعب مستطیل به قاعدهٔ مربع که در کتاب درسی بحث‌شده، به‌صورت جدول زیر است:

نوع برش	نمایش برش	شکل حاصل از برش
برش قائم		مستطیل یا مربع
برش افقی		مستطیل
برش مایل		مثلث
		مستطیل
		مستطیل

تست **مکعب مستطیل مقابل به قاعدهٔ ۴ و ۸ واحد و ارتفاع $2\sqrt{2}$ واحد را مطابق شکل به‌طور عمودی طوری برش می‌زنیم که $AB = AC = 2$ شود. مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟**



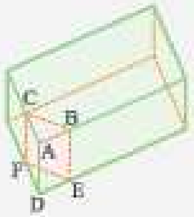
۱) $4\sqrt{2}$

۲) ۴

۳) $8\sqrt{2}$

۴) ۸

۴ سطح مقطع حاصل، یک مستطیل است.

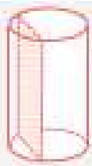
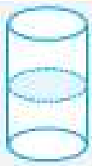


$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 8 \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$$

$$CF = 2\sqrt{2} \Rightarrow S = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$$

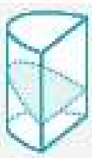
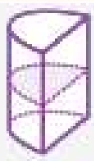
بُرش استوانه

سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه‌های افقی، قائم و مایل به‌صورت زیر است:

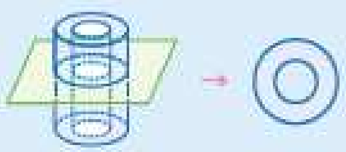
نوع برش	مایل (هردو قاعده را قطع نکند)	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	بیضی	مستطیل	دایره

در برش قائم، در حالتی که صفحه از وسط استوانه بگذرد، مستطیلی با بیش‌ترین مساحت ایجاد می‌شود.

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک نیم استوانه، به‌صورت شکل‌های زیر است:

نوع برش	مایل (هر دو قاعده را قطع نکند.)	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	نیم بیضی	مستطیل	نیم‌دایره

تذکر در اثر برخورد صفحه‌ای موازی با استوانهٔ توخالی، یک دایرهٔ توخالی پدید می‌آید.

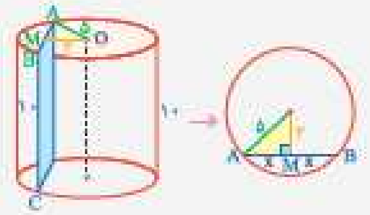


تست **یک استوانهٔ توپُر به ارتفاع ۱۰ واحد و شعاع قاعدهٔ ۵ واحد را در نظر بگیرید. این استوانه را با یک صفحهٔ قائم که فاصلهٔ آن از مرکز قاعده ۳ واحد است، به‌طور عمودی بُرش می‌زنیم. مساحت مقطع ایجادشده چقدر است؟**

۱) ۴۰   ۲) ۸۰

۳) ۳۰   ۴) ۵۰

۲ سطح مقطع ایجادشده، مستطیل است.

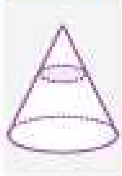


$$x^2+3^2=5^2 \Rightarrow x=4 \Rightarrow 2x=AB=8$$

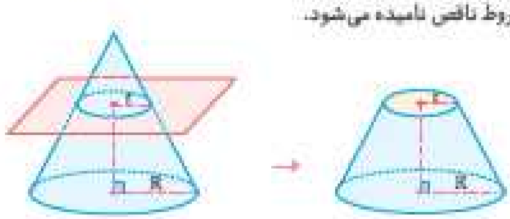
بنابراین مساحت مستطیل ABCD برابر $8\times 10=80$ است.

بُرش مخروط

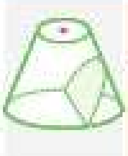
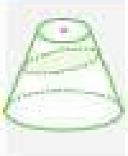
سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک مخروط قائم، به صورت زیر است:

نوع برش	مایل	مایل	قائم گذرنده از رأس مخروط	افقی
نمایش برش				
شکل حاصل از برش	سهمی	بیضی	مثلث	دایره

اگر مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن قطع کنیم، مخروط به دو بخش تقسیم می‌شود که بخش بالایی و نوک‌تیز آن دوباره یک مخروط قائم است. بخش پایینی که هر دو قاعدهٔ آن دایره است، مخروط ناقص نامیده می‌شود.



مخروط   مخروط ناقص

نوع برش	مایل	مایل	قائم	افقی
نمایش برش				
شکل حاصل از برش	سهمی	بیضی	ذوزنقه	دایره

تست **یک مخروط چوبی توپر به شعاع قاعده‌های ۱ و ۵ و مولد ۵ را توسط یک صفحهٔ قائم که از مراکز قاعده‌های بالا و پایین می‌گذرد، برش زده‌ایم. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟**

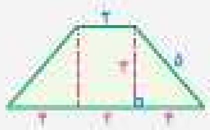
۱) ۳۶

۲) ۲۴

۳) ۱۸

۴) ۱۲

۳ قاعده‌های ذوزنقه ۲ و ۱۰ و ساق آن ۵ است. چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است، با رسم دو ارتفاع به راحتی اندازهٔ ارتفاع $h=3$ به دست می‌آید. بنابراین:

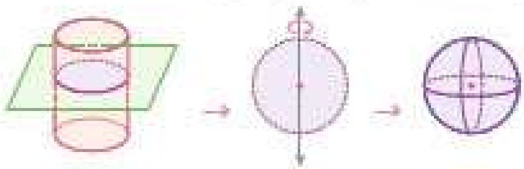


$$\rightarrow S=\frac{1}{2}(2+10)\times 3=18$$

ترکیب دوران و بُرش

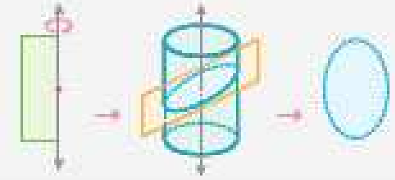
در بعضی از سؤالات، ابتدا یک جسم هندسی توپر، بُرش داده می‌شود و سپس سطح مقطع حاصل، حول یک محور خاص دوران داده می‌شود.

مثلاً اگر صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ یک استوانهٔ توپر، آن را قطع کند، سطح مقطع ایجاد شده دایره خواهد بود. سپس اگر این دایره را حول یکی از قطرهای آن دوران دهیم، یک کره پدید می‌آید.

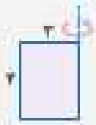


در بعضی از سؤالات، ابتدا یک شکل هندسی حول یک محور خاص دوران داده می‌شود و سپس شکل حاصل را با یک صفحه بُرش می‌دهند و سؤالی راجع به سطح مقطع حاصل پرسیده می‌شود.

مثال اگر یک مستطیل را حول ضلع بزرگ آن دوران دهیم، حجم حاصل یک استوانه خواهد بود. حال اگر این استوانه را با یک صفحه به‌طور مایل بُرش دهیم، سطح مقطع حاصل یک بیضی خواهد بود:

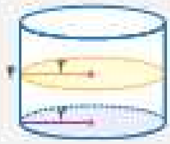


تست مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ را حول طول آن دوران می‌دهیم. اگر حجم را با صفحه‌ای عمود بر طول این مستطیل برش دهیم، مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟



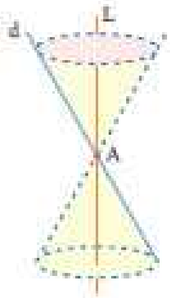
۱) ۳π ۲) ۶π
۳) ۹π ۴) ۱۶π

۳ شکل حاصل از دوران این مستطیل حول طول آن، یک استوانه به ارتفاع ۴ و شعاع قاعدهٔ ۳ است. از طرفی، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ موازی با قاعده، یک دایره به شعاع ۳ است که مساحت آن برابر است با:



$S = \pi R^۲ = \pi (۳)^۲ = ۹\pi$

مقاطع مخروطی

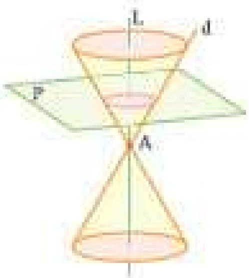


دو خط d و L را که در نقطهٔ A مانند شکل متقاطع (غیر عمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط L ثابت باشد و خط d را حول خط L دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را رویهٔ مخروطی [سطح مخروطی] می‌نامیم. در این حالت خط L را محور، خط d را مولد و نقطهٔ A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم.

در اثر برخورد یک صفحه و سطح مخروطی، یک منحنی ایجاد می‌شود که به آن مقطع مخروطی می‌گویند. نوع مقطع ایجادشده، بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و L دارد که در زیر این حالات بررسی شده است:

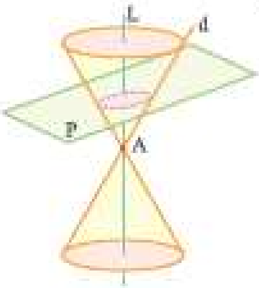
۱ دایره

صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.



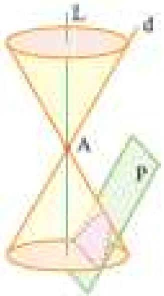
۲ بیضی

صفحهٔ P بر محور L عمود نبوده و غیرموازی با مولد d است.



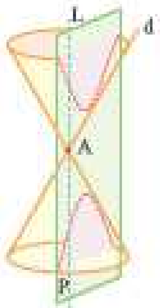
۳ سهمی

صفحهٔ P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.



۴ هذلولی

صفحهٔ P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند.



تذکر در حالتی که صفحه از رأس A عبور کند، ممکن است یک نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع ایجاد شود.

تست مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟

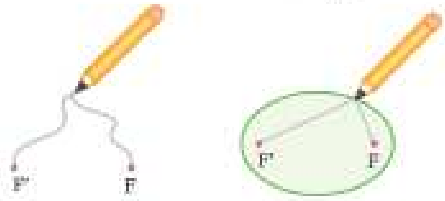
۱) موازی یک مولد
۲) موازی محور
۳) عمود بر یک مولد
۴) گذرا از نقطهٔ تلاقی محور و مولد

۱ اگر صفحهٔ موازی با مولد مخروط، رویهٔ مخروطی را قطع کند، سهمی به‌وجود می‌آید.

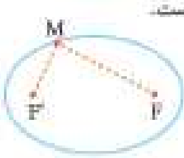
درس ۳ بیضی

تعریف بیضی

یک تکه نخ به طول $2a$ را در نظر می‌گیریم و یک سر آن را مطابق شکل در نقطهٔ F و سر دیگر آن را در F' ثابت می‌کنیم. اگر یک مداد را همانند شکل داخل نخ کنیم و یک منحنی به‌گونه‌ای رسم کنیم که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به‌صورت صاف و کشیده شده باشد، شکل حاصل یک منحنی خواهد بود که بیضی نام دارد.



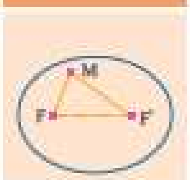
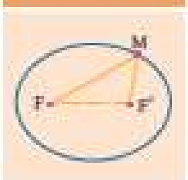
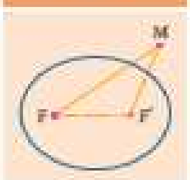
در واقع می‌توان گفت بیضی مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت F و F' به نام کانون‌های بیضی همواره مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت همواره برابر با $2a$ است.



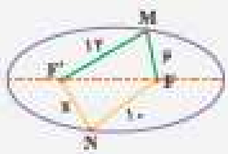
$$MF + MF' = 2a$$

وضعیت نقطه و بیضی نسبت به هم

همان‌طور که گفتیم، اگر نقطهٔ M روی یک بیضی باشد، مجموع فواصل آن از دو کانون بیضی، همواره برابر با $2a$ است. در حالت کلی نقطهٔ دلخواه M می‌تواند روی بیضی، بیرون یا درون آن باشد:

M درون بیضی	M روی بیضی	M خارج بیضی
		
$MF + MF' < 2a$	$MF + MF' = 2a$	$MF + MF' > 2a$

تست در بیضی داده‌شده، F و F' کانون‌های بیضی هستند. مقدار x کدام است؟



۱) ۶

۲) ۸

۳) ۷/۲

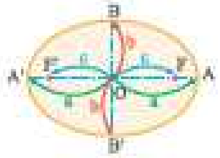
۴) ۱۰

۲ M و N روی محیط بیضی قرار دارند. پس مجموع فواصل هر یک از آن‌ها از F و F' ثابت است.

$$MF + MF' = NF + NF' \Rightarrow 12 + 6 = x + 10 \Rightarrow x = 8$$

پارامترهای بیضی

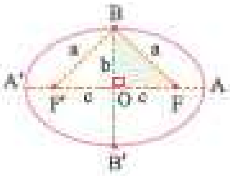
پاره‌خط AA' به طول $2a$ را قطر بزرگ بیضی، پاره‌خط BB' به طول $2b$ را قطر کوچک بیضی و پاره‌خط FF' به طول $2c$ را فاصلهٔ کانونی بیضی می‌نامند.



نقطهٔ O مرکز بیضی نامیده می‌شود که وسط قطر بزرگ، قطر کوچک و دوکانون بیضی قرار دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

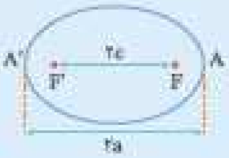
$OB = OB' = b$ $\quad$ $OF = OF' = c$ $\quad$ $OA = OA' = a$

فاصلهٔ نقطهٔ B تا هر یک از کانون‌های بیضی، برابر a است. پس در مثلث OBF رابطهٔ فیثاغورس برقرار است:



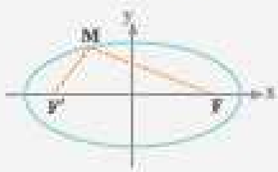
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

تفکر واضح است در هر بیضی، همواره قطر بزرگ از فاصلهٔ کانونی بزرگ‌تر است. پس:



$$\Rightarrow 2a > 2c \Rightarrow a > c$$

تست در بیضی زیر با کانون‌های F و F' طول قطر کوچک برابر ۸ و محیط مثلث MFF' برابر ۲۰ است. طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



۱) ۱۱/۲

۲) ۱۱/۴

۳) ۱۱/۶

۴) ۱۱/۸

۳ می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه روی بیضی از کانون‌های F و F' برابر $2a$ است. پس محیط مثلث MFF' برابر است با:

$$\underbrace{MF + MF'}_{2a} + \underbrace{FF'}_{2c} = 20 \Rightarrow a + c = 10$$

از طرفی طول قطر کوچک برابر $2b = 8$ است، پس:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 4^2 = \underbrace{(a+c)}_{10}(a-c) \Rightarrow a - c = 1/6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 10 \\ a - c = 1/6 \end{cases} \Rightarrow 2a = 11/6$$

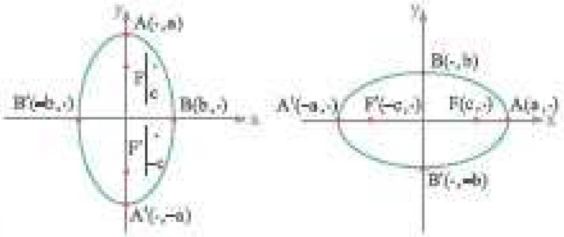
انواع بیضی

با توجه به وضعیت قرارگیری کانون‌های بیضی نسبت به هم، سه حالت داریم:

بیضی قائم	بیضی مایل	بیضی افقی

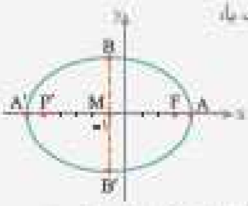
بیضی در دستگاه مختصات

اگر محورهای مختصات یک بیضی افقی یا قائم بر محورهای مختصات منطبق باشد، می‌توانیم مطابق شکل مختصات کانون‌ها و دو سر قطر بزرگ و کوچک را به راحتی مشخص کنیم:



مثال ۱ **کانون‌های یک بیضی نقاط $(3,0)$ و $(-5,0)$ هستند و طول قطر بزرگ آن برابر ۱۰ است. مختصات دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.**

چون دو نقطهٔ $F(3,0)$ و $F'(-5,0)$ هم‌عرض هستند، پس بیضی افقی است و مختصات مرکز آن برابر است با:



$$M\left(\frac{-5+3}{2},0\right)=(-1,0)$$

از طرفی فاصلهٔ کانونی برابر ۸ و طول قطر بزرگ برابر ۱۰ است، پس $c=4$ و $a=5$ است و داریم:

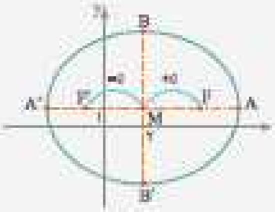
$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=5^2-4^2=9 \Rightarrow b=3$$

پس با توجه به شکل و مختصات مرکز، داریم:

$$A(4,0),\ A'(-6,0),\ B(-1,3),\ B'(-1,-3)$$

مثال ۲ **در یک بیضی نقطهٔ $M(2,1)$ مرکز بیضی، نقطهٔ $A(7,1)$ یک سر قطر بزرگ و نقطهٔ $B(2,5)$ یک سر قطر کوچک است. مختصات کانون‌های بیضی را به‌دست آورید.**

فاصلهٔ مرکز بیضی تا نقطهٔ A برابر a و فاصلهٔ آن تا نقطهٔ B برابر b است، پس:

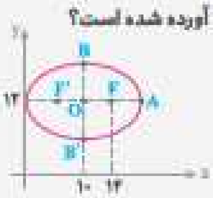


$$\Rightarrow \begin{cases} a=AM=7-2=5 \\ b=BM=5-1=4 \end{cases}$$

حال با کمک رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ مقدار c را به‌دست می‌آوریم و مختصات کانون‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=5^2-4^2=9 \Rightarrow c=3 \Rightarrow \begin{cases} F(2+3,1)=(5,1) \\ F'(2-3,1)=(-1,1) \end{cases}$$

تست **بیضی مقابل به مرکز $O(10,12)$ بر محور yها مماس است. مختصات چه تعداد از نقاط آن به‌درستی آورده شده است؟**



الف) $B(10,2\sqrt{21})$

ب) $A(20,12)$

پ) $B'(10,12-2\sqrt{21})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲ مطابق شکل $c=4$ و $a=10$ است. پس:

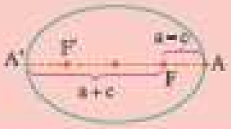
$$b^2=a^2-c^2=10^2-4^2=84 \Rightarrow b=2\sqrt{21}$$

✗ الف) $B(10,12+2\sqrt{21})$

✓ ب) $A(20,12)$

✓ پ) $B'(10,12-2\sqrt{21})$

نکته مطابق شکل، فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس بیضی برابر با $a+c$ و از نزدیک‌ترین رأس بیضی برابر با $a-c$ است.



تست **در یک بیضی فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس بیضی برابر ۶ و اندازهٔ قطر بزرگ ۸ است. اندازهٔ قطر کوچک بیضی کدام است؟**

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

۲ فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس بیضی برابر $a+c$ و اندازهٔ قطر بزرگ $2a$ است، بنابراین:

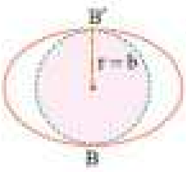
$$\begin{cases} 1)\ 2a=8 \Rightarrow a=4 \\ 2)\ a+c=6 \end{cases} \Rightarrow c=2,\ b^2=a^2-c^2=12 \Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

در نتیجه اندازه قطر کوچک بیضی برابر $2b=4\sqrt{3}$ است.

شکل‌های محیط و محاط در بیضی

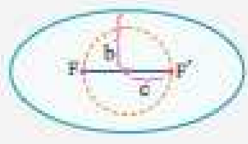
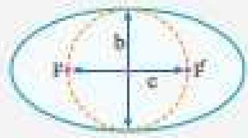
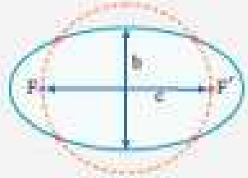
دایره‌ای که مرکز آن منطبق بر مرکز بیضی باشد، با توجه به اندازهٔ شعاع دارای حالت‌های زیر است:

۱ اگر دایره‌ای در رأس‌های B و B' بر بیضی مماس شود، آن‌گاه شعاع دایره برابر $r=b$ است.



۲ اگر دایره‌ای در رأس‌های A و A' بر بیضی مماس شود، آن‌گاه شعاع دایره برابر $r=a$ است.

۳ اگر دایره‌ای با قطر فاصلهٔ کانونی (یعنی شعاع برابر c = ۳ باشد) و هم‌مرکز با بیضی رسم شود، می‌تواند سه وضعیت مختلف نسبت به بیضی داشته باشد:

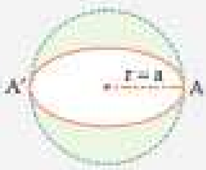
متداخل		$c<b$
مماس داخل		$c=b$
متقاطع		$c>b$

تست **قطر یک دایره، بر قطر بزرگ یک بیضی منطبق است. اگر فاصلهٔ کانونی این بیضی برابر $۲\sqrt{۲}$ و قطر کوچک آن $۶\sqrt{۲}$ باشد، مساحت دایره چقدر است؟**

۱) ۱۰π ۲) ۲۰π

۳) ۳۰π ۴) ۴۰π

۲ با توجه به صورت سؤال $۲c=۲\sqrt{۲}$ و $۲b=۶\sqrt{۲}$ است، پس:



$c=\sqrt{۲}\ ,\ b=۳\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲$

$\Rightarrow a^۲=(۳\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۲})^۲=۲۰ \Rightarrow a=۲\sqrt{۵}$

چون قطر دایره منطبق بر قطر بزرگ بیضی است، پس مطابق شکل شعاع دایره برابر $a=r=۲\sqrt{۵}$ است. پس مساحت دایره برابر است با:

$S=\pi r^۲=\pi(۲\sqrt{۵})^۲=۲۰\pi$

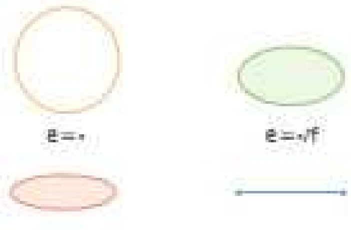
خروج از مرکز بیضی

نسبت $\frac{c}{a}$ در بیضی، خروج از مرکز نامیده می‌شود و آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

$$e=\frac{c}{a}$$

تذکر ۱ در هر بیضی همواره $۰<e<۱$ است، پس $۰<\frac{c}{a}<۱$ است.

