مقدمه ناشر

به نام خدا

بدون شک مارادونا اسطورهٔ فوتبال جهانه!

جادوگری که از وسط زمین شروع به دریبل‌زدن بازیکنا می‌کنه، سریعاً نزدیک و نزدیک دروازه می‌شه و ... gooooooal!

حالا برای این‌که مارادونای کنکورتون باشین، یه سری کتاب جیبی براتون تألیف کردیم به اسم نکته‌باز!

در فرایند تألیف کتابای نکته‌باز، هوشمندانه عمل کردیم، این‌طوری که نکات کاملاً ضروری کنکور و استراتژی‌های لازم برای حل سؤالات رو، یک جا براتون آوردیم. علاوه بر همهٔ این‌ها، شما با انتخاب نکته‌باز، می‌تونین در سریع‌ترین زمان ممکن مطالب رو جمع‌بندی کنین، چون تو این کتابا همهٔ مطالب کنکور به صورت نکته‌محور دسته‌بندی شدن.

در پایان جا داره یه تشکر ویژه کنیم از تیم تألیف و تولید خیلی‌سبز که بدون زحماتشون، بدون شک کتابای به این خوبی نداشتیم ...!

مارادونای زندگیت باش ...

مقدمه مؤلف

به نام آن‌که هر چه دارم از اوست

سلام خدمت معلمان محترم و دانش‌آموزان عزیز:

کتابی که پیش‌رو دارید، یک جمع‌بندی کامل از تمامی سرفصل‌های مربوط به کنکور تجربی می‌باشد که در آن نکات تستی همهٔ فصل‌ها به صورت نموداری و جدولی و به زبان ساده بیان شده است و هم‌چنین بعد از ارائهٔ هر نکته جدیدترین تست‌های طرح‌شده از آن نکته، در کنکورهای اخیر با پاسخ‌های کاملاً تشریحی و بر مبنای روش‌های ارائه‌شده در نکات، بررسی شده‌اند.

دانش‌آموزان عزیز می‌توانند با مطالعهٔ این کتاب در کوتاه‌ترین زمان ممکن به جمع‌بندی تمام سرفصل‌های مورد نیاز در کنکور بپردازند.

ضمن آرزوی موفقیت برای تمامی همکاران عزیز و دانش‌آموزان سرزمینم، از تمامی عزیزانی که در تألیف این کتاب در کنارم بودند تشکر نموده و از خداوند متعال برایشان توفیق روزافزون آرزومندم.

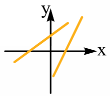
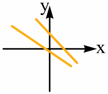
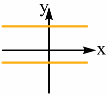
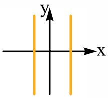
فهرست مطالب

فصل چهارم

مشتق

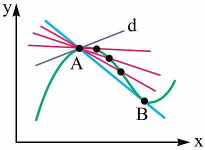
۶۳ مفهوم شیب

در سال‌های قبل خوانده‌ایم که شیب خط واصل بین دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از رابطهٔ $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ محاسبه می‌شود. برای تعیین علامت شیب یک خط مطابق جدول زیر عمل می‌کنیم:

علامت شیب	زاویه با جهت مثبت محورxها	شکل
+	حاده	
−	منفرجه	
صفر	۰°	
تعریف‌نشده	۹۰°	

۶۴ خط مماس و نحوهٔ محاسبهٔ شیب آن

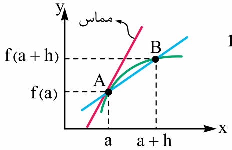
خط مماس: نقطهٔ ثابت A و همچنین نقطهٔ لغزان B را روی منحنی f مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود.



با نزدیک‌کردن نقطهٔ B به نقطهٔ A، خط قاطع AB به خط d نزدیک‌تر شده و تبدیل به خط مماس می‌شود.

