مقدمهٔ ناشر

تقدیم به:

برادر بزرگ‌ترم محمود اردستانی

مصطفی دیداری

رفیق و همسرم سارا که با بردباری، شرایط مناسبی برایم فراهم آورد تا بتوانم بخش بزرگی از ساعات حضورم در منزل را به تألیف و طرح سؤال اختصاص دهم.

کیوان دارابی

بچه‌های خفن گروه آموزشی لاپلاس

مسعود شفیعی

همسر مهربانم

وحید ذوالفقاری

کار را که کرد؟ آن که تمام کرد.

این یه ضرب‌المثل قدیمیه که در اصل منظورش اینه که همیشه انتهای هر کار خیلی خیلی مهم‌تر از کارهاییه که توی مسیر منتهی به اون کار انجام می‌دید و برای موفق‌شدن استمرار در تلاش و خسته‌نشدن در آخر خیلی مهمه.

از اون‌جایی که فصل‌آزمون هم کتابی برای آخر کار هست، ما هم تلاش کردیم تا با طراحی و تألیف آزمون‌های خیلی خفن و مطابق با کنکورهای اخیر و خیلی استاندارد بتونیم تمام چیزهایی که هر دانش‌آموزی برای آزمون‌دادن و مرور تست‌ها و سنجش فردی نیاز داره رو توی این سری کتاب‌ها به خوبی پوشش بدیم.

آزمون‌هایی که با تقسیم‌بندی موضوعی و یا مبحثی و جامع در هر فصل می‌تونه شما رو با بعدهای دست‌نیافتهٔ هر مبحث روبه‌رو کنه تا در سر جلسهٔ کنکور با طراحی جدیدی از سؤالات روبه‌رو نشید.

فصل‌آزمون‌ها، جایی برای سنجش آزمونی و موضوعی است که می‌تواند با تعدد سؤال‌ها و تعدد ایده‌های ناب شما را از هر آن‌چه که در هر درسی نیاز دارید، بی‌نیاز کند.

مقدمهٔ مؤلفان

به نام او

بچه‌ها سلام امیدواریم حالتان خوب باشد. خب اسم کتاب روی خودش است؛ کتاب فصل‌آزمون! یعنی آن‌قدر آزمون می‌دهید که دیگر حالتان از آزمون‌دادن خوب می‌شود! بله بعد از یادگیری درس و حل تست‌های آموزشی! نوبت به محک‌زدن خودتان با چند آزمون درست و درمان می‌رسد. همین اول کار بگوییم که در این کتاب سؤال‌های ساده و آموزشی نمی‌بینید، چون فرض بر این است که درس را یاد گرفته و به اندازهٔ کافی سؤال از بانک تستتان حل کرده‌اید و بعد به سراغ این کتاب آمده‌اید. همهٔ سؤال‌ها طوری طراحی شده‌اند که ممکن است در کنکور بیایند؛ پس از هیچ سؤالی به سادگی عبور نکنید.

خب این کتاب از فصل‌های زیر که شامل تعدادی آزمون و پاسخ‌های واقعاً تشریحی هستند، تشکیل می‌شود:

فصل	موضوع	پوشش کتاب درسی	تعداد سؤال کنکور
۱	نظریهٔ اعداد	گسسته	۳
۲	گراف	گسسته	۲
۳	ترکیبیات	گسسته	۳
۴	شمارش	ریاضی دهم	حداکثر ۱
۵	مبانی ریاضی	آمار و احتمال	۲
۶	احتمال	آمار و احتمال	۲
۷	آمار	آمار و احتمال	۱ یا ۲
۸	آزمون جامع	هر سه کتاب	۱۲

هر فصل با دقت زیاد تیپ‌بندی شده و به تعدادی زیرموضوع تقسیم شده است. در هر زیرموضوع نیز، یک یا دو آزمون ۱۰سؤالی داریم. اگر فرصت کافی دارید، برنامه‌ریزی کنید و شب‌های امتحان کنکورهای آزمایشی به آن موضوع بپردازید.
در انتهای هر فصل، دو آزمون از کل مطالب آن فصل داریم که شامل انواع سؤال‌های ترکیبی آن فصل است. یک ویژگی خاص این کتاب که آن را از بقیهٔ کتاب‌های مشابه بازار متمایز می‌کند، این است که در برخی از زیرموضوع ها، بنا بر اهمیت، تعدادی آزمون چالشی داریم که اگر عاشق سؤال‌های خفن و درصدهای فراتر از ۱۰۰ هستید، مخصوص شما طراحی شده است. اما پاسخنامه؛ حتی اگر سؤالی را درست حل کرده‌اید از مطالعهٔ پاسخنامه پشیمان نمی‌شوید، چون علاوه بر حل تقریباً مفصل هر سؤال، نکته‌های خفن تستی نیز مشاهده می‌کنید. هم‌چنین در پاسخ‌ها، جمع‌بندی نکته‌های لازم آن آزمون هم یادآوری شده است. فصل آخر کتاب نیز از آزمون‌های جامع ۱۵سؤالی شبیه کنکور تشکیل شده است. این‌ها نیز حسابی برای دوران جمع‌بندی به کارتان می‌آید. خلاصه این‌که بخوانید و حالش را ببرید و خیال خودتان را بابت ۱۲ سؤال کنکور گسسته و آمار راحت کنید.

در پایان تشکر می‌کنیم از همهٔ مسئولین انتشارات، از دکتر نصری عزیز، از علیرضا شعبانی‌نصر (خدایی پوستم رو کند) تا ویراستاران محترم و خانم فلاحی و از تمام بر و بچه‌های خیلی‌سبز که بدون تلاش شبانه‌روزی آن‌ها این کتاب به دست شما نمی‌رسید.

دوستدار شما

مؤلفین

فهرست

صفحه

فصل ۱ نظریه اعداد

آزمون ۱: درس اول: روش‌های استدلال (۱) ۸
آزمون ۲: درس اول: روش‌های استدلال (۲) ۸
آزمون ۳: درس دوم: رابطهٔ عادکردن ۹
آزمون ۴: درس دوم: ب.م.م و ک.م.م ۱۰
آزمون ۵: درس دوم: قضیهٔ تقسیم و افراز اعداد صحیح (۱) ... ۱۱
آزمون ۶: درس دوم: قضیهٔ تقسیم و افراز اعداد صحیح (۲) ... ۱۱
آزمون ۷: درس دوم: اعداد اول و تجزیهٔ اعداد ۱۲
آزمون ۸: درس دوم: چالشی درس دوم ۱۳
آزمون ۹: درس سوم: ویژگی‌های همنهشتی ۱۳
آزمون ۱۰: درس سوم: پیداکردن باقی‌مانده (۱) ۱۴
آزمون ۱۱: درس سوم: پیداکردن باقی‌مانده (۲) ۱۵
آزمون ۱۲: درس سوم: قواعد بخش‌پذیری بر اعداد خاص ... ۱۶
آزمون ۱۳: درس سوم: تقویم‌نگاری ـ رقم یکان ۱۶
آزمون ۱۴: درس سوم: معادلهٔ همنهشتی ـ معادلهٔ سیاله ۱۷
آزمون ۱۵: درس سوم: معادلهٔ همنهشتی با سایر موضوعات ۱۸
آزمون ۱۶: درس سوم: چالشی (۱) درس سوم ۱۸
آزمون ۱۷: درس سوم: چالشی (۲) درس سوم ۱۹
آزمون ۱۸: جامع فصل (۱) ۲۰
آزمون ۱۹: جامع فصل (۲) ۲۱

فصل ۲ گراف و مدل‌سازی

آزمون ۲۰: درس اول: تعریف‌های مقدماتی گراف ۲۳
آزمون ۲۱: درس اول: درجهٔ رأس‌های گراف ۲۴
آزمون ۲۲: درس اول: گراف‌های خاص (کامل، ... (۱)) ... ۲۴
آزمون ۲۳: درس اول: گراف‌های خاص (کامل، ... (۲)) ... ۲۵
آزمون ۲۴: درس اول: مسیر ـ گراف‌های همبند ۲۶

صفحه

آزمون ۲۵: درس اول: دور در گراف ۲۷
آزمون ۲۶: درس اول: چالشی (۱) درس اول ۲۸
آزمون ۲۷: درس اول: چالشی (۲) درس اول ۲۸
آزمون ۲۸: درس دوم: مجموعه‌های احاطه‌گر و ۲۹
آزمون ۲۹: درس دوم: عدد احاطه‌گری و تعداد ۳۰
آزمون ۳۰: درس دوم: مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۳۲
آزمون ۳۱: جامع فصل (۱) ۳۳
آزمون ۳۲: جامع فصل (۲) ۳۴

فصل ۳ روش‌هایی برای شمارش

آزمون ۳۳: درس اول: مرور شمارش + جایگشت با ۳۶
آزمون ۳۴: درس اول: معادلهٔ سیالهٔ خطی با ... (۱) ۳۶
آزمون ۳۵: درس اول: معادلهٔ سیالهٔ خطی با ... (۲) ۳۷
آزمون ۳۶: درس اول: مربع لاتین ۳۸
آزمون ۳۷: درس اول: چالشی درس اول ۳۹
آزمون ۳۸: درس دوم: اصل شمول (۱) ۴۰
آزمون ۳۹: درس دوم: اصل شمول (۲) ۴۱
آزمون ۴۰: درس دوم: تعداد تابع‌ها ۴۲
آزمون ۴۱: درس دوم: اصل لانه‌کبوتری (۱) ۴۲
آزمون ۴۲: درس دوم: اصل لانه‌کبوتری (۲) ۴۳
آزمون ۴۳: درس دوم: چالشی درس دوم ۴۴
آزمون ۴۴: جامع فصل (۱) ۴۵
آزمون ۴۵: جامع فصل (۲) ۴۶

فصل ۴ شمارش بدون شمردن

آزمون ۴۶: جامع فصل (۱) ۴۸
آزمون ۴۷: جامع فصل (۲) ۴۹

صفحه

فصل ۵ آشنایی با مبانی ریاضیات

آزمون ۴۸: درس اول: منطق ریاضی ۵۱

آزمون ۴۹: درس اول: سورها ۵۱

آزمون ۵۰: درس دوم: مقدمات مجموعه‌ها ـ زیرمجموعه ۵۲

آزمون ۵۱: درس دوم: جبر مجموعه‌ها ۵۳

آزمون ۵۲: درس دوم: ضرب دکارتی ۵۴

آزمون ۵۳: جامع فصل (۱) ۵۵

آزمون ۵۴: جامع فصل (۲) ۵۶

فصل ۶ احتمال

آزمون ۵۵: درس اول: مقدمات احتمال + احتمال ۵۸

آزمون ۵۶: درس اول: احتمال هم‌شانس ۵۹

آزمون ۵۷: درس اول: قوانین احتمال ۵۹

آزمون ۵۸: درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس ۶۰

آزمون ۵۹: درس سوم: احتمال شرطی ۶۱

آزمون ۶۰: درس سوم: کاربردهای احتمال شرطی ۶۲

آزمون ۶۱: درس سوم: چالشی درس سوم (۱) ۶۳

آزمون ۶۲: درس سوم: چالشی درس سوم (۲) ۶۴

آزمون ۶۳: درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۶۵

آزمون ۶۴: درس چهارم: انتخاب‌های با جای‌گذاری و ۶۶

آزمون ۶۵: درس چهارم: چالشی درس چهارم ۶۷

صفحه

آزمون ۶۶: جامع فصل (۱) ۶۸

آزمون ۶۷: جامع فصل (۲) ۶۹

فصل ۷ آمار توصیفی آمار استنباطی

آزمون ۶۸: درس اول: جدول فراوانی ـ میانگین ۷۲

آزمون ۶۹: درس اول: میانگین ـ میانه ـ مد ۷۳

آزمون ۷۰: درس دوم: شاخص‌های پراکندگی ۷۳

آزمون ۷۱: درس اول و درس دوم: اثر تغییرات ۷۴

آزمون ۷۲: درس اول و دوم: چالشی فصل سوم ۷۵

آزمون ۷۳: درس سوم: گردآوری داده‌ها ۷۶

آزمون ۷۴: درس سوم: برآورد نقطه‌ای ۷۷

آزمون ۷۵: درس سوم: آزمون برآورد بازه‌ای میانگین ۷۸

آزمون ۷۶: جامع فصل (۱) ۷۹

آزمون ۷۷: جامع فصل (۲) ۸۰

آزمون‌های جامع

آزمون ۷۸: جامع گسسته و آمار و احتمال (۱) ۸۲

آزمون ۷۹: جامع گسسته و آمار و احتمال (۲) ۸۳

آزمون ۸۰: جامع گسسته و آمار و احتمال (۳) ۸۴

آزمون ۸۱: جامع گسسته و آمار و احتمال (۴) ۸۵

آزمون ۸۲: جامع گسسته و آمار و احتمال (۵) ۸۶

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۸۸

پاسخ‌نامهٔ کلیدی ۲۴۵

آزمون ۱

درس اول: روش‌های استدلال (۱)

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر۲۰ درصد	۲۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	🤩

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۱ گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n+۱$ اول است.» در بین اعداد طبیعی کم‌تر از ۶ چند مثال نقض دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲ چند عدد از ۳ عدد زیر مربع کامل هستند؟

الف) $۱۴۰۱\times۱۴۰۳+۱$ ب) $۴\times۱۴۰۱\times۱۴۰۲+۱$ پ) $۱۴۰۰\times۱۴۰۱\times۱۴۰۲\times۱۴۰۳+۱$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳ $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A\subseteq S$ است. اگر برای هر $n\in A$ حاصل $\frac{(n+۱)^۲-۱}{۴}$ عددی صحیح و زوج باشد، A حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ چه تعداد از عبارت‌های $n^۳-n$، $n^۵-n$ و $n^۳+۵n$ به ازای هر عدد طبیعی n بر ۶ بخش‌پذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵ β و α دو عدد گنگ مختلف هستند به طوری که $\alpha-\beta$ گویای ناصفر است. چه تعداد از اعداد $\alpha+\beta$ و $\alpha^۲-\beta^۲$ و $۲\alpha+\beta$ لزوماً گنگ هستند؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۶ در اثبات گزارهٔ $ab=۰ \Rightarrow (a=۰)\vee(b=۰)$، از کدام هم‌ارزی منطقی استفاده می‌شود؟

۱) $(p\vee q) \Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

۲) $(p\Rightarrow q) \Rightarrow r\equiv p \Rightarrow (q\wedge r)$

۳) $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

۴) $p \Rightarrow (q\wedge r)\equiv(p\vee q) \Rightarrow r$

۷ اگر $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ سه عدد صحیح باشند و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ همان اعداد با ترکیبی متفاوت باشند، کدام گزینه همواره زوج نیست؟

۱) $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$

۲) $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۱)(a_۳-b_۱)$

۳) $(a_۱-b_۲)(a_۲-b_۱)(a_۳-b_۳)$

۴) $(a_۱-b_۱)(a_۲-a_۳)(a_۲-b_۳)$

۸ اعداد طبیعی a و b در رابطهٔ $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۴}{a+b}$ صدق می‌کنند، برای a چند جواب دورقمی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) صفر

۹ x، y و z سه عدد حقیقی دلخواه هستند. در اثبات درستی رابطهٔ $x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$ به روش بازگشتی به کدام رابطهٔ همواره درست می‌رسیم؟

۱) $(x+y)^۲+(x+۱)^۲+(y+۱)^۲\geq ۰$

۲) $(x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲\geq ۰$

۳) $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲+(x+y)^۲\geq ۰$

۴) رابطهٔ داده‌شده در حالت کلی نادرست است.

۱۰ به ازای چند مقدار دورقمی طبیعی n، عبارت $\binom{n-۲}{۱}+\binom{n-۲}{۲}+\binom{n-۱}{۳}$ زوج است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۶ ۳) ۶۷ ۴) ۶۸

آزمون ۲

درس اول: روش‌های استدلال (۲)

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر۲۰ درصد	۲۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۷۰ درصد	بالای ۷۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	🤩

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۱۱ کدام حکم مقابل با مثال نقض رد نمی‌شود؟ $(A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B))$

۱) $A\cup B=A\cup C \Rightarrow B=C$

۲) $A\cap B=A\cap C \Rightarrow B=C$

۳) $A-B=A-C \Rightarrow B=C$

۴) $A\Delta B=A\Delta C \Rightarrow B=C$

۱۲ $\alpha^۲$ و β دو عدد گنگ هستند و $\frac{۱}{\beta}+\frac{۱}{\alpha}$ عدد گویای ناصفر است. اعداد $\frac{\beta}{\alpha}$ و $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^۲}$ به ترتیب چگونه هستند؟

۱) هر دو ممکن است گویا یا گنگ باشند.