تذکر ۲ خروج از مرکز یک بیضی، میزان کشیدگی آن را نشان می‌دهد. هرچه $e=\frac{c}{a}$ بزرگ‌تر و به عدد ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هرچه $e=\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد. [اگر $e=۱$ باشد، بیضی به یک پاره‌خط تبدیل می‌شود و اگر $e=۰$ باشد، بیضی به یک دایره تبدیل می‌شود.]



نکته با داشتن نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ یعنی $\frac{b}{a}$، می‌توانیم خروج از مرکز بیضی را به صورت زیر به‌دست آوریم:

$$c^۲+b^۲=a^۲ \xrightarrow{\div a^۲} (\frac{c}{a})^۲+(\frac{b}{a})^۲=۱ \Rightarrow e=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}$$

تست **در شکل مقابل، مبدأ مختصات مرکز بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۲۶}}$

۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}$

۳) $\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$

۴) $\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$

۳ رأس B با طول ۰ و کانون F با عرض ۰ روی خط قرار دارند:

$B: x=۰ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow B(۰\ ,\ ۲)$

$F: y=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow F(-۲\ ,\ ۰)$

$\Rightarrow b=۲\ ,\ c=۲$

$\Rightarrow a=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$

درس ۳ دایره

معادلهٔ استاندارد دایره

اگر مختصات مرکز دایره $M(\alpha,\beta)$ و شعاع آن R باشد، معادلهٔ استاندارد دایره به صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

بنابراین برای نوشتن معادلهٔ دایره باید مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع را داشته باشیم.

مثال ۱ **معادلهٔ دایره‌های زیر را بنویسید.**

الف) دایرهٔ C_1 به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲

ب) دایرهٔ C_2 به مرکز $M(2,-1)$ و شعاع ۳

الف) $(x-0)^2+(y-0)^2=4 \Rightarrow x^2+y^2=4$

ب) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

مثال ۲ **دایره به معادلهٔ $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ را در نظر بگیرید. مختصات مرکز و شعاع این دایره را پیدا کنید.**

برای پیدا کردن مختصات مرکز، عبارت‌های داخل هر پرانتز را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشهٔ آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ y-2=0 \Rightarrow y=2 \end{matrix} \Rightarrow M(1,2)$$

در ضمن می‌دانیم عدد ۲۵ برابر R^2 است، پس شعاع دایره برابر $R=5$ است.

اگر معادلهٔ استاندارد دایره یعنی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ را باز کنیم و همه را به طرف چپ ببریم، معادلهٔ دایره به صورت زیر درمی‌آید که آن را معادلهٔ گسترده یا ضمنی دایره می‌نامند:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

مرکز و شعاع دایره در معادلهٔ گسترده از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{مرکز}=M\left(-\frac{x\ \text{ضریب}}{2},-\frac{y\ \text{ضریب}}{2}\right)=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$$

$$R=\sqrt{(\text{طول مرکز})^2+(\text{عرض مرکز})^2-c}=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

مثال **مختصات مرکز و شعاع دایره‌های زیر را پیدا کنید.**

الف) $x^2+y^2-4x+2y+1=0 \Rightarrow M\left(-\frac{-4}{2},-\frac{2}{2}\right)=M(2,-1)$

$\Rightarrow R=\sqrt{2^2+(-1)^2-1}=\sqrt{4}=2$

ب) $x^2+y^2+6x-4y-3=0 \Rightarrow M\left(-\frac{6}{2},-\frac{-4}{2}\right)=M(-3,2)$

$\Rightarrow R=\sqrt{(-3)^2+2^2+3}=\sqrt{16}=4$

تست **مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $2x^2+2y^2-4x+8y=0$ کدام است؟**

۱) 3π　　۲) 5π　　۳) 7π　　۴) 9π

۲ طرفین معادله را بر ۲ تقسیم کرده و دایره‌ای با معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y=0$ به‌دست می‌آید و داریم:

$$O(1,-2),\ R=\sqrt{1+4}=\sqrt{5} \Rightarrow S=\pi R^2=5\pi$$

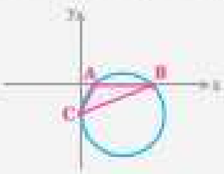
محل برخورد دایره با محورهای مختصات

برای پیدا کردن نقاط برخورد دایره با محورهای مختصات، باید x یا y را مساوی صفر قرار دهیم:

۱ نقاط برخورد با محور xها: در معادلهٔ دایره $y=0$ قرار می‌دهیم.

۲ نقاط برخورد با محور yها: در معادلهٔ دایره $x=0$ قرار می‌دهیم.

تست **دایرهٔ $x^2+y^2-8x+4y+4=0$ محور xها را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند و در نقطهٔ C بر محور yها مماس است. مساحت مثلث ABC کدام است؟**



۱) $4\sqrt{2}$

۲) $4\sqrt{3}$

۳) $5\sqrt{2}$

۴) $5\sqrt{3}$

۲ با جای‌گذاری $y=0$ در $x^2+y^2-8x+4y+4=0$ طول نقاط A و B و با جای‌گذاری $x=0$ در آن عرض نقطهٔ C را پیدا می‌کنیم:

$$y=0: x^2-8x+4=0 \xrightarrow{\Delta=48} \begin{cases} x=4+2\sqrt{3} \\ x=4-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow AB=4\sqrt{3}$$

$$x=0: \underbrace{y^2+4y+4}_{(y+2)^2}=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow C(0,-2)$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times OC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 2=4\sqrt{3}$$

رسم دایره در صفحهٔ مختصات

برای مشخص کردن موقعیت دایره در صفحهٔ مختصات، ابتدا مرکز دایره را در صفحهٔ مختصات پیدا می‌کنیم. سپس از مرکز دایره، به اندازهٔ شعاع به چپ و راست و بالا و پایین حرکت می‌کنیم تا محدودهٔ دایره مشخص شود.

با توجه به شکل واضح است اگر نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد، محدودهٔ x به صورت $(\alpha-r,\alpha+r)$ و محدودهٔ y به صورت $(\beta-r,\beta+r)$ است.

تست چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد دایره به معادلهٔ $(x-2)^2+(y+1)^2=16$ درست است؟

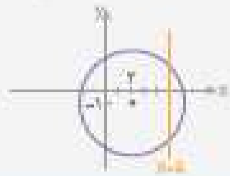
الف) مختصات مرکز آن به‌صورت $M(2,-1)$ و شعاع آن برابر ۸ است.

ب) از هر چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات می‌گذرد.

پ) خط $x=5$ را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲ مرکز دایره $M(2,-1)$ و شعاع دایره $R=4$ است و مطابق شکل موارد (ب) و (پ) درست هستند و فقط مورد (الف) نادرست است.



شرط دایره بودن

در معادلاتی به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$:

۱ اگر $a^2+b^2-4c>0$ باشد، معادله مربوط به یک دایره است.

۲ اگر $a^2+b^2-4c=0$ باشد، معادله مربوط به یک نقطه است.

۳ اگر $a^2+b^2-4c<0$ باشد، معادله مربوط به دایرهٔ حقیقی نیست.

(دلیل موضوع بالا این است که شعاع دایره یک عدد حقیقی مثبت است، پس برای این‌که این معادله مربوط به یک دایره باشد، عبارت زیر رادیکال در رابطهٔ $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ باید مثبت باشد.)

نکته اگر $c\le 0$، حاصل عبارت a^2+b^2-4c حتماً مثبت می‌شود، بنابراین در این حالت، معادله قطعاً مربوط به یک دایره است.

تذکر توجه کنید در معادلهٔ دایره، ضرایب x^2 و y^2 باید با هم برابر باشند.

مثال مشخص کنید کدام‌یک از معادلات زیر مربوط به دایره هستند.

الف) $x^2+y^2+2x+4y+7=0$

ب) $x^2+y^2+4x-2y-3=0$

پ) $2x^2+2y^2+4x-6y+4=0$

الف) دایره نیست، زیرا $a^2+b^2-4c<0$ است:

$2^2+4^2-4\times 7=-8<0$

ب) دایره است. در این‌جا نیازی به محاسبهٔ a^2+b^2-4c نیست، چون یاد گرفتیم هر معادله به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ با شرط $c\le 0$ حتماً دایره است.

پ) دایره است. برای تشخیص، ابتدا طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و معادله را به شکل $x^2+y^2+2x-3y+2=0$ بازنویسی می‌کنیم. در این معادله $2^2+(-3)^2-4\times 2>0$ است.

تست اگر معادلهٔ $x^2+y^2+(a-4)xy-2x+6y+a-2b=0$ مربوط به دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $a=8$ ۲) $a=0$ ۳) $b<-3$ ۴) $b>-3$

۴ ضریب xy باید برابر صفر باشد، پس $a=4$ است و معادلهٔ دایره به‌صورت $x^2+y^2-2x+6y+4-2b=0$ است. در ضمن باید شعاع مقداری حقیقی باشد، پس:

$(-2)^2+(6)^2-4(4-2b)>0 \Rightarrow 24+8b>0 \Rightarrow b>-3$

پیدا کردن مرکز و شعاع دایره با شرایط خاص

در بعضی از سؤالات، باید با کمک اطلاعات داده شده در صورت سؤال، مختصات مرکز و شعاع دایره را پیدا کنیم:

۱ مرکز دایره و نقطه‌ای از آن داده شود

در این حالت اندازهٔ شعاع دایره برابر فاصلهٔ مرکز تا نقطهٔ A است:

$R=OA$

تست معادلهٔ دایره به مرکز $M(2,-5)$ و گذرنده از نقطهٔ $A(6,4)$ کدام است؟

۱) $(x-2)^2+(y+5)^2=\sqrt{93}$

۲) $(x-2)^2+(y+5)^2=97$

۳) $(x+5)^2+(y-2)^2=\sqrt{97}$

۴) $(x-5)^2+(y-2)^2=93$

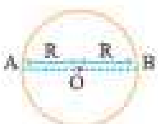
۲ فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ A برابر شعاع دایره است، پس:

$R=MA \Rightarrow R=\sqrt{(6-2)^2+(4+5)^2}=\sqrt{97}$

پس معادلهٔ دایره به‌صورت $(x-2)^2+(y+5)^2=97$ است.

۲ مختصات دو سر یک قطر داده شود

در این حالت مختصات مرکز دایره، وسط پاره‌خط AB است و اندازهٔ شعاع برابر با نصف پاره‌خط AB است:



$O=\frac{A+B}{2}$ $R=OA=OB=\frac{1}{2}AB$

تست معادلهٔ دایره‌ای که نقاط $A(-1,7)$ و $B(5,-1)$ دو سر یک قطر آن هستند، کدام است؟

۱) $(x-2)^2+(y+5)^2=125$ ۲) $(x-2)^2+(y+3)^2=90$

۳) $(x+5)^2+(y-2)^2=25$ ۴) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

۴ مختصات مرکز دایره، مختصات نقطهٔ وسط A و B است، پس:

$O=\frac{A+B}{2}=(\frac{-1+5}{2},\frac{7-1}{2})=(2,3)$

$2R=AB \Rightarrow 2R=\sqrt{(5+1)^2+(-1-7)^2}=10 \Rightarrow R=5$

پس معادلهٔ دایره $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ است.

۳ مختصات مرکز دایره و معادلهٔ یک خط مماس بر آن داده شود

شعاع دایره برابر فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس است:

$$R=OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تست معادلهٔ دایره به مرکز $M(2,5)$ و مماس بر خط $4x+3y+2=0$ کدام است؟

۱) $(x+2)^2+(y-5)^2=25$ ۲) $(x-2)^2+(y-5)^2=9$

۳) $(x-2)^2+(y-5)^2=25$ ۴) $(x-2)^2+(y-5)^2=16$

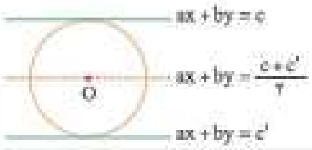
۳ چون دایره بر خط $4x+3y+2=0$ مماس است، داریم:

$$r=MH=\frac{|8+15+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{25}{5}=5$$

پس معادلهٔ دایره $(x-2)^2+(y-5)^2=25$ می‌باشد.

۴ معادلهٔ دو خط موازی و مماس بر دایره داده شود

مرکز روی خط وسط آن‌ها و شعاع دایره نصف فاصلهٔ آن‌ها است:



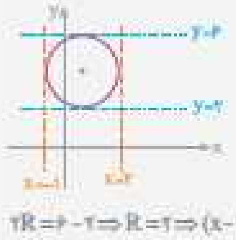
$$2R=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تست دایره‌ای بر خطوط $x=-1$ و $x=3$ و $y=2$ و $y=6$ مماس است. چه تعداد از نقاط زیر روی این دایره هستند؟

الف) $(-1,4)$ ب) $(2,3)$ پ) $(1,3)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۱ با توجه به شکل، مرکز دایره $O(\frac{-1+3}{2},\frac{2+6}{2})=O(1,4)$ می‌باشد و فاصلهٔ هر دو خط موازی نیز برابر قطر دایره است، یعنی:

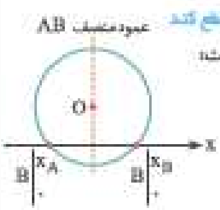


$$2R=6-2\Rightarrow R=2\Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2=4$$

حال تنها مختصات نقطهٔ $(-1,4)$ در معادلهٔ این دایره صدق می‌کند.

۵ دایره یکی از محورهای مختصات را در دو نقطه قطع کند

مرکز دایره روی عمودمنصف پاره‌خط AB است:



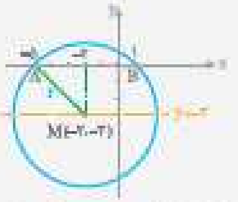
$$x_{مرکز}=\frac{x_A+x_B}{2}$$

تست دایرهٔ C محور xها را در دو نقطه با طول $x=-5$ و $x=1$ قطع می‌کند و مرکز آن روی خط $y=-3$ قرار دارد. معادلهٔ دایره کدام است؟

۱) $(x-3)^2+(y+2)^2=18$ ۲) $(x+2)^2+(y+3)^2=18$

۳) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ ۴) $(x+2)^2+(y+3)^2=16$

۲ مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB قرار دارد، پس طول مرکز برابر -2 است. $x_M=\frac{-5+1}{2}=-2$

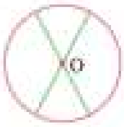


از طرفی مرکز دایره روی خط $y=-3$ قرار دارد، پس مرکز دایره $M(-2,-3)$ است و داریم:

$$r=MA=\sqrt{\underbrace{(-2+5)^2+(-3-0)^2}_{18}}=\sqrt{18}\Rightarrow(x+2)^2+(y+3)^2=18$$

۶ معادلهٔ دو قطر دایره داده شود

مرکز دایره، روی محل برخورد دو قطر قرار دارد.



تست دو خط به معادلات $y-x+2=0$ و $y+2x=7$ دو قطر دایرهٔ C هستند. اگر این دایره، از مبدأ مختصات عبور کند، معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $(x+3)^2+(y+1)^2=10$ ۲) $(x+3)^2+(y+1)^2=\sqrt{10}$

۳) $(x-3)^2+(y-1)^2=10$ ۴) $(x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{10}$

۳ ابتدا محل تقاطع دو خط $y-x+2=0$ و $y+2x=7$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=x-2\\ y=-2x+7\end{cases}\Rightarrow x=3\,,\,y=1$$

پس نقطهٔ $M(3,1)$ مرکز دایره است و داریم:

$$R=OM\Rightarrow R=\sqrt{(3-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$$

پس معادلهٔ دایرهٔ C به‌صورت $(x-3)^2+(y-1)^2=10$ است.

نکته در سؤالاتی که مرکز دایره روی یک خط قرار دارد، طول مرکز دایره را α فرض می‌کنیم و عرض مرکز را با قرار دادن α در معادلهٔ خط می‌نویسیم.

تست دایره‌ای از دو نقطهٔ $A(0,1)$ و $B(3,0)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به‌صورت $x-y=2$ است. شعاع این دایره کدام است؟ (خارج - ۹۰)

۱) $\sqrt{4}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۳ می‌دانیم مرکز دایره روی قطر آن قرار دارد. حال چون معادلهٔ یک قطر دایره به‌صورت $y=x-2$ است، پس مختصات مرکز دایره را به‌صورت $O(\alpha,\alpha-2)$ فرض می‌کنیم و با حل معادلهٔ $OA=OB$ داریم:

$$\sqrt{\alpha^2+(\alpha-3)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(\alpha-2)^2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2-6\alpha+9=2\alpha^2-10\alpha+13$$

$$\Rightarrow 4\alpha=4\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow R=OA=\sqrt{1^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$$

معادلهٔ دایرهٔ گذرنده از سه نقطه

برای نوشتن معادلهٔ دایرهٔ گذرا از سه نقطهٔ C,B,A می‌توانیم معادلهٔ گستردهٔ دایره یعنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را بنویسیم و مختصات نقاط داده‌شده را در آن جای‌گذاری کنیم تا مقادیر c,b,a پیدا شود.

تست **اگر نقاط $A(0,6)$ ، $B(-4,0)$ و $C(1,5)$ سه نقطه از یک شهر باشند، دکل مخابراتی را در کدام نقطه باید نصب کرد که سرویس‌دهی یکسانی به هر سه نقطه انجام شود؟** (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $(3,-4)$ ۲) $(3,-2)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(-3,4)$

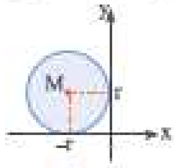
۳ دکل مخابراتی باید در مرکز دایرهٔ گذرنده از نقاط $A(0,6)$ ، $B(-4,0)$ و $C(1,5)$ قرار بگیرد. حال معادلهٔ دایره را به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ فرض می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned}&1)\ A(0,6): 36+6b+c=0\\&2)\ B(-4,0): 16-4a+c=0\\&3)\ C(1,5): 1+25+a+5b+c=0\end{aligned}\quad \begin{aligned}&\xrightarrow{(1)-(2)}\\&\xrightarrow{(3)-(2)}\end{aligned}\begin{cases}4a+6b=-20\\5a+5b=-10\end{cases}$$

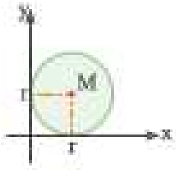
بنابراین $a=4$ و $b=-6$ و $c=0$ به‌دست می‌آیند. پس معادلهٔ دایره $x^2+y^2+4x-6y=0$ و مرکز آن $M(-2,3)$ است.

دایرهٔ مماس بر هر دو محور مختصات

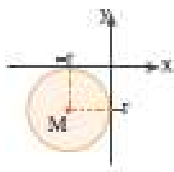
اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس باشد، می‌توانیم مختصات مرکز آن را مطابق شکل‌های زیر پیدا کنیم:



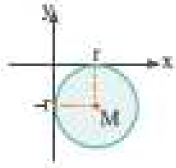
$M(-r,r)$



$M(r,r)$

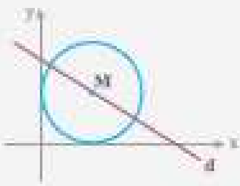


$M(-r,-r)$



$M(r,-r)$

تست **در شکل مقابل، خط $d: 4x+3y-15=0$ از مرکز دایره می‌گذرد. شعاع دایره کدام است؟**



۱) $2\sqrt{2}$
۲) $\frac{15}{7}$
۳) $2\sqrt{3}$
۴) $\frac{12}{7}$

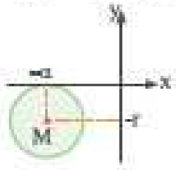
۲ مرکز دایره به‌صورت $M(r,r)$ است، از طرفی مرکز دایره روی خط $d: 4x+3y-15=0$ قرار دارد، پس:

$$d: y=-\frac{4}{3}x+5 \xrightarrow{M(r,r)} r=\frac{-4}{3}r+5 \Rightarrow \frac{7}{3}r=5 \Rightarrow r=\frac{15}{7}$$

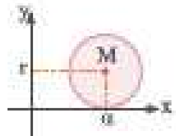
دایرهٔ مماس بر یکی از محورهای مختصات

اگر دایره به مرکز $M(\alpha,\beta)$ فقط بر یکی از محورهای مختصات مماس باشد، می‌توانیم فقط طول یا عرض مرکز دایره را پیدا کنیم:

۱ اگر دایره فقط بر محور xها مماس باشد، اندازهٔ عرض مرکز برابر شعاع دایره است: $|\beta|=r$

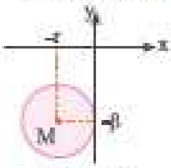


$M(-\alpha,-r)$

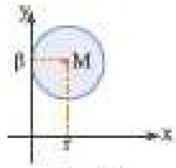


$M(\alpha,r)$

۲ اگر دایره فقط بر محور yها مماس باشد، اندازهٔ طول مرکز برابر شعاع دایره است: $|\alpha|=r$



$M(-r,-\beta)$



$M(r,\beta)$

تست **دایرهٔ C به مرکز $M(7,-3)$ بر محور xها مماس است. معادلهٔ این دایره کدام است؟**

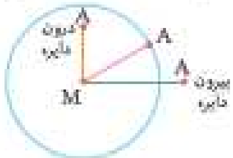
۱) $x^2+y^2-14x+6y+21=0$
۲) $x^2+y^2-14x+6y+49=0$
۳) $x^2+y^2-14x+6y-21=0$
۴) $x^2+y^2-14x+6y-49=0$

۴ مرکز دایرهٔ C به صورت $M(7,-3)$ است و چون بر محور xها مماس است، پس شعاع دایره برابر $R=3$ است. پس معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x-7)^2+(y+3)^2=9 \Rightarrow x^2+y^2-14x+6y+49=0$$

وضعیت نسبی نقطه و دایره

برای این‌که بفهمیم نقطه‌ای مانند $A(x_0,y_0)$ چه وضعی نسبت به دایره دارد، باید فاصلهٔ نقطهٔ A را تا مرکز دایره پیدا کنیم و این فاصله را با شعاع دایره یعنی R مقایسه کنیم. اگر $AM<R$ باشد، نقطهٔ A درون دایره، اگر $AM>R$ باشد، نقطهٔ A بیرون دایره و اگر $AM=R$ باشد، نقطهٔ A روی دایره قرار دارد.



