فصل ۲
مثلثات

به بی‌شعار آزمون مربوط به همین بخش دسترسی پیدا کنید.

به بی‌شعار آزمون مربوط به همین بخش دسترسی پیدا کنید.

به بی‌شعار آزمون مربوط به همین بخش دسترسی پیدا کنید.

ریزشیم (سؤال‌های خط‌به‌خط)

$\pi = 3,14$

درس ۱: نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی

۱۳۲. جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) در دو مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویهٔ غیرقائم از یکی با یک زاویهٔ غیرقائم از دیگری برابر باشد، آنگاه دو مثلث ..... هستند.

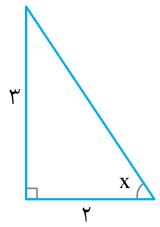
ب) عکس تانژانت زاویهٔ A را با ..... نشان می‌دهیم که برابر نسبت ..... به ..... است.

پ) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در ..... .

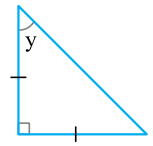
ت) اگر کسینوس زاویه‌ای برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، سینوس آن برابر ..... است.

۱۳۳. با توجه به شکل‌های زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مجهول را به دست آورید.

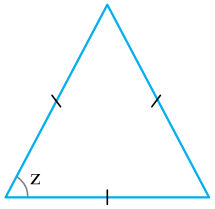
الف)



ب)



پ)



۱۳۴. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\tan 45^\circ - \sqrt{3}\cos 30^\circ$

ب) $3\sqrt{3}(\sin 60^\circ - \tan 30^\circ) + \cot 45^\circ$

پ) $4\sin 30^\circ - \sqrt{2}\cos 45^\circ + 3$

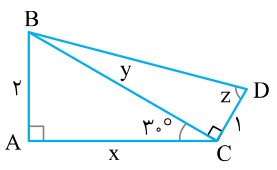
۱۳۵. اگر $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. $(0^\circ < x < 90^\circ)$

الف) $4\sin\frac{x}{2} - 2\cos x$

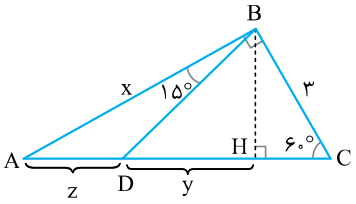
ب) $\tan(x - 15^\circ) + \sqrt{3}\sin x$

۱۳۶. با توجه به شکل‌های زیر مقادیر مجهول را به دست آورید. $(\cos 75^\circ = 0/25)$

الف)



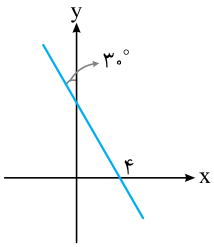
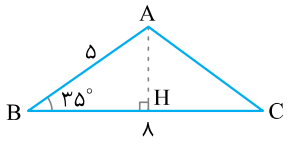
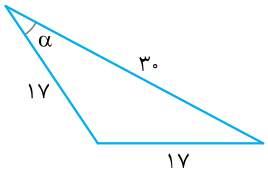
ب)



آزمون شبیه‌ساز ۱

سؤالات امتحانی: ریاضی ۱ - فصل ۲ | **رشته: ریاضی و فیزیک - علوم‌تجربی**

نام و نام خانوادگی: | **مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه** | **تاریخ امتحان:**

		بارم
۱۷۸	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.** الف) برد تابع $f(x)=\sin x+۴$ شامل عدد ۲ است. ☐ درست ☐ نادرست ب) زاویهٔ $\alpha=۷۵^\circ$ در دو شرط، $\sin\alpha>\cos\alpha$ و $\frac{۱}{۲}<\sin\alpha<۱$ صدق می‌کند. ☐ درست ☐ نادرست پ) درصورتی‌که $\cos\theta=\frac{۱}{۳}$ باشد، $\tan\theta$ لزوماً $۲\sqrt{۲}$ است. ☐ درست ☐ نادرست ت) تساوی $\tan\theta+\cot\theta=\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}$ درست است. ☐ درست ☐ نادرست	۱
۱۷۹	**جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب کامل کنید.** الف) اگر $۰\le\theta\le۱۳۵^\circ$ باشد، حداکثر مقدار $\sin\theta$ برابر ..... است. ب) اگر طول و عرض‌ازمبدأ یک خط، هر دو مثبت باشند، tan زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد ..... است. پ) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث لزوماً ..... نیستند. ت) اگر انتهای کمان مربوط به زوایای $\theta=(۱۲۰k)^\circ$ را در دایرهٔ مثلثاتی رسم کنیم، یک ..... حاصل می‌شود.	۱
۱۸۰	**با توجه به شکل مقابل معادلهٔ خط L را به دست آورید.** $(\tan۱۲۰^\circ=-\tan۶۰^\circ)$ 	۱/۲۵
۱۸۱	**حاصل عبارت زیر را به دست آورید.** $\frac{۱-\tan^۲۶۰^\circ\times\sin۳۰^\circ}{۲\cot^۲۶۰\times\cos۶۰^\circ}$	۱/۵
۱۸۲	**حدود زاویهٔ α را در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید.** الف) $\sin\alpha\cot\alpha>۰$ ب) $\sin\alpha\cos\alpha<۰$	۱/۵
۱۸۳	**درصورتی‌که $\sin۳۵^\circ=۰/۵۵$ باشد، ابتدا مساحت مثلث و سپس طول AH را بیابید.** 	۱
۱۸۴	**اگر θ زاویه‌ای در ناحیهٔ اول باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.** $\sqrt{۱+\cot^۲\theta}-\sqrt{\frac{۱-\cos\theta}{۱+\cos\theta}}$	۱
۱۸۵	**اگر داشته باشیم $\sin(۲x-y)=\frac{۱}{۲}$ و $\cos(۲y-۲x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، مقدار $\sin x\times\cos y$ را به دست آورید. (توجه داشته باشید که x و y زاویهٔ حاده هستند.)**	۱/۲۵
۱۸۶	**مقدار $\tan x$ را به دست آورید، درصورتی‌که حاصل عبارت $\frac{\sin x+۴\cos x}{۴\sin x+۳\cos x}$ برابر $\frac{۹}{۲۳}$ شود.**	۱
۱۸۷	**در شکل مقابل $\tan\alpha$ را بیابید.** 	۱/۲۵

سؤالات امتحانی: ریاضی ۱ - فصل ۲ | رشته: ریاضی و فیزیک - علوم‌تجربی

نام و نام خانوادگی: | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه | تاریخ امتحان:

بارم

۱۹۴ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. — **۱**

الف) درصورتی‌که $180^\circ < x < 270^\circ$ باشد، حاصل $\sqrt{1+2\sin x\cos x}+2\sqrt{\frac{1}{1+\cot^2 x}}$ را می‌توانیم به‌صورت $-3\sin x-2\cos x$ بنویسیم. ☐ درست ☐ نادرست

ب) اگر $\sin\alpha>\cos\alpha$ و $\tan\alpha>0$ باشد، $45^\circ<\alpha<90^\circ$ یا $180^\circ<\alpha<225^\circ$. ☐ درست ☐ نادرست

پ) خط L با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 30° درجه ساخته و طول از مبدأ آن ۳ است. این خط، خط $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3\sqrt{3}$ را در نقطهٔ $(-2\sqrt{3},-6)$ قطع می‌کند. ☐ درست ☐ نادرست

ت) درصورتی‌که $\tan x=\cot x$ باشد، لزوماً $\sin x=\cos x$ است. ☐ درست ☐ نادرست

۱۹۵ جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید. — **۲**

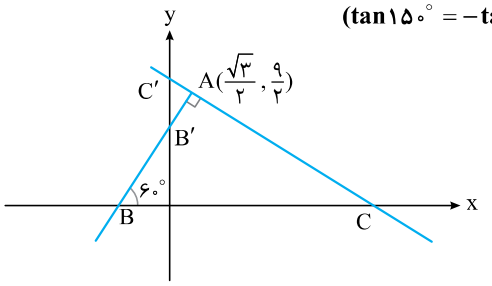
الف) درصورتی‌که $0\le\theta\le 35^\circ$ باشد، حداکثر مقدار $4\sin 3\theta^\circ$ برابر ..... است.

ب) اگر $\sin\alpha=\frac{1}{8}$ و $|\cos\alpha|=\sqrt{\frac{316}{314}}$ باشد، ..... مقدار برای α وجود دارد.

پ) با تغییر زاویهٔ α از 180° تا 225°، $\tan\alpha$ در حال ..... است.

ت) اگر $\tan\alpha=a$ و $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}$ باشد، حاصل a^2-b^2 برابر ..... است.