شیب خط مماس:

با در نظر گرفتن نقاط $A(a,f(a))$ و $B(a+h,f(a+h))$ بر روی نمودار داریم:



$$m_{AB}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{\text{شیب خط مماس}} \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

۶۵ تعریف مشتق

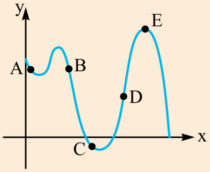
شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=a$، همان مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ است که در صورت وجود، آن را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

توجه کنید که در فرمول بالا اگر از تغییر متغیر $a+h=x$ استفاده کنیم، فرمول دوم محاسبهٔ مشتق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a+h=x \Rightarrow h=x-a \Rightarrow f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تست از بین نقاط مشخص‌شده در نمودار، در چند نقطه حاصل‌ضرب مقدار تابع در مقدار مشتق در نقطهٔ داده‌شده عددی منفی است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۲

پاسخ گزینهٔ ۴ با بررسی نمودار و تکمیل جدول زیر داریم:

نقطه	علامت مقدار تابع	علامت مشتق	علامت حاصل‌ضرب مقدار تابع در مقدار مشتق
A	+	−	−
B	+	−	−
C	−	−	+
D	+	+	+
E	+	۰	۰

با توجه به جدول بالا، در نقاط A و B علامت حاصل‌ضرب مقدار تابع در مقدار مشتق، منفی است.

۶۶ فرمول‌های مشتق‌گیری

فرض کنید u تابعی برحسب x باشد، در آن صورت مشتق توابع مختلف مطابق جدول زیر محاسبه می‌شود:

تابع	مشتق	مثال
c (عدد ثابت)	صفر	$(۵)' = ۰$
u^n	$nu^{n-۱}u'$	$((x^۳+x^۲)^۳)' = ۳(x^۳+x^۲)^۲(۳x^۲+۲x)$

تابع	مشتق	مثال
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$(\sqrt{۵x+۳})'=\dfrac{۵}{۲\sqrt{۵x+۳}}$
$\sqrt[n]{u^m}$	$\dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$(\sqrt[۳]{x^۲+x})'=\dfrac{۱\times(۲x+۱)}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+x)^۲}}$
$kf(x)$	$kf'(x)$	$(۵\sqrt{۲x-۱})'=۵\times\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x-۱}}$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	$(x^۲+\sqrt{x})'=۲x+\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}$
$f(x)\times g(x)$	$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$	$(\sqrt{x}(x+۱))'=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+۱)+۱\times\sqrt{x}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^۲}$	$(\dfrac{\sqrt{x}}{x+۱})'=\dfrac{\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+۱)-۱\times\sqrt{x}}{(x+۱)^۲}$

توجه مشتق تابع $\sqrt[n]{u^m}$ را می‌توانیم با مشتق‌گیری از تابع $(u)^{\frac{m}{n}}$ نیز به دست آوریم.

مشتق عبارت‌های کاربردی را مطابق جدول زیر به خاطر بسپارید.

تابع	$\sqrt{x}$	$\sqrt[۳]{x}$	$\dfrac{k}{x}$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}$
مشتق	$\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}$	$\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$	$-\dfrac{k}{x^۲}$	$\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$

تست اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ و $g(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ باشد، حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

پاسخ گزینهٔ ۱ می‌دانیم $f'g+g'f$ همان $(f.g)'$ است، پس ابتدا $f.g$ را تشکیل می‌دهیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x)\times g(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\times\frac{x^2+4x+4}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\times\frac{(x+2)^2}{(x+1)\sqrt{x+1}}\Rightarrow f(x)\times g(x)=\frac{x+2}{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{از ۲ طرف مشتق می‌گیریم.}} f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1)g(1)+g'(1)f(1)=-\frac{1}{4}$$

تست مشتق تابع $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$، در نقطهٔ $x=2$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $-\dfrac{3}{4}$ ۲) $-\dfrac{5}{4}$ ۳) $-\dfrac{5}{2}$ ۴) $-\dfrac{15}{4}$

پاسخ گزینهٔ ۴ به کمک رابطهٔ $(u^n)'=n\times u^{n-1}\times u'$ داریم:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3\xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$3\times\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^2\times\frac{\dfrac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}}\times(x^2-x)-(2x-1)\times\sqrt[3]{x^2+2x}}{(x^2-x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=۲} ۳\times(\frac{۲}{۲})^۲\times\frac{\frac{۶}{۳\times۴}\times۲-۳\times۲}{۴}=۳\times\frac{۱-۶}{۴}=-\frac{۱۵}{۴}$$