نکته برای این‌که وضعیت نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را سریع‌تر تعیین کنیم، مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم و عدد به‌دست آمده را $f(A)$ می‌نامیم:

وضعیت نقطه نسبت به دایره	A داخل دایره	A روی دایره	A خارج دایره
شرایط	$f(A)<0$	$f(A)=0$	$f(A)>0$

تست چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) نقطهٔ $A(0,2)$ داخل دایرهٔ $(x-2)^2+(y+1)^2=3$ قرار دارد.

ب) نقطهٔ $B(-1,-2)$ خارج دایرهٔ $x^2+y^2+2x+2y=0$ قرار دارد.

پ) نقطهٔ $C(0,0)$ روی دایرهٔ $x^2+y^2+3x+2y=0$ قرار دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) $f(0,2)=(0-2)^2+(2+1)^2-3=10>0 \Rightarrow$ خارج دایره

ب) $f(-1,-2)=(-1)^2+(-2)^2+2(-1)+2(-2)=-1<0 \Rightarrow$ داخل دایره

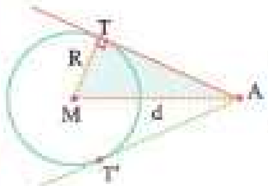
پ) $f(0,0)=(0)^2+(0)^2+3(0)+2(0)=0 \Rightarrow$ روی دایره

پس فقط مورد (پ) صحیح است.

محاسبهٔ طول قطعهٔ مماس و طول وتر مینیمم

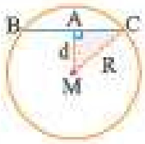
اگر نقطهٔ A بیرون یا درون دایره باشد، موضوعات مهم زیر قابل نتیجه‌گیری است:

۱ نقطهٔ A بیرون دایره باشد: می‌توان دو مماس هم‌اندازه بر دایره رسم کرد. طول این مماس‌ها با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس برابر است با:



$$AT'=AT=\sqrt{d^2-R^2}$$

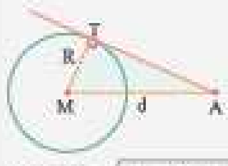
۲ نقطهٔ A درون دایره باشد: می‌توانیم طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ A را با کمک رابطهٔ فیثاغورس به دست آوریم (کوتاه‌ترین وتر بر قطع گذرنده از A عمود است.):



$$BC=2\sqrt{R^2-d^2}$$

تست طول خط مماسی که از نقطهٔ $A(2,4)$ بر دایرهٔ $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ رسم می‌شود، چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



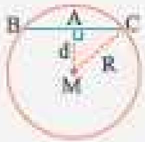
۳ مرکز دایره $M(-2,1)$ و شعاع آن $R=\sqrt{(-2)^2+1^2+4}=3$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,4)$ از مرکز $M(-2,1)$ برابر است با:

$$AM=d=\sqrt{(-2-2)^2+(1-4)^2}=5$$

چون در مثلث رنگی $d=5$ و $R=3$ است، پس با توجه به رابطهٔ فیثاغورس $AT=4$ است.

تست طول کوتاه‌ترین وتر گذرا از نقطهٔ $A(1,0)$ درون دایرهٔ $x^2+y^2-4x-2y=0$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) $4\sqrt{3}$



۲ مرکز دایره $M(2,1)$ و شعاع آن $R=\sqrt{2^2+1^2-0}=\sqrt{5}$ است.

در ضمن فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,0)$ از مرکز $M(2,1)$ برابر است با:

$$AM=d=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

پس با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث رنگی داریم:

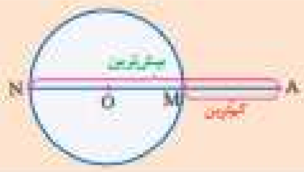
$$AC=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5-2}=\sqrt{3} \Rightarrow BC=2\sqrt{3}$$

کم‌ترین و بیشترین فاصلهٔ نقطه تا دایره

برای به دست آوردن کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره، باید شعاع دایره و فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره را پیدا کنیم. حال با توجه به شکل‌های زیر داریم:

$AM=R-OA$

$AN=R+OA$



$AM=OA-R$

$AN=OA+R$

تست بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,4)$ از نقاط دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-3=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۴ بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,4)$ تا دایرهٔ $x^2+y^2+2x-3=0$ برابر است با $OA+R$، پس:

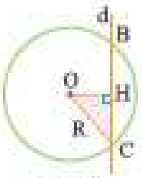
$$\begin{cases} O(-1,0) \\ R=\sqrt{1+3}=2 \end{cases} \Rightarrow OA=\sqrt{(-1-2)^2+(0-4)^2}=5$$

$$\Rightarrow OA+R=5+2=7$$

وضعیت نسبی خط و دایره

۱ خط و دایره در دو نقطه متقاطع‌اند

در این حالت، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d را به‌دست می‌آوریم و با کمک رابطهٔ فیثاغورس، طول CH را پیدا می‌کنیم. پس:



$OH<R$

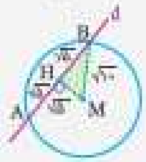
$$BC=2\sqrt{R^2-OH^2}$$

تست اندازهٔ وتری که خط $x-2y=3$ از دایرهٔ $x^2+y^2-4x-4y-2=0$ جدا می‌کند، چقدر است؟

۱) $3\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $3\sqrt{5}$

۳ نقطهٔ $M(2,2)$ مرکز دایره می‌باشد. حال شعاع دایره و فاصلهٔ مرکز دایره از خط $x-2y=3$ را به‌دست می‌آوریم:

$$R=\sqrt{4+4+2}=\sqrt{10}\ ,\ MH=\frac{|2-4-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



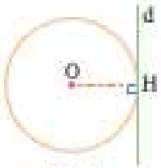
$$HB=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow AB=2HB=2\sqrt{5}$$

۲ خط و دایره در یک نقطه بر هم مماس‌اند

در نقطهٔ تماس، شعاع بر خط مماس، عمود است [خط d و OH بر هم عمودند.]

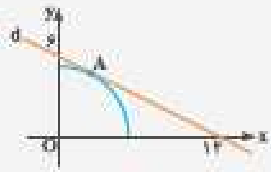
پس شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب خط OH است:



$$m_d=-\frac{1}{m_{OH}}$$

$OH=R$

تست در شکل مقابل، خط d در نقطهٔ A بر یک ربع دایره به مرکز $O(0,0)$ مماس است. شعاع دایره چقدر است؟



۱) $\frac{12\sqrt{4}}{5}$

۲) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

۳) $\frac{5\sqrt{5}}{12}$

۴) $\frac{12\sqrt{5}}{11}$

۲ معادلهٔ خط d به‌صورت $y=-\frac{1}{2}x+6$ است. حال از آن‌جایی که نقطهٔ $O(0,0)$ مرکز ربع دایره است، پس $R=OA$ است:

$$d: 2y+x-12=0 \Rightarrow R=\frac{|0+0-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

۳ خط و دایره متقاطع نیستند و نقطهٔ مشترک ندارند

در این حالت، ابتدا فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d را به دست می‌آوریم.

حال با توجه به شکل، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره از خط برابر $OH-R$ و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره از خط برابر $OH+R$ است.

$OH>R$

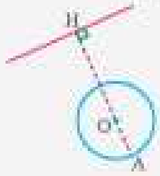
تست فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایرهٔ $x^2+y^2-6y-7=0$ از خط $4y-3x-82=0$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۲ مطابق شکل فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایرهٔ $x^2+y^2-6y-7=0$ از خط $4y-3x-82=0$ برابر $AH=r+OH$ است، پس داریم:

$$O(0,3)\ ,\ R=\sqrt{0+9+7}=4$$

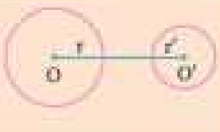
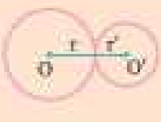
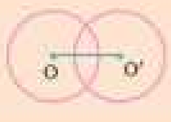
$$OH=\frac{|4\times3-3\times0-82|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{70}{5}=14$$



$$AH=r+OH=14+4=18$$

وضعیت نسبی دو دایره

برای این‌که بفهمیم دو دایره نسبت به هم چه وضعیتی دارند، باید مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را به دست آوریم. سپس فاصلهٔ دو مرکز را با $R+R'$ و $|R-R'|$ مقایسه می‌کنیم تا ببینیم دو دایره در کدام‌یک از حالت‌های زیر قرار دارند.

رابطهٔ بین شعاع‌ها و خط المرکزین		شکل
۱) متخارج	$d>r+r'$	
۲) مماس برون	$d=r+r'$	
۳) متقاطع	$\lvert r-r'\rvert<d<r+r'$	
۴) مماس درون	$d=\lvert r-r'\rvert$	
۵) متداخل	$d>\lvert r-r'\rvert$	
۶) هم مرکز	$d=0$	

به OO' خط‌المرکزین می‌گوییم و طول آن را با d نمایش می‌دهیم.

تست دو دایره $x^2+y^2-2x+6y=8$ و $x^2+y^2+8x-4y+12=0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج　　۲) مماس داخل

۳) متقاطع　　۴) متخارج

۱ مرکز و شعاع دایره‌ها را به‌دست می‌آوریم و فاصلهٔ مرکز دو دایره را با مجموع و تفاضل دو شعاع مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{matrix} O_1(1,-3),\ R_1=\sqrt{1+9+8}=3\sqrt{2} \\ O_2(-4,2),\ R_2=\sqrt{16+4-12}=2\sqrt{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} |R_1-R_2|=\sqrt{2} \\ R_1+R_2=5\sqrt{2} \end{cases}$$

از طرفی $d=O_1O_2=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ می‌باشد، پس $d=R_1+R_2$ بوده و دو دایره مماس خارج‌اند.

تست به ازای چند مقدار طبیعی a دو دایرهٔ $C_1: x^2+y^2=9$ و $C_2: (x-a)^2+(y+8)^2=49$ متقاطع‌اند؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

۲ در دو دایرهٔ متقاطع $|R_2-R_1|<O_1O_2<R_1+R_2$ است، پس:

$$\begin{matrix} 1)\ C_1: O_1(0,0),\ R_1=3 \\ 2)\ C_2: O_2(a,-8),\ R_2=7 \end{matrix} \Rightarrow O_1O_2=\sqrt{a^2+64}$$

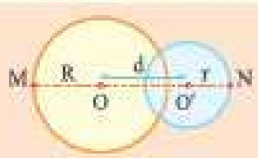
$$\Rightarrow |7-3|<\sqrt{a^2+64}<3+7 \Rightarrow \underbrace{16<a^2+64}_{\text{همواره}}<100$$

$$\Rightarrow a^2<36 \Rightarrow a=1,2,\dots,5$$

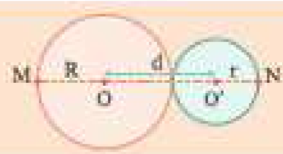
بیشترین فاصلهٔ نقاط دو دایره

در وضعیت‌های زیر، بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره برابر $MN=d+R+r$ است:

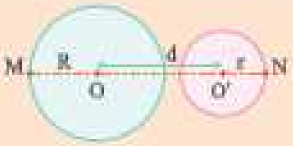
متقاطع



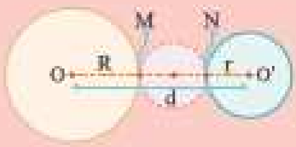
مماس بیرون



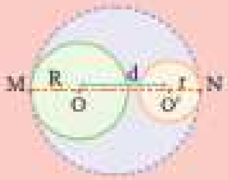
متخارج



نکته دو دایرهٔ متخارج $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر بگیرید. قطر بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین دایرهٔ مماس بر این دو دایره به صورت زیر است:



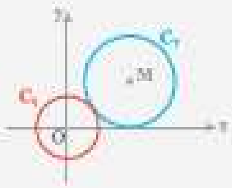
$MN=d-R-r$



$MN=d+R+r$

تست مطابق شکل، دو دایرهٔ $C_1: x^2+y^2=r^2$ و $C_2: (x-8)^2+(y-6)^2=R^2$ بر یکدیگر مماس‌اند. بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره کدام است؟

۱) ۴　　۲) $8\sqrt{2}$　　۳) ۲۰　　۴) ۲۴



۳ مرکز دایرهٔ C_1 نقطهٔ $O(0,0)$ و شعاع آن r است. چون دایرهٔ C_2 بر محور xها مماس و مرکز آن نقطهٔ $M(8,6)$ است، پس شعاع آن برابر عرض نقطهٔ مرکز یعنی $R=6$ است. پس مطابق شکل داریم:

$$\xrightarrow{6,8,10} OM=r+6=10 \Rightarrow r=4$$

پس بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره برابر $2R+2r=12+8=20$ است.

فصل ۱۴

آمار

ارتباط با فصل‌های دیگه: آمار از آن فصل‌هایی است که ارتباطی با بقیه فصل‌ها ندارد، نه پیش‌نیازی می‌خواهد و نه خودش پیش نیاز فصل دیگری است.

توصیه: درست است که تعداد تست‌های این فصل در کنکور بسیار کم است، اما مطالعهٔ این فصل اصلاً زمان‌بر نیست، و هر موقع از سال می‌توانید آن را مطالعه کنید. معمولاً تست‌های این فصل در کنکور از واریانس یا انحراف معیار یا ضریب تغییرات طرح می‌شود. یکی از مهم‌ترین موضوع‌های این فصل هم مقایسه دقت کاری است. در سال‌های اخیر، تست‌های این بخش نیاز به تحلیل بیش‌تری داشته‌اند، پس به تست‌های جدیدی که طراحی کردیم خیلی توجه کنید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۱	۱	صفر	۲	۱	۱	۱	۱

درس ۱ مقدمه‌ای بر علم آمار، متغیّر و انواع آن

آمار و علم آمار

مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات، آمار نامیده می‌شود. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی است، به عبارت دیگر مراحل علم آمار به‌صورت زیر است:

جمع‌آوری اعداد و ارقام (مرحلهٔ (۱)) ← سازماندهی و نمایش داده‌ها (مرحلهٔ (۲)) ← تحلیل و تفسیر داده‌ها (مرحلهٔ (۳)) ← نتیجه‌گیری قضاوت پیش‌بینی (مرحلهٔ (۴))

تست **برای گزارش اخبار هواشناسی، باید دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی ثبت شود. سپس این اطلاعات سازمان‌دهی و در ایستگاه‌ها به نمایش در بیاید تا کارشناسان نظرات خود را پیرامون وضعیت هوا اعلام کنند و نتیجه نهایی در اختیار مردم قرار گیرد. کدام مرحله، قبل از نظرات کارشناسان است؟**

(برگرفته از کتاب درسی)

۱) جمع‌آوری اعداد و ارقام

۲) سازماندهی و نمایش داده‌ها

۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها

۴) قضاوت و پیش‌بینی

۳ مراحل علم آمار به ترتیب زیر است:

مرحله (۱) جمع‌آوری اعداد و ارقام: ثبت دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی

مرحله (۲) سازماندهی و نمایش داده‌ها: سازماندهی و نمایش در ایستگاه‌ها

مرحله (۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها: تحلیل و تفسیر آمار هواشناسی

مرحله (۴) نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی: نظرات کارشناسان هواشناسی

تعاریف اولیه آمار

۱ هر ویژگی از اشیاء یا افراد که در اعضای جامعه یکسان نیستند و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کنند، **متغیّر** نامیده می‌شود.

۲ عددی که به آن ویژگی یک عضو از جامعه، نسبت داده می‌شود، **مقدار متغیّر (مشاهده)** می‌گویند.

۳ به مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد آن‌ها داده‌ها را گردآوری کنیم، **جامعهٔ آماری** گفته می‌شود.

به تعداد اعضای یک جامعهٔ آماری، اندازهٔ جامعه یا حجم جامعه می‌گوییم.

۴ به هر زیرمجموعه از جامعهٔ آماری که به روشی مشخص انتخاب شده باشد، **نمونه** می‌گویند و به تعداد عضوهای یک نمونه، **اندازهٔ نمونه یا حجم نمونه** گفته می‌شود.

مثال **می‌خواهیم قد کارمندان یک اداره با ۳۰ کارمند را بررسی کنیم. برای این منظور ۱۰ کارمند از آن‌ها را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم و قد آن‌ها را اندازه می‌گیریم.**

قد کارمندان متغیّر تصادفی است، زیرا از یک عضو به عضو دیگر می‌تواند تغییر کند.

عدد قد هر کارمند، مقدار متغیّر نام دارد.

۳۰ کارمند جامعهٔ آماری است و اندازهٔ جامعه ۳۰ است.

۱۰ کارمند یک نمونه است و اندازهٔ نمونه ۱۰ است.

تست **در نمودار زیر تعداد کل قطعات تولیدی یک کارخانه در ۲ روز و همچنین تعداد قطعات بازرسی شده توسط بازرسان نشان داده شده است. چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟**

(برگرفته از کتاب درسی)

الف) اندازهٔ جامعه برابر ۴۰۰ است.

ب) اندازهٔ نمونه برابر ۷۰ است.

پ) جامعهٔ آماری، قطعات بازرسی شده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴ تعداد کل قطعات تولیدی برابر ۴۰۰=۱۰۰+۳۰۰ و تعداد قطعات بازرسی شده برابر ۷۰=۲۰+۵۰ است. بنابراین اندازهٔ جامعه برابر ۴۰۰ و اندازهٔ نمونه برابر ۷۰ است، بنابراین (الف) و (ب) درست هستند، اما جامعهٔ آماری، کل قطعات تولیدی هستند، پس (پ) نادرست است.

تذکر واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء یا فرد که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند، داده نام دارد.

روش‌های مطالعهٔ یک جامعهٔ آماری

۱ معمولاً اگر اندازهٔ یک جامعه بزرگ نباشد، می‌توانیم همهٔ واحدهای آماری را مورد بررسی قرار دهیم. این روش را سرشماری می‌نامند.

۲ اگر اندازهٔ یک جامعه بزرگ باشد یا همهٔ اعضای آن در دسترس نباشند یا دسترسی به آن‌ها گران و وقت‌گیر باشد یا ممکن باشد در اثر مطالعه، نمونه‌ها از بین بروند، به جای سرشماری، بخشی از جامعه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، یعنی از نمونه‌گیری استفاده می‌کنیم.

انواع متغیّر

متغیّرها به دو دستهٔ کمّی و کیفی تقسیم‌بندی می‌شوند. متغیّری که قابل اندازه‌گیری باشد، یعنی بتوان به آن عدد نسبت داد، متغیّر کمّی است و متغیّری که قابل اندازه‌گیری نباشد، متغیّر کیفی است. هر یک از این متغیّرها به دو زیر گروه به‌صورت زیر تقسیم می‌شوند:

تست **در کدام گزینه، نوع متغیّر نادرست است؟**

۱) تعداد صندلی‌های سالن سینما: کمّی گسسته

۲) انواع حساب‌های بانکی: کیفی اسمی

۳) میزان لذت از نقاشی کشیدن: کیفی ترتیبی

۴) میزان درآمد از فروش محصولات: کمّی گسسته

۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) تعداد صندلی‌های سالن سینما قابل شمارش است و فقط می‌تواند عدد طبیعی باشد، پس کمّی گسسته است.

۲) به طور کلی متغیّرهایی که فقط نوع آن‌ها معلوم است، کیفی هستند. در ضمن چون انواع حساب‌های بانکی دارای ترتیب طبیعی نیست، پس این متغیّر کیفی اسمی است.

۳) میزان لذت (یا میزان عشق، رضایت، علاقه‌مندی و ...) مفهوم کیفی دارد که می‌تواند کم، متوسط، زیاد و ... باشد، پس کیفی ترتیبی است.

۴) میزان درآمد فروش (یا میزان بارش، مالیات و ...) مفهوم عددی دارد و یک متغیّر کمّی پیوسته است.

درس ۲ معیارهای گرایش به مرکز

میانگین

میانگین هر تعداد داده برابر با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها می‌باشد. پس اگر n دادهٔ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ داشته باشیم، میانگین (مرکز ثقل) داده‌ها را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهند و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

تست **اگر میانگین داده‌های ۹ ، ۸ ، a ، ۳ ، ۲ ، ۲ ، ۴ ، ۹ ، ۱ ، ۸ برابر ۵ باشد، میانگین داده‌های $a, a+6, 3a, 7-a, \frac{a}{2}+1$ کدام است؟**

۱) ۳/۲ ۲) ۴/۸ ۳) ۶/۴ ۴) ۷/۶

۳ میانگین ۱۰ دادهٔ آماری را برابر ۵ قرار می‌دهیم تا مقدار a را پیدا کنیم:

$$\bar{x}=\frac{\overbrace{8+1+9+4+2+2+3+a+8+9}^{46+a}}{10}=5 \Rightarrow 46+a=50 \Rightarrow a=4$$

با توجه به مقدار a، میانگین ۵ دادهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

$$\bar{x}_{new}=\frac{a+(a+6)+3a+(7-a)+(\frac{a}{2}+1)}{5}$$

$$=\frac{4+10+12+3+3}{5}=\frac{32}{5}=6/4$$

نکته اگر داده‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، میانگین کل داده‌ها با میانگین دو جمله‌ای که فاصلهٔ یکسانی از ابتدا و انتهای دنباله دارند برابر است. مثلاً میانگین جملهٔ اول و آخر یا میانگین جملهٔ دوم و جملهٔ ماقبل آخر یا ...

تست **میانگین داده‌های ۲ ، ۶ ، ۱۰ ، ۱۴ ، ... ، ۹۸ کدام است؟**

۱) ۵۰ ۲) ۴۹ ۳) ۴۸ ۴) ۴۷

۱ چون داده‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۴ داده‌اند، پس میانگین کل داده‌ها برابر میانگین دادهٔ اول و آخر است:

$$\bar{x}=\frac{2+98}{2}=\frac{100}{2}=50$$

نکته اگر داده‌ها همگی نزدیک عددی مانند a باشند، می‌توانیم از همهٔ داده‌ها a واحد کم کنیم و پس از محاسبهٔ میانگین اعداد حاصل، عدد a را به میانگین اضافه کنیم.