۱۹۶ در شکل زیر، مساحت مثلث‌های ABC و $AB'C'$ را بیابید. $(\tan 150^\circ=-\tan 30^\circ)$ — **۲**

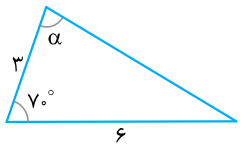


۱۹۷ حاصل عبارت زیر را به دست آورید. — **۱/۵**

$$\frac{\sin 45^\circ\times\cos 180^\circ\times(-\tan 30^\circ)}{1-\sin^2 60^\circ\times\cot^2 60^\circ}$$

۱۹۸ بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)=\frac{4}{a+b\sin cx}$ به‌ترتیب برابر ۴ و $\frac{4}{7}$ است همچنین تابع به‌ازای $x=10^\circ$ دارای مقدار $\frac{8}{11}$ است. مقادیر a و b و کمترین مقدار c را بیابید. — **۱/۲۵**

۱۹۹ در شکل مقابل $\tan\alpha$ را پیدا کنید. $(\sqrt{19}=4/5,\ \sin 70^\circ=0/9)$ — **۱/۲۵**



۲۰۰ حاصل عددی عبارت زیر را به دست آورید. — **۱**

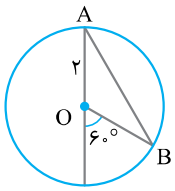
$$\frac{1-\cos^4 x}{\sin^2 x}+\frac{1-\sin^4 x}{\cos^2 x}+\tan x\cot x$$

۲۰۱ اگر داشته باشیم $\cos(x+60^\circ)+\frac{1}{\cos(x+60^\circ)}=2$، مقدار $\tan(x+90^\circ)$ را بیابید. — **۱**

۲۰۲ اگر $-15^\circ\le\theta\le 15^\circ$ و $\sin(6\theta+30^\circ)=4m-3$، بازهٔ قابل قبول برای m را بیابید. — **۱/۷۵**

۲۰۳ کلاغی در فاصلهٔ ۴۰۰ متری از سطح زمین و یک شاهین در فاصلهٔ ۱۰۰۰ متری از سطح زمین در یک راستای عمودی قرار دارند. کلاغ با زاویهٔ 20° و شاهین با زاویهٔ 40° نسبت به راستای قائم در دو جهت مختلف در حال فرود هستند. هنگامی که هر دو به زمین می‌رسند، فاصلهٔ آن دو چند متر است؟ $(\tan 20^\circ=0/36,\ \tan 40^\circ=0/83)$ — **۱/۲۵**

۲۰۸. در شکل مقابل، طول پاره‌خط AB را به دست آورید. (۲/۵)



۲۰۹. اگر θ زاویه‌ای در ربع چهارم باشد، حاصل $|\sin\theta-\cos\theta|-|1-\sin\theta|-|\cos\theta|$ را به دست آورید. (۲)

۲۱۰. اگر $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=\frac{3}{2}$ و $\tan x<0$ باشد، x در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟ (۲/۵)

۲۱۱. عبارت‌های درست و نادرست را مشخص کنید و دلیل هر یک را بنویسید. (۳/۵)

الف) $\sin 220^\circ-\sin 250^\circ<0$ ☐ درست ☐ نادرست

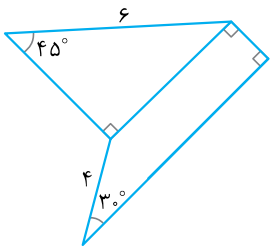
ب) $\frac{1}{\cos^4\alpha}-\frac{2}{\cos^2\alpha}=\tan^4\alpha-1$ ☐ درست ☐ نادرست

پ) $\cos(-300^\circ)>\cos 40^\circ$ ☐ درست ☐ نادرست

۲۱۲. اگر θ زاویهٔ بین خط $4x-8y=3$ با جهت مثبت محور xها باشد، حاصل $\frac{\sin^2\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$ را به دست آورید. (۲/۲۵)

۲۱۳. اگر $\frac{1-\sin x}{\cos x}=3$ باشد، مقدار $\sin x$ را به دست آورید. (۳)

۲۱۴. مساحت شکل مقابل را به دست آورید. (۲/۵)



۲۱۵. مشخص کنید: (۲)

الف) در کدام قسمت‌های دایرهٔ مثلثاتی، $\sin\theta>\cos\theta$ است؟

ب) در کدام قسمت‌های دایرهٔ مثلثاتی، $\sin\theta<\cos\theta$ است؟

۲۱۶. در هر قسمت، دو زاویه با شرط مشخص‌شده مثال بزنید. (۲)

الف) $\sin\theta<\cos\theta$

ب) $\tan\theta>\cot\theta$

پ) $\sin\theta>\cos\theta$ و $\tan\theta<\cot\theta$

ت) $\sin\theta<\cos\theta$ و $\tan\theta<\cot\theta$

۲۱۷. ثابت کنید $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$ است. (۲/۵)

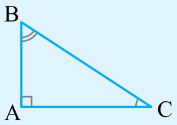
۲۱۸. اگر $\cot\alpha=-2$ و $\frac{\cos\alpha}{2-\cos\alpha}<0$ باشد، حاصل $\sqrt{5}\cos\alpha+\sqrt{20}\sin\alpha-5\cos^2\alpha$ را به دست آورید. (۳/۷۵)

درس ۱

تشابه: دو مثلث در صورتی متشابه هستند که دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد (اضلاع نظیر هم متناسب‌اند.). می‌توان گفت در دو مثلث قائم‌الزاویه اگر دو زاویهٔ حاده با هم برابر باشند، آنگاه دو مثلث با هم متشابه‌اند.

بلد بودم ☐ بلد نبودم ☐

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه: در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.



$$\sin\hat{B}=\frac{\text{ضلع مقابل }\hat{B}}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}\quad,\quad \cos\hat{B}=\frac{\text{ضلع مجاور }\hat{B}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{BC}$$

$$\tan\hat{B}=\frac{\text{ضلع مقابل }\hat{B}}{\text{ضلع مجاور }\hat{B}}=\frac{AC}{AB}\quad,\quad \cot\hat{B}=\frac{\text{ضلع مجاور }\hat{B}}{\text{ضلع مقابل }\hat{B}}=\frac{AB}{AC}$$

می‌توان نتیجه گرفت که بین این نسبت‌ها رابطه‌های مقابل برقرار است:

$$\tan\hat{B}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}\quad,\quad \cot\hat{B}=\frac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}}$$

بلد بودم ☐ بلد نبودم ☐

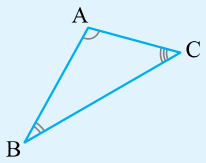
مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰°:

نسبت مثلثاتی \ زاویه	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ\quad,\quad \cos 30^\circ=\sin 60^\circ$$
$$\tan 30^\circ=\cot 60^\circ\quad,\quad \cot 30^\circ=\tan 60^\circ$$

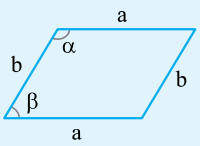
بلد بودم ☐ بلد نبودم ☐

مساحت مثلث: در هر مثلث، با معلوم بودن طول دو ضلع و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها می‌توانیم مساحت مثلث را به دست آوریم:



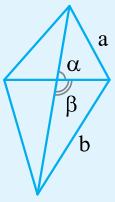
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin\hat{B}=\frac{1}{2}\times AC\times BC\times\sin\hat{C}$$

نتیجه: ۱. مساحت متوازی‌الاضلاعی به اضلاع a و b برابر است با:



$$S=ab\sin\alpha=ab\sin\beta$$

۲. مساحت هر چهارضلعی به اقطار a و b برابر است با:



$$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha=\frac{1}{2}ab\sin\beta$$

بلد بودم ☐ بلد نبودم ☐

نکته: در شش‌ضلعی به ضلع a داریم: ۱. مساحت آن برابر $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ است.

۲. قطر کوچک آن برابر $\sqrt{3}a$ و قطر بزرگ آن برابر $2a$ است.

بلد بودم ☐ بلد نبودم ☐

پس حاصل‌ضرب ۱۱ جملهٔ اول برابر می‌شود با:

$$\frac{x}{r^5},\frac{x}{r^4},\frac{x}{r^3},\frac{x}{r^2},\frac{x}{r},x,xr,xr^2,xr^3,xr^4,xr^5 \quad (۰/۲۵) = x^{11} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x^{11} = ۲۰۴۸ = ۲^{11} \Rightarrow x = ۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{واسطهٔ هندسی جملات اول و دوم} = \sqrt{x \times xr} = \sqrt{x^2 r} \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 r} = ۴ \xrightarrow{x=۲} \sqrt{۴r} = ۴ \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴r = ۱۶$$

$$\Rightarrow r = ۴ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \text{جملهٔ اول}: \frac{x}{r^5} = \frac{۲}{۴^5} = \frac{۲}{۲^{10}} = \frac{۱}{۲^9} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \text{جملهٔ عمومی}: t_n = \frac{۱}{۲^9} \times ۴^{n-1} \quad (۰/۵)$$

---

۱۲۸. در دنبالهٔ هندسی داده‌شده $t_1 = \sqrt{۳}$ (۰/۲۵) و $r = \sqrt{۳}$ (۰/۲۵) است. درنتیجه جملهٔ عمومی آن به‌صورت $t_n = \sqrt{۳}(\sqrt{۳})^{n-1} = (\sqrt{۳})^n$ (۰/۵) می‌شود و داریم:

$$۵۰۰ < t_n < ۳۰۰۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow ۵۰۰ < (\sqrt{۳})^n < ۳۰۰۰$$

$$\xrightarrow[\frac{(\sqrt{۳})^{۱۳}=۷۲۹}{(\sqrt{۳})^{۱۴}=۲۱۸۷}] n = ۱۲ \quad (۰/۲۵) , n = ۱۴ \quad (۰/۲۵)$$

پس تنها سه جمله بین ۵۰۰ و ۳۰۰۰ دارد. (۰/۲۵)

---

۱۲۹. با توجه به $a_n = a_1 r^{n-1}$ داریم:

$$\frac{a_2}{a_5} = -۸ \Rightarrow \frac{a_1 r}{a_1 r^4} = -۸ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{۱}{r^3} = -۸ \Rightarrow r^3 = -\frac{۱}{۸} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow r = -\frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{۱}{a_1} + \frac{۱}{a_1 r^2} = \frac{۵}{۳} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{۱}{a_1}(۱ + \frac{۱}{r^2}) \quad (۰/۲۵) = \frac{۵}{۳}$$

$$\xrightarrow{r=-\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{a_1}(۱ + \frac{۱}{۴}) = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{a_1} \times ۵ = \frac{۵}{۳} \Rightarrow a_1 = ۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow a_n = ۳(-\frac{۱}{۲})^{n-1} \quad (۰/۵) \Rightarrow \text{جملات دنباله}: ۳ , -\frac{۳}{۲} , \frac{۳}{۴} , -\frac{۳}{۸} , \ldots \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow \text{دنبالهٔ حسابی}: ۳ , -\frac{۳}{۲} + x , \frac{۳}{۴} \quad (۰/۲۵)$$

$$d = -\frac{۳}{۲} + x - ۳ = \frac{۳}{۴} - (-\frac{۳}{۲} + x) \quad (۰/۵) \Rightarrow -\frac{۹}{۲} + x = \frac{۹}{۴} - x$$

$$\Rightarrow ۲x = \frac{۹}{۴} + \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{۲۷}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲۷}{۸} \quad (۰/۲۵)$$

پس با اضافه کردن $\frac{۲۷}{۸}$ به جملهٔ دوم، سه جملهٔ اول، تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند.