تست در تابع $f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۳ طبق تعریف مشتق:

$$\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}=f'(\frac{۱}{۴})$$

حال با مشتق‌گیری از تابع f و با جای‌گذاری $x=\frac{۱}{۴}$ داریم:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}\frac{-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\times\frac{۱}{۲}}(-\frac{۱}{۴}-۱)}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

تذکر گاهی اوقات قبل از مشتق‌گیری بهتر است تابع مورد نظر را تا جای ممکن ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم.

تست مشتق تابع $y=\frac{x+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲}+۱}$، به ازای $x=۸$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶۴ ۳) $\frac{۱}{۶۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ گزینهٔ ۴ ابتدا در صورت از $\sqrt[3]{x}$ فاکتور می‌گیریم:

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}+1)}{\sqrt[3]{x^2}+1}=\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\xrightarrow{x=8}\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{12}$$

۶۷ عامل صفرشونده در مشتق‌گیری

اگر تابع f در $x=a$ دارای عامل صفرشونده باشد، برای محاسبهٔ $f'(a)$ فقط از عامل صفرشونده مشتق گرفته و به بقیهٔ جملات کاری نداریم؛ سپس در تمام جملات مقدار a را جای‌گذاری می‌کنیم.

تست اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) -6 ۲) -3 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

پاسخ گزینهٔ ۱ طبق تعریف مشتق:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)$$

$$f(x)=\underbrace{(x^2-x-2)}_{\text{عامل صفرشونده}}\sqrt[3]{x^2-7x}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق در } x=-1}\underbrace{(2x-1)}_{\text{مشتق عامل صفرشونده}}\sqrt[3]{x^2-7x}\xrightarrow{x=-1}-3\sqrt[3]{8}=-6$$

فرض کنید: $f(x)=x^{5}+2x^{4}+x^{3}+1$

	$f \xrightarrow{\text{مشتق}} f' \xrightarrow{\text{مشتق}} f'' \xrightarrow{\text{مشتق}} f'''$
مشتق اول	$f'(x)=5x^{4}+8x^{3}+3x^{2}$
مشتق دوم	$f''(x)=20x^{3}+24x^{2}+6x$
مشتق سوم	$f'''(x)=60x^{2}+48x+6$

تذکر اگر مشتق مراتب بالاتر هم نیاز باشد، به همین صورت مشتق‌گیری را ادامه می‌دهیم.

تست اگر $f'(0)=g(0)=1$ و $f(x)=x+1+(g(x))^{5}$، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

۱) $4g''(0)$ ۲) $5g''(0)$ ۳) $4g''(0)+20$ ۴) $5g''(0)+20$

پاسخ گزینهٔ ۲ ابتدا از طرفین رابطهٔ $f(x)=x+1+(g(x))^{5}$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=1+5(g(x))^{4}g'(x)\quad (I)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0)=1+5(g(0))^{4}g'(0) \Rightarrow 1=1+5(1)^{4}g'(0)$$

$$\Rightarrow g'(0)=0$$

برای محاسبهٔ $f''(0)$ از طرفین رابطهٔ (I) مشتق می‌گیریم.

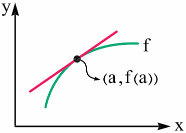
دقت کنید که $g'(0)=0$ است، پس با استفاده از مشتق عامل صفرکننده داریم:

$$f''(0)=0+\underbrace{g''(0)}_{\text{مقدار مشتق عامل صفرکننده در } x=0}\times 5(g(0))^{4} \Rightarrow f''(0)=g''(0)\times 5(1)^{4}$$

$$\Rightarrow f''(0)=5g''(0)$$

۶۹ معادلهٔ خط مماس بر منحنی

برای نوشتن معادلهٔ خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطهٔ $(a,f(a))$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:



$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

تست عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی $y=\log_{۵} ۵^{\sqrt{x+۱}}$ در $x=۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به کمک ویژگی‌های لگاریتم ساده می‌کنیم:

$$y=\log_{۵} ۵^{\sqrt{x+۱}}=\sqrt{x+۱}\log_{۵} ۵ \Rightarrow y=\sqrt{x+۱}$$

حالا نقطهٔ تماس و شیب مماس را پیدا می‌کنیم:

$$x=۳ \Rightarrow y=\sqrt{۳+۱}=۲ \Rightarrow A(۳,۲)$$

$$y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} \xrightarrow{x=۳} y'(۳)=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ مماس}} y-۲=\frac{۱}{۴}(x-۳)$$

برای محاسبهٔ عرض از مبدأ در معادلهٔ مماس، $x=۰$ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow y-۲=\frac{۱}{۴}(۰-۳) \Rightarrow y=۲-\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

اگر خطی بر تابع مماس باشد، معادلهٔ تلاقی (برخورد) آن‌ها ریشهٔ مضاعف دارد.

تست اگر خط $y=۲x+b$ بر نمودار $y=\frac{x+a}{ax+۱}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟ (خارج تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

✔ پاسخ گزینهٔ ۳ خط و منحنی در نقطه‌ای به طول واحد $(x=1)$ بر هم مماس‌اند، بنابراین $f(1)=g(1)$، یعنی:

$$\frac{1+a}{a(1)+1}=2(1)+b \Rightarrow b=-1$$

از طرفی دلتای معادلهٔ تلاقی خط $y_1=2x-1$ و منحنی $y_2=\frac{x+a}{ax+1}$ باید برابر صفر باشد (چون معادلهٔ تلاقی ریشهٔ مضاعف دارد.):

معادلهٔ تلاقی: $\frac{x+a}{ax+1}=2x-1$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2ax^2+2x-ax-1=x+a$$

$$\Rightarrow 2ax^2+(-a+1)x-1-a=0$$

$$\Delta=(-a+1)^2-4(2a)(-1-a)=0 \Rightarrow 9a^2+6a+1=0$$

$$\Rightarrow (3a+1)^2=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{b=-1} a-b=-\frac{1}{3}-(-1)=\frac{2}{3}$$

۷۰ خط مماس بر تابع وارون

اگر نقطهٔ $A(a,b)$ روی تابع f قرار داشته باشد، در آن صورت $A'(b,a)$ نقطهٔ متناظر آن روی f^{-1} است.

اگر شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $m=f'(a)$ باشد، در آن صورت شیب خط مماس بر منحنی $y=f^{-1}(x)$ در نقطهٔ A' برابر $\frac{1}{m}$ می‌باشد.

تست تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید؛ شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟ (خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۱۲

پاسخ گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $A(۲,\alpha)$ روی $f^{-۱}$ باشد:

$$A(۲,\alpha)\in f^{-۱} \Rightarrow A'(\alpha,۲)\in f$$

ابتدا مختصات نقطه را به دست می‌آوریم:

$$۲=\frac{\sqrt{\alpha}+۱}{\sqrt{\alpha}-۱} \Rightarrow ۲\sqrt{\alpha}-۲=\sqrt{\alpha}+۱ \Rightarrow \sqrt{\alpha}=۳ \Rightarrow \alpha=۹$$

پس مختصات نقاط A و A' به صورت زیر می‌باشد:

$$A(۲,۹)\in f^{-۱}, A'(۹,۲)\in f$$

برای به دست آوردن شیب خط مماس بر منحنی $f^{-۱}$ در نقطهٔ $x=۲$ کافی است شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ $x=۹$ را به دست آورده و معکوس کنیم:

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}-۱)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۹} \frac{\frac{۱}{۶}(۲)-\frac{۱}{۶}(۴)}{۴}=-\frac{۱}{۱۲} \Rightarrow f'(۹)=-\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{f'(۹)}=-۱۲$$

۷۱ مشتق چپ و راست

مشتق راست	حد راست تعریف مشتق $=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_+(a)$
مشتق چپ	حد چپ تعریف مشتق $=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_-(a)$