تست **میانگین داده‌های ۲۹۵ ، ۲۹۸ ، ۲۹۹ ، ۳۰۲ ، ۳۰۲ ، ۳۰۴ کدام است؟**

۱) ۲۹۹/۵ ۲) ۲۹۹ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۱/۵

۳ برای سادگی محاسبات، ابتدا از همهٔ داده‌ها ۳۰۰ واحد کم می‌کنیم و سپس به میانگین حاصل ۳۰۰ واحد اضافه می‌کنیم:

$$x_i-300: -5, -2, -1, 2, 2, 4$$

$$\Rightarrow \bar{x}-300=\frac{(-5)+(-2)+(-1)+2+2+4}{6}=0 \Rightarrow \bar{x}=300$$

تذکر اگر $\bar{x}$ میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ باشد، مجموع اختلاف همهٔ داده‌ها از میانگین، همواره برابر صفر است:

$$(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})=0$$

مثال **اگر ۷ دادهٔ آماری داشته باشیم و مقادیر اختلاف از میانگین آن‌ها به‌صورت a ، ۲ ، ۲ ، ۵ ، ۳ ، ۱- ، ۲- باشد، مقدار a کدام است؟**

مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است، پس:

$$(-2)+(-1)+3+5+2+2+a=0 \Rightarrow 9+a=0 \Rightarrow a=-9$$

نکته اگر عدد ثابتی به همهٔ داده‌ها اضافه یا از همهٔ داده‌ها کم شود، همان عدد عیناً به میانگین داده‌های اولیه اضافه و یا از آن کم می‌شود. و اگر عدد ثابتی در همهٔ داده‌ها ضرب یا همهٔ داده‌ها بر آن تقسیم شوند، همان عدد عیناً در میانگین داده‌های اولیه ضرب و یا بر آن تقسیم می‌شود.

نتیجه اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $ax_1+b, ax_2+b, \cdots, ax_n+b$ برابر با $a\bar{x}+b$ است.

تست **اگر میانگین داده‌های $x_1-1, x_2-1, \cdots, x_n-1$ برابر ۵ باشد، میانگین داده‌های $\frac{1}{2}x_1+3, \frac{1}{2}x_2+3, \cdots, \frac{1}{2}x_n+3$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳ فرض می‌کنیم میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ برابر $\bar{x}$ است. پس میانگین داده‌های $x_1-1, x_2-1, \cdots, x_n-1$ برابر $\bar{x}-1$ است:

$$\bar{x}-1=5 \Rightarrow \bar{x}=6$$

میانگین داده‌های $\frac{1}{2}x_1+3, \frac{1}{2}x_2+3, \cdots, \frac{1}{2}x_n+3$ برابر است با:

$$\frac{1}{2}\bar{x}+3=\frac{1}{2}(6)+3=6$$

اضافه و کم کردن تعدادی داده و تأثیر آن بر میانگین

داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ با میانگین $\bar{x}$ را در نظر بگیریم. می‌خواهیم تعدادی دادهٔ جدید به آن‌ها اضافه کنیم یا تعدادی داده از بین آن‌ها حذف کنیم. در این صورت دو حالت داریم:

۱ اگر میانگین داده‌های اضافه‌شده یا حذف‌شده، با میانگین داده‌های اولیه یعنی $\bar{x}$ برابر باشد، میانگین هیچ تغییری نمی‌کند.

۲ اگر میانگین داده‌های اضافه‌شده یا حذف‌شده برابر $\bar{x}$ نباشد، ابتدا با کمک رابطهٔ میانگین، مجموع داده‌های اولیه را پیدا می‌کنیم. سپس داده‌های جدید را به مجموع داده‌های اولیه اضافه و یا از آن‌ها کم می‌کنیم و مجموع جدید را بر تعداد جدید داده‌ها تقسیم می‌کنیم.

تست **میانگین ۱۰ دادهٔ آماری برابر ۱۵ است. اگر دو دادهٔ ۳ و ۷ را از بین آن‌ها حذف کنیم، میانگین ۸ دادهٔ جدید کدام است؟**

۱) ۱۸ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶/۵

۲ با توجه به رابطهٔ میانگین، مجموع ۱۰ داده با میانگین ۱۵ برابر با $10 \times 15 = 150$ است. اگر دو دادهٔ ۳ و ۷ را از بین آن‌ها حذف کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{150-(3+7)}{8}=\frac{140}{8}=17/5$$

میانه

اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، میانه عددی است که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر باشد. میانه را با $Q_۲$ نشان می‌دهند.

برای محاسبهٔ میانه با دو حالت زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه برابر دادهٔ وسط است.

$$\underbrace{۷,۸,۸,۹}_{\text{نیمهٔ اول}},۹,\underbrace{۱۰,۱۱,۱۴,۱۵}_{\text{نیمهٔ دوم}} \Rightarrow Q_۲=۹$$

۲ اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر میانگین دو دادهٔ وسط است.

$$\underbrace{۴,۵,۵,۶}_{\text{نیمهٔ اول}},\underbrace{۸,۹,۱۰,۱۱}_{\text{نیمهٔ اول}} \Rightarrow Q_۲=\frac{۶+۸}{۲}=۷$$

تست میانگین داده‌های آماری ۲۱، a، ۱۹، ۱۸، ۱۱، ۷، ۵، ۴، ۴ برابر ۱۱ است. میانهٔ این داده‌ها کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸/۵ ۳) ۱۰/۵ ۴) ۱۱

۱ ابتدا مقدار a را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{۴+۴+۵+۷+۱۱+۱۸+۱۹+a+۲۱}{۹}=۱۱ \Rightarrow ۸۹+a=۹۹ \Rightarrow a=۱۰$$

حال داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و میانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{۴,۴,۵,۷}_{\text{نیمهٔ اول}},۱۰,\underbrace{۱۱,۱۸,۱۹,۲۱}_{\text{نیمهٔ دوم}} \Rightarrow Q_۲=۱۰$$

چارک اول و سوم

میانهٔ نیمهٔ اول داده‌ها را چارک اول می‌نامند و با $Q_۱$ نشان می‌دهند و میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها را چارک سوم می‌نامند و با $Q_۳$ نشان می‌دهند. میانه، خودش چارک دوم محسوب می‌شود.

$$\underbrace{۱,۲,۲,۴,۵,۶}_{\text{نیمهٔ اول داده‌ها}},۷,\underbrace{۸,۸,۹,۱۱,۱۴,۱۵}_{\text{نیمهٔ دوم داده‌ها}}$$

$$Q_۱=\frac{۲+۴}{۲}=۳ \quad Q_۲=۷ \quad Q_۳=\frac{۹+۱۱}{۲}=۱۰$$

$$\underbrace{۱,۱,۲,۲,۳,۴,۴}_{\text{نیمهٔ اول داده‌ها}},۴,\underbrace{۵,۶,۶,۷,۷,۸,۹}_{\text{نیمهٔ دوم داده‌ها}}$$

$$Q_۱=۲ \quad Q_۲=۴ \quad Q_۳=۷$$

تست در داده‌های آماری ۸، ۱۵، ۱۰، ۸، ۴، ۶، ۱۰، ۵، ۱۰، ۱۵، ۱۰، مقدار $Q_۳-\frac{Q_۲}{Q_۱}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸/۵ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{۴,۵,۶,۸,۸}_{\text{نیمهٔ اول}},\underbrace{۱۰,۱۰,۱۰,۱۵,۱۵}_{\text{نیمهٔ دوم}}$$

$$\Rightarrow Q_۱=۶ \,,\, Q_۲=\frac{۸+۱۰}{۲}=۹ \,,\, Q_۳=۱۰$$

$$\Rightarrow Q_۳-\frac{Q_۲}{Q_۱}=۱۰-\frac{۹}{۶}=۸/۵$$

تذکر اگر عددی به همهٔ داده‌ها اضافه یا از همهٔ داده‌ها کم شود، همان عدد عیناً به میانه اضافه یا از آن کم خواهد شد. و اگر عدد ثابتی در همهٔ داده‌ها ضرب یا همهٔ داده‌ها بر آن تقسیم شوند، همان عدد عیناً در میانهٔ داده‌ها ضرب و یا تقسیم می‌شود.

نتیجه اگر میانهٔ داده‌های $x_۱,x_۲,\cdots,x_n$ برابر $Q_۲$ باشد، میانهٔ داده‌های $ax_۱+b,ax_۲+b,\cdots,ax_n+b$ برابر با $aQ_۲+b$ است.

تست اگر میانهٔ داده‌های $۳x_۱+۲,۳x_۲+۲,\ldots,۳x_{۱۰}+۲$ برابر ۱۱ باشد، میانهٔ داده‌های $x_۱+۳,x_۲+۳,\ldots,x_{۱۰}+۳$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۱ میانهٔ داده‌های $x_۱,x_۲,\ldots,x_{۱۰}$ را $Q_۲$ در نظر می‌گیریم پس با توجه به صورت سؤال، داریم:

$$۳Q_۲+۲=۱۱ \Rightarrow Q_۲=۳$$

بنابراین میانهٔ داده‌های $x_i+۳$ برابر است با:

$$Q'_۲=Q_۲+۳=۳+۳=۶$$

دادهٔ دورافتاده

داده‌ای که نسبت به بقیهٔ داده‌ها، خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد را دادهٔ دورافتاده می‌گوییم.

دادهٔ دورافتاده بیش‌ترین تأثیر را بر میانگین دارد، در حالی‌که تأثیر کمی روی میانه می‌گذارد. پس وقتی دادهٔ دورافتاده داریم، میانه مناسب‌ترین معیار برای تشخیص حدود داده‌ها است.

تست زمان انتظار در هشت تماس تلفنی مختلف برای اتصال به اپراتور یک موسسه برحسب دقیقه به‌صورت ۲۳ و ۱ و ۲۷ و ۲۴ و ۱۹ و ۲۲ و ۲۵ و ۲۸ است. با حذف دادهٔ دورافتاده، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۲۳/۷۵ ۲) ۲۴ ۳) ۲۴/۲ ۴) ۲۴/۵

۲ در بین این اعداد، عدد ۱ دادهٔ دورافتاده محسوب می‌شود، که با حذف آن، میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۲۸+۲۵+۲۲+۱۹+۲۴+۲۷+۲۳}{۷}=\frac{۱۶۸}{۷}=۲۴$$

درس ۳ معیارهای پراکندگی

اعدادی که چگونگی پراکندگی داده‌ها را نشان می‌دهند، معیارهای پراکندگی نام دارند. دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم را به عنوان معیارهای پراکندگی بررسی می‌کنیم.

دامنهٔ تغییرات

اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده را دامنهٔ تغییرات می‌گویند و آن را با R نشان می‌دهند.

$R =$ کوچک‌ترین داده − بزرگ‌ترین داده

تذکر اگر دامنهٔ تغییرات داده‌ها صفر باشد، تمام داده‌ها با هم برابر هستند و برعکس.

مثال اگر دامنهٔ تغییرات داده‌های ۳، ۷، a، ۹، ۱۵، ۱۰، ۵، ۶ و ۱۱ برابر ۱۲ باشد، دادهٔ a چه تعداد از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱۴ ب) ۸ پ) ۲

در میان داده‌های معلوم، عدد ۳ و ۱۵ به‌ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده هستند که دامنهٔ تغییرات برابر $12 = 15 - 3$ است. بنابراین a هر عدد در بازهٔ $[3, 15]$ می‌تواند باشد. پس (الف) و (ب) قابل قبول هستند.

واریانس

اگر داده‌ها برابر $x_1, x_2, \cdots, x_n$ باشند، واریانس آن‌ها را با نماد σ^2 نشان می‌دهند و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$$

تست واریانس داده‌های ۴، ۰، ۲، ۸، ۶ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳

$$1)\ \bar{x} = \frac{6+8+2+0+4}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$2)\ \sigma^2 = \frac{(6-4)^2 + (8-4)^2 + (2-4)^2 + (0-4)^2 + (4-4)^2}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{4+16+4+16+0}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

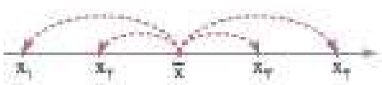
انحراف معیار

جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می‌نامند و با σ نشان می‌دهند.

تذکر واریانس و انحراف معیار اعداد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) هستند. هر چه واریانس و انحراف معیار کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشند، داده‌ها به هم نزدیک‌تر هستند و هر چه این شاخص‌ها بزرگ‌تر باشند، داده‌ها از هم دورتر هستند و پراکندگی بیش‌تری دارند.

۱ واریانس کوچک‌تر، پراکندگی کم‌تر

۲ واریانس بزرگ‌تر، پراکندگی بیش‌تر



تست در داده‌های آماری ۱۱، ۶، ۵، ۱۳، ۸، ۷، ۱۰، ۷، ۱۳ داده‌های کم‌تر از میانه را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۵

۳ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{5,6,7,7}_{\text{نیمهٔ اول}}, 8, \underbrace{10,11,13,13}_{\text{نیمهٔ دوم}}$$

پس باید واریانس داده‌های رنگی را پیدا کنیم:

$$\bar{x} = \frac{8+10+11+13+13}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(8-11)^2+(10-11)^2+(11-11)^2+(13-11)^2+(13-11)^2}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{9+1+0+4+4}{5} = \frac{18}{5} = 3/6$$

تذکر اگر تمام داده‌های آماری با هم برابر باشند، واریانس و انحراف معیار (و سایر شاخص‌های پراکندگی) برابر صفر است.

تست اگر انحراف معیار داده‌های $8d$ و $4c$ و $4b$ و $2a$ و ۸ برابر صفر باشد، واریانس داده‌های d و c و $2b$ و $a+1$ کدام است؟

۱) ۱/۸ ۲) ۲ ۳) ۲/۲ ۴) ۲/۵

۴ چون انحراف معیار داده‌های $8d$ و $4c$ و $4b$ و $2a$ و ۸ برابر صفر است، پس این داده‌ها با هم برابر هستند.

$$2a = 4b = 4c = 8d = 8 \Rightarrow a = 4, b = 2, c = 2, d = 1$$

بنابراین داده‌های d و c و $2b$ و $a+1$ به‌صورت ۱ و ۲ و ۴ و ۵ هستند و برای به‌دست آوردن واریانس آن‌ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+5}{4} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{\overbrace{(1-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}^{4+1+1+4}}{4} = 2/5$$

نکته ۱ در سؤالاتی که صحبت از مجموع مربعات داده‌ها است، می‌توانیم واریانس را از رابطهٔ زیر (که تعمیمی از رابطهٔ اصلی است) به‌دست آوریم:

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-(\bar{x})^2$$

نکته ۲ اگر $x_1,x_2,\cdots,x_n$ اضلاع تعدادی مربع باشند، آن‌گاه میانگین اضلاع آن‌ها برابر $\bar{x}$ است و با توجه به رابطهٔ بالا داریم:

$(\bar{x})^2$: مربع میانگین اضلاع

$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}$: میانگین مساحت مربع‌ها

تست مجموع ۴۰ دادهٔ آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۳۴۰ است. انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟

۱) ۱/۲۵   ۲) ۱/۵   ۳) ۲/۲۵   ۴) ۲/۵

۲ چون مجموع مربعات داده‌ها را داریم، از رابطهٔ دوم واریانس استفاده می‌کنیم:

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_{40}^2}{40}-(\bar{x})^2=\frac{340}{40}-\left(\frac{100}{40}\right)^2=8/5-(2/5)^2$$

$$=8/5-6/25=2/25\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sigma=\sqrt{2/25}=1/5$$

نکته اگر n دادهٔ آماری تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d بدهند، می‌توانیم انحراف معیار را از رابطهٔ زیر به‌دست آوریم:

$$\sigma=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}\times d$$

تست انحراف معیار داده‌های ۳۲ و ۲۷ و ۲۲ و ۱۷ و ۱۲ و ۷ و ۲ کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶/۵   ۳) ۸/۵   ۴) ۱۰

۴ این داده‌ها، ۷ جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۵ هستند:

$$\sigma=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}\times d\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{7^2-1}{12}}\times 5=\sqrt{4}\times 5=10$$

تذکر اگر همهٔ داده‌ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم، واریانس و انحراف معیار هیچ تغییری نمی‌کنند. اما اگر همهٔ داده‌ها را در a ضرب کنیم، واریانس داده‌ها در a^2 و انحراف معیار آن‌ها در $|a|$ ضرب می‌شود.

اگر واریانس داده‌های $x_1,x_2,\dots,x_n$ برابر σ^2 باشد، واریانس و انحراف معیار داده‌های $ax_1+b,ax_2+b,\dots,ax_n+b$ برابر هستند با:

$$\sigma_{new}=|a|\sigma \qquad \sigma^2_{new}=a^2\sigma^2$$

مثال اگر انحراف معیار داده‌های $x_1,x_2,\dots,x_{10}$ برابر ۶ باشد، انحراف معیار کدام‌یک از گروه‌های زیر برابر ۸ است؟

الف) $\frac{4}{3}x_1+4,\frac{4}{3}x_2+4,\dots,\frac{4}{3}x_{10}+4$

ب) $2x_1-4,2x_2-4,\dots,2x_{10}-4$

پ) $\frac{1}{2}x_1+5,\frac{1}{2}x_2+5,\dots,\frac{1}{2}x_{10}+5$

۱ می‌دانیم اگر همهٔ داده‌های آماری را a برابر کنیم و سپس همهٔ آن‌ها را با عدد b جمع کنیم، انحراف معیار $|a|$ برابر می‌شود. پس:

الف) $\sigma_A=\frac{4}{3}\times 6=8$

ب) $\sigma_B=2\times 6=12$

پ) $\sigma_C=\frac{1}{2}\times 6=3$

ضریب تغییرات

به میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین، ضریب تغییرات گفته می‌شود و با نماد CV نشان داده می‌شود و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

تذکر از ضریب تغییرات فقط برای داده‌های مثبت استفاده می‌شود.

تست ضریب تغییرات داده‌های ۱۰ و ۹ و ۶ و ۴ و ۴ و ۳ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ ۳) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{7}}{6}$

۴ برای سادگی محاسبهٔ واریانس، از همهٔ داده‌ها ۶ واحد کم می‌کنیم:

$x-6: -3,-2,-2,0,3,4$

$$1)\ \bar{x}-6=\frac{(-3)+(-2)+(-2)+0+3+4}{6}=0\Rightarrow\bar{x}=6$$

$$2)\ \sigma^2=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-2)^2+0+3^2+4^2}{6}$$

$$=\frac{9+4+4+0+9+16}{6}=7\Rightarrow\sigma=\sqrt{7}$$

$$3)\ CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{7}}{6}$$

تذکر ۱ اگر همهٔ داده‌ها در یک عدد مثبت ضرب شوند، ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند. اما اگر همهٔ داده‌ها در یک عدد منفی ضرب شوند، ضریب تغییرات قرینه می‌شود.

تذکر ۲ اگر داده‌ها از x_i به ax_i+b تغییر کنند، ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$CV=\frac{|a|\sigma}{a\bar{x}+b}$$

تست **ضریب تغییرات تعدادی دادهٔ آماری برابر ۱/۳۵ است. اگر به دو برابر این داده‌های آماری، عدد $\frac{1}{4}$ میانگین آن‌ها افزوده شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چقدر است؟** (خارج - ۹۴)

۱) ۰/۹۶ ۲) ۱/۰۸ ۳) ۱/۱۵ ۴) ۱/۲

۴ ضریب تغییرات داده‌های اولیه برابر $\frac{\sigma}{\bar{x}} = 1/35$ است. حال در داده‌های جدید داریم:

$$CV_{new} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + \frac{1}{4}\bar{x}} = \frac{2\sigma}{\frac{9}{4}\bar{x}} = \frac{8}{9} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{8}{9} \times 1/35 = 1/2$$

تست **میانگین سن بازیکنان تیم ملی والیبال ایران ۲۴ سال است. اگر پس از گذشت ۶ سال، ضریب تغییرات سن بازیکنان ۰/۰۴ شود، انحراف معیار سن آن‌ها چقدر می‌شود؟**

۱) ۱/۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۳۵ ۴) ۱/۴

۲

پس از گذشت ۶ سال، میانگین سن بازیکنان برابر ۳۰ سال می‌شود و انحراف معیار سن آن‌ها تغییری نمی‌کند، پس:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0/04 = \frac{\sigma}{24+6} \Rightarrow \sigma = 30 \times 0/04 = 1/2$$

یادداشت:

مقایسهٔ دقت کاری

به وسیلهٔ ضریب تغییرات می‌توانیم میزان پراکندگی در دو گروه مختلف از داده‌ها را با هم مقایسه کنیم. گروهی که ضریب تغییرات کم‌تری داشته باشد، عملکرد و دقت کاری بالاتری دارد.

نکته اگر میانگین دو گروه یکسان باشد، برای مقایسهٔ دقت کاری می‌توانیم به جای مقایسهٔ ضریب تغییرات، واریانس آن‌ها را مقایسه کنیم. گروهی که واریانس آن کم‌تر باشد، دقت کاری بالاتری دارد.

تست **در یک کارگاه دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به‌ترتیب ۴۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۳۳ و ۹ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟**

۱) گروه اول ۲) گروه دوم
۳) یکسان ۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

۲ گروهی بهتر است که ضریب تغییرات کم‌تری داشته باشد:

$$\begin{aligned} \text{گروه اول}: CV_1 &= \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\sqrt{25}}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \\ \text{گروه دوم}: CV_2 &= \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{\sqrt{9}}{33} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11} \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{8}$$

چون $CV_2 < CV_1$ است، بنابراین گروه دوم بهتر است.

فصل ۱۵

شمارش، بدون شمردن

ارتباط با فصل‌های دیگه: برای شمارش بدون شمردن فقط نیاز است که چهار عمل اصلی را بلد باشید. شمارش بدون شمردن فصل ششم سال دهم می‌باشد که اساس فصل احتمال است و بدون تسلط کامل به این فصل هیچ‌کاری در احتمال پیش نخواهید برد. حل مسائل این فصل، به تفکر و خلاقیت بیش‌تری نسبت به سایر فصل‌ها نیاز دارد.