---

۱۳۰. دنبالهٔ حسابی:

$$\underset{b_1}{a_1} , \underset{b_2}{a_2} , \underset{b_3}{\bigcirc} , \underset{b_4}{\bigcirc} , \underset{b_5}{a_3} , \underset{b_6}{a_4} , \underset{b_7}{a_5} , \bigcirc , \bigcirc , \bigcirc , \bigcirc , \bigcirc , \underset{b_{13}}{a_6} \quad (۰/۵)$$

اگر d قدرنسبت دنبالهٔ حسابی باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} b_2 - b_1 = a_2 - a_1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow d = a_1 r - a_1 \Rightarrow d = a_1(r-1) \quad (*) \quad (۰/۲۵) \\ b_{13} - b_7 = a_6 - a_5 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow ۶d = a_1 r^5 - a_1 r^4 \\ \Rightarrow ۶d = a_1 r^4 (r-1) \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div} \frac{۶d}{d} = \frac{a_1 r^4 (r-1)}{a_1 (r-1)} \Rightarrow r^4 = ۶ \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{r>۰} r = \sqrt[4]{۶}$$

$$(۰/۲۵) \xrightarrow[a_1 = \sqrt[4]{۶}]{(*)} d = \sqrt[4]{۶}(\sqrt[4]{۶} - ۱) = \sqrt[4]{۳۶} - \sqrt[4]{۶} = \sqrt{۶} - \sqrt[4]{۶} \quad (۰/۵)$$

۱۳۱. اگر جملهٔ دنبالهٔ حسابی a_n با قدرنسبت d و جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی b_n با قدرنسبت r باشد، آنگاه داریم:

دنبالهٔ حسابی: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$

دنبالهٔ هندسی: $a_1 + ۲$ (۰/۲۵) $, a_2 + ۶$ (۰/۲۵) $, a_3 + ۱۷$ (۰/۲۵) $, \ldots$

$$\Rightarrow (a_2 + ۶)^2 = (a_1 + ۲)(a_3 + ۱۷) \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow a_2^2 + ۱۲a_2 + ۳۶ = a_1 a_3 + ۱۷a_1 + ۲a_3 + ۳۴$$

$$\Rightarrow (a_1 + d)^2 + ۱۲(a_1 + d) - a_1(a_1 + ۲d) - ۱۷a_1 - ۲(a_1 + ۲d) + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow a_1^2 + ۲a_1 d + d^2 + ۱۲a_1 + ۱۲d - a_1^2 - ۲a_1 d$$

$$-۱۷a_1 - ۲a_1 - ۴d + ۲ = ۰ \Rightarrow d^2 - ۷a_1 + ۸d + ۲ = ۰ \quad (۰/۵)$$

$$\xrightarrow{a_1=۵} d^2 - ۳۵ + ۸d + ۲ = ۰ \Rightarrow d^2 + ۸d - ۳۳ = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (d+۱۱)(d-۳) = ۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow d = -۱۱ \text{ غ.ق.ق} \quad (۰/۲۵) , d = ۳ \quad (۰/۲۵)$$

توجه کنید که اگر $d = -۱۱$ باشد، جملات دنبالهٔ هندسی افزایشی نمی‌شوند.

جملات دنبالهٔ هندسی:

$$۵ + ۲ , ۵ + ۳ + ۶ , ۵ + ۲(۳) + ۱۷ , \ldots$$

$$\Rightarrow ۷ \xrightarrow{\times ۲} ۱۴ \xrightarrow{\times ۲} ۲۸ \xrightarrow{\times ۲} ۵۶ , \ldots \quad (۰/۵)$$

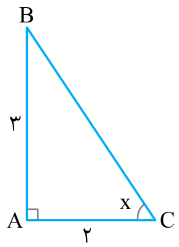
پس جملهٔ چهارم دنبالهٔ هندسی برابر ۵۶ است. (۰/۲۵)

---

۱۳۲. الف: متشابه / ب: $\cot \hat{A}$، طول ضلع مجاور به زاویهٔ A یا $\cos \hat{A}$، طول ضلع مقابل به زاویهٔ A یا $\sin \hat{A}$ / پ: سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع / ت: $\frac{۱}{۲}$

---

۱۳۳. الف:



$$BC^2 = ۲^2 + ۳^2 = ۴ + ۹ = ۱۳ \Rightarrow BC = \sqrt{۱۳}$$

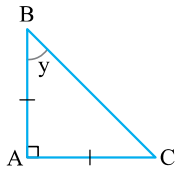
$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin x = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \cos x = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \tan x = \frac{۳}{۲}$$

$$\cot \hat{C} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \cot x = \frac{۲}{۳}$$

ب:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \overset{AB=AC}{=\!=} AB^2 + AB^2$$

$$= ۲AB^2 = ۲AC^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{۲}AB = \sqrt{۲}AC$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin y = \frac{AC}{\sqrt{۲}AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\xrightarrow{y=۴۵^\circ} \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos \hat{B} = \cos y = \cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{\sqrt{۲}AB} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan \hat{B} = \tan y = \tan ۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AC} = ۱$$

$$\cot \hat{B} = \cot y = \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AB} = ۱$$

ب:

$\overset{\Delta}{ABC}: \cos\hat{C} = \cos 60^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = 6$

$\overset{\Delta}{ABC}: AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 = 36 - 9 = 27$

$\Rightarrow x = 3\sqrt{3}$

$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow B\hat{D}H = \hat{A} + 15^\circ = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$

$\Rightarrow D\hat{B}H = 45^\circ \Rightarrow DH = BH \ (*)$

$\overset{\Delta}{BCH}: \sin\hat{C} = \sin 60^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{3} \Rightarrow BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

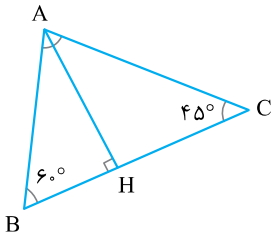
$\xrightarrow{(*)} DH = y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overset{\Delta}{BCH}: \cos\hat{C} = \cos 60^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{3} \Rightarrow CH = \frac{3}{2}$

$AC = 6, CH = \frac{3}{2}, DH = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = AD = 6 - (\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow z = 6 - \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} = \frac{12 - 3 - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}$

۱۳۷. الف:



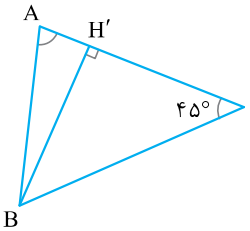
$\hat{C} = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$

$\sin\hat{B} = \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}}AH$

$\sin\hat{C} = \sin 45^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{2}{\sqrt{2}}AH$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}AH}{\frac{2}{\sqrt{2}}AH} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

ب:

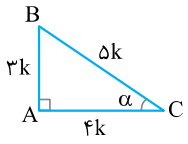


$\tan\hat{C} = \tan 45^\circ = \frac{BH'}{CH'} \Rightarrow \frac{BH'}{CH'} = 1$

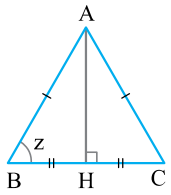
۱۳۸. می‌توانیم مثلثی به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 25k^2 = 9k^2 + AC^2$

$\Rightarrow AC^2 = 16k^2 \Rightarrow AC = 4k$



پ:



$AC^2 = AH^2 + CH^2 \xrightarrow{CH=\frac{BC}{2}} AC^2 = AH^2 + \frac{BC^2}{4}$

$\xrightarrow{AC=BC} AH^2 = AC^2 - \frac{AC^2}{4} = \frac{3}{4}AC^2$

$\xrightarrow{AB=BC=AC} AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$

$\sin\hat{B} = \sin z = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{z=60^\circ} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\hat{B} = \cos z = \cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}$

$\tan\hat{B} = \tan z = \tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}BC}{\frac{1}{2}BC} = \sqrt{3}$

$\cot\hat{B} = \cot z = \cot 60^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۳۴. الف: $\tan 45^\circ - \sqrt{3}\cos 30^\circ = 1 - \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

ب: $3\sqrt{3}(\sin 60^\circ - \tan 30^\circ) + \cot 45^\circ = 3\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}) + 1$

$= \frac{9}{2} - \frac{9}{3} + 1 = \frac{5}{2}$

پ: $4\sin 30^\circ - \sqrt{2}\cos 45^\circ + 3 = 4(\frac{1}{2}) - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 3 = 2 - 1 + 3 = 4$

۱۳۵. چون x یک زاویهٔ حاده است که کتانژانت آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ شده است، پس $x = 60^\circ$ است. درنتیجه داریم:

الف:

$4\sin\frac{x}{2} - 2\cos x \overset{x=60^\circ}{=\!=} 4\sin\frac{60^\circ}{2} - 2\cos 60^\circ$

$= 4\sin 30^\circ - 2\cos 60^\circ = 4(\frac{1}{2}) - 2(\frac{1}{2}) = 2 - 1 = 1$

ب: $\tan(x - 15^\circ) + \sqrt{3}\sin x \overset{x=60^\circ}{=\!=} \tan(60^\circ - 15^\circ) + \sqrt{3}\sin 60^\circ$

$= \tan 45^\circ + \sqrt{3}\sin 60^\circ = 1 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

۱۳۶. الف: $\overset{\Delta}{ABC}: \sin\hat{C} = \sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = 4$

$\overset{\Delta}{ABC}: AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 2^2 + x^2 = y^2$

$\xrightarrow{y=4} x^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overset{\Delta}{BCD}: \begin{cases} \cos\hat{D} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \cos z = \frac{1}{BD} \\ BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow 4^2 + 1^2 = BD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{17} \simeq 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \cos z \simeq \frac{1}{4} = 0/25 \xrightarrow{\cos 75^\circ = 0/25} z = 75^\circ$

پ:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\overbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}^{1}+1+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$$

ت:

$$(1-\sin^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=\cos^2\alpha\times\frac{1}{\cos^2\alpha}=1$$

۱۷۸. الف: نادرست (۰/۲۵)؛ $-1\le\sin x\le 1\xrightarrow{+4}3\le\sin x+4\le 5$

پس حداکثر مقدار تابع ۵ و حداقل مقدار می‌تواند ۳ باشد، بنابراین هیچ‌گاه ۲ نیست.