۲) گنگ ـ گویا

۳) گویا ـ گنگ

۴) گنگ ـ گنگ

۱۳ x و y دو عدد حقیقی نامنفی هستند که $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. چه تعداد از عبارت‌های xy^2+x^2y، x^2+y^2 و $\frac{x}{y}$ قطعاً برابر صفر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴ برای این‌که ثابت کنیم «اگر n فرد باشد، آن‌گاه n^2-5n+7 فرد است.»، با فرض $n=2k+1$ به نتیجهٔ $n^2-5n+7=2q+1$ می‌رسیم. مجموع ضرایب عددی عبارت q کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۲

۱۵ چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) اگر عدد $4k+1$ مربع کامل باشد، k به صورت ضرب دو عدد متوالی است.

ب) اگر $\alpha \neq 1$ عددی گویا و β عددی گنگ باشد، عدد $\alpha\beta-\beta$ گنگ است.

پ) اعداد حقیقی و ناصفر a و b وجود ندارند که $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. $(a+b\neq 0)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶ a_1، a_2 و a_3 اعدادی صحیح و b_1، b_2 و b_3 همان اعداد ولی با ترتیب دیگری هستند. چه تعداد از عبارت‌های A، B و C الزاماً زوج هستند؟

الف) $A=(a_1^2-b_1^2)(a_2^2-b_2^2)(a_3^2-b_3^2)$

ب) $B=a_1^2+a_2^2+a_3^2-(b_1+b_2+b_3)^2$

پ) $C=(5a_1-b_1)(5a_2-b_2)(5a_3-b_3)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷ شرط لازم و کافی برای آن‌که عدد $3n+7$ عددی فرد باشد، کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) $4n+3$ عددی فرد باشد. ۲) $5n+8$ عددی فرد باشد. ۳) $7n-2$ عددی زوج باشد. ۴) $2n+6$ عددی زوج باشد.

۱۸ حاصل عدد 2^{2005} را بعد از حاصل عدد 5^{2005} می‌نویسیم (مثلاً اگر عدد ۱۲ را بعد از ۳۴ بنویسیم عدد چهاررقمی ۳۴۱۲ حاصل می‌شود). عدد حاصل چندرقمی است؟

۱) ۲۰۰۳ ۲) ۲۰۰۴ ۳) ۲۰۰۵ ۴) ۲۰۰۶

۱۹ برای این‌که ثابت کنیم میانگین هندسی دو عدد مثبت $\frac{a}{2}$ و $2b$ بیشتر از میانگین حسابی آن‌ها نیست، به کدام نامساوی همواره درست می‌رسیم؟

۱) $(\frac{a}{2}-2b)^2\geq 0$ ۲) $(\frac{a}{2}+2b)^2\geq 0$ ۳) $(a-\frac{b}{2})^2\geq 0$ ۴) $(a+\frac{b}{2})^2\geq 0$

۲۰ به ازای چند عدد فرد و دورقمی n، عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

آزمون ۳

درس دوم: رابطهٔ عادکردن

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت				

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۳

۲۱ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $a\,|\,b+c \Rightarrow a\,|\,b$ و $a\,|\,c$

ب) $ab\,|\,c \Rightarrow a\,|\,c$ و $b\,|\,c$

پ) $ab=cd \Rightarrow c\,|\,a$ یا $c\,|\,b$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲ چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) به ازای هر عدد صحیح n، رابطهٔ $n^3-n\,|\,0$ برقرار است.

ب) کم‌ترین عدد طبیعی n که در رابطهٔ $n!\,|\,49$ صدق می‌کند برابر ۷ است.

پ) n عددی طبیعی است. از درستی رابطهٔ $2^{5n-2}\,|\,8^{n+3}$ نتیجه می‌شود $n\geq 6$.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۳ چند عدد صحیح a وجود دارد که عدد $9k+7$ را عاد کرده و عدد $7k+6$ بر a بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۹ بزرگ‌ترین عدد مربع کاملی که $۱۲!$ را عاد می‌کند چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۶۵ ۴) ۱۹۵

۷۰ برای هر عدد طبیعی a داریم $a = ۲^{a_۱} \times ۳^{a_۲} \times ۵^{a_۳} \times \cdots$، مقدار $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$ به ازای $a = \frac{۱۵!}{۷!}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۹

آزمون ۸

درس دوم: چالشی درس دوم

نوع آزمون: مبحثی | جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۲۰ درصد	۲۰ تا ۵۰ درصد	بالای ۵۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😆

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۸

۷۱ چند زوج‌مرتب (a,b) در اعداد طبیعی وجود دارد که $\frac{۴}{۳} = (۱+\frac{۱}{a})(۱+\frac{۱}{b})$ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷۲ اگر $(a,b) = d$ و $[a,b] = c$ باشد، حاصل $((۲a-b,(a,b)),[c^۲,ab])$ کدام است؟

۱) $c^۲$ ۲) d ۳) $|۲a-b|$ ۴) $|ab|$

۷۳ به ازای چند عدد دورقمی n، عدد $۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + n^۳$ بر ۸ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۷۴ ب.م.م دو عدد $n^۳ + ۲n$ و $n^۴ + ۳n^۲ + ۱$ به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۵ دنبالهٔ $a_n = ۱۰ + n^۲$ تعریف شده است. اگر $d_n = (a_n, a_{n+۱})$ بزرگ‌ترین مقدار d_n به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۴۱ ۳) ۲۰ ۴) ۱

۷۶ در سمت راست عدد $\frac{۳۰!}{۲^n}$، دقیقاً شش رقم صفر وجود دارد. n کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۷۷ اگر a و b دو عدد یک رقمی باشد که $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۲}$، آن‌گاه $\overline{ab۰ba}$ حداکثر چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۷۸ کوچک‌ترین مضرب‌مشترک دو عدد، ۶ برابر عدد کوچک‌تر است، اگر مجموع دو عدد ۱۱۰ باشد، تفاضل این دو عدد کدام است؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۷۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۸ و ۹ به ترتیب برابر ۳ و ۷ است. مجموع ارقام باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^۲$ بر ۱۴۴ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۰ در تقسیم سه عدد $۱۱n + ۵$ و $۷n - ۲$ و $۶n + ۱$ بر عدد $b > ۱$ باقی‌مانده‌ها یکسان شده است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار مقسوم‌علیه کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۷

آزمون ۹

درس سوم: ویژگی‌های همنهشتی

نوع آزمون: مبحثی | جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😆

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۸۱ از درستی رابطهٔ $a = ۲۳۱t - ۱۲۳۴$ کدام نتیجه‌گیری ممکن است درست نباشد؟

۱) $a \overset{۱۱}{\equiv} ۹$ ۲) $a \overset{۲۱}{\equiv} ۵$ ۳) $a \overset{۳۳}{\equiv} ۲۵$ ۴) $a \overset{۷۷}{\equiv} ۷۵$

آزمون ۱۵

نوع آزمون: مبحثی / جامع

درس سوم: معادلهٔ همنهشتی با سایر موضوعات

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۷۰ درصد	بالای ۷۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😀

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۶

۱۴۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۹ برابر ۱۷ است. اگر به ۳ برابر عدد a یک واحد اضافه کنیم، مضرب ۱۷ می‌شود. چند عدد سه‌رقمی a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۲ به ازای بعضی از مقادیر طبیعی n، اگر $\alpha \mid 11n+3$ و $\alpha \mid 5n-4$ و $\alpha > 1$ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

۱۴۳ سه چراغ چشمک‌زن آبی، قرمز و زرد داریم که هر کدام به ترتیب ۵ ساعت یک بار، ۳ ساعت یک بار و ۷ ساعت یک بار چشمک می‌زنند. فرض کنید برای اولین بار چراغ آبی چشمک بزند، دو ساعت بعد چراغ قرمز برای اولین بار چشمک می‌زند و دو ساعت پس از این‌که چراغ قرمز برای اولین بار چشمک زد، چراغ زرد چشمک می‌زند. چند ساعت باید از اولین چشمک چراغ آبی بگذرد تا سه چراغ برای بار سوم هم‌زمان چشمک بزنند؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۵ ۴) ۴۱۰

۱۴۴ در یک تقسیم، مقسوم برابر a، خارج قسمت برابر با q و باقی‌مانده برابر با ۱۰۰ است. اگر $7 \mid a$ و $7 \mid q+1$، آن‌گاه رقم یکان کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۵ رقم یکان $5x^2 - 2x$ برابر ۷ است. رقم یکان عدد x چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۶ خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b به ترتیب برابر ۱۷ و ۲۳ است. اگر باقی‌ماندهٔ عدد سه‌رقمی a بر ۵ برابر ۲ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۴۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۱۱، ۷ و ۳ به ترتیب برابر ۲، ۳ و صفر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۲۳۱ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۵۳

۱۴۸ اگر یک عدد دورقمی را بر رقم یکانش تقسیم کنیم، باقی‌مانده با رقم دهگان و خارج قسمت با رقم یکان آن برابر می‌شود. تفاضل دو رقم این عدد چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۱۴۹ مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی y که در معادلهٔ $157x + 713y = (157, 713)$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۱۴ ۴) ۲۲

۱۵۰ به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، معادلهٔ همنهشتی $(5n-1)x + (7n+2)y = m^2 + 1$ به ازای هر عدد صحیح m دارای جواب است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸۶ ۴) ۸۵

آزمون ۱۶

نوع آزمون: مبحثی / جامع

درس سوم: چالشی (۱) درس سوم

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۷۰ درصد	بالای ۷۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😀

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۸

۱۵۱ هشت برابر عدد دورقمی $\overline{ab}$ را در سمت چپ $\overline{ab}$ قرار داده و آن را m می‌نامیم. اگر m مربع کامل باشد، مجموع ارقام m کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۷ ۳) ۳۴ ۴) ۴۲

۱۵۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2^{275^{57}}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۵۳ مجموع ارقام باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $1^2+3^2+5^2+\cdots+(19)^2$ بر ۷۲ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

۱۵۴ معادلهٔ $x^2+14x \overset{18}{\equiv} 3$ چند جواب طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۵۵ n عددی طبیعی است به طوری که اولین رقم سمت چپ دو عدد 2^n و 5^n یکسان است. این رقم چند حالت مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۶ به ازای چند عدد سه‌رقمی n، حاصل $(3n^2+5n-3, 2n+3)$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۸

۱۵۷ میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی به صورت $\overline{abab}$ که بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۵۱۰۰ ۳) ۵۹۰۸ ۴) ۵۴۵۴

۱۵۸ می‌خواهیم با سکه‌های ۳، ۷ و ۱۳ تومانی، یک کتاب ۱۰۰۰ تومانی بخریم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به شرط آن‌که تعداد کل سکه‌های استفاده‌شده ۱۲۶تا باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۲۱ ۳) ۳۱ ۴) ۴۱

۱۵۹ اگر n بزرگ‌ترین عدد صحیحی باشد که $20!$ بر 2^n بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم n^{444} بر ۴۱ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۳۷

۱۶۰ $f(n)$ را برابر با مجموع ارقام عدد n تعریف می‌کنیم. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2^{f(22^{34})}$ بر ۵۱۱ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

نوع آزمون: مبحثی | جامع

آزمون ۱۷

درس سوم: چالش (۲) درس سوم

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	بالای ۶۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😃

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۸

۱۶۱ عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ را در سمت چپ عدد $\overline{abc}$ می‌نویسیم و عدد ۶ رقمی حاصل را m می‌نامیم. اگر از یک روز دوشنبه به اندازهٔ m جلو برویم به کدام روز هفته می‌رسیم؟

۱) قطعاً دوشنبه ۲) سه‌شنبه یا پنجشنبه

۳) چهارشنبه یا جمعه یا یکشنبه ۴) به هر کدام از روزهای هفته ممکن است برسیم.

۱۶۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۵ برابر ۳ است. رقم یکان عدد a^{12} چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) یک مقدار ۲) دو مقدار ۳) سه مقدار ۴) چهار مقدار

۱۶۳ دو عدد ۲۹۸ و ۱۱۴ به یک دستهٔ همنهشتی به پیمانهٔ عدد فرد $m \neq 1$ تعلق دارند. عدد $3\times m^{m+1}-16!$ به کدام دستهٔ همنهشتی تعلق دارد؟

۱) $[1]_{m+3}$ ۲) $[13]_{m+3}$ ۳) $[3]_{m+3}$ ۴) $[7]_{m+3}$

۱۶۴ بزرگ‌ترین جواب دورقمی y از معادلهٔ $13x-4y=[(72,48),120]$ چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۳ ۴) ۱۲

۱۶۵ باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^{31} بر ۱۹ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۶۶ برای به دست آوردن جمله‌های دنبالهٔ a_n کافی است $7n-1$ رقم ۱ و در جلوی آن به تعداد $6n^2-2$ صفر قرار دهیم (مثلاً $a_1=1111110000$). اولین جملهٔ دنباله که تعداد ارقام عدد حاصل بر ۳۷ بخش‌پذیر می‌شود کدام است؟

۱) a_{12} ۲) a_{54} ۳) a_{25} ۴) a_{17}

۱۶۷ به ازای چند عدد دورقمی طبیعی n، عدد $2^{6n+3}+2^{3n+1}+11$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۵ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

آزمون ۲۱

درس اول: درجهٔ رأس‌های گراف

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۲۰ درصد	۲۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😀

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۴

۲۰۱ یک گراف مرتبهٔ ۱۰، دقیقاً ۶ رأس از درجهٔ $\Delta = ۷$ و ۳ رأس از درجهٔ $\delta = ۴$ دارد. اندازهٔ این گراف کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۹ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

۲۰۲ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند. ۵ نفر از آن‌ها دقیقاً با ۴ یا ۶ نفر دست داده‌اند. نفر ششم و هفتم با چند نفر ممکن است دست داده باشند؟

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۳ یا ۴ ۳) ۳ یا ۵ ۴) ۵ یا ۷

۲۰۳ در گراف سادهٔ G با ۸ رأس و ۱۴ یال، $\delta = ۲$ و $\Delta = ۴$ است. اگر تعداد رأس‌های درجهٔ ۳ و ۴ برابر باشد، گراف چند رأس درجهٔ ۳ دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) چنین گرافی وجود ندارد.

۲۰۴ گراف G دارای ۳ رأس درجهٔ $\Delta = ۴$ و ۶ رأس درجهٔ ۳ است. اگر این گراف ۱۸ یال داشته باشد، مجموع تعداد رأس‌های درجهٔ ۱ یا ۲، چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۰۵ گراف G از مرتبهٔ ۹ دارای دو رأس از درجهٔ $\delta = ۳$ است. اگر $\Delta = ۷$ باشد، بیشترین مقدار اندازهٔ گراف چه‌قدر است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۲۰۶ در یک گراف از مرتبهٔ ۱۷ تعداد رأس‌های زوج و تعداد رأس‌های فرد را به ترتیب a و b می‌نامیم. چه تعداد از اعداد ab، $a^۲ + b$ و $(b-۳)a$ زوج است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۰۷ درجهٔ رأس‌های یک گراف ساده به صورت ۶,۵,۵,۶,۴,۵,۴,a است. a چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۸ مرتبهٔ یک گراف با اندازه‌اش برابر بوده و ۱۲ رأس تنها دارد. اگر رأس‌های دیگر فقط از درجهٔ ۳ یا ۵ باشند، کم‌ترین مقدار مرتبهٔ این گراف کدام است؟ (گراف رأس درجه ۳ و ۵ دارد.)

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۲۰۹ درجهٔ رأس‌های یک گراف ساده به صورت c,b,a,۶,۱,۳,۴ هستند. اگر $q + ۱ \geq ۲p$ باشد، $a+b+c$ چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۰ درجه رأس‌های یک گراف ساده و فاقد رأسِ ایزوله، به صورت اعداد ۵,۴,۴,۳,a,b,c است. اگر تعداد یال‌های این گراف ۱/۵ برابر $(a+b+c)$ باشد، چند حالت مختلف برای مجموعهٔ $\{a,b,c\}$ وجود دارد؟ (a و b و c را مخالف ۶ فرض کنید.)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

آزمون ۲۲

درس اول: گراف‌های خاص (کامل، منتظم، مکمل و زیرگراف) (۱)

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۳۰ درصد	۳۰ تا ۷۰ درصد	۷۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😀

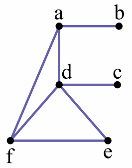
زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۳

۲۱۱ چه تعداد از گراف‌های سادهٔ زیر وجود ندارند؟

الف) گراف کاملی که منتظم نباشد. ب) گراف کامل ۳ـ منتظم

پ) گراف تهی از مرتبهٔ ۴ ت) گرافی که اندازه‌اش با اندازهٔ مکملش برابر باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



۲۱۲ یک یال از گراف زیر را حذف می‌کنیم و گراف به‌دست‌آمده را G می‌نامیم. اگر $\deg_{\bar{G}}(f)+|N_G[e]|=6$ باشد، یال حذف‌شده کدام می‌تواند باشد؟ (|A| برابر با تعداد عضوهای مجموعهٔ A است.)