توصیه: در سال‌های اخیر تست‌های بسیار متنوعی از این فصل در کنکور مطرح شده است، که نشان‌دهندهٔ انعطاف بالای سؤالات این بخش است. پیشنهاد می‌شود برای درک و تحلیل بهتر به مفهوم سؤال و حالت‌بندی موجود در حل، خیلی دقت کنید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۱	۱	۱	۱	صفر	۱	۱	صفر

درس ۱ شمارش

اصول شمارش

اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هر کدام از این m روش، در مرحلهٔ دوم n روش وجود داشته باشد، تعداد راه‌های انجام این کار برابر با $m \times n$ است.

[اصل ضرب برای چند عمل هم قابل تعمیم است.]

تذکر اصل ضرب در زبان فارسی، معادل کلمهٔ «و» است.

مثال **شخصی دارای ۴ کاپشن با رنگ مختلف، ۳ پیراهن با رنگ مختلف و ۲ شلوار با رنگ مختلف است. او به چند طریق می‌تواند این لباس‌ها را بپوشد؟**

اگر پوشیدن این لباس‌ها را یک کار در نظر بگیریم، این کار از سه مرحله یعنی پوشیدن کاپشن، پوشیدن پیراهن و پوشیدن شلوار تشکیل شده است. پس طبق اصل ضرب داریم:

تعداد حالت‌های پوشیدن لباس $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

تست **در یک کارخانه و خودروسازی نوعی اتومبیل در ۳ مدل، ۵ رنگ، ۲ حجم موتور و ۲ نوع دندهٔ اتوماتیک و غیر اتوماتیک تولید می‌شود. در این کارخانه چند نوع اتومبیل دندهٔ اتوماتیک تولید می‌شود؟**

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۲ اگر تولید شدن اتومبیل را یک کار در نظر بگیریم این کار از چهار بخش نوع دنده و حجم موتور و نام رنگ و مدل اتومبیل تشکیل می‌شود، پس تمام نوع اتومبیل تولیدی برابر است با:

$$\underset{\text{مدل}}{\boxed{3}} \times \underset{\text{رنگ}}{\boxed{5}} \times \underset{\text{موتور}}{\boxed{2}} \times \underset{\text{دنده}}{\boxed{2}} = 60$$

چون در این سؤال تعداد اتومبیل دندهٔ اتوماتیک خواسته شده است، پس برای نوع دنده یک انتخاب داریم:

$$\underset{\text{مدل}}{\boxed{3}} \times \underset{\text{رنگ}}{\boxed{5}} \times \underset{\text{موتور}}{\boxed{2}} \times \underset{\text{دنده}}{\boxed{1}} = 30$$

تست **تعداد جملات حاصل ضرب $(z+1)(a+b+c)(x-y)$ چند تا است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۷

۱ تعداد جملات ضرب دو یا چند عبارت چند جمله‌ای در هم به شرطی که تمام جملات دو به دو غیر متشابه باشند برابر است با حاصل ضرب تعداد جملات آن عبارت‌ها:

$$\underbrace{(z+1)}_{\text{۲ جمله‌ای}}\underbrace{(a+b+c)}_{\text{سه جمله‌ای}}\underbrace{(x-y)}_{\text{۲ جمله‌ای}}$$

چون هر دوتایی از جملات غیر متشابه‌اند تعداد جملات برابر است با:

$2 \times 3 \times 2 = 12$

توجه اگر عبارات دارای جملات متشابه باشند، ممکن است تعداد جملات مانده پس از ضرب و ساده‌کردن کمتر باشد.
مثلاً اگر تعداد جملات $(a+b)(a+2+b)$ را بخواهیم:

$$a^2+2a+\underbrace{ab+ab}_{2ab}+2b+b^2=a^2+2a+2ab+2b+b^2$$

حاصل ضرب برابر ۵ جمله شد.

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر m + n روش وجود دارد. [اصل جمع برای چندین عمل هم قابل تعمیم است.]

تذکر اصل جمع در زبان فارسی، معادل کلمهٔ «یا» است.

مثال ۱ **علی دارای ۵ شلوار جین، ۳ شلوار پارچه‌ای و ۶ شلوار کتان است. او به چند طریق می‌تواند یکی از آنها را بپوشد؟**

علی نمی‌تواند شلوارها را با هم بپوشد. در واقع علی یا شلوار جین می‌پوشد یا شلوار پارچه‌ای یا شلوار کتان، پس از اصل جمع استفاده می‌شود.

تعداد شلوار کتان + تعداد شلوار پارچه‌ای + تعداد شلوار جین = تعداد کل حالات
۱۴= ۶ + ۳ + ۵ =

بنابراین علی به ۱۴ طریق مختلف می‌تواند شلوار بپوشد.

مثال ۲ **مطابق شکل، سه شهر A، B و C توسط راه‌های مشخص شده به هم متصل شده‌اند. به چند طریق می‌توان:**

الف) از شهر A به شهر C رفت؟

برای رفتن از A به B، ۲ راه و برای رفتن از B به C، ۳ راه وجود دارد. پس طبق اصل ضرب، به ۶ = ۳ × ۲ طریق می‌توان از شهر A به C رفت.

ب) از شهر A به شهر C رفت و برگشت؟

به ۶ = ۳ × ۲ طریق می‌توان از A به C رفت و به ۶ = ۲ × ۳ طریق می‌توان از C به A برگشت. پس طبق اصل ضرب، تعداد راه‌های رفت و برگشت برابر ۳۶ = ۶ × ۶ است.

پ) از شهر A به شهر C رفت و برگشت به طوری‌که مسیر رفت و برگشت متمایز باشد؟

به ۶ = ۳ × ۲ طریق می‌توان از A به C رفت. اما اگر برای رفت از مسیر

برویم، برای برگشت نباید از این مسیر برگردیم و از تعداد مسیرهای برگشت، یک واحد کم می‌شود. پس تعداد مسیرهای رفت و برگشت، برابر ۳۰ = (۱ − ۶) × ۶ است.

ت) از شهر A به شهر C رفت و برگشت به طوری‌که از هیچ جاده‌ای دو بار عبور نکنیم؟

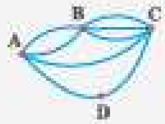
اگر برای رفت از مسیر

برویم، برای برگشت نمی‌توانیم از مسیرهای

استفاده کنیم، پس:

$\Rightarrow$ تعداد راه‌های رفت و برگشت $= \underbrace{(2\times3)}_{\text{رفت}}\times\underbrace{(2\times1)}_{\text{برگشت}}=12$

تست **شهرهای A، B، C، D مطابق راه‌های مشخص‌شده به هم متصل شده‌اند. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟ (از هر شهر فقط یک بار عبور کنید.)**



۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

۳ برای رفتن از شهر A به شهر D می‌توان از یکی از سه مسیر زیر استفاده کرد:

مسیر ۱: $A \to B \to C \to D$

از A به B دو مسیر و از B به C سه مسیر و از C به D یک مسیر است، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های رفتن از مسیر ۱ برابر است با:
۶ = ۱ × ۳ × ۲

مسیر ۲: $A \to C \to D$

از A به C یک مسیر و از C به D نیز یک مسیر موجود است، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های رفتن از مسیر ۲ برابر است با:
۱ = ۱ × ۱

مسیر ۳: $A \to D$

از A به D یک مسیر مستقیم موجود است، پس تعداد حالت مسیر ۳ برابر ۱ است. بنابراین از مسیر ۱، یا مسیر ۲ و یا مسیر ۳ استفاده می‌شود. پس طبق اصل جمع داریم:
۸ = ۱ + ۱ + ۶

عددنویسی

برای ساختن یک عدد nرقمی با ارقام داده‌شده، ابتدا n جای خالی در نظر می‌گیریم و معمولاً خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم.
حال به نکات زیر توجه کنید:

۱ **رقم سمت چپ هیچ عددی، صفر نیست.**

مثال **با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟**

یکی از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را در خانهٔ سمت چپ قرار می‌دهیم. سپس به کمک چهار رقم دیگر و صفر، خانهٔ وسط را پُر می‌کنیم و در آخر خانهٔ سمت راست را پُر می‌کنیم:

$\underset{\text{غیر صفر}}{۵}\times۵\times۴=۱۰۰$

۲ **اگر خانه‌ای دارای محدودیت یا شرایط خاصی باشد، باید اول سراغ آن خانه‌ها برویم و آن‌ها را پُر کنیم.** [مثلاً برای ساختن عدد فرد، زوج، مضرب ۵ و ... باید ابتدا خانهٔ سمت راست را پُر کنیم.]

مثال **با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟**

خانهٔ سمت راست را با کمک یکی از ارقام ۲ یا ۴ پُر می‌کنیم. سپس بقیهٔ خانه‌ها را با کمک چهار رقم باقی‌مانده پُر می‌کنیم:

$۴\times۳\times\underset{(۲,۴)}{۲}=۲۴$

تست **با ارقام ۰،۶،۵،۴،۳،۲ چند عدد چهار رقمی فرد با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟**

۱) ۹۶ ‏ ۲) ۴۸ ‏ ۳) ۲۴ ‏ ۴) ۱۴۴

۱ خانهٔ سمت راست را با یکی از ارقام {۳،۵} پُر می‌کنیم، سپس خانهٔ سمت چپ با یکی از اعداد {۲،۴،۶} و عدد مانده بین ۳ و ۵ پُر می‌شود، بقیه خانه‌ها با چهار رقم باقی‌مانده پُر می‌شوند.

$$\underset{\substack{\{2,4,6\}\\ \text{و یکی بین ۳ و ۵}}}{2}\times4\times3\times\underset{\{3,5\}}{2}=96$$

در برخی مسائل شمارش، باید تعداد اعداد کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از عدد خاصی را پیدا کنیم.

مثال **چند عدد ۵ رقمی با رقم‌های زوج و متمایز می‌توان ساخت که کوچک‌تر از ۵۰۰۰۰ باشند؟**

چون می‌خواهیم با رقم‌های زوج عدد نویسی انجام دهیم، مجموعهٔ ارقام {۰،۲،۴،۶،۸} است. برای اینکه عدد ساخته‌شده کوچک‌تر از ۵۰۰۰۰ باشد، باید رقم سمت چپ از اعداد {۲،۴} انتخاب شود و سایر خانه‌ها با ارقام باقی مانده پُر می‌شوند.

$$\underset{\{2,4\}}{2}\times4\times3\times2\times1=48$$

تست **چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟**

۱) ۲۵۰ ‏ ۲) ۴۸ ‏ ۳) ۹۶ ‏ ۴) ۷۲

۳ چون می‌خواهیم عدد نویسی را با ارقام فرد انجام دهیم، مجموعهٔ ارقام {۱،۳،۵،۷،۹} است.

برای اینکه عدد ساخته شده بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ باشد، رقم سمت چپ نمی‌تواند {۱} باشد، پس یکی از اعداد {۳،۵،۷،۹} است، با کم شدن یکی از این اعداد سایر خانه‌ها با ۴ رقم باقی مانده پُر می‌شوند.

$$\underset{\{3,5,7,9\}}{4}\times4\times3\times2=96$$

برای ساختن عدد زوج یا مضرب ۵ بدون تکرار ارقام، اگر بین ارقام داده شده صفر وجود داشته باشد، مسئله را در ۲ حالت حل می‌کنیم؛ یعنی تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر نیست را جداگانه و تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر است را جداگانه محاسبه می‌کنیم و در نهایت جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال **با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد سه‌رقمی مضرب ۵ با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟**

اگر رقم سمت راست صفر باشد، برای بقیهٔ خانه ها محدودیتی وجود ندارد. اما اگر رقم سمت راست ۵ باشد، رقم سمت چپ نباید صفر باشد. پس:

$$5\times4\times\underset{\{0\}}{1}+\underset{\text{غیر صفر}}{4}\times4\times\underset{\{5\}}{1}=20+16=36$$

تست **با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴،۶ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟**

۱) ۱۴۴ ‏ ۲) ۶۰ ‏ ۳) ۲۰۴ ‏ ۴) ۱۹۶

۳ می‌دانیم یکان این عدد باید زوج باشد. اگر رقم سمت راست صفر باشد، محدودیتی برای سایر خانه‌ها نداریم ولی اگر یکی از اعداد {۲،۴،۶} خانهٔ سمت راست را پُر کنند، رقم خانهٔ سمت چپ نباید صفر باشد.

$$5\times4\times3\times\underset{\{0\}}{1}+\underset{\text{غیر صفر}}{4}\times4\times3\times\underset{\{2,4,6\}}{3}$$

$$=60+144=204$$

برای ساختن کُد (رمز) رقم سمت چپ می‌تواند صفر باشد، در حالی‌که رقم سمت چپ هیچ عددی صفر نیست.

مثال **به چند طریق می‌توان یک رمز با چهار کاراکتر تشکیل داد به طوری‌که دو کاراکتر سمت چپ از بین ارقام {۰،۱،۲،۳،۴} و دو کاراکتر سمت راست از بین حروف {a,b,c} باشند؟**

محدودیتی برای استفاده از کاراکترهای تکراری نداریم، پس:

$$\underbrace{5\times5}_{\{0,1,2,3,4\}}\times\underbrace{3\times3}_{\{a,b,c\}}=225$$

تست **شیدا رمز ۴ رقمی کارت بانکی خود را فراموش کرده است. او می‌داند در رمزش فقط از ارقام {۰،۸،۵} استفاده کرده است. اگر چک کردن هر رمز ۳ ثانیه زمان بگیرد، حداکثر پس از چند ثانیه به رمز کارت بانکی خود می‌رسد؟**

۱) ۸۱ ‏ ۲) ۷۲۹ ‏ ۳) ۲۴۳ ‏ ۴) ۹۲۷

۳ در رمز گذاری محدودیتی نداریم بنابراین هر کدام از ۴ خانهٔ رمز می توانند با یکی از ارقام {۰،۸،۵} پُر شوند.

$$3\times3\times3\times3=81$$

چون چک کردن هر رمز ۳ ثانیه طول می‌کشد، حداکثر زمان مورد نیاز برابر است با: $81\times3=243$ ثانیه

در چه سؤالاتی تکرار ارقام مجاز است؟

در سؤالات ساختن عدد، باید در صورت سؤال به مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام به وضوح اشاره شود. اما اگر صحبتی در رابطه با مجاز بودن تکرار ارقام نشود، تکرار ارقام مجاز است. البته بیان جملاتی مانند «با کنار هم قرار گرفتن ارقام ...» یا «تعداد جایگشت‌های موجود با ارقام ...» یا «تعداد اعدادی که با ارقام عدد ... می‌توان ساخت» تکرار ارقام را غیرمجاز می‌کند.

مثال **با ارقام ۱،۷،۳،۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت ؟**

چون صحبتی از مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام نشده است، پس تکرار ارقام را مجاز در نظر می‌گیریم، بنابراین برای هر خانه تمام ارقام {۱،۷،۳،۲} می‌توانند استفاده شوند.

$$4\times4\times4=64$$

اصل متمم (اصل تفریق)

در بعضی مسائل، محاسبهٔ تعداد حالت‌هایی که مسئله نمی‌خواهد، از محاسبهٔ تعداد حالت‌های موردنظر راحت‌تر است؛ پس می‌توانیم ابتدا تعداد حالت‌های نامطلوب را محاسبه کنیم و از تعداد کل حالت‌های ممکن کم کنیم. این اصل را **اصل تفریق** یا **متمم** می‌نامند.

مثال **با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت به طوری‌که شامل رقم ۳ باشد؟**

تعداد کل اعداد چهاررقمی با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به‌دست می‌آوریم و تعداد اعداد چهاررقمی فاقد ۳ را کنار می‌گذاریم:

$$5\times4\times3\times2-4\times3\times2\times1=120-24=96$$

تست **چند عدد سه رقمی وجود دارد که حداقل یک بار در آن، رقم ۶ استفاده شده است؟**

۱) ۶۴۸ ۲) ۶۵۲ ۳) ۲۶۸ ۴) ۲۵۲

۴ ابتدا تعداد تمام اعداد سه رقمی را محاسبه می‌کنیم:

$$\underset{\text{به جز صفر}}{9}\times10\times10=900$$

سپس تعداد تمام اعداد سه رقمی فاقد ۶ را به دست می‌آوریم، یعنی تعداد اعداد سه رقمی‌ای را که با ارقام {۰،۱،۲،۳،۴،۵،۷،۸،۹} قابل ساختن‌اند را به دست می‌آوریم:

$$8\times9\times9=648$$

بنابراین تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک ۶ دارند برابر است با:

تعداد سه‌رقمی‌هایی که فاقد ۶ اند − تعداد کل سه‌رقمی‌ها

$$=900-648=252$$

درس ۲ فاکتوریل و جایگشت

فاکتوریل

فاکتوریل: حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را به‌صورت $n!$ نشان می‌دهند و آن را «n فاکتوریل» می‌خوانند. بنابراین:

$$n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$$

تذکر با توجه به تعریف فاکتوریل می‌دانیم $1!=1$ است. طبق قرارداد $0!=1$ است. بهتر است فاکتوریل‌های زیر را حفظ باشید:

$$0!=1 \quad 1!=1 \quad 2!=2 \quad 3!=6 \quad 4!=24 \quad 5!=120 \quad 6!=720$$

مثال **درستی یا نادرستی عبارات زیر را تشخیص دهید.**

الف) $3!+3!=6!$ ب) $4!+2!=8!$

پ) $(2!)^2=4!$ ت) $(n+1)!=(n+1)\times n!$

الف) نادرست است.

$$\begin{cases}6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720\\3!+3!=(3\times2\times1)+(3\times2\times1)=12\end{cases}$$

توجه در حالت کلی $(a+b)!\neq a!+b!$ است.

ب) نادرست است.

$$\begin{cases}8!=8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=40320\\4!+2!=(4\times3\times2\times1)+(2\times1)=26\end{cases}$$

توجه در حالت کلی $(ab)!\neq a!+b!$ است.

پ) نادرست است.

$$\begin{cases}(2!)^2=(2\times1)^2=2^2=4\\4!=4\times3\times2\times1=24\end{cases}$$

توجه در حالت کلی $(a^n)!\neq(a!)^n$ است.

ت) درست است.

$$(n+1)!=(n+1)\times\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times1}_{n!}=(n+1)\times n!$$

تست **اگر $1/1=\dfrac{(n+1)!\times(n-1)!}{(n!)^2}$ باشد، مقدار n کدام است؟**

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳ برای ساده کردن عبارت، عدد فاکتوریلی بزرگ‌تر در صورت و مخرج را باز می‌کنیم:

$$\frac{(n+1)!\times(n-1)!}{n!\times n!}=\frac{(n+1)n!\times(n-1)!}{n!\times n\times(n-1)!}=\frac{n+1}{n}=1/1=\frac{11}{10}\Rightarrow n=10$$

جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها در کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

مثلاً، سه نفر با اسامی A و B و C به حالت‌های زیر می‌توانند در یک ردیف بنشینند:

ABC ACB BAC BCA CBA CAB

برای محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، n خانه در نظر می‌گیریم. خانهٔ اول را به n طریق، خانهٔ بعدی را به $n-1$ طریق و ... و خانهٔ آخر را به ۱ طریق می‌توان پُر کرد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز $=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$

مثلاً، تعداد حالت‌هایی که ۴ نفر می‌توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، برابر $4!=24$ است.

تست **با حروف کلمهٔ «FACTOR» چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان ساخت که با حروف صدادار شروع و به حرف T ختم شود.**

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۹۶ ۴) ۱۴۴

۲ سؤال جای حرف T را مشخص کرده پس در خانهٔ آخر ۱ حالت داریم. برای پُر کردن خانهٔ اول نیز باید یکی از دو حرف صدادار (A,O) را انتخاب کنیم. ۴ خانهٔ وسط نیز با ۴ حرف باقی‌مانده به !۴ حالت تکمیل می‌شود.

$$\underset{(A,O)}{\boxed{2}}\times4!\times\underset{(T)}{\boxed{1}}=48$$

انواع جایگشت

۱ جایگشت با تکرار: اگر بخواهیم جایگشت n شیء را پیدا کنیم که n_1 تای آن‌ها شبیه هم، n_2 تای دیگر نیز شبیه هم، ... و n_k تای آن‌ها شبیه هم باشند، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

تست با حروف کلمهٔ «DAMDAR» چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

۱) ۳۰ ۲) ۹۶ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۶۰

۳ از حرف A دو تا و از حرف D نیز دو تا داریم، پس: $\frac{6!}{2!2!}=180$

تست با حروف کلمهٔ «MANDANA» چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۱۸۰

۲ کلمهٔ MANDANA دارای ۳ حرف A و دو حرف N است. بنابراین:

تعداد کل حروف $n=7$

تعداد تکرارهای حرف A $n_1=3$

$$\Rightarrow \frac{7!}{3!\times2!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3!}{3!\times2!}=420$$

تعداد تکرارهای حرف N $n_2=2$

نکته تعداد جایگشت‌های $(n-1)$ تایی از n شیء با تعداد جایگشت‌های n تایی آن‌ها برابر است. این نکته هم برای اشیاء تکراری و هم برای اشیاء غیرتکراری برقرار است.

تست با حروف کلمهٔ «Colour» چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۷۰ ۲) ۲۹۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۳۶۰

۴ کلمهٔ «Colour» از ۶ حرف تشکیل شده است؛ بنابراین تعداد کلمات ۵ حرفی که می‌توان با حروف آن ساخت برابر با تعداد کلمات ۶ حرفی است. پس:

تعداد جایگشت‌های ۵ تایی = تعداد جایگشت‌های ۶ تایی = $\frac{6!}{2!}=360$

مثال با ارقام ۲ ۲ ۲ ۴ ۴ ۳ ۳ چند عدد فرد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

چون می‌خواهیم عدد فرد باشد، رقم یکان حتماً ۳ است. پس با ۶ رقم باقی‌مانده سایر خانه‌ها را پُر می‌کنیم.