ب: درست (۰/۲۵)؛ برای زاویهٔ $\alpha=75^\circ$ می‌دانیم $\sin 75^\circ>\cos 75^\circ$ و چون $\sin 30^\circ<\sin 75^\circ<\sin 90^\circ$، پس $\frac{1}{2}<\sin 75^\circ<1$ است. بنابراین در هر دو شرط صدق می‌کند.

پ: نادرست (۰/۲۵)؛

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9\Rightarrow\tan^2\theta=8$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\pm 2\sqrt{2}$$

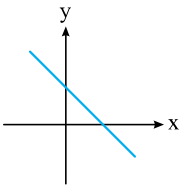
لذا $\tan\theta$ لزوماً $2\sqrt{2}$ نیست.

ت: درست (۰/۲۵)؛

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

۱۷۹. الف: ۱ (۰/۲۵)؛ می‌دانیم $90^\circ\le\theta=90^\circ\le 135^\circ$ است، بنابراین حداکثر مقدار $\sin\theta$ برابر است با: $\sin 90^\circ=1$

ب: منفی (۰/۲۵)؛ اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط هر دو مثبت باشند، شیب خط منفی است، لذا tan زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، منفی است.



پ: برابر (۰/۲۵)؛ هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند، اما لزوماً برابر نیستند.

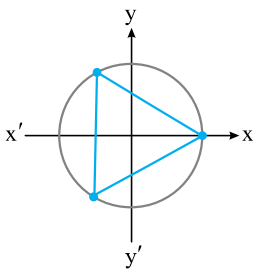
ت: مثلث متساوی‌الاضلاع (۰/۲۵)؛ به شکل زیر توجه کنید.

$k=0\Rightarrow\theta_0=0^\circ$

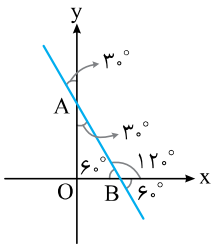
$k=1\Rightarrow\theta_1=120^\circ$

$k=2\Rightarrow\theta_2=240^\circ$

$k=3\Rightarrow\theta_3=\theta_0=360^\circ=0$



۱۸۰. ابتدا زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها را به دست می‌آوریم:



حال شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m=\tan\theta=\tan(120^\circ)\ (0/25)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}\ (0/25)$$

معادلهٔ خط را با استفاده از شیب و نقطهٔ $B(4,0)$ می‌نویسیم:

$$y-y_1=m(x-x_1)\ (0/25)\xrightarrow[m=-\sqrt{3}]{B(4,0)}y-0=-\sqrt{3}(x-4)\ (0/25)$$

$$\Rightarrow y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}\ (0/25)$$

۱۸۱. ابتدا مقادیر نسبت‌های داده‌شده در سؤال را به دست آورده و بعد جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3}\ (0/25),\ \sin 30^\circ=\frac{1}{2}\ (0/25)$$

$$\cot 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (0/25),\ \cos 60^\circ=\frac{1}{2}\ (0/25)$$

حال درون عبارت جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{1-3\times\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}\ (0/25)=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}\ (0/25)$$

۱۸۲. الف: وقتی $\sin\alpha\cot\alpha>0$ است، یعنی $\cot\alpha$ و $\sin\alpha$ هم علامت‌اند. در ناحیهٔ اول $\cot\alpha$ و $\sin\alpha$ مثبت (۰/۲۵) و در ناحیهٔ چهارم $\cot\alpha$ و $\sin\alpha$ هر دو منفی هستند. (۰/۲۵) بنابراین نواحی اول و چهارم پاسخ هستند، یعنی $0^\circ<\alpha<90^\circ$ یا $270^\circ<\alpha<360^\circ$ (۰/۲۵)

ب: وقتی $\sin\alpha\cos\alpha<0$ است، یعنی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. در ناحیهٔ دوم، $\sin\alpha$ مثبت و $\cos\alpha$ منفی است (۰/۲۵) و در ناحیهٔ چهارم، $\sin\alpha$ منفی و $\cos\alpha$ (۰/۲۵) مثبت است، بنابراین:

$$90^\circ<\alpha<180^\circ\text{ یا }270^\circ<\alpha<360^\circ\ (0/25)$$

۱۸۳.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin\hat{B}\ (0/25)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 5\times 8\times 0/55=11\ (0/25)$$

حال به سراغ AH می‌رویم:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AH\times BC}{2}\ (0/25)\xrightarrow{S_{\Delta ABC}=11}11=\frac{AH\times 8}{2}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{11}{4}\ (0/25)$$

۱۸۴.

$$\begin{cases}\sqrt{1+\cot^2\theta}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}}=\left|\frac{1}{\sin\theta}\right|=\frac{1}{\sin\theta}\ (0/25)\\ \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\underbrace{1-\cos^2\theta}_{\sin^2\theta}}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\ (0/5)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\text{حاصل}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta\ (0/25)$$

۱۸۵.

$$\begin{cases}\sin(2x-y)=\frac{1}{2}\xrightarrow[\sin 30^\circ=\frac{1}{2}]{\text{x و y جاده}}2x-y=30^\circ & (0/25)\\ \cos(2y-2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow[\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}]{\text{x و y جاده}}2y-2x=30^\circ & (0/25)\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=60^\circ \Rightarrow x=45^\circ \quad (0/25)$$

حال به سراغ خواستهٔ مسئله می‌رویم:

$$\sin x\times\cos y=\sin 45^\circ\times\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\ (0/25)=\frac{\sqrt{2}}{4}\ (0/25)$$

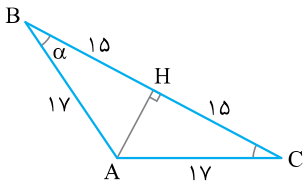
۱۸۶. صورت و مخرج عبارت را تقسیم بر $\cos x$ می‌کنیم:

$$\frac{\sin x+4\cos x}{4\sin x+3\cos x}\div\frac{\cos x}{\cos x}=\frac{\tan x+4}{4\tan x+3}\ (0/25)\Rightarrow\frac{\tan x+4}{4\tan x+3}=\frac{9}{23}$$

$$23\tan x+92=36\tan x+27\ (0/25)\Rightarrow 65=13\tan x\ (0/25)$$

$$\Rightarrow \tan x=5\ (0/25)$$

۱۸۷. ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، واضح است که AH، میانه، نیمساز و عمودمنصف BC هم است، بنابراین: $BH=CH$ $(0/25)$



حال داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH}=(AB)^2=(AH)^2+(BH)^2\ (0/25)$$

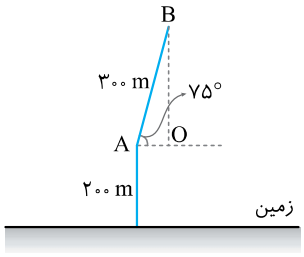
$$\xrightarrow[BH=15]{AB=17}(17)^2=(15)^2+(AH)^2\ (0/25)$$

$$\Rightarrow (AH)^2=64\Rightarrow AH=8\ (0/25)$$

حال به سراغ $\tan\alpha$ می‌رویم:

$$\tan\alpha=\frac{AH}{BH}=\frac{8}{15}\ (0/25)$$

۱۸۸. ابتدا شکل را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{OAB}:\sin 75^\circ=\frac{OB}{AB}\ (0/25)\Rightarrow\sin 75^\circ=\frac{95}{100}=\frac{OB}{300}$$

$$\Rightarrow OB=285\text{ m}\ (0/25)$$

ارتفاع کل برابر است با ارتفاع اولیه به‌علاوهٔ مقداری که بالا رفته است، پس:

$$h=200\text{ m}+285\text{ m}=485\text{ m}\ (0/25)$$

۱۸۹. D در ناحیهٔ دوم است و مقدار طول آن $-\frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2}\ (0/25)\xrightarrow{90^\circ<\alpha<180^\circ}\alpha=120^\circ\ (0/25)$$

$$\Rightarrow y=\sin\alpha\Rightarrow y=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (0/25)$$

حال به سراغ محاسبهٔ $\tan\alpha$ می‌رویم:

$$\tan(120^\circ)=\frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ}=-\sqrt{3}\ (0/25)$$

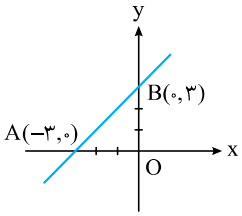
۱۹۰. می‌دانیم اگر $30^\circ\le\alpha<110^\circ$ باشد، با توجه به اینکه $\sin 90^\circ=1$ و $90^\circ<110^\circ$ است، داریم:

$$\frac{1}{2}\le\sin\alpha\le 1\ (0/25)\xrightarrow{\sin\alpha=4m-1}\frac{1}{2}\le 4m-1\le 1\ (0/25)$$

$$\xrightarrow{+1}\frac{3}{2}\le 4m\le 2\ (0/25)\xrightarrow{\div 4}\frac{3}{8}\le m\le\frac{1}{2}\ (0/25)$$

۱۹۱. ابتدا شکل را رسم می‌کنیم:

$$m=\tan 45=1\ (0/25)\Rightarrow y=x+3\ (0/25)\Rightarrow A(-3,0)\ (0/25)$$



$$(OA)^2+(OB)^2=(AB)^2\Rightarrow(AB)^2=9+9\Rightarrow AB=3\sqrt{2}\ (0/25)$$

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{OA\times OB}{2}=\frac{OH\times AB}{2}\ (0/25)\Rightarrow\frac{3\times 3}{2}=\frac{OH\times 3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ (0/25)$$

حال نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{OH}{AB}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ (0/25)$$

۱۹۲. ابتدا $\cos\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ (0/25)\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (0/25)$$

حال $\tan\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\ (0/25)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ (0/25)$$

سپس $\cot\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}\ (0/25)=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{4}}=-\frac{4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}\ (0/25)$$

در نهایت حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\cos\alpha^2+\frac{8}{9}\tan^2\alpha-\cot^2\alpha=(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2+\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}-8$$

$$=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}-8=1-8=-7\ (0/25)$$

۱۹۳. ابتدا حاصل $(1+2\tan x)(1+2\cot x)$ را می‌نویسیم:

$$(1+2\tan x)(1+2\cot x)=1+2\tan x+2\cot x+4\underbrace{\tan x\cot x}_{1}\ (0/25)$$

$$=5+2\tan x+2\cot x\ (0/25)=5+2(\tan x+\cot x)\ (0/25)$$

$$=5+2(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})=5+2(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x})\ (0/25)$$

$$=5+\frac{2}{\sin x\cos x}\ (0/25)$$

حال به سراغ قسمت دوم می‌رویم:

$$\frac{2}{\sin x}\times\sqrt{1+\tan^2 x}\xrightarrow{1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}}\frac{2}{\sin x}\times\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\ (0/25)$$

$$=\frac{2}{\sin x}\times\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{\sin x\cos x}\ (0/25)$$

در نهایت حاصل عبارت برابر است با:

$$۵+\frac{۲}{\sin x\cos x}-\frac{۲}{\sin x\cos x}+۵=۱۰ \quad (۰/۲۵)$$

---

۱۹۴. الف: درست (۰/۲۵)؛

$$\sqrt{\frac{۱}{۱+\cot^۲ x}}=\sqrt{\frac{۱}{\frac{۱}{\sin^۲ x}}}=\sqrt{\sin^۲ x}=|\sin x|\xrightarrow{۱۸۰^\circ<x<۲۷۰^\circ}-\sin x$$

$$۲\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}=۲\sqrt{\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x}$$

$$=۲\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}=۲|\sin x+\cos x|$$

$$\xrightarrow{۱۸۰^\circ<x<۲۷۰^\circ}-۲\sin x-۲\cos x$$

حال این دو را با هم جمع می‌کنیم:

$$-\sin x-۲\sin x-۲\cos x=-۳\sin x-۲\cos x$$

ب: درست (۰/۲۵)؛ اگر $\sin\alpha>\cos\alpha$ باشد، $۴۵^\circ<\alpha<۲۲۵^\circ$ می‌تواند باشد و از آنجایی که $\tan\alpha>۰$ است، $۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$ و $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$ می‌تواند باشد، اشتراک این دو بازه، $۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ$ یا $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۲۵^\circ$ است.

پ: نادرست (۰/۲۵)؛ ابتدا معادلهٔ خط L را به دست می‌آوریم:

$$m=\tan۳۰^\circ=\frac{\sqrt۳}{۳}\Rightarrow y=\frac{\sqrt۳}{۳}x+b\xrightarrow{(-۳,۰)}۰=-\sqrt۳+b\Rightarrow b=\sqrt۳$$

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt۳}{۳}x+\sqrt۳$$

حال نقطهٔ تلاقی را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt۳}{۳}x+\sqrt۳=\frac{۲\sqrt۳}{۳}x+۳\sqrt۳\Rightarrow -۲\sqrt۳=\frac{\sqrt۳}{۳}x\Rightarrow x=-۶\Rightarrow y=-\sqrt۳$$

پس نقطهٔ تلاقی $(-۶,-\sqrt۳)$ است.

ت: نادرست (۰/۲۵)؛ درصورتی‌که $\tan\alpha=\cot\alpha$ باشد، $\sin\alpha=\pm\cos\alpha$ است.

---

۱۹۵. الف: ۴ (۰/۵)؛

$$۰\le\theta\le۳۵^\circ\Rightarrow ۰\le۳\theta\le۱۰۵^\circ\Rightarrow ۰\le\sin۳\theta\le۱\Rightarrow ۰\le۴\sin۳\theta\le۴$$

بنابراین حداکثر مقدار آن برابر ۴ است.

ب: صفر (۰/۵)؛ هیچ مقداری برای α وجود ندارد. $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha\neq۱\Rightarrow$

پ: افزایش (۰/۵)؛ با تغییر از زاویهٔ ۱۸۰° تا ۲۲۵°، $\tan\alpha$ در حال افزایش است.

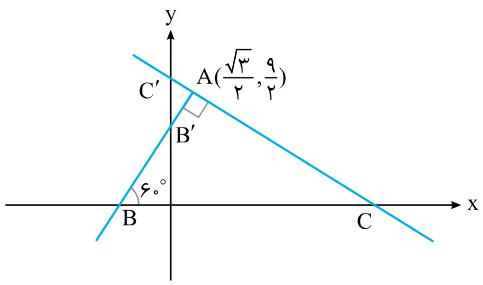
$(\tan۲۲۵^\circ=۱,\ \tan۱۸۰^\circ=۰)$

ت: ۱− (۰/۵)؛

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=۱-۱+\frac{۱}{b^۲}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱}{b^۲}$$

$$۱+\tan^۲=\frac{۱}{\cos^۲}\Rightarrow ۱+a^۲=\frac{۱}{\frac{۱}{b^۲}}\Rightarrow ۱=b^۲-a^۲\Rightarrow a^۲-b^۲=-۱$$

۱۹۶.



ابتدا شیب و معادلهٔ خطوط AB و BC را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\tan۶۰^\circ=\sqrt۳\ (۰/۲۵)\xrightarrow{A(\frac{\sqrt۳}{۲},\frac{۹}{۲})}y-\frac{۹}{۲}=\sqrt۳(x-\frac{\sqrt۳}{۲})$$

$$\Rightarrow y=\sqrt۳x+۳\ (۰/۲۵)$$

$$m_{AC}=\tan۱۵۰^\circ=-\frac{\sqrt۳}{۳}\ (۰/۲۵)\xrightarrow{A(\frac{\sqrt۳}{۲},\frac{۹}{۲})}y-\frac{۹}{۲}=-\frac{\sqrt۳}{۳}(x-\frac{\sqrt۳}{۲})$$

$$\Rightarrow y=-\frac{\sqrt۳}{۳}x+۵\ (۰/۲۵)$$

حال با توجه به معادلهٔ خطوط داریم:

$$y=\sqrt۳x+۳\Rightarrow B(-\sqrt۳,۰),B'(۰,۳)\ (۰/۲۵)$$

$$y=-\frac{\sqrt۳}{۳}x+۵\Rightarrow C(۵\sqrt۳,۰),C'(۰,۵)\ (۰/۲۵)$$

حال مساحت مثلث‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{BC\times h}{۲}=\frac{۹}{۲}\times(\frac{۶\sqrt۳}{۲})=\frac{۲۷\sqrt۳}{۲}\ (۰/۲۵)$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{h'\times B'C'}{۲}=\frac{\frac{\sqrt۳}{۲}\times۲}{۲}=\frac{\sqrt۳}{۲}\ (۰/۲۵)$$

---

۱۹۷. ابتدا حاصل تک‌تک جملات را به دست آورده و بعد آن‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sin۴۵^\circ=\frac{\sqrt۲}{۲}\ (۰/۲۵)\ ,\ \cos۱۸۰^\circ=-۱\ (۰/۲۵)\ ,\ \tan۳۰^\circ=\frac{\sqrt۳}{۳}\ (۰/۲۵)$$

$$\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt۳}{۲}\xrightarrow{(\ )^۲}\sin^۲۶۰^\circ=\frac{۳}{۴}\ (۰/۲۵),\ \cot۶۰^\circ=\frac{\sqrt۳}{۳}$$

$$\xrightarrow{(\ )^۲}\cot^۲۶۰^\circ=\frac{۱}{۳}\ (۰/۲۵)$$

حال حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin۴۵^\circ\times\cos۱۸۰^\circ\times(-\tan۳۰^\circ)}{۱-\sin^۲(۱۲۰^\circ)\times\cot^۲(۶۰^\circ)}=\frac{\frac{\sqrt۲}{۲}\times-۱\times-\frac{\sqrt۳}{۳}}{۱-\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{\sqrt۶}{۶}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۱}{\sqrt۶}}{\frac{۳}{۴}}$$

$$=\frac{۴}{۳\sqrt۶}=\frac{۴\sqrt۶}{۱۸}=\frac{۲\sqrt۶}{۹}\ (۰/۲۵)$$

---

۱۹۸. بیشترین مقدار یک کسر که صورت آن ثابت است، زمانی اتفاق می‌افتد که مخرج آن کمترین حالت ممکن باشد:

$$\min(a+b\sin cx)\xrightarrow{\sin cx=-۱}a-b$$

$$\xrightarrow{\max f(x)=۴}۴=\frac{۴}{a-b}\Rightarrow a-b=۱\ (۰/۲۵)$$

با توجه به ثابت بودن صورت کسر، کمترین مقدار زمانی اتفاق می‌افتد که مخرج بیشترین حالت ممکن باشد:

$$\max(a+b\sin cx)\xrightarrow{\sin cx=۱}a+b\xrightarrow{\min f(x)=\frac{۴}{۷}}\frac{۴}{۷}=\frac{۴}{a+b}$$

$$\Rightarrow a+b=۷\ (۰/۲۵)$$

حال می‌توانیم a و b را به دست آوریم:

$$\left.\begin{matrix}a-b=۱\\a+b=۷\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=۴\ (۰/۲۵),\ b=۳\ (۰/۲۵)$$

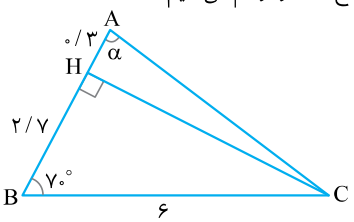
از طرفی $f(۱۰^\circ)=\frac{۸}{۱۱}$ است، بنابراین:

$$f(۱۰^\circ)=\frac{۴}{۴+۳\sin۱۰c}=\frac{۸}{۱۱}\Rightarrow ۴۴=۳۲+۲۴\sin۱۰c\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\sin۱۰c$$

$$c=۳\ (۰/۲۵)\ (\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲})$$

---

۱۹۹. ابتدا ارتفاع CH را رسم می‌کنیم:



سپس CH را پیدا می‌کنیم:

$$\sin ۷۰^\circ = \frac{CH}{۶} \Rightarrow CH = ۶\sin ۷۰^\circ = ۶\times\frac{۹}{۱۰} = ۵/۴ \quad (۰/۲۵)$$

حال به سراغ BH می‌رویم. برای پیدا کردن BH باید $\cos ۷۰^\circ$ را پیدا کنیم:

$$\cos^۲ ۷۰^\circ = ۱-\sin^۲ ۷۰^\circ = ۱-\frac{۸۱}{۱۰۰} = \frac{۱۹}{۱۰۰} \Rightarrow \cos ۷۰^\circ = \frac{\sqrt{۱۹}}{۱۰} \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}} \cos ۷۰^\circ = \frac{BH}{۶} \Rightarrow BH = ۶\cos ۷۰^\circ = \frac{۶\times\sqrt{۱۹}}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۱۹}=۴/۵} BH = \frac{۶\times ۴/۵}{۱۰} = ۲/۷ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow AH = AB - BH = ۰/۳ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{۵/۴}{۰/۳} = ۱۸ \quad (۰/۲۵)$$

---

۲۰۰. $\dfrac{۱-\cos^۴ x}{\sin^۲ x} + \dfrac{۱-\sin^۴ x}{\cos^۲ x} + \tan x\cot x$

$$= \frac{(۱-\cos^۲ x)(۱+\cos^۲ x)}{\sin^۲ x} + \frac{(۱-\sin^۲ x)(۱+\sin^۲ x)}{\cos^۲ x} + \tan x\cot x \quad (۰/۲۵)$$

$$= \frac{\sin^۲ x(۱+\cos^۲ x)}{\sin^۲ x} + \frac{\cos^۲ x(۱+\sin^۲ x)}{\cos^۲ x} + \tan x\cot x \quad (۰/۲۵)$$

$$= ۱+\cos^۲ x + ۱ + \sin^۲ x + ۱ \quad (۰/۲۵) = ۳ + \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۳+۱ = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

---

۲۰۱. $\cos(x+۶۰^\circ)$ را برابر u گرفته و ابتدا معادله را حل می‌کنیم.

$$\cos(x+۶۰^\circ) = u \Rightarrow u + \frac{۱}{u} = ۲ \Rightarrow \frac{u^۲+۱}{u} = ۲ \Rightarrow u^۲ - ۲u + ۱ = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (u-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow u = ۱ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \cos(x+۶۰^\circ) = ۱ \Rightarrow x+۶۰ = ۰ \text{ یا } ۳۶۰ \text{ یا } \ldots$$

همان جواب $x+۶۰^\circ = ۰$ را در نظر می‌گیریم:

$$x+۶۰^\circ = ۰ \Rightarrow x = -۶۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \tan(x+۹۰^\circ) = \tan(-۶۰^\circ + ۹۰^\circ) = \tan(۳۰^\circ) = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad (۰/۲۵)$$

---

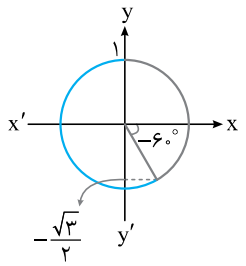
۲۰۲. ابتدا بازهٔ $۶\theta+۳۰^\circ$ را پیدا می‌کنیم:

$$-۱۵^\circ \le \theta \le ۱۵^\circ \xrightarrow{\times ۶} -۹۰^\circ \le ۶\theta \le ۹۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{+۳۰^\circ} -۶۰^\circ \le ۶\theta + ۳۰^\circ \le ۱۲۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \sin(-۶۰^\circ) \le \sin(۶\theta+۳۰^\circ) \le \sin(۹۰^\circ) \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le \sin(۶\theta+۳۰^\circ) \le ۱ \quad (۰/۲۵)$$



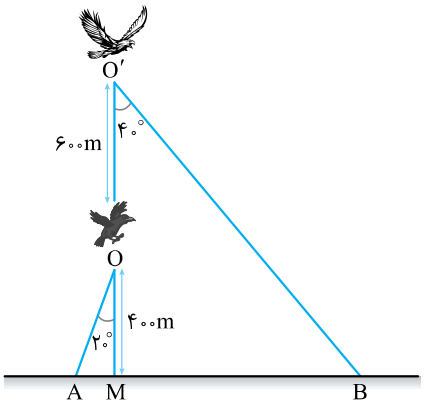
حال $۴m-۳$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le ۴m-۳ \le ۱ \xrightarrow{+۳} -\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۳ \le ۴m \le ۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\div ۴} \frac{-\sqrt{۳}+۶}{۸} \le m \le ۱ \quad (۰/۵)$$

---

۲۰۳. ابتدا شکل را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، دنبال فاصلهٔ A و B هستیم:

$$\overset{\Delta}{AOM}: \tan ۲۰^\circ = \frac{AM}{OM} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow AM = OM\tan ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow AM = ۰/۳۶\times ۴۰۰ = ۱۴۴ \text{ m} \quad (۰/۲۵)$$

$$\overset{\Delta}{BO'M}: \tan ۴۰^\circ = \frac{BM}{O'M} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow BM = O'M\tan ۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow BM = ۰/۸۳\times ۱۰۰۰ = ۸۳۰ \text{ m} \quad (۰/۲۵)$$

حال برای پیدا کردن فاصله باید جمع AM و BM را محاسبه کنیم:

$$AB = AM + BM = ۱۴۴ + ۸۳۰ = ۹۷۴ \text{ m} \quad (۰/۲۵)$$

---

۲۰۴. $\sin x + ۲\cos x = ۲/۲ \Rightarrow \sin x = ۲/۲ - ۲\cos x$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^۲ x = (۲/۲ - ۲\cos x)^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\sin^۲ x = ۱-\cos^۲ x} ۱-\cos^۲ x = (۲/۲-۲\cos x)^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow ۱-\cos^۲ x = ۴/۸۴ - ۸/۸\cos x + ۴\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۵\cos^۲ x - ۸/۸\cos x + ۳/۸۴ = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (۵\cos x - ۴)(\cos x - ۰/۹۶) = ۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۴}{۵} \\ \cos x = ۰/۹۶ \end{cases}$$

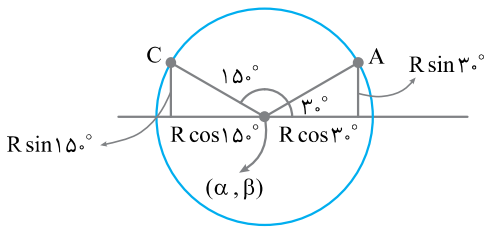
$$\begin{cases} \cos x = \frac{۹۶}{۱۰۰} = \frac{۲۴}{۲۵} \Rightarrow \sin x = \frac{۷}{۲۵} < \frac{۱}{۲} \times \\ \cos = \frac{۴}{۵} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \sin x = \frac{۳}{۵} > \frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

حال خواستهٔ مسئله را به دست می‌آوریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{۳}{۴} + \frac{۴}{۳} = \frac{۲۵}{۱۲} \quad (۰/۲۵)$$

---

۲۰۵. ابتدا مختصات نقطهٔ A را برحسب α و β و R به دست می‌آوریم:



طبق شکل داریم: $A(\alpha + R\cos ۳۰^\circ \quad (۰/۵), \beta + R\sin ۳۰^\circ \quad (۰/۵)$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{\sqrt{۳}}{۲}R = ۲ + ۲\sqrt{۳} \xrightarrow{\alpha\in\mathbb{Z}} \alpha = ۲ \quad (۰/۲۵), R = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$\beta + \frac{R}{۲} = ۴ \xrightarrow{\beta\in\mathbb{Z}} \beta + ۲ = ۴ \Rightarrow \beta = ۲ \quad (۰/۲۵)$$

۲۰۶. ابتدا سراغ پیدا کردن $\tan\alpha$ می‌رویم:

$$\frac{۲\sin\alpha+\cos\alpha}{۲\sin\alpha+۴\cos\alpha}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۴\sin\alpha+۸\cos\alpha=۱۰\sin\alpha+۵\cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۳\cos\alpha=۶\sin\alpha\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\tan\alpha\ (۰/۵)\Rightarrow m=\tan\alpha=\frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{m=\frac{۱}{۲}} y=\frac{۱}{۲}x+۱۰\xrightarrow{x=۴} A(۴,۱۲)\Rightarrow k=۱۲\ (۰/۲۵)$$

$$A(۴,۱۲)\Rightarrow OA=\sqrt{۱۶+۱۴۴}=\sqrt{۱۶۰}=۴\sqrt{۱۰}\ (۰/۵)$$

---

۲۰۷. درصورتی‌که بخواهیم جمع سمت چپ تساوی ۸ شود، باید داشته باشیم:

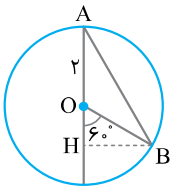
$$\sin\theta=۱\Rightarrow\cos\theta=۰\ (۰/۲۵)\ ,\ \cos\alpha=-۱\Rightarrow\sin\alpha=۰\ (۰/۲۵)$$

$$\cos\beta=۱\Rightarrow\sin\beta=۰\Rightarrow\tan\beta=۰\ (۰/۲۵)$$

حال به سراغ خواستهٔ مسئله می‌رویم: $\cos\theta+\sin\alpha-\tan\beta=۰+۰-۰=۰$ (۰/۲۵)

---

۲۰۸. **روش اول:**



(۰/۲۵)

$$\overset{\Delta}{OBH}:\sin۶۰^\circ=\frac{BH}{OB}\ (۰/۲۵)\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۲}\Rightarrow BH=\sqrt{۳}\ (۰/۲۵)$$

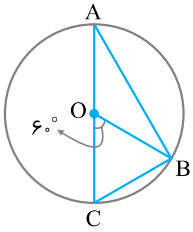
$$\overset{\Delta}{OBH}:\cos۶۰^\circ=\frac{OH}{OB}\ (۰/۲۵)\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{OH}{۲}\Rightarrow OH=۱\ (۰/۲۵)$$

$$AH=AO+OH\ (۰/۲۵)=۲+۱=۳\ (۰/۲۵)$$

$$\overset{\Delta}{ABH}:AH^۲+BH^۲=AB^۲\ (۰/۲۵)\Rightarrow ۳^۲+(\sqrt{۳})^۲=AB^۲\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow AB^۲=۱۲\Rightarrow AB=۲\sqrt{۳}\ (۰/۲۵)$$

روش دوم:



(۰/۲۵)

$$\overset{\Delta}{OBC}:OC=OB\Rightarrow\hat{OBC}=\hat{OCB}=\frac{۱۸۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ\ (۰/۵)$$

$$\overset{\Delta}{OAB}:OA=OB\ ,\ \hat{AOB}=۱۲۰^\circ\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow\hat{OAB}=\hat{OBA}=\frac{۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow\hat{ABC}=۶۰^\circ+۳۰^\circ=۹۰^\circ\ (۰/۲۵)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\sin\hat{C}=\frac{AB}{AC}\ (۰/۲۵)\Rightarrow\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AB}{۴}\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow AB=۲\sqrt{۳}\ (۰/۲۵)$$

---

۲۰۹. در ربع چهارم $\cos\theta>۰$ (۰/۲۵) و $\sin\theta<\cos\theta$ (۰/۲۵) است، پس داریم:

$$|\sin\theta-\cos\theta|=\cos\theta-\sin\theta\ (۰/۲۵)$$

$$|\cos\theta|=\cos\theta\ (۰/۲۵)$$

$$-۱\le\sin\theta\le۱\ (۰/۲۵)\Rightarrow-۱\le-\sin\theta\le۱\Rightarrow۰\le۱-\sin\theta\le۲\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow|۱-\sin\theta|=۱-\sin\theta\ (۰/۲۵)\Rightarrow|\sin\theta-\cos\theta|-|۱-\sin\theta|-|\cos\theta|$$

$$=\cos\theta-\sin\theta-۱+\sin\theta-\cos\theta=-۱\ (۰/۲۵)$$

۲۱۰.

$$\frac{\cos^۲x}{۱+\sin x}=\frac{۱-\sin^۲x}{۱+\sin x}\ (۰/۲۵)=\frac{(۱-\sin x)\cancel{(۱+\sin x)}}{\cancel{۱+\sin x}}\ (۰/۲۵)$$

$$=۱-\sin x\ (۰/۲۵)\Rightarrow ۱-\sin x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\sin x=۱-\frac{۳}{۲}=-\frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow\sin x<۰\ (۰/۲۵)\Rightarrow x\text{ در ناحیهٔ سوم یا چهارم}\ (۰/۵)$$

$$\tan x<۰\Rightarrow x\text{ در ناحیهٔ دوم یا چهارم}\ (۰/۵)$$

از اشتراک دو حالت ناحیه‌های فوق، نتیجه می‌شود که x در ناحیهٔ چهارم است. (۰/۲۵)

---

۲۱۱. الف: نادرست (۰/۲۵)؛ چون $۲۲۰^\circ<۲۵۰^\circ$ (۰/۲۵) و هر دو در ناحیهٔ سوم هستند، پس با افزایش زاویه، سینوس آن‌ها کاهش می‌یابد. بنابراین $\sin۲۲۰^\circ>\sin۲۵۰^\circ$ (۰/۲۵) و درنتیجه $\sin۲۲۰^\circ-\sin۲۵۰^\circ>۰$ (۰/۲۵) است.

ب: درست (۰/۲۵)؛

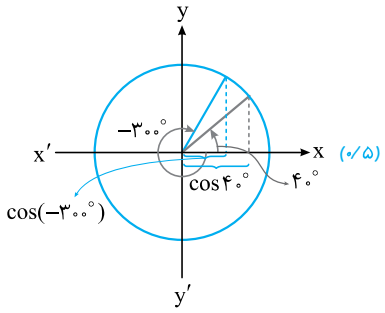
$$\tan^۴\alpha-۱=\frac{\sin^۴\alpha}{\cos^۴\alpha}-۱\ (۰/۲۵)=\frac{\sin^۴\alpha-\cos^۴\alpha}{\cos^۴\alpha}\ (۰/۲۵)$$

$$=\frac{(\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha)\overbrace{(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)}^{۱}}{\cos^۴\alpha}\ (۰/۲۵)$$

$$=\frac{\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha}{\cos^۴\alpha}=\frac{۱-\cos^۲\alpha-\cos^۲\alpha}{\cos^۴\alpha}\ (۰/۲۵)$$

$$=\frac{۱-۲\cos^۲\alpha}{\cos^۴\alpha}\ (۰/۲۵)=\frac{۱}{\cos^۴\alpha}-\frac{۲}{\cos^۲\alpha}\ (۰/۲۵)$$

پ: نادرست (۰/۲۵)؛ همان‌طور که می‌بینید، $\cos۴۰^\circ$ بزرگ‌تر از $\cos(-۳۰۰^\circ)$ است:



(۰/۵)

---

۲۱۲. ابتدا مقدار $\tan\theta$ را که برابر شیب خط است، به دست می‌آوریم:

$$۴x-۸y=۳\Rightarrow-۸y=۳-۴x\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۸}\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵)$$

حال ابتدا عبارت داده‌شده را برحسب $\tan\theta$ می‌نویسیم:

$$\frac{\sin^۲\theta}{۱-\sin\theta}+\frac{\sin^۲\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{\sin^۲\theta(۱+\sin\theta)+\sin^۲\theta(۱-\sin\theta)}{(۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)}\ (۰/۵)$$

$$=\frac{\sin^۲\theta+\cancel{\sin^۳\theta}+\sin^۲\theta-\cancel{\sin^۳\theta}}{۱-\sin^۲\theta}\ (۰/۲۵)=\frac{۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}\ (۰/۲۵)$$

$$=۲\tan^۲\theta\ (۰/۲۵)$$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$۲\tan^۲\theta=۲(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵)$$

۲۱۳.

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}=3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}=9 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sin^2 x-2\sin x}{1-\sin^2 x}=9 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow 1+\sin^2 x-2\sin x=9-9\sin^2 x \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 10\sin^2 x-2\sin x-8=0 \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\div 2} 5\sin^2 x-\sin x-4=0 \xrightarrow{\sin x=t} 5t^2-t-4=0 \quad (۰/۲۵)$$

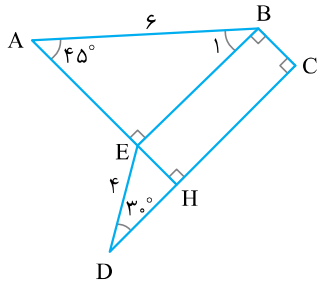
$$\Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{10} \Rightarrow t=\frac{1\pm 9}{10} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow t=1 \quad (۰/۲۵) \quad , \quad t=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \sin x=1 \quad \text{یا} \quad \sin x=-\frac{4}{5} \quad (۰/۲۵)$$

طبق تساوی $\frac{1-\sin x}{\cos x}=3$ مقدار $\sin x=1$ غیرقابل قبول است (۰/۲۵)، پس $\sin x=-\frac{4}{5}$ (۰/۲۵) است.

۲۱۴.



$$\overset{\Delta}{DEH}: \sin 30^\circ=\frac{EH}{ED} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{EH}{4} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow EH=2 \quad (۰/۲۵)$$

$$\hat{B}_1=45^\circ \Rightarrow AE=BE \quad (۰/۲۵) \quad \overset{\Delta}{ABE}: AE^2+BE^2=AB^2 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 2AE^2=6^2 \Rightarrow AE^2=18 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow AE=3\sqrt{2} \Rightarrow BE=3\sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$S_{\overset{\Delta}{DEH}}=\frac{1}{2}DE\times EH\times \sin\hat{E}=\frac{1}{2}\times 4\times 2\times \sin 60^\circ=2\sqrt{3} \quad (۰/۲۵)$$

$$S_{\overset{\Delta}{AEB}}=\frac{1}{2}AB\times AE\times \sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{2}\times \sin 45^\circ=9 \quad (۰/۲۵)$$

$$S_{EHCB}=EH\times BE=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$$

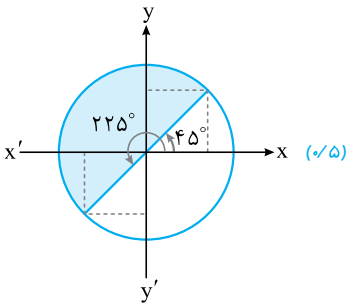
$$S_{\text{کل}}=S_{\overset{\Delta}{DEH}}+S_{EHCB}+S_{\overset{\Delta}{AEB}}=2\sqrt{3}+6\sqrt{2}+9 \quad (۰/۲۵)$$

---

۲۱۵. الف: نکته: ۱. به‌ازای هر نقطه بالای خط $y=x$، $y>x$ و به‌ازای هر نقطه پایین خط $y=x$، $x>y$.

۲. خط $y=x$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد.

در ناحیهٔ مشخص‌شده، یعنی برای $45^\circ<\theta<225^\circ$ (۰/۵) مقدار $\sin\theta$ از $\cos\theta$ بزرگ‌تر است:

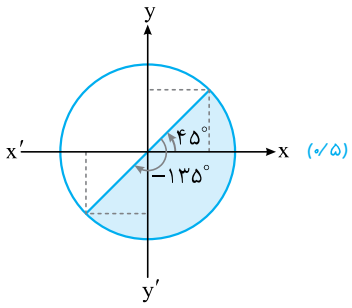


(۰/۵)

اگر مقدار زاویه‌ها را روی محور طول‌ها و عرض‌ها مشخص کنید، به‌راحتی می‌توانید به این نتیجه برسید. می‌بینید که در این ناحیه همواره عرض نقطه‌های روی دایرهٔ مثلثاتی از طول آن‌ها بیشتر است.

ب: در ناحیهٔ مشخص‌شده، یعنی برای $-135^\circ<\theta<45^\circ$ (۰/۵) مقدار $\sin\theta$ از $\cos\theta$ کوچک‌تر است.

در این ناحیه همواره عرض نقاط روی دایرهٔ مثلثاتی از طول آن‌ها کوچک‌تر است.

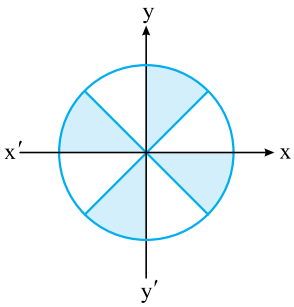


(۰/۵)

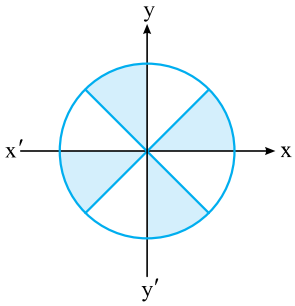
---

۲۱۶. الف: باید θ زاویه‌ای بین -135° و 45° باشد، مانند 280° یا 20° (۰/۵) یا ...

ب: باید θ در یکی از چهار ناحیه‌ای باشد که در شکل زیر می‌بینید، مانند: 60° یا 150° یا 340° (۰/۵) یا ...



پ: اول θ باید زاویه‌ای بین 45° و 225° باشد و ثانیاً در یکی از چهار ناحیهٔ زیر که اشتراک آن‌ها می‌شود:



$90^\circ<\theta<135^\circ$ یا $180^\circ<\theta<225^\circ$

پس زاویه‌ای مانند 100° یا 220° (۰/۵) یا ... قابل قبول است.

ت: اولاً θ باید زاویه‌ای بین -135° و 45° باشد و ثانیاً در یکی از چهار ناحیهٔ شکل قسمت «پ» که اشتراک آن‌ها می‌شود:

$270^\circ<\theta<315^\circ$ یا $0^\circ<\theta<45^\circ$

پس زاویه‌ای مانند 290° یا 300° یا 35° (۰/۵) یا ... قابل‌قبول است.

---

۲۱۷. با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ داریم:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3 \quad (۰/۵)$$

$$=\overbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}^{1} \quad (۰/۲۵) \quad (\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x) \quad (۰/۲۵)$$

$$=\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x \quad (*) \quad (۰/۲۵)$$

حال با استفاده از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ داریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 \quad (۰/۲۵)$$

$$=(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})^2 \quad (۰/۲۵) -2\sin^2 x\cos^2 x \quad (۰/۲۵)$$

$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x \quad (**) \quad (۰/۲۵)$$

حال با جای‌گذاری رابطهٔ (**) در رابطهٔ (*) داریم:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x \quad (۰/۲۵)$$

۲۱۸. ابتدا حدود زاویهٔ α را مشخص می‌کنیم:

$$-1\le\cos\alpha\le 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow -1\le-\cos\alpha\le 1\Rightarrow 1\le 2-\cos\alpha\le 3 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 2-\cos\alpha>0 \quad (۰/۲۵) \ , \ \frac{\cos\alpha}{2-\cos\alpha}<0\Rightarrow\cos\alpha<0 \quad (۰/۲۵)$$

$\Rightarrow \alpha$ در ناحیهٔ دوم و سوم (*) (۰/۵)

$\cot\alpha=-2<0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \alpha$ در ناحیهٔ دوم و چهارم (**) (۰/۵)

از اشتراک دو شرط (*) و (**) نتیجه می‌شود که α در ناحیهٔ دوم قرار دارد. (۰/۲۵)

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5} \quad (۰/۲۵)\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (۰/۲۵)$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha+\frac{1}{5}=1$$

$$\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5} \quad (۰/۲۵)\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (۰/۲۵)$$

$$\sqrt{5}\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)+\sqrt{20}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-5\times\frac{4}{5}=\text{عبارت خواسته‌شده}$$

$$=-4 \quad (۰/۲۵)$$

۲۱۹. الف: دو - قرینهٔ / ب: ندارند / پ: منفی - یک / ت: منفی / ث: تعریف‌نشده / ج: غیریکسان (مختلف)

۲۲۰. الف: $\sqrt[3]{۰/۰۲۷}=۰/۳$ ب: $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=-\frac{1}{2}$

پ: $(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$ ت: $\sqrt[3]{-64}=-4$

ث: $(5\sqrt{3})^2=25\times3=75$ ج: $(-5)^3=-125$

چ: $(۰/۱)^4=۰/۰۰۰۱=10^{-4}$ ح: $(3\sqrt{7})^2=9\times7=63$

خ: $\sqrt[6]{64\times10^{-12}}=2\times10^{-2}=۰/۰۲$ د: $(2\sqrt[3]{5})^3=8\times5=40$

۲۲۱.

عدد	$\frac{1}{32}$	$-۰/۱۲۵$	-243	64	
ریشهٔ دوم	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}}$	— —	— —	8 -8
ریشهٔ سوم	$\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$	$-۰/5$	$3\sqrt[3]{9}$	4	
ریشهٔ چهارم	$\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$	— —	$2\sqrt[4]{4}$	$-2\sqrt[4]{4}$
ریشهٔ پنجم	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt[5]{۰/۱۲۵}$	-3	$2\sqrt[5]{2}$	

۲۲۲. ابتدا مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را به دست آورده و سپس آن‌ها را روی محور مشخص می‌کنیم.

الف: $\sqrt{5}\simeq2/2$

ب: $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

پ: $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

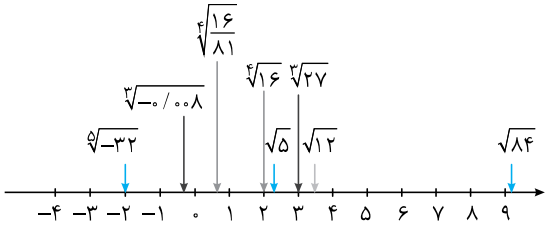
ت: $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$

ث: $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}\simeq2\times1/7=3/4$

ج: $\sqrt[3]{-۰/۰۰۸}=\sqrt[3]{(-۰/2)^3}=-۰/2$

چ: $\sqrt{8}\simeq9/1$

ح: $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\sqrt[4]{(\frac{2}{3})^4}=\frac{2}{3}\simeq۰/6$



۲۲۳. الف: $49<52<64\Rightarrow\sqrt{49}<\sqrt{52}<\sqrt{64}\Rightarrow7<\sqrt{52}<8$

ب: $8<18<27\Rightarrow\sqrt[3]{8}<\sqrt[3]{18}<\sqrt[3]{27}\Rightarrow2<\sqrt[3]{18}<3$

$\Rightarrow-3<-\sqrt[3]{18}<-2$

پ: $64<100<125\Rightarrow\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{100}<\sqrt[3]{125}\Rightarrow4<\sqrt[3]{100}<5$

ت: $64<78<81\Rightarrow\sqrt{64}<\sqrt{78}<\sqrt{81}\Rightarrow8<\sqrt{78}<9$

ث: $81<110<256\Rightarrow\sqrt[4]{81}<\sqrt[4]{110}<\sqrt[4]{256}\Rightarrow3<\sqrt[4]{110}<4$

ج: $-64<-35<-27\Rightarrow\sqrt[3]{-64}<\sqrt[3]{-35}<\sqrt[3]{-27}$

$\Rightarrow-4<\sqrt[3]{-35}<-3$

چ: $196<220<225\Rightarrow\sqrt{196}<\sqrt{220}<\sqrt{225}\Rightarrow14<\sqrt{220}<15$

ح: $-1024<-650<-243\Rightarrow\sqrt[5]{-1024}<\sqrt[5]{-650}<\sqrt[5]{-243}$

$\Rightarrow-4<\sqrt[5]{-650}<-3$

خ: $144<150<169\Rightarrow\sqrt{144}<\sqrt{150}<\sqrt{169}\Rightarrow12<\sqrt{150}<13$

۲۲۴. الف: $6<\sqrt{a}<7\Rightarrow6^2<a<7^2\Rightarrow36<a<49$

بنابراین تمام اعداد بین ۳۶ و ۴۹ می‌توانند به‌جای a قرار بگیرند.

ب: $-3<\sqrt[3]{a}<-2\Rightarrow(-3)^3<a<(-2)^3\Rightarrow-27<a<-8$

پ: $-4<-\sqrt[4]{a}<-3\Rightarrow3<\sqrt[4]{a}<4\Rightarrow3^4<a<4^4\Rightarrow81<a<256$

ت: $1<\sqrt[5]{a}<2\Rightarrow1^5<a<2^5\Rightarrow1<a<32$

۲۲۵. الف: $36<38<49\Rightarrow\sqrt{36}<\sqrt{38}<\sqrt{49}\Rightarrow6<\sqrt{38}<7$

عدد	۶/۱	۶/۲
توان دوم	۳۷/۲۱	۳۸/۴۴

$\Rightarrow\sqrt{38}\simeq6/2$