۱) fd ۲) fe ۳) ed ۴) نشدنی

۲۱۳ با حذف یک یال از گراف کامل با بیشتر از دو رأس، گراف G به دست می‌آید. اگر $q(G)=\Delta(G)\delta(G)-3\delta(G)$ باشد، $p(G)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۱۴ مکمل گراف G دارای ۲۷ یال و ۲ ـ منتظم است. گراف G، چند ـ منتظم است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۲۱۵ با کم‌کردن ۴۰ یال از یک گراف کامل، درجهٔ هر رأس ۵ واحد کاهش می‌یابد. گراف به‌دست‌آمده چند یال دارد؟

۱) ۱۱۲ ۲) ۵۶ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۲۱۶ طه، یاسین، سپهر، عرفان و آبتین در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد. اگر بدانیم طه در فهرست دوستان یاسین قرار دارد، چند حالت مختلف ممکن است وجود داشته باشد؟

۱) ۵۱۲ ۲) 2^{19} ۳) ۲۵۶ ۴) 2^{16}

۲۱۷ اگر به گراف G، ۶ یال اضافه کنیم، به گرافی کامل تبدیل می‌شود. اگر از گراف G، ۱۶ یال نیز کم کنیم، به گرافی ۶ ـ منتظم تبدیل می‌شود. اندازهٔ این گراف چند واحد از مرتبه‌اش، بزرگ‌تر است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۸ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

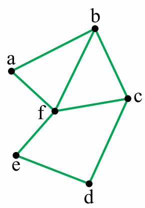
۲۱۸ در گراف k ـ منتظم مرتبهٔ ۱۱، رابطهٔ $k^2-9k+14\le 0$ برقرار است. بزرگ‌ترین اندازهٔ گراف کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۸ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

۲۱۹ درجات رئوس گراف G به صورت ۲,۲,۲,۲,۳,۳,۴,۵,۵ هستند، درجات رئوس گراف $\bar{G}$ به کدام صورت است؟

۱) ۳,۳,۴,۵,۵,۶,۶,۶,۶ ۲) ۲,۲,۳,۴,۴,۵,۵,۵,۵ ۳) ۰,۰,۱,۲,۲,۳,۳,۳,۳ ۴) ۲,۲,۳,۳,۳,۵,۵,۵,۵

۲۲۰ گراف مقابل، چند زیرگراف هم‌مرتبه با خود گراف دارد؟



۱) ۶۴ ۲) ۲۵۵ ۳) ۲۵۶ ۴) ۶۳

آزمون ۲۳

درس اول: گراف‌های خاص (کامل ـ منتظم ـ مکمل ـ زیرگراف) (۲)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

نوع آزمون: مبحثی | جامع

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😆

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۴

۲۲۱ چه تعداد از گراف‌های زیر وجود دارد؟

الف) ۷ـ منتظم اندازهٔ ۳۵ ب) ۶ـ منتظم اندازهٔ ۱۶ پ) ۷ـ منتظم مرتبهٔ ۱۳

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲۲ در گراف ۷ـ منتظم G رابطهٔ $|N_{\bar{G}}(a)|+|N_G[a]|=10$ برقرار است. گراف $\bar{G}$ را به چند صورت می‌توانیم رسم کنیم؟ (|A| برابر با تعداد عضوهای مجموعهٔ A است.)

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۲۲۳ در گرافی از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۴۲، حداکثر مقدار $\Delta^2-\delta^2$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۵ ۳) ۶۴ ۴) ۱۹

۲۲۴ چند گراف منتظم مرتبهٔ ۷ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۵ گرافی از مرتبهٔ ۱۱ با حذف ۳ یال منتظم می‌شود. با افزودن حداقل چند یال به این گراف، یک گراف منتظم تشکیل می‌شود؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۰

آزمون ۳۰

درس دوم: مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

نوع آزمون: مبحثی | جامع

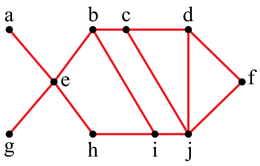
درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر۲۰ درصد	۲۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	🤩

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۳

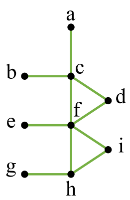
۲۹۱ کدام مجموعه یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف G است؟



۱) $\{a,g,b,c,f\}$ ۲) $\{a,g,i,c,f\}$

۳) $\{a,e,c,i,d\}$ ۴) $\{e,b,h,j,i\}$

۲۹۲ با حذف حداقل چند رأس از مجموعهٔ $\{a,b,d,f,g\}$، می‌توانیم آن را تبدیل به مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال کنیم؟



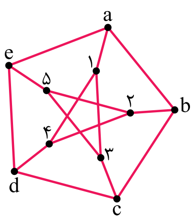
۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) نشدنی

۲۹۳ کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نیست؟



۱) $\{a,b,c,d,e\}$

۲) $\{۲,۳,۴,e\}$

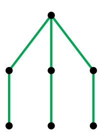
۳) $\{۱,۳,c,d,۴\}$

۴) $\{e,۱,۲,b\}$

۲۹۴ در گراف غیرتهی G با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$، بین همسایگی‌های باز رأس‌ها روابط $N_G(v_1)=N_G(v_2)=N_G(v_3)$ و $N_G(v_4)=N_G(v_5)=N_G(v_6)$ برقرار است، این گراف چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۹۵ گراف مقابل، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟



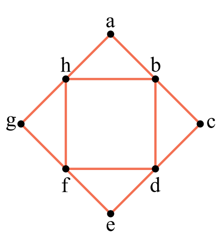
۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

۲۹۶ در گراف P_n، عدد احاطه‌گری برابر ۳ و حداکثر تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برابر ۵ است. در گراف C_n، حداکثر تعداد اعضای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳ یا ۴

۲۹۷ چه تعداد از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{b,d,f,g,h\}$، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف مقابل‌اند؟



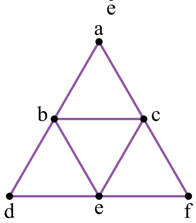
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۲۹۸ گراف مقابل، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد که مینیمم نیست؟



۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۲۹۹ کدام گراف، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمالی دارد که مینیمم نباشد؟

۱) K_P ۲) $\overline{K}_P$ ۳) C_4 ۴) C_6

۳۰۰ گراف G با درجه رأس‌های ۴,۴,۲,۲,۲,۲,۲ به طوری که رئوس درجهٔ ۲ با یکدیگر مجاور نباشند، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۳۳ معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ چند جواب صحیح نامنفی با شرط $x_i \geq i + 1$ دارد که $2 \leq i \leq 3$ باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۳۳۴ به چند طریق می‌توانیم ۸ جایزهٔ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کنیم، به طوری که به نفر دوم حتماً به تعداد طبیعی و زوجی جایزه رسیده و همهٔ جوایز نیز به یک نفر نرسد؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۳۳۵ معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ دارای n جواب صحیح نامنفی است. معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8$ چند جواب صحیح نامنفی دارد که $y_1 \geq \frac{n}{12}$ باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۸۴ ۳) ۳۵ ۴) ۱۰

۳۳۶ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۲ شاخه انتخاب کرد به طوری که از گل نوع چهارم انتخاب نکرده و از گل نوع سوم حداکثر یک شاخه انتخاب کنیم؟

۱) ۱۷۸ ۲) ۱۶۹ ۳) ۹۱ ۴) ۷۸

۳۳۷ سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن‌که مجموع اعداد روشده برابر ۸ باشد، چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۸ ۴) ۲۱

۳۳۸ نامعادلهٔ $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۹۴ ۲) ۹۱ ۳) ۹۲ ۴) ۸۱

۳۳۹ در بسط چندجمله‌ای $(a+b+c)^7$ چند جمله وجود دارد که شامل همهٔ متغیرهای a, b, c باشد؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۶ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۳۴۰ نامعادلهٔ $8 < x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 13$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرطی که $x_3 \geq 2$ و $x_4 > 1$ باشد؟

۱) ۴۲۵ ۲) ۳۹۰ ۳) ۵۲۶ ۴) ۶۱۰

نوع آزمون: مبحثی | جامع

آزمون ۳۵

درس اول: معادلهٔ سیالهٔ خطی با ضرایب واحد (۲)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۷۰ درصد	بالای ۷۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😃

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۳۴۱ به چند طریق می‌توانیم ۱۳ خودکار یکسان را بین نفر اول و دوم و سوم توزیع کنیم به طوری که به نفر i ام حداقل i خودکار برسد؟

۱) ۱۰ ۲) ۴۵ ۳) ۸۴ ۴) ۳۶

۳۴۲ چند کلمهٔ ۱۱حرفی با حروف a, b, c, d, e می‌توان نوشت که در آن همهٔ حروف به کار رفته باشد و حروف هر کلمه به ترتیب حروف الفبا مرتب شده باشند؟

۱) ۴۹۵ ۲) ۹۹۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۴۲۰

۳۴۳ ۳ مادر A و B و C و ۶ فرزند می‌خواهند در یک ردیف بایستند به طوری که B بین A و C بوده، بین A و B دقیقاً دو فرزند و بین B و C حداقل دو فرزند باشند. این کار به چند روش قابل انجام است؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۲۱۶۰ ۳) ۸۶۴۰ ۴) ۴۳۲۰

۳۴۴ معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ چند جواب صحیح نامنفی با شرایط $x_i \geq 3 \ (i = 1,2,3)$, $x_4 < 4$ دارد؟

۱) ۲۴۴ ۲) ۱۵۹ ۳) ۱۲۰ ۴) ۹۰

۳۴۵ معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به طوری که $x_4 \neq 4$ باشد؟

۱) ۶۴۰ ۲) ۶۴۵ ۳) ۶۵۹ ۴) ۷۱۵

۳۴۶ معادلهٔ $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 19$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) $\binom{12}{3}$ ۲) $\binom{11}{3}$ ۳) $\binom{13}{3}$ ۴) $\binom{11}{2}$

۳۴۷ به چند طریق می‌توانیم ۹ شاخه گل از بین گل‌های مریم، داوودی، رز و زنبق انتخاب کنیم به طوری که جمع تعداد گل‌های مریم و داوودی برابر ۴ باشد؟

۱) ۴۵　　۲) ۳۰　　۳) ۲۰　　۴) ۱۱

۳۴۸ نامعادلهٔ $x^2 + y + z \le 8$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۹۱　　۲) ۳۷　　۳) ۴۵　　۴) ۹۶

۳۴۹ گل‌فروشی تمام حالت‌های ممکن دسته‌گل‌های ۶شاخه‌ای از ۳ نوع گل را درست کرده است. به تصادف یکی از دسته‌گل‌ها را انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال از هیچ نوع گلی تک‌شاخه استفاده نشده است؟

۱) $\frac{2}{7}$　　۲) $\frac{19}{28}$　　۳) $\frac{9}{14}$　　۴) $\frac{13}{28}$

۳۵۰ نامعادلهٔ $(\sqrt{x_1 + x_2 + x_3})(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 36$ چند جواب طبیعی دارد به طوری که $x_1 + x_2 + x_3 \le 20$ باشد؟

۱) ۴۶۲۰　　۲) ۱۰۵۰۰　　۳) ۱۲۵۴۰　　۴) ۵۸۸۰

آزمون ۳۶

درس اول: مربع لاتین

نوع آزمون: مبحثی　جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۳۰ درصد	۳۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت				

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۳۵۱ سه مدرس ۱، ۲ و ۳ قرار است در سه روز شنبه، یکشنبه و دوشنبه در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. قرار است هر مدرس در هر روز دقیقاً یک بار در یکی از کلاس‌ها تدریس داشته باشد. اگر بدانیم مدرس ۱ در روز شنبه در کلاس B و مدرس ۳ در روز یکشنبه در کلاس A تدریس می‌کند، کدام مدرس در روز یکشنبه در کلاس C تدریس دارد؟

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) ۳　　۴) ۱ یا ۲ هر دو می‌توانند.

۳۵۲ در مربع لاتین مقابل $b + c$ کدام است؟

a			b
	$a+1$		
		$a+2$	
$2a$	c		$a+3$

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۳۵۳ مربع لاتین

۲			
		۳	
۳			۲

به چند صورت ممکن است تکمیل گردد تا با اعمال جایگشت روی آن، مربع لاتین چرخشی مرتبهٔ ۴ به دست آید؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) نشدنی

۳۵۴ چند مربع لاتین به صورت روبه‌رو وجود دارد؟

			a
		a	
	a		
a			

۱) ۲۴
۲) ۷۲
۳) ۹۶
۴) ۱۴۴

۳۵۵ اگر درایه‌های دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۴ را نظیر به نظیر در هم ضرب کنیم، چند عدد متفاوت پدید می‌آید؟

۱) ۷　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) ۱۰

۳۵۶ در مربع لاتین A از مرتبهٔ ۳، اول جای دو ستون را عوض می‌کنیم تا مربع B به دست آید. بعد جای دو سطر B را عوض می‌کنیم تا مربع C به دست آید. حالا روی C جایگشتی اعمال می‌کنیم تا مربع لاتین D به دست آید. A با چه تعداد از مربع‌های لاتین B و C و D لزوماً متعامد است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۳۵۷ اگر دو مربع لاتین متعامد مرتبهٔ ۴ را کنار هم قرار دهیم، مربع روبه‌رو حاصل می‌شود. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱۱	۲۲	۴۴	۳۳
۲۳	۱۴	۳۲	۴۱
a	۳۱		
		b	

۱) ۸۶
۲) ۶۳
۳) ۶۶
۴) نشدنی

۳۵۸ اگر دو مربع لاتین مقابل متعامد باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

A

۱	۲	۳
a		
		۲

B

۱	۳	۲
	b	

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) نشدنی

۳۵۹ چند مربع لاتین متعامد با مربع لاتین چرخشی از مرتبهٔ ۴ می‌توان نوشت؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) نشدنی

۳۶۰ به تصادف ۳ خانه از یک مربع لاتین مرتبهٔ ۴ را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی حاصل‌ضرب اعداد این سه خانه برابر ۱۲ می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۷۰}$ ۲) $\frac{۴}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۷۰}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴۰}$

آزمون ۳۷

درس اول: چالشی درس اول

نوع آزمون: مبحثی جامع

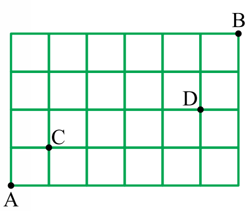
درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۲۰ درصد	۲۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹	😐	☺	😃

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۷

۳۶۱ برای این‌که از نقطهٔ A به نقطهٔ B برویم، فقط مجاز به دو حرکت → و ↑ هستیم. اگر به صورت تصادفی از A به B حرکت کنیم، با کدام احتمال دو بار پشت سر هم به بالا حرکت نکرده‌ایم؟



۱) $\frac{۲۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۴۴}{۹۱}$
۳) $\frac{۲۲}{۹۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۵}$

۳۶۲ ۳ معلم و ۱۰ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که بین هر دو معلم حداقل دو دانش‌آموز نشسته باشند؟

۱) $۱۲\times ۱۰!$ ۲) $۶\times ۱۰!$ ۳) $۱۵\times ۱۰!$ ۴) $۳۰\times ۱۰!$

۳۶۳ حاصل عبارت $\binom{n}{k}+\cdots+\binom{k+۱}{k}+\binom{k}{k}$ که در آن $۰\le k\le n$ برابر کدام می‌شود؟

۱) $n\binom{n+۱}{k+۱}$ ۲) $k\binom{n+۱}{k+۱}$ ۳) $\binom{n+۲}{k+۲}$ ۴) $\binom{n+۱}{k+۱}$

۳۶۴ چند عدد پنج‌رقمی مضرب ۵ با مجموع ارقام ۱۱ وجود دارد که در آن دو رقم دهگان و صدگان مساوی باشند؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۶۴

۳۶۵ در مربع لاتین روبه‌رو، x چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

	۱	x		
۴				۲
	۲			
۳		۲		
	۵		۲	

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۶۶ اگر حاصل عبارت $(۱+x+x^۲)^۷$ را به دست آوریم، ضریب $x^۵$ کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۴۸۷ ۳) ۴۸۰ ۴) ۲۶۶

۵۱۰ اگر A، B و C سه مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $((A-B)'-(B-C)')-C$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $A-(B\cup C)$ ۲) $B-(A\cup C)$ ۳) $B-C$ ۴) $(A'\cup B')-C$

آزمون ۵۲

درس دوم: ضرب دکارتی

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😀

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۴

۵۱۱ اگر $n(A)=۷$، $n((A\times B)\cap(B\times A))=۹$ و $n((B-A)\times(A\cup B))=۱۸$ باشد، مجموعهٔ $A\times A-A\times B$ چند عضو دارد؟