۳،۴،۴،۲،۲،۲ $\underbrace{\boxed{3}}_{\text{یکان}} \Rightarrow \frac{6!}{\underbrace{2!}_{\text{تکرار رقم ۴}}\times\underbrace{3!}_{\text{تکرار رقم ۲}}}=60$

۲ جایگشت یکی در میان: برای این‌که بتوانیم دو گروه از اشیا را به‌صورت یکی در میان کنار هم قرار دهیم، دو حالت داریم:

الف) اگر تعداد اعضای دو گروه، یک واحد اختلاف داشته باشد، باید چیدن با گروهی شروع شود که تعداد عضو بیش‌تری دارد. در این حالت جایگشت‌های هر گروه را محاسبه کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

□ ○ □ ○ □ ○ □ $\Rightarrow 4!\times3!$

ب) اگر تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشند، به دو حالت می‌توانیم آن‌ها را کنار هم قرار دهیم. در این حالت باید تعداد جایگشت‌های هر گروه را محاسبه و جواب را در ۲ ضرب کنیم.

□ ○ □ ○ □ ○

○ □ ○ □ ○ □ $\Rightarrow 2\times3!\times3!$

تست با جابه‌جایی ارقام «۵۷۶۲۲۲» چند عدد شش‌رقمی می‌توان تشکیل داد، به طوری‌که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۴

۲ چون می‌خواهیم ۲ها یکی در میان قرار گیرند، دو حالت داریم:

۲○۲○۲○ یا ○۲○۲○۲ $\Rightarrow 3!+3!=12$

تست حروف "KETABIQ" را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که حروف صدادار و بی صدا یک در میان باشند؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۹۶ ۴) ۱۸۰

۱ از میان ۷ حرف داده شده، ۳ حرف صدادار {E,A,I} و ۴ حرف بی صدا {K,T,B,Q} هستند. پس مطابق حالت اول درسنامه این گروه یک واحد اختلاف دارند و تنها حالت چیدمان آنها به صورت زیر است:

بی‌صدا صدادار بی‌صدا صدادار بی‌صدا صدادار بی‌صدا

که تعداد حالت آن برابر است با: $4!\times3!=24\times6=144$

۳ کنار هم بودن: اگر بخواهیم جایگشت n شیء را پیدا کنیم به طوری‌که چند شیء مشخص کنار هم باشند، ابتدا آن اشیاء را درون یک بسته قرار می‌دهیم و این بسته را به عنوان یک عضو در نظر می‌گیریم و جایگشت آن را با بقیهٔ اعضا محاسبه می‌کنیم، سپس حاصل را در جایگشت اشیای درون بسته ضرب می‌کنیم.

مثال ۳ دختر و ۴ پسر به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، به طوری‌که:

الف) دخترها کنار هم باشند؟

۳ دختر را درون یک بسته در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت بسته و ۴ پسر را محاسبه و آن را در جایگشت دخترها ضرب می‌کنیم:

$\boxed{\text{♀ ♀ ♀}}$ ♂ ♂ ♂ ♂ $\Rightarrow 5!\times3!=720$

ب) هر ۳ دختر کنار هم نباشند؟

تعداد جایگشت‌هایی که ۳ دختر کنار هم هستند را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم:

$7!-5!\times3!=7\times6\times5!-6\times5!=(7-1)\times6\times5!=4320$

در مثال قبل، اگر بخواهیم هیچ دو دختری کنار هم نباشند باید بین پسرها جای خالی در نظر بگیریم و جایگشت ۴ پسر را حساب کنیم. حال پنج جای خالی ایجاد شده است که باید ۳ دختر را طبق اصل ضرب در آن‌ها قرار دهیم. دختر اول ۵ انتخاب دارد، دختر دوم ۴ انتخاب و دختر بعدی ۳ انتخاب، یعنی:

$\Rightarrow 4!\times\underbrace{5\times4\times3}_{\text{دخترها}}$

مثال **با حروف کلمهٔ «وطن‌پرستی» چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان ساخت که:**

الف) «وطن» دیده شود؟

در این حالت کلمهٔ وطن را یک بسته در نظر می‌گیریم و جابگشت آن با سایر حروف (پ،ر،س،ت،ی) را محاسبه می‌کنیم:

وطن	پ	ر	س	ت	ی

$\Rightarrow 6! = 720$

ب) در آن حروف کلمهٔ «وطن» کنار هم باشند؟

در این حالت حروف کلمهٔ (وطن) را درون یک بسته قرار می‌دهیم و جابگشت این بسته را و ۵ حرف (پ،ر،س،ت،ی) را محاسبه می‌کنیم:

و،ط،ن	پ	ر	س	ت	ی

$\Rightarrow 6! \times 3! = 4320$

۲ جایگشت دایره‌ای: اگر n نفر بخواهند دور یک میز دایره‌ای بنشینند، تعداد کل حالت‌های ممکن برابر با $(n-1)!$ است.

مثال **۳ دختر و ۲ پسر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد قرار گیرند؟**

چون هیچ محدودیتی برای قرار گرفتن این ۵ نفر دور میز گرد وجود ندارد، پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $(5-1)! = 4! = 24$

نکته در میز گرد، اگر شخص (یا اشخاصی) در جای مشخصی دور میز قرار گیرند، جایگشت بقیهٔ افراد را مانند جایگشت خطی در نظر می‌گیریم.

مثال **۴ پسر و ۴ دختر به چند طریق می‌توانند به‌صورت یک در میان دور یک میز گرد قرار بگیرند؟**

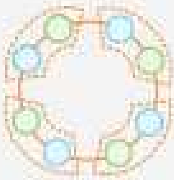
ابتدا ۴ پسر به $(4-1)!$ حالت دور میز گرد قرار می‌گیرند. اما چون جایگاه پسرها در میز گرد مشخص شد، ۴ دختر باید به $4!$ حالت در ۴ جای خالی بنشینند و دیگر با میز گرد مواجه نیستند.

$(4-1)!4! = 3!4! = 6 \times 24 = 144$

تست **۴ زن و شوهر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند، به طوری که هر مرد کنار همسرش باشد؟**

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۹۶ ۴) ۱۱۲

۳ هر زن و شوهر را درون یک بسته در نظر می‌گیریم و جایگشت دوری ۴ بسته را در جایگشت هر زن و شوهر درون بسته ضرب می‌کنیم:



$\Rightarrow \underbrace{(4-1)!}_{\text{کل بسته‌ها}} \times \underbrace{2! \times 2! \times 2! \times 2!}_{\text{درون بسته‌ها}} = 6 \times 16 = 96$

نکته می‌دانیم n شیء به $n!$ حالت جایگشت داده می‌شود. ممکن است سؤال بخواهد ترتیب خاصی بین این n شیء برقرار باشد. مثلاً شیء خاصی قبل یا بعد از شیء دیگری بیاید. تعداد حالتی که r تا از n شیء ترتیب خاصی داشته باشند، برابر است با:

$$\frac{n!}{r!}$$

مثال **علی و حسن به همراه ۳ نفر دیگر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت علی بعد از حسن سخنرانی می‌کند؟**

این نفرات کلاً ۵ نفر هستند که دو نفر آنها «علی و حسن» ترتیب خاصی دارند.

بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{5! \leftarrow \text{کل نفرات}}{2! \leftarrow \text{ترتیب خاص برای ۲ نفر}} = \frac{120}{2} = 60$$

درس ۳ ترکیب و ترتیب

ترکیب و ترتیب

فرض کنید n شیء متمایز داریم و می‌خواهیم r تا از آن‌ها را انتخاب کنیم. دو حالت داریم:

۱ ترتیب: اگر ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم باشد، باید تعداد جایگشت‌های آن r شیء را حساب کنیم $(r < n)$. تعداد حالات ممکن طبق اصل ضرب برابر است با:

$$p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

در واقع منظور از ترتیب، **انتخاب همراه با جایگشت** است. (البته می‌توانیم از اصل ضرب هم استفاده کنیم.)

مثال **به چند طریق می‌توان از بین ۵ کتاب متمایز، ۳ کتاب را انتخاب و در یک قفسه کنار هم قرار داد؟**

ابتدا باید ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب کنیم و آن‌ها را به شکل‌های مختلف کنار هم بچینیم. پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$p(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

البته می‌توانستیم سه خانه در نظر بگیریم و از اصل ضرب استفاده کنیم:

$5 \times 4 \times 3 = 60$

تست **۶ دوست می‌خواهند عکس یادگاری ۵ و ۶ نفره بگیرند. تعداد حالت‌های عکس ۵ نفره چند برابر عکس ۶ نفره است؟**

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) ۵

۱ عکس ۶ نفره به $6!$ حالت قابل انجام است و برای عکس ۵ نفره $p(6,5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$p(6,5) = \frac{6!}{(6-5)!} = 6!$$

پس تعداد دو حالت با هم برابر است.

یادآوری: تعداد جایگشت‌های n و $(n-1)$ تایی از n شیء با هم برابر است.

۲ ترکیب: اگر ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، تعداد راه‌های ممکن را که با نماد $\binom{n}{r}$ یا $C(n,r)$ نشان داده می‌شود، برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

در واقع انتخاب‌هایمان بدون جایگشت هستند.

مثال به چند طریق می‌توان از بین پنج نفر، یک کمیتهٔ ۳ نفری تشکیل داد؟

چون ترتیب افراد انتخاب شده اهمیتی ندارد، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۲!۳!}=۱۰$$

نکته اگر ارزش بعضی از اشیاء متفاوت باشد، باید آن‌ها را در مرحله‌های جداگانه انتخاب کنیم.

مثال به چند طریق می‌توان از بین ۵ نفر، یک کمیتهٔ ۴ نفری تشکیل داد، به طوری‌که اولی رئیس و دومی معاون باشد؟

ابتدا رئیس را جداگانه انتخاب می‌کنیم، سپس معاون را جداگانه انتخاب می‌کنیم و در آخر ۲ نفر دیگر را با هم انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}=۵\times۴\times۳=۶۰$$

قوانین محاسبهٔ ترکیب

فرض کنید n شیء متمایز داریم:

۱ اگر بخواهیم همه را انتخاب کنیم یا هیچ‌کدام را انتخاب نکنیم، فقط یک راه وجود دارد. یعنی:

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{۰}=۱$$

۲ اگر بخواهیم یکی از آن‌ها یا $(n-۱)$تا از آن‌ها را انتخاب کنیم، n راه مختلف وجود دارد. یعنی:

$$\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$$

۳ در حالت کلی رابطهٔ مقابل برای هر $r\le n$ برقرار است:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

از این قانون، نتیجه می‌گیریم اگر $\binom{n}{r_1}=\binom{n}{r_2}$ باشد، آن‌گاه:

$r_1=r_2$ یا $r_1+r_2=n$

تست اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $\binom{۸}{x+۲}=\binom{۸}{۲x-۳}$ باشند، مقدار $x_1^2+x_2^2$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۴ ۳) ۳۸ ۴) ۴۲

۲ از تساوی $\binom{۸}{x+۲}=\binom{۸}{۲x-۳}$ دو نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$۱)\ x+۲=۲x-۳\Rightarrow x=۵$$

$$۲)\ (x+۲)+(۲x-۳)=۸\Rightarrow ۳x=۹\Rightarrow x=۳$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=۵^۲+۳^۲=۳۴$$

تست از معادلهٔ $C(n,۲)+P(n,۲)=۱۸$ مقدار $\binom{۲n}{۳}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۵ ۴) ۵۶

۴ $$C(n,۲)+P(n,۲)=۱۸\Rightarrow\frac{n!}{۲!\times(n-۲)!}+\frac{n!}{(n-۲)!}=۱۸$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۲}\times\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=۱۸\Rightarrow n(n-۱)=۱۲\xrightarrow{۴\times۳=۱۲}n=۴$$

$$\binom{۲n}{۳}=\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!\times۵!}=۵۶$$

تذکر حفظ بودن ترکیب‌های زیر، در حل سریع‌تر تست‌ها کمک‌کننده است:

$$\binom{۳}{۲}=۳\quad\binom{۴}{۲}=۶\quad\binom{۵}{۲}=۱۰\quad\binom{۶}{۲}=۱۵$$

$$\binom{۴}{۳}=۴\quad\binom{۵}{۳}=۱۰\quad\binom{۶}{۳}=۲۰\quad\binom{۷}{۳}=۳۵$$

نکته برای محاسبهٔ سریع‌تر $\binom{n}{r}$ می‌توانیم تعداد r خط کسری در نظر بگیریم و کسر اول را به‌صورت $\frac{n}{r}$ بنویسیم. سپس یک واحد از صورت کسر و یک واحد از مخرج کسر کم کنیم و اعداد حاصل را در کسر بعدی بنویسیم و این کار را ادامه دهیم تا مخرج آخرین کسر ۱ شود.

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶}{۳}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۴}{۱}=۲۰$$

$$\binom{۹}{۴}=\frac{۹}{۴}\times\frac{۸}{۳}\times\frac{۷}{۲}\times\frac{۶}{۱}=۱۲۶$$

تست در یک پرواز داخلی ۳ جای خالی در هواپیما موجود است و ۷ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۳ نفر را سوار هواپیما کرد؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۵ ۳) ۳۵ ۴) ۲۸

۳ به ترتیب خاصی برای سوار شدن اشاره نشده، پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷}{۳}\times\frac{۶}{۲}\times\frac{۵}{۱}=۳۵$$

نکته در خیلی از سوالات ترکیب، انتخاب‌ها از بین چند گروه انجام می‌شود که نیاز به حالت بندی و سپس استفاده از اصل جمع دارد.

تست به چند طریق می‌توان از بین ۸ عدد مثبت و ۶ عدد منفی، ۳ عدد انتخاب کرد، به طوری که حاصل ضرب آن‌ها منفی باشد؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۸۸ ۳) ۱۶۴ ۴) ۱۵۴

۲ برای این‌که ضرب سه عدد منفی باشد، دو حالت داریم:

الف) هر سه عدد منفی باشند:

۶ عدد منفی داریم که باید ۳ تای آنها را انتخاب کنیم.

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶}{۳}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۴}{۱}=۲۰$$

ب) یک عدد منفی و دو عدد مثبت باشند.

$$\binom{۶}{۱}\binom{۸}{۲}=\frac{۶}{۱}\times\frac{۸}{۲}\times\frac{۷}{۱}=۶\times۲۸=۱۶۸$$

پس حالت الف) یا حالت ب) باید رخ دهد:

$$۲۰+۱۶۸=۱۸۸$$

نکته یکی از کاربردهای ترکیب، گروه‌بندی اشیا است. فرض کنید می‌خواهیم ۶ نفر را به سه گروه ۱، ۲، ۳ نفره تقسیم کنیم. می‌توان به دلخواه ابتدا اعضای یکی از گروه‌ها را انتخاب کرد و بعد سراغ انتخاب گروه بعدی رفت.

$$\underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ نفر از ۶ نفر}}\times\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ نفر از باقیمانده‌ها}}\times\underbrace{\binom{۱}{۱}}_{\text{انتخاب ۱ نفر از باقیمانده‌ها}}=۶۰$$

و یا:

$$\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ نفر از ۶ نفر}}\times\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب ۱ نفر از باقیمانده‌ها}}\times\underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ نفر از باقیمانده‌ها}}=۶۰$$

واضح است که با هر اولویتی به ۶۰ حالت می‌رسیم.

مثال می‌خواهیم با ۴ نفر از ۷ بازیکن والیبال، یک بازی با گروه سه نفره و تک نفره انجام دهیم. چند طریق برای این کار داریم؟

$$\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{\text{انتخاب ۴ نفر فعلی از ۷ بازیکن‌هایم}}\times\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب گروه ۳ نفره از ۴ نفر}}\times\underbrace{\binom{۱}{۱}}_{\text{انتخاب ۱ نفر برای گروه تک نفره از نفر باقیمانده}}=۳۵\times۴\times۱=۱۴۰$$

تعداد زیرمجموعه

اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ است.

مثلاً مجموعهٔ ۸ عضوی، ۵۶ زیر مجموعهٔ ۳ عضوی دارد چون:

$$\binom{۸}{۳}=۵۶$$

تست مجموعهٔ A دارای ۲۱ زیرمجموعهٔ ۲ عضوی است. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعهٔ A کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۳ $\binom{n}{۲}=۲۱\Rightarrow n=۷\Rightarrow\binom{۷}{۴}=۳۵$

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر با ۲^n است. بنابراین:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$$

تست تعداد زیر مجموعه‌های حداقل ۲ عضوی یک مجموعهٔ ۸ عضوی چند تا است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۱۹ ۴) ۲۴۷

۴ تعداد کل زیر مجموعه‌ها برابر $۲^۸$ است، پس:

$$\underbrace{\binom{۸}{۰}}_{۱}+\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{۸}+\underbrace{\binom{۸}{۲}+\dots+\binom{۸}{۸}}_{\text{حداقل ۲ عضوی}}=۲^۸$$

چون تعداد حداقل دوعضوی را می‌خواهیم می‌توان نوشت:

$$\binom{۸}{۲}+\dots+\binom{۸}{۸}=۲^۸-۱-۸=۲۵۶-۹=۲۴۷$$

انتخاب شامل و فاقد

اگر بخواهیم از بین n شیء، r شیء را انتخاب کنیم به طوری‌که:

۱ شامل k شیء مشخص باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k}$$

۲ فاقد k شیء مشخص باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{n-k}{r}$$

۳ شامل k_1 شیء و فاقد k_2 شیء مشخص باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{n-k_1-k_2}{r-k_1}$$

مثال از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ به چند طریق می‌توان یک زیرمجموعهٔ ۳ عضوی انتخاب کرد، به طوری‌که:

الف) شامل عضو a باشد؟

عضو a را انتخاب و در زیرمجموعه قرار می‌دهیم، پس زیرمجموعه را به‌صورت $\{a,-,-\}$ در نظر می‌گیریم و ۲ عضو دیگر زیرمجموعه را از بین اعضای $\{b,c,d,e\}$ انتخاب می‌کنیم، پس:

$$\binom{۴}{۲}=۶$$

ب) فاقد عضو b باشد؟

عضو b را کنار می‌گذاریم و ۳ عضو زیرمجموعه را از بین اعضای $\{a,c,d,e\}$ انتخاب می‌کنیم، پس:

$$\binom{۴}{۳}=۴$$

پ) شامل عضو a و فاقد عضو b باشد؟

عضو a را انتخاب و در زیرمجموعه قرار می‌دهیم و عضو b را کنار می‌گذاریم، پس زیرمجموعه را به‌صورت $\{a,-,-\}$ در نظر می‌گیریم و ۲ عضو دیگر این زیرمجموعه را از بین اعضای $\{c,d,e\}$ انتخاب می کنیم، پس:

$$\binom{۳}{۲}=۳$$

قاعدهٔ پاسکال: هر انتخاب r شیء از n شیء، یا شامل یک شیء مشخص است یا فاقد آن، بنابراین داریم:

$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$$

مثلاً:

$$\binom{۹}{۴}+\binom{۹}{۵}=\binom{۱۰}{۵}\qquad\binom{۶}{۳}+\binom{۶}{۴}=\binom{۷}{۴}$$

مثال از تساوی $\binom{۵}{n+1}+\binom{۵}{n}=\binom{۶}{۴}$ چند مقدار برای n وجود دارد؟

با استفاده از قاعدهٔ پاسکال، سمت چپ تساوی را ساده‌تر می‌نویسیم.

$$\binom{۵}{n+1}+\binom{۵}{n}=\binom{۶}{n+1}$$

حالا تساوی زیر را حل می‌کنیم:

$$\binom{۶}{n+1}=\binom{۶}{۴}\Rightarrow\begin{cases}n+1=۴\Rightarrow n=۳\\ n+1=۲\Rightarrow n=۱\end{cases}$$

پس دو مقدار برای n داریم.

مسائل هندسی

۱ برای ساختن یک چندضلعی با استفاده از تعدادی نقطه، اگر نقطه‌ها روی یک خط راست نباشند، می‌توانیم بدون هیچ محدودیتی نقطه‌ها را به هم وصل کنیم و چندضلعی موردنظر را بسازیم. اما توجه داشته باشید که:

الف) با سه نقطه روی یک خط راست، نمی‌توان مثلث تشکیل داد.

مثال **با نقاط داده شده در هر شکل، چند مثلث می‌توان ساخت؟**

الف)  $\Rightarrow \binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}=۴\times۳+۶\times۳=۳۰$

ب)  $\Rightarrow \binom{۷}{۳}-\binom{۴}{۳}=۳۵-۴=۳۱$

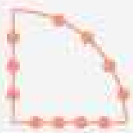
ب) با چهار نقطه روی یک خط راست یا سه نقطه روی یک خط راست و یک نقطه خارج آن خط، نمی‌توان چهارضلعی تشکیل داد.