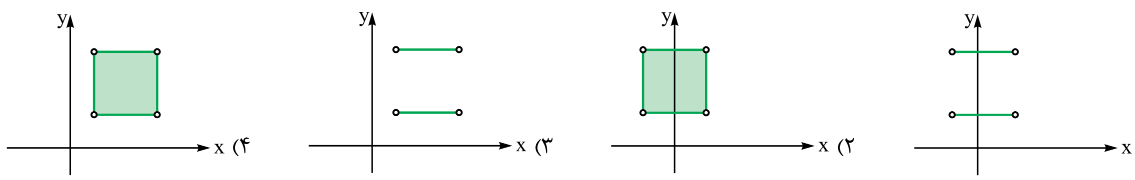
۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۵۱۲ A و B دو مجموعهٔ غیرتهی بوده و $(A\cap B')\cup(B\cap A')\cup(A'\cup B')'=B$ است. چه تعداد از مجموعه‌های زیر ممکن است تهی نباشند؟

الف) $A^۲-B^۲$ ب) $A\times B-B\times A$ پ) $A\times B-B^۲$ ت) $A^۲-A\times B$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۱۳ زوج مرتب‌های $(۱۵, x-y)$ و $(x^۲-y^۲, ۳)$ برابرند. نمودار ضرب دکارتی $\{x,y\}\times(y,x)$ به کدام صورت است؟



۵۱۴ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$، $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ و $A\times B=B\times A$ باشد، حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ $\{x,۲,z\}$ و $\{۴,x,z-۲\}$ حداقل چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۵۱۵ A و B دو مجموعهٔ ناتهی بوده و $A\times B=B\times A$ است. با حذف یک عضو از مجموعهٔ A مجموعهٔ C ایجاد می‌شود که $C\times B=B\times C$ است. مجموعهٔ $A\cup B\cup C$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۱۶ اگر $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A\cap B=\{۲,۵\}$ و $(A-B)\times(B-A)$ دارای ۴ عضو باشد، مجموعهٔ B چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۲ یا ۴ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۱۷ مجموعه‌جواب گزاره‌نمای $(|x+\frac{۱}{x}|>۲)$ را A و مجموعه‌جواب گزاره‌نمای $(\sin^۲ x+\cos^۲ x=\frac{۱}{۲} \Leftrightarrow x^۲-۱=۰)$ را B می‌نامیم. نمودار $A\times B$ به کدام صورت است؟

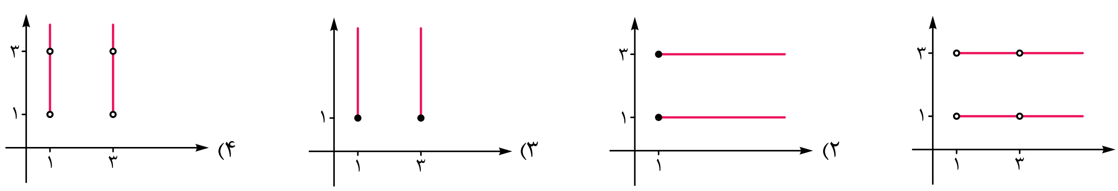
۱) صفحهٔ محورهای مختصات که دو خط عمودی و دو خط افقی از آن حذف شده است.

۲) صفحهٔ محورهای مختصات که سه خط عمودی و دو خط افقی از آن حذف شده است.

۳) دو خط افقی که هر کدام در ۳ نقطه توخالی هستند.

۴) صفحهٔ محورهای مختصات که سه خط افقی از آن حذف شده است.

۵۱۸ مجموعهٔ مرجع برابر $[۱,+\infty)$ است. اگر $A=\{۱,۳\}$، $A'\subseteq X$ و $A\subseteq X$، نمودار ضرب دکارتی $X\times A$ به کدام صورت است؟



۵۱۹ اگر $A=[۱,a]$، $B=(-۱,b]$ و مساحت نمودار $A\times A-B\times B$ برابر ۵ باشد، حاصل $a^۲+b^۲$ چگونه است؟ (a و b دو عدد طبیعی بوده و $b<a$)

۱) عدد زوج ۲) عدد اول ۳) مضرب ۳ ۴) مربع کامل

۶۰۳ خانوادهٔ A دو فرزند دارد. پسرعموی این دو بچه برای بازی به آن‌ها اضافه شده است. حین بازی‌کردن یکی از ۳ بچه را به تصادف می‌بینیم. احتمال آن‌که او پسر باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۶۰۴ تجربه نشان داده است که در یک روز بهاری، ساحل به احتمال ۰/۶ آفتابی و به احتمال ۰/۴ ابری است. اگر یک روز آفتابی باشد فردا به احتمال ۰/۷ آفتابی ولی اگر ابری باشد به احتمال ۰/۵ فردا نیز ابری است. اگر بدانیم فردا ابری است با کدام احتمال امروز نیز ابری بوده است؟

۱) ۰/۲ ۲) $\frac{۵}{۱۹}$ ۳) ۰/۴ ۴) $\frac{۱۰}{۱۹}$

۶۰۵ درون کیسهٔ A، ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و درون کیسهٔ B، ۲ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و درون کیسهٔ C، ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه قرار دارد. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب و مهره‌ای خارج می‌کنیم. اگر مهره سفید باشد، آن را در کیسهٔ دیگری که مهرهٔ سفید بیشتری دارد قرار داده و اگر مهره سیاه باشد آن را در کیسهٔ دیگری که مهرهٔ سیاه بیشتری دارد، قرار می‌دهیم. دوباره مهره‌ای از کیسه‌ای‌که تعداد مهره‌های بیشتری دارد خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۶۰۶ تیم ملی والیبال ایران ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. آن‌ها به تصادف یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر a زودتر از b وارد سالن شده باشد، احتمال آن‌که a به عنوان نفر هفتم وارد شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۳}$ ۲) $\frac{۶}{۹۱}$ ۳) $\frac{۱}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸۲}$

۶۰۷ سه تاس آبی و سبز و قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع دو تاس آبی و سبز حداقل برابر ۷ است، با کدام احتمال مجموع سه تاس برابر ۱۰ می‌شود؟

۱) $\frac{۸}{۶۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۴۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۶۰۸ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. تعداد واجدین شرایط شهر A، n برابر تعداد واجدین شرایط شهر B است. اگر فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، با احتمال $\frac{۵}{۹}$ از شهر A خواهد بود. n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۰۹ تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول n برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. در یک بار پرتاب این تاس اگر بدانیم عددی فرد رو شده، به احتمال $\frac{۱}{۵}$ عددی غیر اول ظاهر شده است. P(۳) کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۶۱۰ در یک کلاس ۱۱نفری قد هیچ دو دانش‌آموزی با هم برابر نیست. اگر بدانیم قد a بین قد b و c است و قد d از قد a بلندتر است، با کدام احتمال، a نفر پنجم از نظر قدی است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۶}{۵۵}$ ۳) $\frac{۷}{۵۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵۵}$

نوع آزمون: مبحثی جامع

آزمون ۶۲

درس سوم: چالشی درس سوم (۲)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😀

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۶۱۱ در یک مسابقهٔ دو، افراد a، b، c، d، e و f شرکت کرده‌اند. احتمال برد a، ۰/۱ از هر کدام از شرکت‌کننده‌های دیگر بیشتر است. احتمال آن‌که a یا b برنده شود به شرط آن‌که بدانیم d و c برنده نشده‌اند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۶۱۲ در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز وجود دارد. هر بار به تصادف یک مهره خارج و بدون جای‌گذاری رنگ آن را مشاهده می‌کنیم. اگر مهرهٔ قرمز مشاهده شود ۴ مهرهٔ آبی به ظرف اضافه و اگر مهرهٔ آبی مشاهده شود، ۶ مهرهٔ قرمز به ظرف اضافه می‌کنیم. احتمال آن‌که مهرهٔ اول آبی و مهرهٔ دوم قرمز باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۸}{۲۵}$ ۳) $\frac{۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۱۹۵}$

۶۱۳ احتمال آن‌که امیر به ورزشگاه برود برابر ۰/۳ و احتمال آن‌که بهروز به ورزشگاه نرود ۰/۳ است. احتمال آن‌که حداقل یکی از آن‌ها به ورزشگاه برود برابر ۰/۹ است. احتمال آن‌که امیر به ورزشگاه برود به شرط آن‌که بدانیم بهروز به ورزشگاه نرفته چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۶۱۴ ظرف A شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه و ظرف B شامل ۲ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است. یک مهره به تصادف از A درون B و سپس مهره‌ای به تصادف از B درون A قرار می‌دهیم. مهره‌ای از ظرف A خارج کرده و مشاهده می‌کنیم که سفید است. احتمال آن‌که مهره‌ای که از A درون B و بالعکس قرار داده باشیم هر دو سیاه باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۰۹}{۱۸۱}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۰۸}{۱۸۱}$ ۴) $\frac{۹}{۳۵}$

۶۱۵ بین ۱۰ نفر اعضای یک تیم والیبال با قدهای متفاوت، رضا و علی از محسن بلندتر هستند. احتمال آن‌که رضا بلندترین عضو تیم باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۳}{۲۰}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۶۱۶ ۱۰ نفر به چهار کاندیدای A,B,C,D رأی داده‌اند. اگر بدانیم رأی کاندید A حداقل ۳ رأی بوده با کدام احتمال او ۴ رأی آورده است؟ (هر فرد دقیقاً به یک کاندید رأی می‌دهد.)

۱) $\frac{۷}{۳۰}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۶۱۷ در یک خانوادهٔ ۶فرزندی، تعداد پسرها و دخترها برابر نیست. احتمال آن‌که جنسیت فرزند اول و آخر یکسان باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ ۳) $\frac{۶}{۲۲}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

۶۱۸ یک شرکت بیمه، بیمه‌گذاران خود را به دو گروه پرخطر که با احتمال ۰/۵ در سال تصادف می‌کنند و گروه کم‌خطر که در سال با احتمال ۰/۲ تصادف می‌کنند تقسیم کرده است. می‌دانیم ۳۰ درصد بیمه‌گذاران پرخطرند. احتمال آن‌که فرد A جزء گروه پرخطر باشد، قبل و بعد از این‌که بدانیم تصادف کرده، تقریباً چه‌قدر با هم اختلاف دارد؟

۱) ۱۰ درصد ۲) ۲۰ درصد ۳) ۳۰ درصد ۴) ۴۰ درصد

۶۱۹ جعبهٔ A شامل مهره‌هایی با شماره‌های ۱,۲,۳,...,۴۰۰ و جعبهٔ B شامل ۶ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ آبی و جعبهٔ C شامل مهره‌های آبی است. دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع شماره‌ها عددی اول باشد، یک مهره از A و در غیر این صورت با انتخاب تصادفی B یا C یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهرهٔ خارج‌شده نه مضرب ۳ و نه مضرب ۴ بوده یا آبی است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۲) $\frac{۲۸}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۷}{۶۰}$ ۴) $\frac{۳۹}{۱۲۰}$

۶۲۰ دو ظرف داریم که در ظرف اول ۲ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سفید داریم. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد تاس مضرب ۳ باشد یک مهره از ظرف اول و اگر مضرب ۳ نباشد، از ظرف دوم یک مهره حذف می‌کنیم. حالا مهره‌های باقی‌ماندهٔ دو ظرف را در یک ظرف می‌ریزیم و از این ظرف یک مهره برمی‌داریم. با چه احتمالی این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۷}$

آزمون ۶۳

نوع آزمون: مبحثی | جامع

درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😃

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۶۲۱ برای دو پیشامد مستقل A و B داریم $P(A-B\mid A)=۰/۳$ حاصل $P(B\mid A')$ کدام است؟

۱) ۰/۰۹ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۲۱

۶۲۲ در پرتاب دو تاس پیشامد «تاس اول ۳ بیاید.» با کدام پیشامد مستقل است؟

۱) مجموع دو تاس ۷ باشد. ۲) مجموع دو تاس ۱۰ باشد. ۳) مجموع دو تاس ۶ باشد. ۴) مجموع دو تاس ۳ باشد.

۶۲۳ A و B دو پیشامد ناتهی مستقل‌اند که $P(A\mid B)=۰/۵$ است. اگر $P(A\cap B)=۰/۱$ باشد، $P(A\cup B')$ کدام می‌شود؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

۷۰۴ واریانس داده‌های a,b,c,d برابر ۹ و میانگین آن‌ها برابر ۴ است. اگر ضریب تغییرات داده‌های $\frac{a}{k}+1,\frac{b}{k}+1,\frac{c}{k}+1,\frac{d}{k}+1$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، k کدام است؟ $(k>0)$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۷۰۵ ضریب تغییرات داده‌های آماری برابر ۰/۸ است. اگر به همهٔ داده‌ها ۵ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات برابر ۰/۷۵ می‌شود. واریانس داده‌ها کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۲/۸ ۴) ۷/۸۴

۷۰۶ مربع‌هایی با میانگین اضلاع ۲ در اختیار داریم. طول ضلع هر کدام را یک واحد اضافه کرده و سپس دو برابر می‌کنیم. ضریب تغییرات محیط مربع‌ها چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییری نمی‌کند. ۲) $\frac{4}{3}$ برابر می‌شود. ۳) $\frac{3}{2}$ برابر می‌شود. ۴) $\frac{2}{3}$ برابر می‌شود.

۷۰۷ ۱۱ دادهٔ آماری با میانگین ۱۵ و انحراف معیار ۳ داریم، دادهٔ ۱۴ را اضافه و داده‌های ۱۲ و ۱۷ را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های جدید چه‌قدر است؟

۱) ۸/۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱/۱ ۴) ۱۲/۴

۷۰۸ اگر میانگین و واریانس داده‌های $2x_1+1, 2x_2+1, \dots, 2x_n+1$ به ترتیب برابر ۴ و ۹ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $x_1-1, x_2-1, \dots, x_n-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۳ ۴) ۴/۵

۷۰۹ میانگین ۱۲ عدد برابر ۱۶ است. با اضافه‌شدن اعداد ۱۳،۱۵،۱۷،۱۹ ضریب تغییرات کل داده‌ها برابر $\frac{1}{8}$ می‌شود. واریانس ۱۲ دادهٔ اولیه کدام است؟

۱) $\frac{11}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{11}{4}$ ۴) ۱/۲۵

۷۱۰ اگر میانگین و واریانس داده‌های x_i به ترتیب برابر ۱/۲ و ۰/۲۵ باشد. میانگین داده‌های $y_i=x_i^2+2x_i$ کدام است؟

۱) ۴/۰۹ ۲) ۲/۸۹ ۳) ۱/۶۹ ۴) ۴/۸۴

نوع آزمون: مبحثی جامع

آزمون ۷۲

درس اول و دوم: چالشی فصل سوم آمار و احتمال

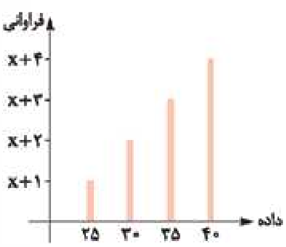
درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت				

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۶

۷۱۱ در نمودار میله‌ای مقابل اختلاف دو زاویهٔ نمودار دایره‌ای متناظر با بلندترین و کوتاه‌ترین میله برابر 60° است. میانگین داده‌ها تقریباً کدام است؟



۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

۷۱۲ انحراف معیار ۱۲ دادهٔ آماری برابر ۲ است. اگر ۴ دادهٔ جدید که انحراف آن‌ها از میانگین داده‌های اولیه برابر $-5,-1,3,3$ است را به داده‌ها اضافه کنیم، واریانس کل داده‌ها کدام است؟

۱) ۲/۳۹ ۲) ۷/۶۶ ۳) ۲/۷۶ ۴) ۵/۷۵

۷۱۳ واریانس ۱۷ دادهٔ $\cos 10^\circ$، $\cos 20^\circ$، $\cos 30^\circ$ و ... و $\cos 170^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{8}{17}$ ۳) $\frac{9}{17}$ ۴) $\frac{7}{17}$

۷۱۴ دسته‌های ۴تایی از اعداد اول را در نظر بگیرید. حداقل مقدار واریانس اعضای این دسته‌ها کدام است؟

۱) $\frac{35}{4}$ ۲) $\frac{101}{2}$ ۳) $\frac{87}{4}$ ۴) $\frac{59}{16}$

۷۱۵ جدول فراوانی داده‌های زیر مفروض است. اگر مقدار میانه برابر ۱۷ باشد، $a-b$ چه مقادیری ممکن است داشته باشد؟ (داده‌ها لزوماً به صورت صعودی مرتب نشده‌اند.)

داده	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۱	۱	۵	b

۱) ۸ یا ۱۴ ۲) ۹ یا ۱۳ ۳) فقط ۱۴ ۴) فقط ۹

۷۴۷ با انتخاب نمونه‌ای به اندازهٔ ۱۴۴، از جامعه‌ای با انحراف معیار ۲/۴، ۹۵٪ اطمینان داریم که حداکثر میانگین جامعه، برابر ۹/۴ است. مجموع عضوهای نمونه چه‌قدر است؟

۱) ۱۲۶۷/۲ ۲) ۱۲۹۶ ۳) ۱۳۲۴/۸ ۴) ۱۴۴۰

۷۴۸ در یک جامعه، انحراف معیار برآورد میانگین با نمونه‌های ۱۰۰تایی برابر ۰/۶ است. میانگین یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰عضوی برابر ۳۰ شده است. میانگین این جامعه با اطمینان ۹۵٪ چند عدد صحیح ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۴۹ طول بازهٔ اطمینان ۹۵٪ برآورد میانگین در جامعه‌ای با انحراف معیار ۱/۲۵ توسط یک نمونه‌گیری برابر k درصد شده است. اگر تعداد نمونه‌ها را به ۱۰۰۰۰تا برسانیم، طول بازهٔ اطمینان نصف می‌شود. k کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲/۵

۷۵۰ انحراف معیار جامعه‌ای σ است. یک نمونه به اندازهٔ $۱۶\sigma^2$ و نمونه‌ای دیگر به اندازهٔ $k^2\sigma^2$ انتخاب می‌کنیم به طوری که حداکثر خطا برای نمونهٔ اول نصف حداکثر خطا برای نمونهٔ دوم است. اگر نمونه‌ای به اندازهٔ $۹k^2\sigma^2$ انتخاب کنیم، حداکثر خطا کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۳}$

آزمون ۷۶

جامع فصل (۱)

نوع آزمون: مبحثی جامع

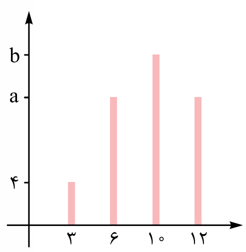
درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت	☹	😐	🙂	😃

۷۵۱ در نمودار میله‌ای مقابل، فراوانی نسبی دادهٔ ۱۰ برابر $\frac{۱}{۳}$ و مجموع زوایای داده‌های ۳،۶،۱۰ در نمودار دایره‌ای برابر با ۲۶۴° است. اگر تعدادی داده طوری حذف کنیم که بلندترین میله هم‌ارتفاع دو میلهٔ کناری شود، میانگین داده‌های جدید کدام است؟



۱) $\frac{۵۹}{۷}$ ۲) $\frac{۱۱۶}{۱۵}$ ۳) $\frac{۵۵}{۷}$ ۴) $\frac{۲۳}{۳}$

۷۵۲ در داده‌های ۱۱۰،۶۰،۸۰،۷۰،۷۰،۷۰،۸۰،۶۰،۱۱۰،a ضریب تغییرات مقادیر میانگین، مد و میانه برابر صفر است. a کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) نشدنی

۷۵۳ مجموعهٔ A با حداقل دو عضو طبیعی به گونه‌ای است که شامل اعداد متوالی با مجموع ۱۰۰ است. نسبت واریانس اعداد عضو A در دو حالت مطلوب کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۸}{۲۱}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۷۵۴ داده‌های ۰،۳،۱،۵،۷،۲ را در نظر بگیرید. اضافه‌کردن کدام‌یک از اعداد به این داده‌ها میانه را بیشتر تغییر می‌دهد؟

۱) اعداد b،a،۵ با انحراف معیار صفر ۲) اعداد a،۷،۳ با تنها مد ۳

۳) اعداد a،b،c،d با میانهٔ ۴ ۴) چارک سوم داده‌ها

۷۵۵ تعدادی داده در اختیار داریم. اگر انحراف معیار داده‌ها را به تمام داده‌ها اضافه کنیم ضریب تغییرات داده‌های جدید ۰/۲۵ ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷۵

۷۵۶ میانگین طول عمر لاستیک‌های تولیدی سه کارخانهٔ A، B، C به ترتیب برابر با ۸۰ و ۶۰ و ۹۸ برحسب هزار کیلومتر و واریانس آن‌ها به ترتیب برابر با ۲/۲۵، ۰/۸۱ و ۴ است. کدام ترتیب برای کیفیت لاستیک‌های تولیدی مناسب است؟

۱) $C < B < A$ ۲) $C < A < B$ ۳) $B < A < C$ ۴) $A < B < C$

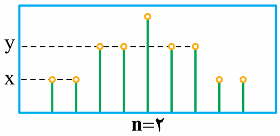
۷۵۷ ۱۵ تیم حاضر در لیگ هر کدام ۲۰ بازیکن دارند. می‌خواهیم از بین کل بازیکنان، نمونه‌ای ۶۰نفره برای تست دوپینگ طوری انتخاب کنیم که از هر تیم به تعداد مساوی بازیکن انتخاب شود. نوع نمونه‌گیری و احتمال انتخاب هر بازیکن کدام است؟

۱) طبقه‌ای ـ ۰/۲ ۲) سیستماتیک ـ ۰/۲۵ ۳) طبقه‌ای ـ ۰/۲۵ ۴) سیستماتیک ـ ۰/۲

۷۵۸ برای این‌که انحراف معیار برآورد میانگین حداکثر برابر با ۵ درصد انحراف معیار جامعه باشد، حداقل اندازهٔ نمونه کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۷۵۹ جدول احتمال برحسب میانگین با نمونه‌های دوعضوی داده‌های ۴,۱,۰,۳,۵,۲ به صورت زیر است. حاصل $x+y$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲

۷۶۰ برآورد میانگین با اطمینان ۹۵٪ توسط نمونه‌ای ۱۰۰ عضوی به صورت [۴/۴ , ۵/۴ , ۶/۴] برآورد شده است. اگر انحراف معیار جامعه و نمونه برابر باشد، ضریب تغییرات نمونه چه‌قدر بوده است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۱/۲ ۳) ۱۲ ۴) ۶

نوع آزمون: مبحثی جامع

آزمون ۷۷
جامع فصل (۲)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

سنجش فردی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت				

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۷

۷۶۱ در یک جامعه درآمد افراد برحسب میلیون تومان به صورت مقابل است: ۳/۲,۷/۵,۱۱,۱۲/۵,۱۴,۶/۳,۷/۱,a

اگر خط فقر برابر ۵/۵ باشد میانهٔ داده‌ها چه‌قدر است؟

۱) ۷/۳ ۲) ۱۰/۲ ۳) ۱۱/۷۵ ۴) ۹/۲۵

۷۶۲ در داده‌های ۲۶,۲۵,۲۷,۳۰,۳۲,۳۴,۳۰,۱۹,۱۸ واریانس مقادیر $IQR, Q_۳, Q_۲, Q_۱, R$ کدام است؟

۱) ۶۲ ۲) ۶۲/۲ ۳) ۶۱ ۴) ۶۱/۲

۷۶۳ زاویهٔ دادهٔ ۶ در نمودار دایره‌ای جدول زیر برابر ۱۰۸° است. میانگین داده‌های x_i کدام است؟

$۲x_i - ۵$	۱۰	۶	۴	۱
فراوانی نسبی	۰/۱	b	a	۰/۱۵

۱) ۴/۸۷۵ ۲) ۴/۷۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۲۵

۷۶۴ انحراف معیار داده‌های $a,b,c,d,۶$ کم‌ترین مقدار خود را دارد و با اضافه‌کردن آن‌ها به داده‌های طبیعی $۷,۱۱,x,۳,y$ میانگین تغییری نمی‌کند. کم‌ترین مقدار واریانس کل داده‌ها با هم کدام است؟

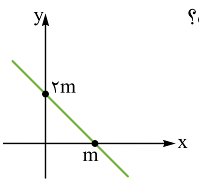
۱) ۴/۴ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۴/۴}$

۷۶۵ اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعضای هر دسته، برابر کوچک‌ترین عضو آن دسته باشد، یعنی: $\{۱\},\{۲,۳\},\{۴,۵,۶,۷\},\ldots$

چارک سوم دستهٔ دهم کدام است؟

۱) ۸۹۵/۵ ۲) ۸۹۶/۵ ۳) ۸۹۷/۵ ۴) ۸۹۸/۵

۷۶۶ نقاط (x_i, y_i) که $x_i = ۱,۲,۳,\ldots,m$ را روی خط مقابل در نظر بگیرید. اگر $CV_y = ۲CV_x$ باشد، m کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۶۷ در نمودار جعبه‌ای ۳۲ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه ۲۰ و ۲۴ می‌باشد. اگر میانگین کل داده‌ها ۲۵ باشد، میانگین داده‌های داخل جعبه چه‌قدر است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

۷۶۸ می‌خواهیم از بین ۷۲۰ نفر نمونه‌ای به اندازهٔ n به روش سامانمند انتخاب کنیم. اگر مجموع شماره‌های انتخاب‌شده برابر ۱۴۱۶۰ و از گروه اول شمارهٔ ۳ انتخاب شده باشد کدام گزینه در مورد n درست است؟

۱) مضرب ۳ ۲) عددی اول ۳) مربع کامل ۴) مضرب ۴

۷۶۹ در جامعهٔ $\{۱,۲,۴,۶,۷\}$ احتمال این‌که یک نمونهٔ ۳عضوی مقدار میانگین را حداکثر با $\frac{۱}{۳}$ خطا برآورد کند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۷۷۰ شاخص پوسیدگی دندان، براساس نمونه‌ای به اندازهٔ ۴۰۰، برابر ۶ $(\bar{x} = ۲)$ شده است. اگر انحراف معیار دندان‌های کشیده، پوسیده و پرشده به ترتیب برابر ۲/۱، ۲ و ۱/۴ باشد، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین دندان‌های پرشده کدام است؟

۱) [۱/۹۴ , ۲/۰۶] ۲) [۱/۸۶ , ۲/۱۴] ۳) [۱/۸۸ , ۲/۱۲] ۴) [۵/۸۸ , ۶/۱۲]

آزمون ۱

۱ | **۲**

نکته

مثال نقض مثالی است که درستی یک حکم کلی را نقض می‌کند.

دقت کنید مثال نقض باید در فرض‌های سؤال صدق کند.

$n=1$ تا $n=5$ را امتحان می‌کنیم، اگر به ازای عددی 2^n+1 غیراول باشد، حکم نقض می‌شود:

$n=1 \Rightarrow 2^1+1=3$

$n=2 \Rightarrow 2^2+1=5$

$n=3 \Rightarrow 2^3+1=9$ غیراول $\Rightarrow$ مثال نقض

$n=4 \Rightarrow 2^4+1=17$

$n=5 \Rightarrow 2^5+1=33$ غیراول $\Rightarrow$ مثال نقض

فقط به ازای $n=3,5$ حکم نادرست می‌شود؛ پس در بین اعداد طبیعی کم‌تر از ۶، دو مثال نقض، داریم.

---

۲ | **۳**

نکته

۱ اگر به حاصل‌ضرب دو عدد متوالی زوج (یا فرد)، یک واحد اضافه کنیم، حاصل مربع کامل می‌شود:

$$\underbrace{k(k+2)}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد متوالی زوج یا فرد}}+1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

۲ اگر k به صورت حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد، $4k+1$ مربع کامل است:

$$k=\underbrace{t(t+1)}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد متوالی}} \Rightarrow 4k+1=4t(t+1)+1=4t^2+4t+1$$

$$=(2t+1)^2$$

۳ اگر به حاصل‌ضرب ۴ عدد متوالی یک واحد اضافه کنیم، حاصل مربع کامل است:

$$\underbrace{k(k+1)(k+2)(k+3)}_{\text{حاصل‌ضرب ۴ عدد متوالی}}+1=\underbrace{k(k+3)}\underbrace{(k+1)(k+2)}+1$$

$$=(k^2+3k)(k^2+3k+2)+1$$

فرض کنید $k^2+3k=A$، پس:

$$=A(A+2)+1=A^2+2A+1=(A+1)^2$$

هر مورد را بررسی می‌کنیم:

الف فرض کنید $k=1401$، پس:

طبق (۱) مربع کامل است. $\underbrace{1401}_{k}\times\underbrace{1403}_{k+2}+1=k(k+2)+1 \Rightarrow$

ب دوباره فرض کنید $k=1401$، پس:

طبق (۲) مربع کامل است. $4\times\underbrace{1401}_{k}\times\underbrace{1402}_{k+1}+1=4k(k+1)+1 \Rightarrow$

پ در آخر با فرض $k=1400$، داریم:

$$\underbrace{1400}_{k}\times\underbrace{1401}_{k+1}\times\underbrace{1402}_{k+2}\times\underbrace{1403}_{k+3}+1=k(k+1)(k+2)(k+3)+1$$

پس طبق (۳) مربع کامل است. بنابراین هر سه عدد، مربع کامل‌اند.

---

۳ | **۳**

n یکی از اعداد ۱ تا ۶ می‌تواند باشد؛ پس کافی است یکی‌یکی آن‌ها را امتحان کنیم تا ببینیم به ازای کدام اعداد، حاصل $A=\dfrac{(n+1)^2-1}{4}$ زوج می‌شود.

$n=1 \Rightarrow A=\dfrac{3}{4}$ ✗ $n=2 \Rightarrow A=2$ ✓

$n=3 \Rightarrow A=\dfrac{15}{4}$ ✗ $n=4 \Rightarrow A=6$ ✓

$n=5 \Rightarrow A=\dfrac{35}{4}$ ✗ $n=6 \Rightarrow A=12$ ✓

پس مجموعهٔ A با حداکثر تعداد عضوها به صورت $\{2,4,6\}$ است، بنا بر A حداکثر ۳ عضو دارد.

توجه برای پیداکردن مجموعهٔ A از روش اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها استفاده کردیم.

---

۴ | **۴**

نکته

حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی، همواره بر !۳ (یا ۶) بخش‌پذیر است. در حالت کلی، ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

الف n^3-n را تجزیه می‌کنیم:

$$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)(n)(n+1)$$

$\Rightarrow$ حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی $\Rightarrow$ مضرب ۶

ب

$$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$$

$$=\underbrace{(n-1)(n)(n+1)}_{\text{ضرب سه عدد متوالی}=6q}(n^2+1)=6q'$$

پ n^3+5n هم همواره بر ۶ بخش‌پذیر است، چون اگر n را اضافه و کم کنیم داریم:

$$n^3+5n=n^3-n+n+5n=\underbrace{(n^3-n)}_{\text{طبق الف}=6q}+6n=6q'$$

بنابراین هر سه عبارت همواره مضرب ۶ هستند.

---

۵ | **۱**

نکته

در مورد حالت‌های مختلف جمع، تفریق و ضرب اعداد گویا و گنگ داریم:

عملیات / نوع اعداد	جمع و تفریق (نوع اثبات)	ضرب (نوع اثبات)
دو عدد گویا	گویا (مستقیم)	گویا (مستقیم)
یکی گویا و یکی گنگ	گنگ (برهان خلف)	ضرب گویای ناصفر در گنگ = گنگ (برهان خلف)
هر دو گنگ	ممکن است گویا یا گنگ باشد.	ممکن است گویا یا گنگ باشد.

سعی می‌کنیم اعداد داده‌شده را به صورت جمع و تفریق یا ضرب اعداد گویا و گنگ نوشته و از نکتهٔ بالا استفاده کنیم:

(جمع گویا و گنگ، گنگ است.) $\alpha+\beta=\underbrace{\alpha-\beta}_{\text{گویا}}+\underbrace{2\beta}_{\text{گنگ}}=$ گنگ

$$\alpha^۲-\beta^۲ = \underbrace{(\alpha-\beta)}_{\text{گویای غیر صفر}}\ \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گنگ}} = \text{گنگ}$$

$$۲\alpha+\beta = \underbrace{-(\alpha-\beta)}_{\text{گویا}} + \underbrace{۳\alpha}_{\text{گنگ}} = \text{گنگ}$$

پس هر سه‌تا گنگ هستند.

۶ | ۱ برای اثبات گزارهٔ $ab=۰ \Rightarrow a=۰ \vee b=۰$ از اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها استفاده می‌کنیم. یک بار فرض می‌کنیم $a=۰$ باشد (که در این صورت حکم درست است.) بار دیگر $a\neq ۰$ می‌گیریم که در این صورت با ضرب دو طرف در $\frac{۱}{a}$ نتیجه می‌شود $b=۰$ است.

$$ab=۰ \xrightarrow[\times(\frac{۱}{a})]{a\neq ۰} \frac{۱}{a}\times a\times b=۰ \Rightarrow b=۰$$

در اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها داریم از هم‌ارزی ۱ استفاده می‌کنیم. در واقع فرض را به دو قسمت (یا چند قسمت) مثل p و q تقسیم می‌کنیم و به جای این‌که نشان بدهیم از p یا q $(p\vee q)$ به r می‌رسیم، نشان می‌دهیم هم از p به r می‌رسیم $(p\Rightarrow r)$ و $(\wedge)$ هم از q به r $(q\Rightarrow r)$ می‌رسیم.