مثال **با نقاط داده شده در هر شکل، چند چهارضلعی می‌توان ساخت؟**

الف)  $\Rightarrow \binom{۴}{۲}\binom{۳}{۲}=۶\times۳=۱۸$

ب)  $\Rightarrow \binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۲}=۴\times۱+۶\times۳=۲۲$

تست **با نقاط داده‌شده روی شکل مقابل، چند مثلث می‌توان ساخت؟**

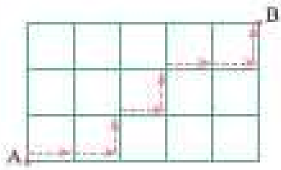


۱) ۱۴۶ ۲) ۱۵۲ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۶۵

۳ می‌دانیم با هر سه نقطه‌ای که انتخاب کنیم، می‌توانیم یک مثلث بسازیم، مگر آن‌که آن سه نقطه روی یک خط راست باشند، پس تعداد مثلث‌ها برابر است با:

$$\binom{۱۱}{۳}-\binom{۳}{۳}-\binom{۴}{۳}=۱۶۵-۱-۴=۱۶۰$$

۲ در یک شبکهٔ $m\times n$ تعداد کوتاه‌ترین مسیرها بین دو گوشهٔ A و B برابر است با:



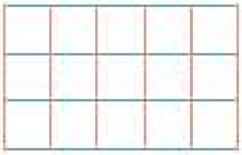
$$\text{تعداد کوتاه‌ترین مسیرها}=\binom{m+n}{m}$$

(واقعه برای طی کوتاه‌ترین مسیر، مجاز هستیم فقط به راست و بالا حرکت کنیم)

مثلاً در شکل بالا، اگر بخواهیم با طی کوتاه‌ترین مسیر از A به B برویم، باید ۵ حرکت به راست و ۳ حرکت به بالا انجام دهیم. پس تعداد کوتاه‌ترین مسیرها برابر است با:

$$\binom{۵+۳}{۳}=\binom{۸}{۳}=۵۶$$

۳ در صفحهٔ شطرنجی زیر، هر مستطیل با انتخاب ۲ خط افقی و ۲ خط عمودی به‌دست می‌آید. بنابراین اگر یک شبکه از m خط افقی و n خط عمودی تشکیل شده باشد، تعداد مستطیل‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

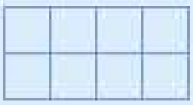


$$\text{تعداد مستطیل‌ها}=\binom{m}{۲}\binom{n}{۲}$$

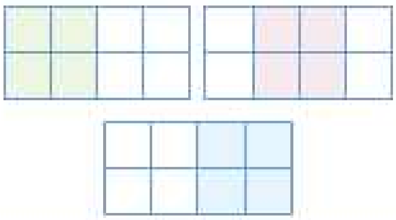
شبکهٔ بالا از ۴ خط افقی و ۶ خط عمودی تشکیل شده است. برای شمارش تعداد مستطیل‌ها باید دو خط افقی و دو خط عمودی انتخاب کنیم:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۲}=۶\times۱۵=۹۰$$

تذکر فرض کنید مطابق شکل یک صفحهٔ شطرنجی داریم و می‌خواهیم تعداد مربع‌های آن را پیدا کنیم. تعداد مربع‌های ۱×۱ مطابق شکل برابر $۴\times۲=۸$ است.



برای شمارش تعداد مربع‌های ۲×۲ یک مربع به عنوان نمونه، در نظر می‌گیریم. اگر این مربع را به سمت راست انتقال دهیم، تعداد مربع‌های ۲×۲ مطابق شکل‌های زیر برابر $۳\times۱=۳$ است.



نتیجه پس تعداد کل مربع‌ها برابر است با:

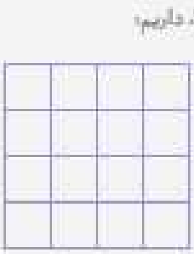
یکی کمتر

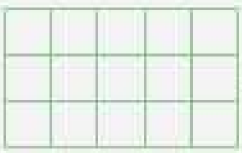
$$۴\times۲+۳\times۱=۱۱$$

یکی کمتر

مثال **تعداد مربع‌ها را در هر یک از صفحه‌های شطرنجی زیر به‌دست آورید.**

با توجه به الگوی به‌دست آمده از مثال بالا، داریم:

 $\Rightarrow ۴\times۴+۳\times۳+۲\times۲+۱\times۱=۳۰$

 $\Rightarrow ۵\times۳+۴\times۲+۳\times۱=۲۶$

فصل

۱۶

احتــمــال

ارتباط با فصل‌های دیگه: پیش‌نیاز قطعی احتمال فصل شمارش بدون شمردن است که بخش مهمی از حل هر سؤال احتمال به دانش شما از شمارش بدون شمردن برمی‌گردد.

توصیه: در سال‌های اخیر سؤالات چالشی و جدیدی از احتمال در کنکور مطرح شده که پیشنهاد ما این است که برای تسلط بهتر روی این فصل با تحلیل کامل سؤالات و یادگیری مفهومی، از حفظ کردن روش‌ها بپرهیزید.

کنکور	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تعداد تست	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۲	۲

درس ۱ آزمایش تصادفی، فضای نمونه و پیشامد

آزمایش تصادفی: به آزمایشی گفته می‌شود که نتیجهٔ آن قبل از انجام آزمایش مشخص نیست، ولی مجموعهٔ حالات ممکن برای نتیجهٔ آزمایش قابل پیش‌بینی است. به عنوان مثال پرتاب کردن یک تاس، یک آزمایش تصادفی است، چون نمی‌دانیم چه عددی رو می‌شود، ولی می‌دانیم عدد رو شده یکی از اعداد ۱ تا ۶ است. حالا اگر روی تمام وجوه یک تاس عدد ۳ نوشته شده باشد، پرتاب این تاس، یک آزمایش تصادفی نیست، چون نتیجهٔ آن از قبل مشخص است.

فضای نمونه: به مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونهٔ آن آزمایش تصادفی می‌گویند و آن را با S نشان می‌دهند. مثلاً، در آزمایش پرتاب یک تاس، فضای نمونه $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.

مثال فضای نمونهٔ هر یک از آزمایش‌های زیر را بنویسید.

الف) پرتاب دو سکه

S = {(ر , ر), (ر , پ), (پ , ر), (پ , پ)} ⇒ n(S) = ۴

در پرتاب دو سکه، فرض کنید سکه‌ها متمایز هستند. پس حالت (ر , پ) یعنی سکهٔ اول پشت آمده و سکهٔ دوم رو آمده که با حالت (پ , ر) فرق دارد.

ب) یک خانوادهٔ سه‌فرزندی

S = {(د , د , د), (د , د , پ), (د , پ , د), (پ , د , د), (د , پ , پ), (پ , د , پ), (پ , پ , د), (پ , پ , پ)} ⇒ n(S) = ۸

در این جا هم (پ , د , د) یعنی فرزند اول و دوم دختر و فرزند سوم پسر است اما حالت (د , د , پ) یعنی فرزند اول پسر و فرزند دوم و سوم دختر است.

پ) پرتاب دو تاس

S = {(۱ , ۱), (۱ , ۲), (۱ , ۳), (۱ , ۴), (۱ , ۵), (۱ , ۶), (۲ , ۱), (۲ , ۲), ..., (۶ , ۱), (۶ , ۲), ..., (۶ , ۶)} ⇒ n(S) = ۶ × ۶ = ۳۶

در این جا هم حالت (۵ , ۱) با حالت (۱ , ۵) فرق دارد.

تست سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شود، دو سکهٔ دیگر پرتاب می‌کنیم و اگر پشت ظاهر شود، یک تاس پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳

$\Rightarrow n(S) = ۴ + ۶ = ۱۰$

برای به دست آوردن تعداد اعضای فضای نمونه یعنی n(S) یا باید فضای نمونه‌ای را بنویسیم و تعداد عضوهای آن را بشماریم و یا از روش‌های «شمارش» مانند اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت و ... استفاده کنیم.

پیشامد و برآمد

برآمد: به هر عضو از فضای نمونه‌ای یک برآمد می‌گوییم. مثلاً فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه که به‌صورت S = {(ر , ر) ، (پ , پ) ، (پ , ر) ، (ر , پ)} است دارای ۴ برآمد (۴ عضو) می‌باشد.

پیشامد: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد می‌گویند. مثلاً فضای نمونه‌ای فرزندان یک خانواده تک‌فرزندی به شکل S = {د و پ} است که دارای ۴ پیشامد { } ، {پ} ، {د} و {د و پ} می‌باشد.

تذکر از فصل شمارش به خاطر داریم که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر 2^n است، پس تعداد پیشامدهای فضای نمونه‌ای S با تعداد اعضای $n(S)$ برابر $2^{n(S)}$ می‌باشد.

مثال ۱ **در پرتاب دو تاس با هم، پیشامد این‌که مجموع اعداد رو شده برابر ۶ باشد، را بنویسید.**

$A = \{(۱,۵), (۲,۴), (۳,۳), (۴,۲), (۵,۱)\}$

مثال ۲ **در یک خانوادهٔ ۳ فرزندی، پیشامد این‌که خانواده دارای ۲ فرزند دختر باشد، را بنویسید.**

A = {(د,د,پ) , (د,پ,د) , (پ,د,د)}

تست **در ظرفی ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ آبی و ۲ سفید وجود دارد، به تصادف ۳ مهره برمی‌داریم. پیشامد این‌که یک مهرهٔ قرمز و حداقل یک مهرهٔ آبی باشد، چند عضو دارد؟**

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

۴ باید یک مهره قرمز از بین ۳ مهره قرمز و یک یا دو مهره آبی از بین ۴ مهره آبی انتخاب شود، پس داریم:

$$n(A) = \binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{4}{2} = 42$$

تذکر در هر فضای نمونه مانند S، خود S را پیشامد **قطعی** و $\varnothing$ را پیشامد **غیرممکن** می‌نامند.

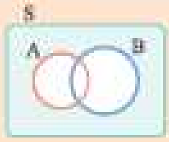
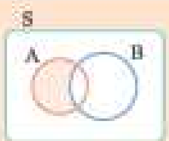
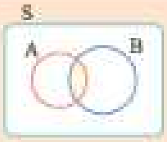
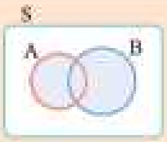
رُخداد پیشامد

هنگامی می‌گوییم یک پیشامد رُخ داده است که نتیجهٔ آزمایش، یکی از عضوهای آن پیشامد باشد.

اعمال روی پیشامدها

اگر A یک پیشامد از فضای نمونهٔ S باشد، متمم A یعنی A' شامل عضوهایی از S است که متعلق به A نباشد.

حالا می‌خواهیم اجتماع، اشتراک، تفاضل و ... را روی پیشامدها تعریف کنیم.

نه A رخ دهد و نه B		$A' \cap B'$
فقط پیشامد A رخ دهد		$A - B$
هم A رخ دهد و هم B		$A \cap B$
حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد		$A \cup B$

مثال **در یک خانوادهٔ سه‌فرزندی، اگر A پیشامد «حداکثر یک پسر» و B پیشامد «یکی درمیان دختر و پسر» باشد، هر یک از پیشامدهای زیر را مشخص کنید.**

الف) $A \cup B$ **ب) $A \cap B$**

پ) $A - B$ **ت) $A' \cap B'$**

پیشامدهای A و B به‌صورت زیر هستند:

A = {(د,د,د),(د,د,پ),(د,پ,د),(پ,د,د)}

B = {(د,پ,د),(پ,د,پ)}

بنابراین پیشامدهای خواسته‌شده به‌صورت زیر هستند:

الف) A ∪ B = {(د,د,د),(د,د,پ),(د,پ,د),(پ,د,د),(پ,د,پ)}

ب) A ∩ B = {(د,پ,د)}

پ) A − B = {(د,د,د),(د,د,پ),(پ,د,د)}

ت) A′ ∩ B′ = {(پ,پ,د),(د,پ,پ),(پ,پ,پ)}

تست **در پرتاب دو تاس با هم، پیشامد این‌که «مجموع دو عدد ظاهرشده برابر ۴ باشد» یا «اعداد ظاهرشده، یکسان باشند» دارای چند عضو است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۴ پیشامدهای A و B به‌صورت زیر هستند:

$A = \{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$

$B = \{(۱,۱),(۲,۲),...,(۶,۶)\}$

این دو پیشامد در عضو (۲ ,۲) مشترک‌اند و ما باید تعداد عضوهای پیشامد $A \cup B$ را پیدا کنیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 6 - 1 = 8$$

پیشامدهای ناسازگار (جدا از هم)

اگر دو پیشامد A و B از فضای نمونهٔ S هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، آن‌ها را **ناسازگار** می‌نامند. مثلاً، در پرتاب یک تاس پیشامدهای $A = \{۱,۳,۵\}$ و $B = \{۲,۶\}$ ناسازگارند، چون اشتراک ندارند.

$A \cap B = \varnothing$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(A \cap B) = 0 \\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) \end{cases}$$

درس ۲ احتمال رخداد یک پیشامد

احتمال ساده

اگر A یک پیشامد از فضای نمونهٔ هم‌شانس S باشد، در این‌صورت احتمال رُخداد پیشامد A را با $P(A)$ نشان می‌دهند و برابر است با نسبت تعداد عضوهای پیشامد مطلوب به تعداد عضوهای فضای نمونه و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

تذکر هر چه تعداد عضوهای پیشامد A بیش‌تر باشد، شانس رُخداد پیشامد A بیش‌تر می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت:

۱) $P(\varnothing)=0$ ۲) $P(S)=1$ ۳) $0\leq P(A)\leq 1$

اصل متمم

در بعضی از مسائل احتمال، پیدا کردن حالت‌هایی که مسئله نمی‌خواهد، از پیدا کردن حالت‌های موردنظر راحت‌تر است. پس می‌توانیم احتمال رُخ دادن حالت‌هایی که مدنظر مسئله نیست را پیدا کنیم و سپس جواب را از ۱ کم کنیم:

$$P(A)=1-P(A')$$

در ادامه، تیپ‌های مختلف سؤالات مربوط به احتمال ساده را بررسی می‌کنیم.

پرتاب تاس

اگر یک تاس سالم (همگن) پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای به‌صورت $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ و در نتیجه $n(S)=6$ است. پس احتمال ظاهر شدن هر وجه برابر $\frac{1}{6}$ است.

تست یک تاس پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد اول یا مضرب ۳ ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲ اعداد اول در تاس $\{2,3,5\}$ و اعداد مضرب ۳ عبارت‌اند از $\{3,6\}$، پس اجتماع آن‌ها $A=\{2,3,5,6\}$ است و احتمالش برابر است با:

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

در پرتاب دو تاس با هم، فضای نمونه‌ای دارای $n(S)=6\times6=36$ عضو است. در سؤالات مربوط به پرتاب دو تاس، از عبارت‌های زیر استفاده می‌شود که در حل مسائل، آن‌ها را معادل در نظر می‌گیریم:

- یک تاس آبی و یک تاس قرمز می‌اندازیم
- اول یک تاس می‌اندازیم، سپس دیگری را می‌اندازیم
- یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم
- دو تاس با هم پرتاب می‌کنیم

مثال در پرتاب دو تاس با هم، با کدام احتمال:

الف) هر دو عدد رو شده، مضرب ۳ هستند؟

$$A=\{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}\Rightarrow P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

البته می‌توانستیم از اصل ضرب استفاده کنیم و احتمال خواسته شده را به‌صورت $P(A)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$ به‌دست آوریم.

ب) اعداد رو شده، متمایز هستند؟

اعداد رو شده در حالت‌های $\{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$ یکسان‌اند و در بقیهٔ حالت‌ها متمایز هستند. پس:

$$P=1-\frac{6}{36}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

نکته در پرتاب دو تاس با هم، می‌دانیم $2\leq$ مجموع دو عدد ≤ 12 است. برای به‌دست آوردن تعداد حالاتی که مجموع دو عدد رو شده برابر n می‌شود، می‌توانیم اختلاف n را با عدد ۱ و عدد ۱۳ به‌دست آوریم. عدد کوچک‌تر، تعداد اعضای پیشامد را به ما می‌دهد؛ مثلاً این‌که مجموع اعداد ظاهرشده برابر ۶ باشد دارای $6-1=5$ حالت و مجموع اعداد ظاهرشده برابر ۱۰ باشد دارای $13-10=3$ حالت است.

تست در پرتاب دو تاس با هم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهرشده مضرب ۵ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{7}{36}$ ۴) $\frac{11}{36}$

۳ اعداد مضرب ۵ در مجموع دو تاس ۵ و ۱۰ هستند. چون ۵ به ۱ نزدیک‌تر است، پس دارای $5-1=4$ حالت و چون ۱۰ به ۱۳ نزدیک‌تر است، دارای $13-10=3$ حالت است. پس:

$$P=\frac{4+3}{36}=\frac{7}{36}$$

تذکر در پرتاب ۲ تاس حالت‌های $(1,3)$ و $(3,1)$ با یکدیگر متمایزند. اما تنها یک عضو $(3,3)$ داریم، چون عدد روشدهٔ هر دو تاس یکسان است و تفاوتی ندارد که کدام‌یک از تاس‌ها اول ۳ بیاید و کدام‌یک دوم ۳ بیاید.

در پرتاب سه تاس با هم، فضای نمونه‌ای دارای $n(S)=6\times6\times6=216$ عضو می‌باشد. در مسائلی که مربوط به پرتاب سه تاس می‌باشد، معمولاً مسئله را از طریق اصل ضرب یا نوشتن اعضای پیشامد مطلوب حل می‌کنیم.

مثال در پرتاب سه تاس با هم احتمال آنکه اعداد رو شده متمایز باشند کدام است؟

تاس اول می‌تواند هر ۶ حالت بیاید. تاس دوم باید با تاس اول متفاوت بیاید، پس ۵ حالت دارد و تاس سوم هم باید با تاس اول و دوم متفاوت بیاید، پس ۴ حالت دارد. بنابراین:

$$n(S)=6\times6\times6,\ n(A)=6\times5\times4\Rightarrow P(A)=\frac{6\times5\times4}{6\times6\times6}=\frac{5}{9}$$

مثال در پرتاب همزمان سه تاس، با کدام احتمال حاصل‌ضرب اعداد رو شده عددی زوج است؟

متمم حالتی است که عدد روشدهٔ هر سه تاس عددی فرد باشد، یعنی یکی از اعداد $\{۱,۳,۵\}$ بیاید، پس:

$$P(A)=۱-\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

پرتاب سکه - جنسیت فرزندان یک خانواده

فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه، مشابه فضای نمونهٔ به دنیا آمدن فرزندی در یک خانواده است. وقتی یک سکه پرتاب می‌کنیم، احتمال ظاهر شدن «رو» برابر $\frac{۱}{۲}$ و احتمال ظاهر شدن «پشت» نیز برابر $\frac{۱}{۲}$ است. وقتی فرزندی به دنیا می‌آید، احتمال پسر بودن یا دختر بودنش برابر $\frac{۱}{۲}$ است. مسائل مربوط به پرتاب سکه یا جنسیت فرزندان به دو بخش کلی تقسیم می‌شوند:

۱ تعداد

در n بار پرتاب یک سکه (یا پرتاب کردن nتا سکه) احتمال این‌که k بار رو (یا پشت) بیاید، و یا در یک خانوادهٔ n فرزندی، احتمال این‌که خانواده دارای k فرزند پسر (یا دختر) باشد، برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$$

۲ جایگاه

اگر دربارهٔ جایگاه فرزندان یا سکه‌ها صحبت شود، از قانون ضرب احتمال‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال ۱ در یک خانوادهٔ سه فرزندی، با کدام احتمال تعداد پسرها بیش‌تر از دخترها است؟

باید احتمال این‌که خانواده دارای ۲ یا ۳ پسر باشد را حساب کنیم:

$$P=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}}{۲^۳}=\frac{۳+۱}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲ در یک خانوادهٔ چهار فرزندی، با کدام احتمال فرزند اول و آخر پسر و خانواده دقیقاً دارای ۲ پسر است؟

باید احتمال این‌که فرزند اول و آخر پسر و دو فرزند وسط دختر باشند را حساب کنیم:

$$P=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

کیسه و مهره‌های رنگی

در مسائل کیسه و مهرهٔ رنگی، برای محاسبهٔ تعداد حالات مطلوب و هم‌چنین تعداد کل حالات از انتخاب استفاده می‌کنیم. در این مسائل به نحوهٔ خارج کردن مهره‌ها از کیسه توجه کنید.

تست در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت است؟ (داخل-۹۰)

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۲۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۲ باید ۱ مهرهٔ قرمز، ۱ مهرهٔ سبز و ۱ مهرهٔ آبی خارج کنیم:

$$P=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۵\times۴\times۳}{۲۲۰}=\frac{۳}{۱۱}$$

کیسه و مهره‌های شماره‌دار

اگر در یک کیسه، چند مهرهٔ شماره‌دار داشته باشیم، شماره‌ها را پشت سر هم می‌نویسیم و از فلش‌زنی استفاده می‌کنیم. در این سؤالات دقت کنید که:

۱ چون از هر شماره فقط یک مهره در کیسه داریم، پس امکان ندارد که مثلاً دو مهره با شمارهٔ ۳ و ۳ خارج شده باشند!

۲ ترتیب مهره‌های خارج‌شده مهم نیست. مثلاً $(۱,۲)$ و $(۲,۱)$ فرقی با هم ندارند، چون در این‌جا مهم این است که مهره‌های با شمارهٔ ۱ و ۲ از کیسه خارج شده‌اند.

تست در کیسه‌ای شش مهره با شماره‌های ۱ تا ۶ وجود دارد. دو مهره به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد خارج شده برابر ۶ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۳ به کمک فلش‌زنی داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ $\Rightarrow P=\frac{۲}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۲}{۱۵}$

توجه کنید در روش فلش‌زنی هر شماره را با شماره‌های بعد از آن چک می‌کنیم و به مهره‌های قبلی نگاه نمی‌کنیم.

اگر در کیسه‌ای دو گروه مهرهٔ شماره‌دار موجود باشد، شمارهٔ یک گروه را با اعداد فارسی و شمارهٔ گروه دیگر را با اعداد انگلیسی نشان می‌دهیم. سپس مهره‌ها را به‌صورت زیر چک می‌کنیم:

۱ شماره‌های فارسی با فارسی

۲ شماره‌های فارسی با انگلیسی

۳ شماره‌های انگلیسی با انگلیسی

مسائل مربوط به شمارش

در این مدل از تست‌ها تعداد اعضای فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای فضای مطلوب را با دانشی که از فصل شمارش داریم، با کمک اصل ضرب، اصل جمع، انتخاب و ... محاسبه کرده، سپس احتمال پیشامد موردنظر را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۵ نفر می‌خواهند سخنرانی کنند. احتمال آن‌که احمد بعد از علی (نه لزوماً بلافاصله) سخنرانی کند چقدر است؟

تعداد کل حالاتی که ۵ نفر می‌توانند سخنرانی کنند، برابر $n(S)=۵!=۱۲۰$ است. حالا برای آنکه احمد بعد از علی سخنرانی کند (نه لزوماً بلافاصله)، کافیست از جایگشت آن‌ها نسبت به هم جلوگیری کنیم، پس:

$$n(A)=\frac{۵!}{۲!}=۶۰\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

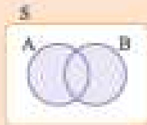
قوانین احتمال

اگر A یک پیشامد ناتهی از فضای نمونهٔ S باشد، احتمال این‌که A رخ ندهد به‌صورت مقابل است:

$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$

با توجه به قوانین مجموعه‌ها، برای دو پیشامد A و B از فضای نمونهٔ S داریم:

حداقل یکی از ۲ پیشامد رخ دهد

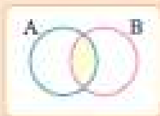


$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

فقط پیشامد A رخ دهد

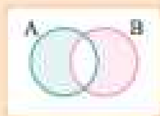
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

هم A رخ دهد و هم B



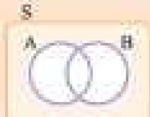
$P(A \cap B)$

یا فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد



$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

نه A رخ دهد و نه B رخ دهد



$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

حداکثر یکی از دو پیشامد رخ دهد

$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

تذکر از مجموعه‌ها می‌دانیم $A \cap B' = A - B$ است، پس:

$P(A \cap B') = P(A - B)$

دو پیشامد ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند هرگاه نتوانند همزمان رخ بدهند. به عبارت دیگر وقوع یکی به معنای عدم وقوع دیگری باشد. مثلاً در پرتاب یک تاس پیشامد زوج آمدن و پیشامد فرد آمدن تاس دو پیشامد ناسازگار هستند، چون نمی‌توانند با هم رخ دهند. (واضح است که عدد رو شده نمی‌تواند هم زوج باشد هم فرد.)