نکته

در حالت کلی، در اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کنیم:

$$(p_۱\vee p_۲\vee p_۳\vee\cdots\vee p_n)\Rightarrow r$$
$$\equiv (p_۱\Rightarrow r)\wedge(p_۲\Rightarrow r)\wedge\cdots\wedge(p_n\Rightarrow r)$$

۷ | ۴

نکته

تمرین مهمی در کتاب درسی وجود دارد که می‌گوید: «اگر $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ سه عدد صحیح و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ همان اعداد ولی با ترتیب متفاوتی باشند، آن‌گاه $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است»، اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ زوج نباشد؛ پس فرد است. از طرفی می‌دانیم حاصل‌ضرب چند عدد، فقط وقتی فرد می‌شود که تک‌تک آن اعداد فرد باشند، پس $(a_۱-b_۱)$، $(a_۲-b_۲)$ و $(a_۳-b_۳)$ فرد هستند. جمع سه عدد فرد، فرد است ولی جمع این ۳ عدد صفر می‌شود چون:

$$(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳)$$
$$=(a_۱+a_۲+a_۳)-\overbrace{(b_۱+b_۲+b_۳)}^{(a_۱+a_۲+a_۳\ \text{همون})}=۰\ (\text{تناقض})$$

طبق نکتهٔ بالا، عبارت ۱ همواره زوج است. عبارت ۲ هم همواره زوج است، چون بالاخره $b_۱$ با یکی از $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ برابر است، پس $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۱)(a_۳-b_۱)=۰$ می‌شود.

عبارت ۳ هم مشابه استدلال گفته‌شده در نکته همواره زوج است:

$$a_۱-b_۲+a_۲-b_۱+a_۳-b_۳$$
$$=a_۱+a_۲+a_۳-\overbrace{(b_۱+b_۲+b_۳)}^{a_۱+a_۲+a_۳\ \text{همون}}=۰$$

اما عبارت ۴ همواره زوج نیست، به عنوان مثال نقض فرض کنید $a_۱=۱$، $a_۲=۲$ و $a_۳=۳$، $b_۱=۲$، $b_۲=۱$ و $b_۳=۳$؛ پس:

$$(a_۱-b_۱)(a_۲-a_۳)(a_۲-b_۳)=(۱-۲)(۲-۳)(۲-۳)=-۱$$

که عددی فرد است.

نکته

در مورد این تمرین خوب است نکات زیر را به یاد داشته باشید:

۱ این قضیه برای اعداد $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ و $b_۱,b_۲,\ldots,b_n$ که b_i ها همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند، نیز برقرار است، به شرطی که n (تعداد اعداد) فرد باشد.

۲ اگر b_i در پرانتزها را جابه‌جا کنیم، باز هم قضیه برقرار است؛ مثلاً عدد $(a_۱-b_۲)(a_۲-b_۳)(a_۳-b_۱)$ نیز زوج است.

۳ $a_۱+a_۲+\cdots+a_n=b_۱+b_۲+\cdots+b_n$ (چون فقط ترتیب اعداد فرق دارد؛ پس مجموع اعداد یکسان می‌شود). تناقض حاصل در روش برهان خلف نیز از همین‌جا می‌آید.

۴ تساوی زیر همواره درست است:

$$a_۱a_۲\cdots a_n=b_۱b_۲\cdots b_n$$

۸ | ۳ از رابطهٔ داده‌شده و با استفاده از روابط دوطرفه داریم:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۴}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{۴}{a+b}$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^۲=۴ab \Leftrightarrow a^۲+b^۲+۲ab=۴ab$$
$$\Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲ab=۰ \Leftrightarrow (a-b)^۲=۰ \Leftrightarrow a-b=۰$$
$$\Leftrightarrow a=b$$

پس a هر عدد دورقمی که باشد، b هم باید برابر همان عدد باشد؛ بنابراین a می‌تواند برابر همهٔ اعداد $۱۰,۱۱,\ldots,۹۹$ (یعنی ۹۰ عدد) باشد.

۹ | ۲ طبق روش اثبات بازگشتی سعی می‌کنیم رابطهٔ داده‌شده را با اعمال دوطرفه به یک رابطهٔ همواره درست برسانیم. دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم تا بتوانیم به اتحادهای مربع دوجمله‌ای برسیم:

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$$
$$\xleftrightarrow{\times ۲} ۲x^۲+۲y^۲+۲\geq ۲xy+۲x+۲y$$
$$\Leftrightarrow x^۲+۱-۲x+y^۲+۱-۲y+x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲+(x-y)^۲\geq ۰$$

مجموع چند عبارت که همگی توان دوم دارند نامنفی است؛ پس رابطهٔ آخر همواره درست است.

۱۰ | ۳

نکته

اتحاد پاسکال:
$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r+۱}=\binom{k+۱}{r+۱}$$

با توجه به نکته، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\underbrace{\binom{n-۲}{۱}+\binom{n-۲}{۲}}_{\binom{n-۱}{۲}}+\binom{n-۱}{۳}=\binom{n}{۳}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

توجه مرحلهٔ (*) دوشرطی است، چون اگر x و y دو عدد مثبت باشند، ترکیب دوشرطی $x \le y \Leftrightarrow x^۲ \le y^۲$ درست است.

۲۰ **۴** عبارت داده‌شده را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=(\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$$

توان دوم یک عدد، وقتی زوج است که خود عدد زوج باشد؛ پس $\frac{n(n+۱)}{۲}$ باید زوج باشد، پس:

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=۲k \Rightarrow n(n+۱)=۴k$$

$n+۱$ و n، دو عدد متوالی‌اند، پس یکی فرد و دیگری زوج است؛ بنابراین ضرب آن‌ها وقتی مضرب هم می‌شود که یا n مضرب ۴ باشد یا $n+۱$.

$$n=۴k \text{ یا } n+۱=۴k \Rightarrow n=۴k \text{ یا } n=۴k-۱$$

پس n باید به صورت $۴k$ یا $۴k-۱$ باشد. حالا چون n فرد است؛ پس n باید به صورت $۴k-۱$ باشد. از طرفی n دورقمی است؛ پس:

$$۱۰ \le n \le ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \le ۴k-۱ \le ۹۹$$
$$\Rightarrow k=۳,۴,۵,\dots,۲۵ \Rightarrow ۲۵-۳+۱=۲۳$$

پس ۲۳تا عدد دورقمی داریم.

نکته خوب است نکتهٔ زیر که در تمرین کتاب درسی آمده است را به یاد داشته باشید:

$$\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴} \text{ زوج } \Leftrightarrow n=۴k \text{ یا } n=۴k-۱$$

آزمون ۳

۲۱ **۲**

نکته ویژگی‌های عادکردن در یک نگاه اگر $a|b$، آن‌گاه a مقسوم‌علیه b و b مضرب a است.

	نماد ریاضی	توضیح
۱	$a\|b \xleftrightarrow{m\neq ۰} ma\|mb$	می‌توانیم دو طرف را در عدد صحیح m ضرب کنیم.
۲	$a\|b \Rightarrow a\|mb$	می‌توانیم سمت راست را در عدد صحیح دلخواه m ضرب کنیم (چاق کنیم).
۳	$a\|b \Rightarrow a^n\|b^n$	می‌توانیم دو طرف را به توان عدد طبیعی n برسانیم.
۴	$a\|b \Rightarrow a\|b^n$	می‌توانیم فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی دلخواه برسانیم (چاق کنیم).
۵	$\pm a\|\pm a$	هر عدد صحیح خودش را عاد می‌کند.
۶	$\pm ۱\|\pm a$	± ۱ هر عددی را عاد می‌کند.
۷	$a\|۰$	هر عدد صحیح، صفر را عاد می‌کند.
۸	$۰\|a \Rightarrow a=۰$	صفر فقط خودش را عاد می‌کند.
۹	$\begin{cases} a\|b \\ a\|c \end{cases} \Rightarrow a\|b\pm c$	اگر a دو عدد b و c را عاد کند، جمع و تفریق آن‌ها را هم عاد می‌کند.
۱۰	$a>۱, a^n\|a^m \Rightarrow n\le m$	توان سمت راست باید بزرگ‌تر یا مساوی توان سمت چپ باشد.
۱۱	$a\|b, b\|c \Rightarrow a\|c$	ویژگی تعدی
۱۲	$ab\|c \Rightarrow a\|c, b\|c$	به جای سمت چپ می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم (لاغر کنیم).

الف نادرست است، مثلاً $۵|۲+۳$ ولی $۵\nmid ۲$ و $۵\nmid ۳$.

ب درست است. (ویژگی ۱۲ در جدول بالا)

پ نادرست است، مثلاً $۲\times ۳=۶\times ۱$ اما $۶\nmid ۲$ و $۶\nmid ۳$. از تساوی $ab=cd$ مثلاً می‌توانیم رابطهٔ $c|ab$ را نتیجه بگیریم.

۲۲ **۲** طبق مورد ۸ نکتهٔ سؤال قبل داریم:

$$۰|n^۳-n$$
$$\Rightarrow n^۳-n=۰ \Rightarrow n(n^۲-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=۰ \\ n=\pm ۱ \end{cases}$$

پس به ازای ۳ **مقدار صحیح**، رابطهٔ داده‌شده درست می‌شود نه **هر عدد صحیح n**.

ب $۷^۲$ باید مقسوم‌علیه $n!$ باشد. $\Rightarrow ۷^۲|n! \Rightarrow ۴۹|n!$

$n!$ باید حداقل ۲تا عامل ۷ داشته باشد.

کوچک‌ترین عدد طبیعی n به طوری که $n!$ حداقل ۲تا عامل ۷ داشته باشد، ۱۴ است؛ پس این گزاره نادرست می‌شود.

پ

$$۸^{n+۳}|۲^{۵n-۲} \xrightarrow{۸=۲^۳ \Rightarrow ۸^{n+۳}=۲^{۳n+۹}} ۲^{۳n+۹}|۲^{۵n-۲}$$

توان سمت راست باید بزرگ‌تر یا مساوی توان سمت چپ باشد:

$$\Rightarrow ۳n+۹ \le ۵n-۲ \Rightarrow ۱۱ \le ۲n$$
$$\Rightarrow ۵/۵ \le n \xrightarrow{\text{n طبیعی}} n \ge ۶$$

بنابراین (الف) و (ب) نادرست و (پ) درست است.

۲۳ **۴** هر دو عدد $۹k+۷$ و $۷k+۶$ بر a بخش‌پذیرند؛ پس a هر دو عدد را عاد می‌کند. با استفاده از ویژگی‌های عادکردن سعی می‌کنیم k را از بین ببریم:

$$\begin{cases} a|۹k+۷ \xrightarrow{\times ۷} a|۷(۹k+۷) \Rightarrow a|۶۳k+۴۹ \\ a|۷k+۶ \xrightarrow{\times ۹} a|۹(۷k+۶) \Rightarrow a|۶۳k+۵۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{را از هم کم می‌کنیم.}]{\text{طرف‌های راست}} a|۶۳k+۵۴-۶۳k-۴۹ \Rightarrow a|۵$$

a مقسوم‌علیه ۵ است؛ پس:

$a=\pm ۱, \pm ۵ \Rightarrow$ چهار عدد صحیح وجود دارد.

۲۰۹ ۳ مجموع درجات، دو برابر تعداد یال‌ها است، پس q برابر با نصف مجموع درجات است. داریم:

$$q+1\ge 2p \Rightarrow \frac{\overbrace{a+b+c+6+1+3+4}^{a+b+c+14}}{2}+1\ge 2\times 7$$

$$\Rightarrow a+b+c\ge 12$$

حالا با توجه به این‌که گراف رأس درجه‌یک دارد، پس حداکثر یک رأس فول می‌تواند داشته باشد، بنابراین هیچ‌کدام از a، b و c نمی‌توانند برابر ۶ باشند، در نتیجه $a+b+c\le 15$ می‌شود.

از طرفی مجموع درجهٔ رأس‌های گراف باید زوج باشد، پس $a+b+c+14$ زوج و در نتیجه $a+b+c$ زوج است؛ پس $a+b+c=12$ یا ۱۴ می‌شود.

۲۱۰ ۱ گراف رأس ایزوله ندارد، پس $a,b,c\ge 1$ هستند.

$$\text{مجموع درجات}=2q \Rightarrow 5+4+4+3+a+b+c$$
$$=2(\underbrace{1.5(a+b+c)}_{q}) \Rightarrow 2(a+b+c)=16 \Rightarrow a+b+c=8$$

$p=7$ است، پس $\Delta\le 6$؛ بنابراین بیشترین مقدار درجه‌ها ۶ می‌تواند باشد. تعداد رأس‌های فرد نیز باید زوج باشد، پس از بین a، b و c دوتا فرد و یکی زوج یا هر سه‌تا باید زوج باشند. بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

$$\{a,b,c\}=\{5,2,1\},\{4,3,1\},\{3,3,2\},\{4,2,2\}$$

در تمام حالت‌ها تعداد رأس‌های فرد، زوج بوده و گراف قابل رسم است؛ پس جواب برابر ۴ می‌شود. (دقت کنید حالت $\{6,1,1\}$ را در نظر نگرفتیم، چون در صورت سؤال گفته a و b و c مخالف ۶اند.)

توجه از نظر ریاضی بررسی گرافی‌بودن درجه‌ها لازم است ولی اگر تعداد حالت‌ها زیاد باشد، معمولاً نیازی به این کار نیست.

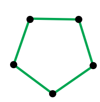
آزمون ۲۲

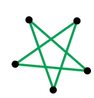
۲۱۱ ۱ همهٔ گراف‌های کامل K_p، $(p-1)$ـ منتظم هستند؛ پس گراف کاملی که منتظم نباشد وجود ندارد، اما سایر گراف‌ها وجود دارند:

ب) گراف K_4 که ۳ ـ منتظم است.

پ) گراف  که تهی است و یال ندارد.

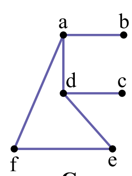
ت) گراف G و مکمل آن که هر دو ۵ یال دارند:


G


$\bar{G}$

۲۱۲ ۱ از گزینه‌ها کمک می‌گیریم:

۱) اگر یال fd را حذف کنیم به گراف مقابل می‌رسیم:

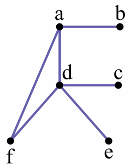


G

رأس f در گراف G با رأس e و a مجاور است، پس در گراف مکمل G، به d، c و b وصل می‌شود؛ پس $\deg_{\bar G}(f)=3$ است.

همچنین $N_G[e]=\{f,d,e\}$، پس تعداد عضوهای آن برابر $|N_G[e]|=3$ می‌شود؛ پس همین گزینه جواب تست است.

توجه اگر یال fe را حذف می‌کردیم:

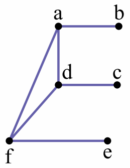


رأس f در گراف مکمل به b و c و e وصل است، پس $\deg_{\bar G}(f)=3$.

اما $N_G[e]=\{d,e\}$؛ پس:

$$\deg_{\bar G}(f)+|N_G[e]|=5$$

توجه اگر یال ed را حذف می‌کردیم:



$$\deg_{\bar G}(f)+|N_G[e]|=2+2=4$$

۲۱۳ ۳

نکته

ویژگی‌های گراف کامل

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف کامل مرتبهٔ p	K_p	گرافی که هر دو رأس آن مجاورند (به هم وصل‌اند).	۱) درجهٔ همهٔ رأس‌ها $p-1$ است. ۲) گراف $(p-1)$ـ منتظم است. ۳) $q=\frac{p(p-1)}{2}$ ۴) بیشترین یال را در بین گراف‌های هم‌مرتبهٔ خود دارد.

در گراف کامل $q=\frac{p(p-1)}{2}$ و $\Delta=\delta=p-1$ است، اما اگر یک یال از آن را حذف کنیم $q(G)=\frac{p(p-1)}{2}-1$ و $\Delta=p-1$ و $\delta=p-2$ (دقت دارید که $p>2$) می‌شود. با جای‌گذاری در رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$\frac{p(p-1)}{2}-1=(p-1)(p-2)-3(p-2)$$
$$=(p-2)(p-1-3)=(p-2)(p-4)=p^2-6p+8$$
$$\Rightarrow \frac{p(p-1)}{2}=p^2-6p+9 \Rightarrow p^2-p=2p^2-12p+18$$
$$\Rightarrow p^2-11p+18=0 \Rightarrow (p-2)(p-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} p=2 \ \times \\ p=9 \ \checkmark \end{cases}$$

۲۱۴ ۱

نکته

ویژگی‌های گراف منتظم و مکمل

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف k ـ منتظم	—	گرافی که درجهٔ هر رأس برابر k است.	۱) $kp=2q$ که $0\le k\le p-1$ ۲) گراف فرد ـ منتظم مرتبهٔ فرد نداریم (از بین p و k حداقل یکی باید زوج باشد).

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف مکمل G	$\bar{G}$	رأس‌های $\bar{G}$ همان رأس‌های G است. یال‌های $\bar{G}$ یال‌هایی هستند که در G وجود ندارد.	۱) $q(G)+q(\bar{G})=\frac{p(p-1)}{2}$ ۲) $\deg_G(a)+\deg_{\bar{G}}(a)=p-1$

مجموع تعداد یال‌های گراف و مکمل آن برابر تعداد یال‌های گراف کامل می‌شود؛ پس:

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow q(G)+27=\frac{p(p-1)}{2}$$
$$\Rightarrow q(G)=\frac{p(p-1)}{2}-27$$

از طرفی $\deg_G(a)+\underbrace{\deg_{\bar{G}}(a)}_{2}=p-1$، پس اگر گراف مکمل، ۲ـ منتظم باشد، خود گراف $p-1-2$ یعنی $(p-3)$ـ منتظم می‌شود؛ بنابراین گراف G گرافی $(p-3)$ـ منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ $\frac{p(p-1)}{2}-27$ است؛ پس در گراف منتظم G داریم:

$$kp=2q \Rightarrow (p-3)p=2\left(\frac{p(p-1)}{2}-27\right)$$
$$\Rightarrow p^2-3p=p^2-p-54 \Rightarrow 2p=54$$

$p=27 \Rightarrow$ گراف G، ۲۴ـ منتظم است.

۲۱۵ | ۳ درجهٔ هر رأس در گراف کامل برابر $p-1$ است و گراف کامل $\frac{p(p-1)}{2}$ یال دارد. گراف جدید به‌دست‌آمده $(p-6)$ـ منتظم می‌شود، پس با توجه به فرمول تعداد یال‌های گراف منتظم (همون $kp=2q$)، این گراف $\frac{kp}{2}$ یا $\frac{p(p-6)}{2}$ یال دارد؛ بنابراین:

$$\frac{p(p-1)}{2}-40=\frac{p(p-6)}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{p}{2}(p-1-(p-6))=40 \Rightarrow \frac{p}{2}\times 5=40 \Rightarrow p=16$$

پس گراف جدید به‌دست‌آمده، $\frac{p(p-6)}{2}=\frac{16\times 10}{2}=80$ یال دارد.

۲۱۶ | ۲

نکته: گراف جهت‌دار بدون طوقه از مرتبهٔ p، حداکثر $p(p-1)$ یال دارد.

اگر فرد A در لیست دوستان فرد B قرار داشته باشد، یال $B \longleftarrow A$ را در گراف (با رأس‌های متناظر افراد) قرار می‌دهیم. باید ببینیم چند گراف جهت‌دار (بدون طوقه) با ۵ رأس می‌توانیم بسازیم.

در گراف جهت‌دار ۵رأسی حداکثر $5\times 4=20$ یال جهت‌دار جا می‌گیرد (دو برابر تعداد یال‌های گراف K_5). از طرفی طه در فهرست دوستان یاسین است؛ پس طه به یاسین با یال $\text{یاسین} \longleftarrow \text{طه}$ وصل می‌شود.

۱۹ یال دیگر که ممکن است عضو گراف باشند یا نباشند باقی می‌ماند (یعنی هر کدام دو حالت دارند.)؛ پس در کل 2^{19} گراف با این شرایط می‌توانیم بسازیم.

۲۱۷ | ۲ فرض کنیم گراف G دارای $q(G)$ یال و p رأس باشد. گفته‌های مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} q(G)+6=q(K_p) \\ q(G)-16=q(\text{منتظم}-6) \end{cases} \Rightarrow q(K_p)-q(\text{منتظم}-6)=22 \ (*)$$

از طرفی تعداد یال‌های گراف کامل و منتظم به صورت زیر است:

$$q(K_p)=\frac{p(p-1)}{2}\ ,\ q(\text{منتظم}-6)=\frac{6\times p}{2}=3p$$

حالا با جای‌گذاری در (*) داریم: $\Rightarrow \frac{p(p-1)}{2}-3p=22$

$$\Rightarrow \frac{p^2-p-6p}{2}=22 \Rightarrow p^2-7p-44=0$$
$$\Rightarrow (p-11)(p+4)=0 \Rightarrow p=11$$

از یکی از دو معادلهٔ اولیه، $q(G)$ را پیدا می‌کنیم:

$$q(G)+6=q(K_p) \Rightarrow q(G)+6=\frac{11\times 10}{2}$$
$$\Rightarrow q(G)=55-6=49 \Rightarrow q-p=49-11=38$$

۲۱۸ | ۱ نامعادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$k^2-9k+14\le 0 \Rightarrow (k-7)(k-2)\le 0$$
$$\xrightarrow[\text{منفی است}]{\text{بین دو ریشه}} 2\le k\le 7$$

از طرفی k نمی‌تواند برابر ۷ باشد (چون گراف فرد منتظم مرتبهٔ فرد نداریم.)، پس بیشترین مقدار k برابر ۶ بوده و بزرگ‌ترین اندازهٔ گراف وقتی به دست می‌آید که گراف ۶ـ منتظم مرتبهٔ ۱۱ باشد، بنابراین:

$$kp=2q \Rightarrow 6\times 11=2q \Rightarrow q=33$$

۲۱۹ | ۲

نکته: جمع درجهٔ رأس a در گراف G و در گراف مکمل آن برابر $p-1$ می‌شود.

تعداد رأس‌ها ۸تا است؛ بنابراین:

$$p=8 \Rightarrow p-1=7 \xrightarrow{\text{نکته}} \deg_{\bar{G}}(a)=7-\deg_G(a)$$

پس درجات گراف G را باید از ۷ کم کنیم تا درجات رئوس گراف $\bar{G}$ پیدا شود.
$G:5,5,4,3,3,2,2,2 \Rightarrow \bar{G}:2,2,3,4,4,5,5,5$

۲۲۰ | ۳

نکته: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

$p=6$ است. تعداد زیرگراف‌های هم‌مرتبه با خود گراف را می‌خواهیم؛ پس هیچ‌کدام از رئوس را نباید حذف کنیم، حالا برای به دست آوردن تعداد زیرگراف‌های ۶رأسی و q یالی کافی است q یال از بین ۸ یال انتخاب کنیم:

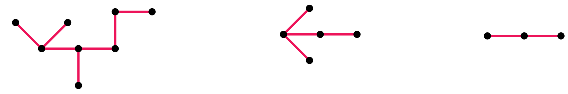
روش اول:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{تعداد زیرگراف‌های} \\ \text{صفر یالی مرتبهٔ ۶}}}{\binom{8}{0}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{تعداد زیرگراف‌های} \\ \text{۱ یالی از مرتبهٔ ۶}}}{\binom{8}{1}} + \binom{8}{2}+\dots+\binom{8}{8}=2^8=256$$

۲۳۸ | **۱**

نکته

گراف همبند فاقد دور را درخت می‌گوییم، مثل گراف‌های زیر:



نکته

۱) در هر درخت $q=p-۱$ است.

۲) درخت، گراف همبند با کم‌ترین تعداد یال است، پس برای این‌که گراف G همبند باشد، باید حداقل $p-۱$ یال داشته باشد.

۳) از هر کدام از جمله‌های زیر می‌فهمیم که گراف G درخت است:

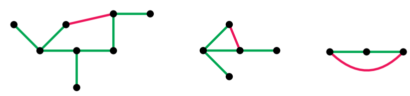
الف) G همبند و فاقد دور است.

ب) G همبند با کم‌ترین تعداد یال است.

پ) G همبند بوده و $q=p-۱$ است.

ت) بین هر دو رأس G دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

۴) در هر درخت با اضافه‌کردن یک یال دقیقاً یک دور به وجود می‌آید، برای مثال:



۵) گراف‌های P_n همگی درخت هستند.

۶) بین هر دو رأس درخت، دقیقاً یک مسیر وجود دارد؛ پس تعداد مسیرهای به طول مثبت در هر درخت برابر $\binom{p}{۲}$ است.

۷) تعداد کل مسیرها در هر درخت برابر است با: $\binom{p}{۲}+p$

(مسیرهای به طول صفر اضافه می‌شود.)

گراف همبند با کم‌ترین تعداد یال است پس درخت است و چون $\Delta=۲$ است، گراف همان $P_{۱۲}$ می‌شود. حالا هر دو رأسی را که انتخاب کنیم، دقیقاً یک مسیر بین آن‌ها وجود دارد، پس در کل $\binom{۱۲}{۲}=۶۶$ مسیر متفاوت بین رأس‌های مختلف وجود دارد.

۲۳۹ | **۱** درجهٔ رأس‌های گراف مکمل به صورت ۱,۱,۲,۲,۲ می‌شود و چون این گراف همبند است، نمودار آن به صورت $a-b-c-d-e$ می‌شود.

۱) هر یال یک زیرگراف به صورت $P_۲$ است، پس ۴ زیرگراف به صورت $P_۲$ وجود دارد.

۲) $a-b-c$ ، $b-c-d$ و $c-d-e$ زیرگراف‌های به صورت $P_۳$ هستند.

۳) $a-b-c-d$ و $b-c-d-e$ زیرگراف‌های به صورت $P_۴$ هستند.

۴) خود گراف نیز زیرگراف به صورت $P_۵$ است.

بنابراین ۱۰ زیرگراف به شکل P_n داریم.

۲۴۰ | **۴** رأس g را کنار می‌گذاریم. مسیرها را به صورت $a-\cdots-b$ در نظر می‌گیریم که یکی از رأس‌های میانی باید c باشد:

۱) مسیر به طول ۲: acb $\to$ ۱ مسیر

۲) مسیرهای به طول ۳: (که چهار رأس در آن حضور دارند)

مکان c ، یکی از سه رأس d,e,f

$a--b \to ۲\times۳=۶$

۳) مسیرهای به طول ۴: (که پنج رأس در آن حضور دارند)

مکان c

$a---b \to ۳\times۳\times۲=۱۸$

۴) مسیرهای به طول ۵: (که شش رأس در آن حضور دارند.)

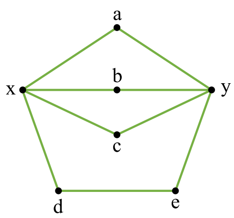
$a----b \Rightarrow ۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

پس در کل $۱+۶+۱۸+۲۴=۴۹$ مسیر با شرایط داده‌شده وجود دارد.

آزمون ۲۵

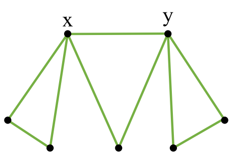
۲۴۱ | **۱** باید از روی درجه‌ها، گراف را رسم کنیم. با شرایط داده‌شده، دو گراف به شکل‌های زیر وجود دارد:

حالت اول: دو رأس max درجه، مجاور نباشند:



دورهای xaybx، xaycx و xbycx دورهای به طول ۴ این گراف هستند.

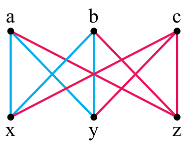
حالت دوم: دو رأس max درجه، مجاور باشند:



این گراف دور به طول ۴ ندارد.

بنابراین، این گراف ۳ یا صفر مسیر به طول ۴ دارد.

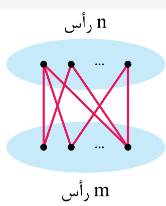
۲۴۲ | **۴** مکمل این گراف به شکل مقابل است:



برای ساخته‌شدن هر دور به طول ۴، کافی است ۲ رأس از بین ۳ رأس a، b و c و ۲ رأس نیز از بین۳ رأس x، y و z انتخاب شود. به عبارت دیگر هر بار که دو رأس از ۳ رأس بالا و دو رأس از ۳ رأس پایین انتخاب می‌کنیم، یک و تنها یک دور به طول ۴ ساخته می‌شود. (مثلاً با انتخاب a و b از رئوس بالایی و x و y از رئوس پایینی، دور aybxa حاصل می‌شود.) گراف دور دیگری به طول ۴ ندارد؛ بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ برابر است با: $\binom{۳}{۲}\binom{۳}{۲}=۹$

نکته

به گراف‌هایی به شکل زیر که تمام n رأس بالا به m رأس پایین متصل باشند، گراف کامل دوبخشی گفته و آن را با $K_{n,m}$ نمایش می‌دهیم. (رأس‌های درون هر بخش به هم وصل نیستند.)

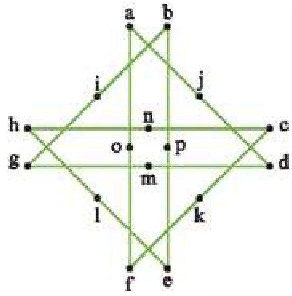


تعداد دورهای به طول ۴ در $K_{n,m}$ $=\binom{n}{۲}\binom{m}{۲}$

آزمون ۲۹

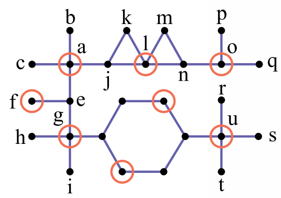
۲۸۱ | **۳** گراف مقابل همان گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۱۶ است ($C_{۱۶}$) که عدد احاطه‌گری آن برابر است با: $\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$

$\Rightarrow \gamma(C_{۱۶})=\left\lceil \frac{۱۶}{۳} \right\rceil=۶$



---

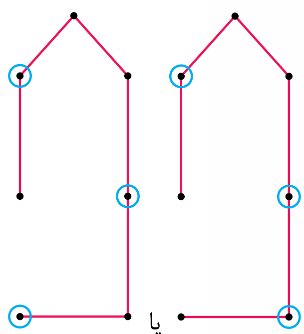
۲۸۲ | **۴** از بین a,b,c حداقل یکی را باید انتخاب کنیم که بهتر است a را انتخاب کنیم. شبیه همین استدلال u,g,o را انتخاب می‌کنیم. یکی از رأس‌های e و f را هم باید انتخاب کنیم (تا این‌جا شد ۵تا). برای احاطه‌شدن j,k,l,m,n هم بهتر است l را بگیریم. حالا از آن دور (۶ضلعی) ۶رأسی هم حداقل دو رأس باید انتخاب کنیم، پس $\gamma(G)=۸$ می‌شود.



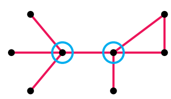
---

۲۸۳ | **۲** گزینه‌ای قابل قبول است که فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم داشته باشد.

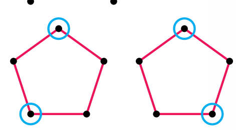
۱ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به صورت‌های مقابل می‌تواند باشد.



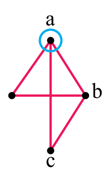
۲ تنها مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به صورت مقابل است، پس این گزینه جواب است.



۳ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، به صورت مقابل می‌توانند باشند.



۴ هر کدام از مجموعه‌های $\{a\}$ و $\{b\}$ احاطه‌گر مینیمم هستند.



---

۲۸۴ | **۲**

نکته

در هر گراف از مرتبهٔ n داریم: $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \le \gamma(G)$

نکته

$\Delta(G)+\delta(\bar{G})=p-۱$

طبق نکته و فرض سؤال داریم: $\left\lceil \frac{۱۴}{\Delta+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \le \left\lceil \frac{۱۴}{\Delta+۱} \right\rceil$

پس $۳=\left\lceil \frac{۱۴}{\Delta+۱} \right\rceil=\gamma(G)$ است، بنابراین:

$۲<\frac{۱۴}{\Delta+۱}\le ۳ \xrightarrow{\text{جست‌وجو}} \Delta=۴,۵$

اگر بزرگ‌ترین درجهٔ رأس در G برابر ۴ باشد، کم‌ترین درجهٔ رأس در گراف مکمل برابر ۹ می‌شود، چون طبق نکته داریم:

$۴+\delta(\bar{G})=۱۴-۱ \Rightarrow \delta(\bar{G})=۹$

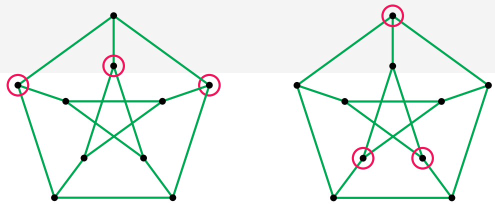
شبیه بالا اگر $\Delta(G)=۵$ باشد، $\delta(\bar{G})=۸$ می‌شود پس کم‌ترین درجهٔ رأس در گراف مکمل برابر ۹ یا ۸ می‌شود.

---

۲۸۵ | **۱**

نکته

عدد احاطه‌گری گراف پترسن برابر ۳ است و این گراف ۲ نوع γ ـ مجموعه به شکل‌های زیر دارد:



این گراف ۱۰ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد.

با توجه به نکته، گراف ۳تا γ ـ مجموعه شامل رأس a به صورت زیر دارد:

$\underbrace{\{a,g,c\},\{a,j,d\}}_{\text{نوع ۱}},\underbrace{\{a,i,h\}}_{\text{نوع ۲}}$

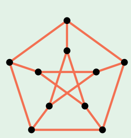
اما گراف پترسن در کل ۱۰تا، γ ـ مجموعه دارد، پس $۱۰-۳=۷$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم فاقد رأس a دارد.

---

۲۸۶ | **۲**

نکته

بررسی عدد احاطه‌گری و تعداد γ ـ مجموعه‌های گراف‌های خاص:

گراف	عدد احاطه‌گری	تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم (γ ـ مجموعه‌ها)
K_p (کامل)	$\gamma(K_p)=۱$	pتا (هر رأس یک γ ـ مجموعه است.)
$\bar{K}_p$ (تهی)	$\gamma(\bar{K}_p)=p$	۱ (مجموعهٔ کل رأس‌ها)
P_n (مسیر) ($n\ge۲$)	$\gamma(P_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$	اگر n مضرب ۳ باشد فقط یک γ ـ مجموعه دارد، در غیر این صورت شمارش مستقیم می‌کنیم.
C_n (دور)	$\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$	اگر n مضرب ۳ باشد سه‌تا γ ـ مجموعه دارد.
 پترسن	$\gamma=۳$	۱۰تا γ ـ مجموعه دارد.

توجه عدد ساخته‌شده با صفر نمی‌تواند شروع شود پس ۵جا برای مکان صفر وجود دارد. (در جایگاه سمت چپ نمی‌توانیم صفر قرار دهیم.)

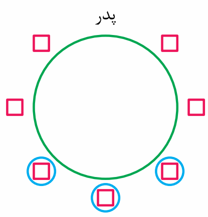
۳۲۸ | ۱ دروازه‌بان و کاپیتان را در یک دسته قرار داده و یک شیء فرض می‌کنیم، پس ۱۰ شیء داریم که $10!\times 2!$ جایگشت دارند. (جابه‌جایی دروازه‌بان و کاپیتان $2!$ حالت دارد.) فرض کنید یکی از حالت‌ها مثلاً به صورت زیر باشد:

_ _ د ک _ _ _ _ _ _ _

در این حالت، شمارهٔ ۱۰ باید در سمت چپ کاپیتان قرار داشته باشد. (تا کاپیتان بین دروازه‌بان و شمارهٔ ۱۰ باشد.) دقیقاً در نصف $10!\times 2!$ حالت، شمارهٔ ۱۰ در سمت راست و در نصف حالت‌ها در سمت چپ کاپیتان قرار دارد که فقط یک طرف آن‌ها قابل قبول است پس تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با: $\frac{2!\times 10!}{2}=10!$

۳۲۹ | ۳ ۸ کتاب را به همراه ۳ جداکننده در یک ردیف می‌چینیم. (مثلاً به صورت ▢ | ▢ | ▢▢▢ | ▢▢▢) حالا کتاب‌های قبل از جداکنندهٔ اول را در طبقهٔ اول، کتاب‌های بین جداکننده‌های اول و دوم را در طبقهٔ دوم، کتاب‌های بین جداکنندهٔ دوم و سوم را در طبقهٔ سوم و سایر کتاب‌ها را هم در طبقهٔ چهارم قرار می‌دهیم، پس کافی است جایگشت ۸ کتاب متفاوت و ۳ جداکنندهٔ یکسان را به دست آوریم که طبق قضیهٔ جایگشت باتکرار، برابر است با: $\frac{11!}{3!}$.

۳۳۰ | ۲ صندلی‌ها یکسان است پس این‌که پدر روی کدام صندلی بنشیند تفاوتی نمی‌کند. (مثلاً فرض می‌کنیم پدر در جایگاه مشخص‌شده در مقابل باشد.) برای مادر سه حالت (جایگاه‌هایی که دایره کشیده‌ایم) وجود دارد. فرزندان نیز به $6!=720$ روش می‌توانند در بقیهٔ جایگاه‌ها قرار گیرند پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $3\times 720=2160$



آزمون ۳۴

۳۳۱ | ۲

نکته تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی با شرایط مختلف:

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر
$\underbrace{x_1+x_2+\cdots+x_k}_{k\text{متغیر}}=n$	$\binom{n+k-1}{k-1}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر (انتخاب n شاخه گل از بین k نوع)
$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_k=n\\ x_1\ge a\end{cases}$	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد، آن را از n کم می‌کنیم.
$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_k=n\\ x_i\ge 1, i=1,2,\dots,k\end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$	جواب‌های طبیعی معادله
$x_1+x_2+\cdots+x_k\le n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه می‌کنیم تا به معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=n$ برسیم.

با توجه به فرمول تعداد جواب‌های صحیح نامنفی داریم:

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح}=\binom{3+n-1}{n-1}=\binom{n+2}{n-1}$$

$$=\frac{(n+2)!}{(n-1)!\times 3!}=\frac{(n+2)(n+1)(n)}{6}=165$$

با طرفین‌وسطین و تجزیهٔ عدد سمت راست داریم:

$$\Rightarrow \underbrace{(n+2)(n+1)(n)}_{\text{ضرب سه عدد متوالی}}=6\times 165=6\times 3\times 5\times 11$$

$$=3\times 2\times 3\times 5\times 11=9\times 10\times 11\Rightarrow n=9$$

۳۳۲ | ۲ عدد چهاررقمی را به صورت $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ در نظر می‌گیریم. کافی است جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=11$ را با شرایط $x_1\ge 1$ و $x_4=5$ به دست آوریم. اگر در معادلهٔ اصلی به جای x_4، ۵ قرار دهیم، به $x_1+x_2+x_3=6$ می‌رسیم. حالا طبق نکتهٔ سؤال ۱، تعداد جواب‌های این معادله برابر است با:

$$\xrightarrow[k=3]{n=6}\binom{6+3-1-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$$

روش دوم: معادلهٔ آخر را این‌جوری ببینید که می‌خواهیم ۶ توپ یکسان را در ۳ جعبهٔ متمایز توزیع کنیم که $x_1\ge 1$ باشد. اول یک توپ درون جعبهٔ اول می‌گذاریم تا شرط $x_1\ge 1$ برقرار شود (از ۶ توپ یکی رفت). حالا کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1'+x_2+x_3=5$ را به دست آوریم. (دقت کنید که باز هم ممکن است توپ به نفر اول برسد.)

$$\begin{cases}n=5\\ k=3\end{cases}\Rightarrow\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{7}{2}=21$$

روش سوم:

نکته برای به دست آوردن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ با شرط $x_1\ge a$، کافی است در معادلهٔ اصلی به جای x_1، $x_1'+a$ قرار دهیم که در آن $x_1'\ge 0$ است. (به این روش تغییر متغیر می‌گوییم!)

برای حل معادلهٔ آخر یعنی $x_1+x_2+x_3=6$ با شرط $x_1\ge 1$ از تغییر متغیر کمک می‌گیریم: $x_1\ge 1\Rightarrow x_1=x_1'+1$

با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$x'_1+1+x_2+x_3=6 \Rightarrow x'_1+x_2+x_3=5$$

$$\Rightarrow \begin{cases}k=3\\n=5\end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{7}{2}=21$$

---

۳۳۳ **۳** اگر $i=2$ باشد، $x_2\geq 3$ و اگر $i=3$ باشد $x_3\geq 4$ می‌شود، پس کافی است تعداد جواب‌های معادلهٔ اصلی با این دوتا شرط را به دست آوریم. شبیه روش دوم سؤال قبلی، می‌خواهیم ۱۳ توپ یکسان را در ۳ جعبهٔ متمایز توزیع کنیم. اول ۳ توپ درون جعبهٔ دوم و ۴ توپ درون جعبهٔ سوم می‌اندازیم تا آن دو شرط رعایت شود. حالا ۶ توپ دیگر باقی می‌ماند که هر طور که بخواهیم می‌توانیم درون سه جعبه توزیع کنیم، یعنی کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1+x'_2+x'_3=6$ را به دست آوریم:

$$\begin{cases}n=6\\k=3\end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8}{2}=28$$

روش دوم: $2\leq i\leq 3$ است، پس i می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد، حالا داریم:

$$x_i\geq i+1 \Rightarrow \begin{cases}x_2\geq 3\\x_3\geq 4\end{cases} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{matrix}x_2=x'_2+3\\x_3=x'_3+4\end{matrix}$$

مقادیر به دست آمده را در معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=13$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x_1+x'_2+3+x'_3+4=13 \Rightarrow x_1+x'_2+x'_3=6$$

$$\Rightarrow \begin{cases}k=3\\n=6\end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8}{2}=28$$

توجه می‌توانستیم با الگوگیری از نکتهٔ سؤال ۱ هم برای حل معادله، با شرط‌های حداقلی استفاده کنیم.

---

۳۳۴ **۴** تعداد جایزه‌هایی که به نفرات اول تا سوم می‌رسد را به ترتیب برابر x_1، x_2 و x_3 در نظر می‌گیریم، پس کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=8$ را با شرط «x_2 طبیعی و زوج» به دست آوریم. x_2 می‌تواند برابر ۲، ۴ یا ۶ باشد، پس ۳ حالت داریم:

$$\begin{cases}x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3=6 \xrightarrow[k=2]{n=6} \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{7}{1}=7\\ x_2=4 \Rightarrow x_1+x_3=4 \xrightarrow[k=2]{n=4} \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5}{1}=5\\ x_2=6 \Rightarrow x_1+x_3=2 \xrightarrow[k=2]{n=2} \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{3}{1}=3\end{cases}$$

پس این مسئله در کل $7+5+3=15$ جواب دارد.

توجه در هر سه حالت، جایزه به یک نفر خاص نمی‌رسد.

---

۳۳۵ **۱** تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ از رابطهٔ $\binom{n+k-1}{k-1}$ به دست می‌آید، پس:

$$\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=\frac{9\times 8}{2}=36 \Rightarrow n=36$$

حالا کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+y_3+y_4=8$ با شرط $y_1\geq \frac{n}{12}=\frac{36}{12}=3$ را به دست آوریم. طبق نکتهٔ سؤال ۱ با شرایط حداقلی داریم:

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{8+4-1-3}{4-1}=\binom{8}{3}=\frac{8\times 7\times 6}{6}=56$$

توجه می‌توانستیم معادله را با تغییر متغیر نیز حل کنیم. $y_1\geq 3$ است، پس $y'_1\geq 0$ و $y_1=y'_1+3$ می‌شود. حالا با جای‌گذاری در معادلهٔ اصلی داریم:

$$y'_1+3+y_2+y_3+y_4=8 \Rightarrow y'_1+y_2+y_3+y_4=5$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{5+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}=56$$

---

۳۳۶ **۲** تعداد گل‌های انتخاب‌شده از نوع اول تا پنجم را به ترتیب برابر x_1 تا x_5 در نظر می‌گیریم، پس باید $x_1+x_2+\cdots+x_5=12$ باشد به طوری که $x_4=0$ و $x_3\leq 1$ است. اگر $x_3=1$ باشد معادله به شکل $x_1+x_2+1+0+x_5=12$ یا همان $x_1+x_2+x_5=11$ می‌شود. $k=3$ و $n=11$ است. بنابراین:

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{13}{2}=\frac{13\times 12}{2}=78$$

و اگر $x_3=0$ باشد، کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_5=12$ را محاسبه کنیم:

$$\xrightarrow[k=3]{n=12} \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{14}{2}=\frac{14\times 13}{2}=91$$

بنابراین تعداد کل جواب‌ها برابر است با: $78+91=169$

---

۳۳۷ **۴** اعداد روشده در ۳ پرتاب را به ترتیب برابر x_1، x_2 و x_3 در نظر می‌گیریم، پس کافی است تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=8$ با شرایط $1\leq x_1\leq 6$، $1\leq x_2\leq 6$ و $1\leq x_3\leq 6$ را به دست آوریم. (یعنی همان تعداد جواب‌های طبیعی معادله) کافی است تعداد حالت‌های توزیع ۸ توپ یکسان را در سه جعبهٔ متمایز با شرایط داده‌شده به دست آوریم. ابتدا یک توپ در هر جعبه قرار می‌دهیم تا شرایط حداقلی رعایت شود، پس کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x'_1+x'_2+x'_3=5$ را به دست آوریم:

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$$

توجه طبق نکته می‌توانستیم از تعداد جواب‌های طبیعی معادله نیز استفاده کنیم:

$$\xrightarrow[k=3]{n=8} \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{n-1}{k-1}=\binom{7}{2}=21$$

روش دوم: عدد روشدهٔ تاس اول تا سوم را به ترتیب برابر x_1 تا x_3 در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم جمع این ۳ عدد برابر ۸ شود، یعنی باید $x_1+x_2+x_3=8$ باشد. دقت کنید که اعداد روشده در تاس‌ها

۳۵۳ **۲** مربع لاتین چرخشی مرتبهٔ ۴ به صورت زیر است؛ پس داریم:

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

مربع لاتین چرخشی

۲→۱
۳→۲

۲			
		۳	
۳			۲

(A)

عدد ۲ باید به ۱ تبدیل شود و عدد ۳ نیز باید به ۲ تبدیل شود، پس در مربع داده‌شده درایه‌های روی قطر همگی باید برابر ۲ بوده و درایه‌های نظیر ۲ (در مربع لاتین چرخشی) در مربع لاتین A باید ۳ باشند، پس تا این‌جا مربع A به صورت زیر می‌شود:

۲	۳		
	۲	۳	
		۲	۳
۳			۲

عدد داخل مربع رنگی می‌تواند برابر ۱ یا ۴ باشد اما هر کدام که باشد، بقیهٔ خانه‌ها به صورت یکتا تعیین می‌شوند پس دو مربع لاتین به این صورت داریم.

۳۵۴ **۳** a می‌تواند برابر ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد. اگر a = ۱ باشد، در ۳ خانهٔ اول سطر اول، ۳ عدد ۴،۳،۲ را به ۶ = !۳ حالت می‌توانیم قرار دهیم. (مثلاً به شکل زیر، پس تا این‌جا ۲۴ = !۳ × ۴ حالت داریم.)

۲	۳	۴	۱
		۱	
	۱		
۱			

عدد داخل خانهٔ رنگی دو حالت دارد، این‌که ۴ باشد یا ۴ نباشد:

۱) اگر عدد داخل مربع رنگی ۴ باشد، سطر دوم به سادگی تکمیل می‌شود و بعد ستون اول و دوم نیز تکمیل می‌شوند. یعنی مربع تا این‌جا به صورت زیر پر می‌شود:

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱		
۱	۴		

واضح است که در ادامهٔ مربع به دو صورت می‌تواند تکمیل گردد:

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۳	۲
۱	۴	۲	۳

یا:

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

۲) حالا اگر عدد داخل مربع رنگی ۴ نباشد، ۲ یا ۳ است. فرض کنید ۲ باشد که در این صورت سطر دوم به سادگی تکمیل می‌شود و بعد ستون‌ها و ... .

با ادامهٔ روند مربع به صورت زیر می‌شود:

۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴

یعنی مربع به یک حالت پر می‌شود، (اگر ۳ هم باشد باز یک حالت داریم)، پس اگر عدد داخل خانهٔ رنگی ۴ نباشد (۲ یا ۳ باشد)، ۲ حالت داریم.

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر ۹۶ = (۲ + ۲)۲۴ می‌شود.

۳۵۵ **۳** اگر درایه‌های دو مربع لاتین متعامد مرتبهٔ ۴ را کنار هم قرار دهیم، عدد دورقمی تکراری نداریم پس از هر کدام از اعداد ۴۴، ۴۳، ۴۲، ۴۱، ۳۴، ۳۳، ۳۲، ۳۱، ۲۴، ۲۳، ۲۲، ۲۱، ۱۴، ۱۳، ۱۲ و ۱۱ دقیقاً یکی داریم. حالا اگر یکان و دهگان هر عدد را در هم ضرب کنیم، مثل این است که درایه‌های دو مربع لاتین متعامد را نظیر به نظیر در هم ضرب کنیم، که اعداد حاصل برابرند با: ۱,۲,۳,۴,۶,۸,۹,۱۲,۱۶ یعنی ۹ مقدار مختلف می‌توانند داشته باشند.

۳۵۶ **۲**

نکته

اعمال روی مربع لاتین مرتبهٔ ۳

۱ اگر در مربع‌های لاتین ۳ × ۳، جای دو سطر (یا فقط جای دو ستون) را عوض کنیم مربع به دست آمده با مربع اول، متعامد است اما اگر دو بار این کار را انجام دهیم متعامد نیستند.

۲ اگر A یک مربع لاتین باشد و با اعمال جایگشت روی آن، A′ به دست آید، A و A′ متعامد نیستند.

۳ اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و روی B جایگشتی اعمال کنیم تا B′ به دست آید، A و B′ نیز متعامد هستند.

طبق نکته، A و B متعامدند اما A و C متعامد نیستند. A و D نیز متعامد نیستند چون اگر A و D متعامد باشند با اعمال جایگشت وارون روی D، C به دست می‌آید که طبق نکتهٔ ۳ در این صورت A و C متعامد می‌شوند. پس A فقط با B متعامد است. خوب است این‌ها را روی یک مثال آزمایش کنیم:

A:

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

B:

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

C:

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

D:

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

A —(تعویض ستون، اول و دوم)→ B —(تعویض سطر، اول و دوم)→ C —(۱→۱، ۲→۳، ۳→۲)→ D

با کنار هم قرار دادن عدد ۲۱ تکراری می‌شود.

عدد ۲۱ تکراری است پس متعامد نیستند.