همچنین مثلاً پیشامد رتبهٔ ۱ کنکور شدن دانش‌آموزها با یکدیگر ناسازگار است، چون اگر یکی از دانش‌آموزها رتبهٔ ۱ شود به معنای رتبهٔ ۱ نشدن بقیه دانش‌آموزان است.

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

تست اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونهٔ S باشند و $P(A') + P(B') = 1/4$ باشد، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۷

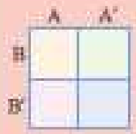
۲ چون دو پیشامد ناسازگار هستند، پس $P(A \cap B) = 0$ و داریم:

$P(A') + P(B') = 1/4 \Rightarrow 1 - P(A) + 1 - P(B) = 1/4$

$\Rightarrow P(A) + P(B) = 0/6$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B)}_{0/6} - \underbrace{P(A \cap B)}_{0} = 0/6$

نکته اگر دو پیشامد A و B به همراه متمم‌هایشان در یک تست مطرح شده باشند، نمودار ون را مطابق شکل زیر به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنیم و احتمال هر ناحیه را درون مربع مربوط به خودش می‌نویسیم. با توجه به این‌که می‌دانیم مجموع همهٔ احتمال‌ها در یک فضای نمونه برابر ۱ است، احتمال قسمت یا قسمت‌های مجهول را به‌دست می‌آوریم.



تست اگر $P(A - B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه $P(A')$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{12}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳ $\underbrace{P(A - B)}_{\frac{1}{4}} = P(A) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\frac{1}{3}} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

تست اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S و $P(A - B) = \frac{1}{2}$ و $P(A') = \frac{1}{3}$ باشند، آن‌گاه $P(B - A')$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱ با توجه به صورت سؤال $P(A) = 1 - P(A') = \frac{2}{3}$ است، پس:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(B - A') = P(B \cap A) = \frac{1}{6}$

مثال در یک دانشگاه ۶۰ درصد دانشجویان، پسر و ۲۰ درصد دانشجویان، متأهل هستند و ۱۵ درصد دانشجویان، متأهل و دختر هستند. چند درصد از دانشجویان، مجرد و دختر هستند؟

	پسر	دختر
متأهل		٪۱۵
مجرد		

→

	پسر	دختر
متأهل	٪۵	٪۱۵
مجرد		

→

	پسر	دختر
متأهل	٪۵	٪۱۵
مجرد	٪۵۵	

→

	پسر	دختر
متأهل	٪۵	۱۵٪
مجرد	٪۵۵	٪۲۵

بنابراین ٪۲۵ دانشجویان، دختر و مجرد هستند.

درس ۳ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

احتمال شرطی

فرض کنید در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر، قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰، یکی را به تصادف انتخاب کنند. واضح است احتمال برنده شدن هر یک از افراد برابر $\frac{۱}{۲۰}$ است. حال اگر مجری پس از انتخاب کارت اعلام کند عدد برنده یک‌رقمی است، در این‌صورت شانس برنده شدن افرادی که شمارهٔ کارت آن‌ها ۱۰ تا ۲۰ است، صفر می‌شود، اما شانس برنده شدن افرادی که شماره کارتشان از ۱ تا ۹ است برابر $\frac{۱}{۹}$ می‌شود. در این حالت فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ به $S_{new}=\{۱,۲,۳,...,۹\}$ تغییر می‌کند.

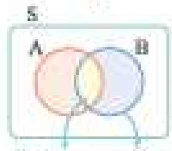
فرمول احتمال شرطی

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، می‌دانیم احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{n(A)}{n(S)}$ است، حالا اگر بدانیم پیشامد B رخ داده است (مثلاً بدانیم تاس عددی زوج آمده است) آنگاه تغییراتی در احتمال پیشامد A خواهیم داشت:

۱ نخست آنکه چون می‌دانیم پیشامد B رخ داده است، فضای نمونه‌ای دیگر کل S نیست، بلکه فقط درون B است.

۲ دوم آنکه ناحیهٔ مطلوب دیگر تمام A نیست، بلکه به خاطر رخ دادن B، فقط قسمتی از A قابل قبول است که با B سازگار باشد، یعنی قسمت مطلوب (پیشامد مطلوب) می‌شود $A\cap B$.

پس احتمال رُخداد پیشامد A ، اگر بدانیم پیشامد B رخ داده است، برابر است با:



$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

حالا اگر در رابطهٔ فوق صورت و مخرج کسر را بر $n(S)$ تقسیم کنیم فرمول احتمال شرطی به‌دست می‌آید.

$$P(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

نماد $P(A|B)$ را به‌صورت احتمال رخ دادن A به شرط رخ دادن B می‌خوانیم.

مسائل احتمال شرطی

به مسائلی از احتمال که در آن، طراح با دادن اطلاعات یا گفتن جمله‌ای، قسمتی از فضای نمونه را افشا می‌کند، مسائل احتمال شرطی می‌گوییم. مسائل احتمال شرطی را می‌توان به دو دستهٔ کلی تقسیم کرد:

۱ برخی از مسائل احتمال شرطی را می‌توان بدون استفاده از فرمول و با محدود کردن فضای نمونه حل کرد. معمولاً از این روش در فضای نمونه‌ای پرتاب تاس و سکه و فرزند استفاده می‌کنیم. برای درک بهتر به مثال بعدی توجه کنید.

مثال **یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد ظاهرشده، زوج است، با کدام احتمال شمارهٔ ۴ یا ۶ ظاهر شده است؟**

دادن اطلاعات

احتمال خواسته شده

چون می‌دانیم عدد ظاهرشده زوج است، پس اعداد فرد را از فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس کنار می‌گذاریم و فضای نمونهٔ جدید به‌صورت $S_{new}=\{۲,۴,۶\}$ است. در این فضای نمونهٔ جدید، احتمال ظاهر شدن ۴ یا ۶ برابر $P=\frac{۲}{۳}$ است.

تذکر در مسائل احتمال شرطی، معمولاً طراح از واژه‌هایی مانند «اگر، می‌دانیم، مشروط بر آن‌که، در صورتی‌که بدانیم و ...» استفاده می‌کند.

تست **دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم جمع دو عدد روشده برابر ۷ است، با کدام احتمال هر دو عدد روشده، اول هستند؟**

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۲ چون می‌دانیم جمع دو عدد روشده برابر ۷ است، پس فضای نمونهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$S_{new}=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

در این فضای نمونهٔ جدید، پیشامد این‌که هر دو عدد روشده اول باشند، به‌صورت $A=\{(۲,۵),(۵,۲)\}$ است، پس: $P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

تست **در یک خانوادهٔ سه‌فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر هستند؟**

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲ چون یکی از فرزندان پسر است، پس عضو (د ,د ,د) را از فضای نمونه کنار می‌گذاریم:

$n(S_{new})=۲^۳-۱=۷$

A = {(د,د,پ),(د,پ,د),(پ,د,د)} $\Rightarrow P=\frac{۳}{۷}$

۲ در برخی مسائل ناگزیر به استفاده از فرمول احتمال شرطی هستیم که می‌توان آن‌ها را به دو تیپ زیر تقسیم کرد:

الف) در این مسائل که دارای شکل جبری هستند، به صورت مستقیم از فرمول احتمال شرطی استفاده می‌شود.

مثال **اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، به‌طوری‌که $P(A\cup B)=۰/۵, P(B)=۰/۴, P(A)=۰/۳$ است، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟**

الف) $P(A|B)=\frac{۱}{۲}$ ب) $P(A'|B)=\frac{۱}{۴}$ پ) $P(B|A)=\frac{۲}{۳}$

ابتدا $P(A\cap B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$\underbrace{P(A\cup B)}_{۰/۵}=\underbrace{P(A)+P(B)}_{۰/۳+۰/۴}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲$

حال عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0/2}{0/4}=\dfrac{1}{2}$ ✓

ب) $P(A'|B)=\dfrac{P(B\cap A')}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0/4-0/2}{0/4}=\dfrac{1}{2}$ ✗

پ) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0/2}{0/3}=\dfrac{2}{3}$ ✓

قانون ضرب احتمال‌ها

اگر فرمول احتمال شرطی را طرفین وسطین کنیم، می‌توانیم $P(A\cap B)$ را به‌دست آوریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$$

طبق این فرمول که به آن قاعدهٔ ضرب احتمال می‌گویند، اگر بخواهیم دو پیشامد A و B رُخ دهند، ابتدا پیشامد A رخ می‌دهد و سپس پیشامد B با فرض رخ دادن A، اتفاق می‌افتد.

تست **اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، به‌طوری که $P(A)=\frac{2}{5}, P(B)=\frac{3}{10}, P(B|A)=\frac{1}{2}$ حاصل $\dfrac{1+P(A\cup B)}{P(A|B)}$ کدام است؟**

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۲ ابتدا مقدار $P(A\cap B)$ را به کمک قانون ضرب احتمال به‌دست می‌آوریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$$

حال مقادیر $P(A\cup B)$ و $P(A|B)$ را محاسبه می‌کنیم و داریم:

۱) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$

۲) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1+P(A\cup B)}{P(A|B)}=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{4}$$

ب) آن دسته از مسائلی که به صورت داستانی مطرح می‌شوند و برای حل آن‌ها از فرمول احتمال شرطی استفاده می‌کنیم:

تست **احتمال ابری بودن هوا در یک روز خاص ۰/۴ است. احتمال این‌که در این روز هوا ابری و بارانی باشد برابر ۰/۲ است. اگر بدانیم هوا ابری است، با کدام احتمال بارانی نیز است؟**

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۳ پیشامد ابری بودن را با A و پیشامد بارانی بودن را با B نمایش می‌دهیم. با توجه به صورت سؤال $P(A)=0/4$ و $P(A\cap B)=0/2$ است، پس:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0/2}{0/4}=\frac{1}{2}=0/5$$

تست **امیر و بهروز به‌ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقهٔ علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز، کدام است؟** (خارج-۹۸)

۱) $\frac{9}{14}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{11}{14}$ ۴) $\frac{6}{7}$

۱ پیشامد شرکت کردن امیر را با A و پیشامد شرکت کردن بهروز را با B نمایش می‌دهیم. با توجه به صورت سؤال $P(A)=0/6, P(B)=0/3, P(A|B)=0/5$ است. پس:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow 0/5=\frac{P(A\cap B)}{0/3}\Rightarrow P(A\cap B)=0/15$$

بنابراین احتمال شرکت کردن امیر به شرط شرکت نکردن بهروز برابر است با:

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{0/6-0/15}{1-0/3}=\frac{0/45}{0/7}=\frac{9}{14}$$

مثال **درون ظرفی ۳ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی وجود دارد. دو مهره یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره، آبی هستند؟**

احتمال این‌که مهرهٔ اول آبی باشد، $\frac{5}{8}$ است. حال چون مهره‌ها یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری خارج شده‌اند، پس در مرحلهٔ دوم یکی از آبی‌ها کم می‌شود. بنابراین:

$$P=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$$

تست **یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ۶ ظاهر شود شخص A برنده می‌شود و اگر عدد ۱ ظاهر شود شخص B برنده می‌شود. با کدام احتمال، در پرتاب سوم یکی از افراد A یا B برنده می‌شود؟**

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{4}{27}$ ۴) $\frac{5}{27}$

۳ برای این‌که در پرتاب سوم، یکی از افراد A یا B برنده شود، باید در پرتاب اول و دوم، عدد ۱ و ۶ ظاهر نشود و در پرتاب سوم یکی از اعداد ۱ یا ۶ ظاهر شود. پس:

$$P=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{27}$$

دو پیشامد مستقل

دو پیشامد وقتی مستقل هستند که روی هم تأثیر نداشته باشند. به بیان دیگر، رُخ دادن پیشامد B، احتمال رُخ دادن پیشامد A را تغییر ندهد:

$$P(A|B)=P(A)\Leftrightarrow \text{A و B مستقل‌اند}$$

مثلاً، وقتی یک تاس پرتاب می‌کنیم، احتمال ظاهر شدن عدد ۲ برابر $\frac{1}{6}$ است. حال اگر این تاس را یک بار دیگر پرتاب کنیم، احتمال این‌که در بار دوم ۶ ظاهر شود، برابر $\frac{1}{6}$ است؛ یعنی آگاهی از عدد ظاهرشده در پرتاب اول، احتمال ظاهر شدن ۶ در پرتاب دوم را تغییر نمی‌دهد و در نتیجه این پیشامدها نسبت به هم مستقل هستند.

شرط مستقل بودن

دو پیشامد ناتهی A و B در صورتی مستقل‌اند که احتمال اشتراک آن‌ها برابر حاصل‌ضرب احتمال آن‌ها باشد:

A و B مستقل‌اند $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

تست **اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونهٔ S باشند، به‌طوری‌که $P(A|B)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ آن‌گاه $P(A\cup B)$ کدام است؟**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۱ چون A و B مستقل هستند، پس:

$1)\ P(A|B)=P(A)=\frac{1}{2}$

$2)\ P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

نکته اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه:

۱ A و B′ مستقل‌اند. $P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$

۲ A′ و B مستقل‌اند. $P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)$

۳ A′ و B′ مستقل‌اند. $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$

مثلاً وقتی یک سکه و یک تاس پرتاب می‌کنیم، پیشامد ظاهر شدن «۲» و ظاهر شدن «پشت» ربطی به هم ندارند و مستقل از هم محسوب می‌شوند، پس ظاهر نشدن «۲» در پرتاب تاس نیز به «پشت» آمدن سکه ربطی ندارد و مستقل محسوب می‌شوند.

تذکر پیشامدهایی که در ظاهر با هم ارتباطی ندارند، مستقل‌اند. مثلاً پرتاب دو سکه، جنسیت فرزندان یک خانواده، پرتاب یک سکه و یک تاس، قبولی دو نفر در یک آزمون، تولد افراد در روزهای مختلف هفته یا سال یا فصل‌ها و ماه‌های مختلف.

تست **احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۴ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان در این آزمون قبول می‌شوند؟** (خارج - ۹۵)

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸

۳ قبولی دو فرد در یک آزمون، مستقل از هم است. حال احتمال این‌که لااقل یکی از آن‌ها قبول شود، برابر است با:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$=0/84+0/75-\underbrace{0/84\times 0/75}_{0/63}=0/96$

تست **دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه دوره یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟** (داخل - ۹۵)

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{7}{12}$

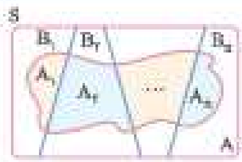
۱ پیشامد ظاهر شدن دو «رو» در پرتاب دو سکه را با A و پیشامد ظاهر شدن عدد ۶ در تاس را با B نشان می‌دهیم. با توجه به این‌که این دو پیشامد مستقل‌اند، پس:

$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{6+4-1}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

درس ۳ احتمال کل

فرمول احتمال کل

اگر فضای نمونهٔ S از اجتماع پیشامدهای $B_1,B_2,\dots,B_k$ تشکیل شده باشد و A یک پیشامد از این فضای نمونه باشد، آن‌گاه:



$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\dots$

مفهوم احتمال کُل

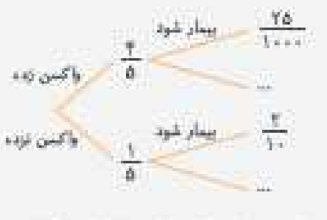
در مسائل احتمال کل، چند اتفاق پشت سر هم رُخ می‌دهد و نتیجهٔ اولی روی اتفاق دوم تأثیرگذار است. در این مسائل، فضای نمونه به دو یا چند بخش تقسیم‌بندی‌شده است که معروف‌ترین آن‌ها: چند کیسه، چند کارخانه، زن و مرد، دانشجویان پسر و دختر و ... هستند.

تذکر برای حل این مسائل می‌توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم و البته پس از تسلط بر مسائل، می‌توانیم شاخه‌ها را به طور ذهنی تجسم کنیم و آن‌ها را رسم هم نکنیم!

تست **احتمال انتقال یک بیماری ویروسی به افرادی که واکسن زده‌اند، ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر، ۰/۲ است. $\frac{4}{5}$ دانش‌آموزان یک کلاس واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به‌تصادف با یکی از دانش‌آموزان ملاقات کند، با کدام احتمال این بیماری منتقل می‌شود؟**

۱) $\frac{1}{200}$ ۲) $\frac{2}{100}$ ۳) $\frac{3}{100}$ ۴) $\frac{3}{50}$

۴ احتمال انتقال بیماری به افرادی که واکسن زده‌اند، ۰/۰۲۵ و به افرادی که واکسن نزده‌اند ۰/۲ است، پس:



$P=\frac{4}{5}\times\frac{25}{1000}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{50}+\frac{2}{50}=\frac{3}{50}$

مسائل کیسه و مهره

سؤالات مربوط به کیسه و مهره در احتمال کل به سه دسته کلی تقسیم می‌شوند:

۱ در بعضی مسائل، چند کیسه داریم و می‌خواهیم از یکی از این کیسه‌ها، مهره‌ای با رنگ خاص خارج کنیم.

تست **دو ظرف همانند، اولی دارای ۶مهرهٔ سفید و ۴مهرهٔ سیاه و دومی دارای ۶مهرهٔ سفید و ۸مهرهٔ سیاه است. با چشم بسته یکی از دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟**

۱) $\frac{۱۷}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۷}{۷۰}$ ۴) $\frac{۳۹}{۷۰}$

۲ احتمال انتخاب هر ظرف برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس:

$$P=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۴}=\frac{۲۱+۱۵}{۷۰}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

۲ در بعضی مسائل، ابتدا یک یا چند مهره از کیسهٔ اول به کیسهٔ دوم منتقل می‌کنیم و سپس از کیسهٔ دوم یک مهره خارج می‌کنیم.

تست **دو ظرف یکسان داریم. در اولی ۳مهرهٔ آبی و ۲مهرهٔ قرمز و در دومی ۴مهرهٔ آبی و ۳مهرهٔ قرمز است. از ظرف اول به‌تصادف یک مهره انتخاب می‌کنیم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره آبی است؟**

۱) $\frac{۲۳}{۴۰}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۲۷}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲۹}{۴۰}$

۱ مهرهٔ منتقل‌شده به ظرف دوم به احتمال $\frac{۳}{۵}$ آبی و به احتمال $\frac{۲}{۵}$ قرمز است، پس:

$$P=\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۸}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۴}{۸}=\frac{۲۳}{۴۰}$$

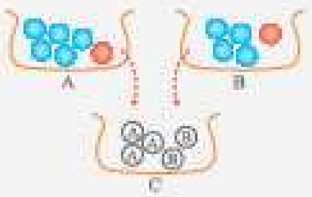
۳ در مدل سوم، تعدادی مهره از کیسهٔ اول و دوم خارج می‌کنیم و در کیسهٔ سوم قرار می‌دهیم. سپس از کیسهٔ سوم یک مهره خارج می‌کنیم.

تست **ظرف A شامل ۵مهرهٔ آبی و ۱مهرهٔ قرمز و ظرف B شامل ۴مهرهٔ آبی و ۱مهرهٔ قرمز است. از ظرف A، ۳مهره و از ظرف B، دو مهره به تصادف انتخاب و در ظرف C قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف C انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره آبی است؟**

۱) $\frac{۳۹}{۵۰}$ ۲) $\frac{۴۱}{۵۰}$ ۳) $\frac{۴۳}{۵۰}$ ۴) $\frac{۴۷}{۳۰}$

۲ مهرهٔ انتخابی از ظرف C با احتمال $\frac{۳}{۵}$، متعلق به ظرف A و با احتمال $\frac{۲}{۵}$، متعلق به ظرف B است. در ضمن مهرهٔ انتخابی از A با احتمال $\frac{۵}{۶}$ آبی و مهرهٔ انتخابی از B نیز با احتمال $\frac{۴}{۵}$ آبی است، پس:

$$P=\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۲}+\frac{۸}{۲۵}=\frac{۴۱}{۵۰}$$



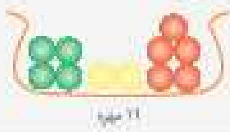
برداشتن مهره، بدون دیدن

اگر تعدادی مهره از یک کیسه خارج کنیم و بدون دیدن کنار بگذاریم، فرض می‌کنیم آن مهره‌ها از کیسه خارج نشده‌اند و هنوز درون کیسه هستند.

تست **در ظرفی ۴مهرهٔ سبز، ۲مهرهٔ زرد و ۵مهرهٔ قرمز موجود است. یک مهره به‌تصادف از این ظرف انتخاب کرده و بدون مشاهدهٔ رنگ آن، مهره‌ای دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، این مهره سبز است؟**

۱) $\frac{۴}{۱۱}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$ ۳) $\frac{۶}{۱۱}$ ۴) $\frac{۷}{۱۱}$

۱ پس چون مهرهٔ اول بدون مشاهده خارج شده، داریم:



$\rightarrow P=\frac{۴}{۱۱}$

یادداشت: