۲۰

نشرالگو

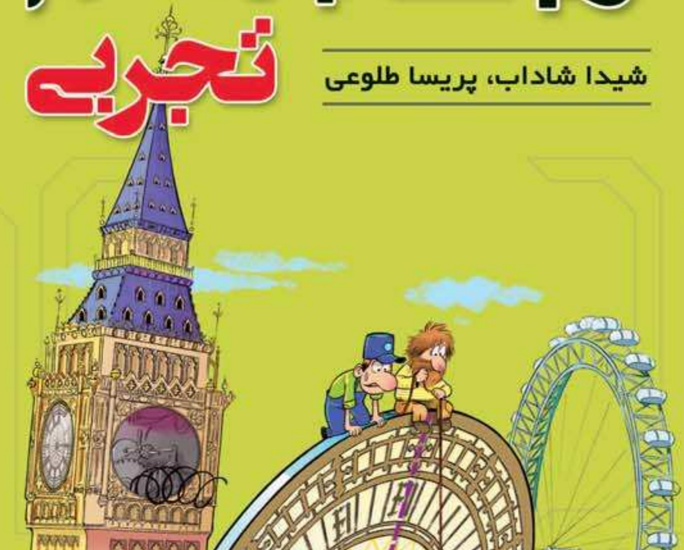
تمام

تمرین امتحان

ریاضی یازدهم

تجربی

شیدا شاداب، پریسا طلوعی



درس‌نامهٔ سؤال‌محور

سؤالات تألیفی

سؤالات شبیه‌ساز امتحانی

امتحان میان‌سال و جامع

پاسخ‌های تشریحی

پیشگفتار

به نام خدا

سلام به شما یازدهمی‌های عزیز

با برگزاری امتحانات نهایی و تأثیر آن بر آزمون ورودی دانشگاه‌ها، لزوم آماده‌سازی برای شرکت در این امتحان‌ها دوچندان شده است. کتاب ریاضی یازدهم تمام را برای یاری رساندن به شما در این امر نوشته‌ایم و به قسمت‌های زیر تقسیم کرده‌ایم.

درس‌نامه

امتحان نهایی در درس ریاضی معمولاً شامل دو بخش است، یک بخش با سؤال‌های جای خالی، درست و نادرست و ... و بخش دیگر مسئله‌های محاسباتی و گاهی اثباتی.

الف) برای بخش نخست، در درس‌نامه تمام قسمت‌های حفظی و مهمِ متن کتاب درسی را آورده‌ایم.

ب) برای بخش مسئله‌ها، در درس‌نامه مثال‌های متعددی آورده‌ایم تا با تیپ‌های مختلف مسئله‌ها و روش‌های حل آن‌ها آشنا شوید.

تمرین‌های تألیفی

در هر درس، بعد از درس‌نامهٔ کامل، تعدادی تمرین تشریحی قرار داده‌ایم تا با حل آن‌ها قدرت حل مسئله و آزمون دادن شما بالا برود. این تمرین‌ها شامل تیپ‌های مختلف سؤال‌هایی هستند که در امتحانات مطرح می‌شوند تا هم شما و هم همکار عزیز ما، یعنی معلم‌تان خیالتان راحت باشد که این نمونه سؤال‌ها را یاد گرفته‌اید.

تمرین‌های مهارتی

برای محکم‌کاری بیشتر در پایان هر فصل تمرین‌هایی با سطح بالاتر گذاشته شده‌اند که کمی سخت‌تر هستند و مهارت شما را در حل مسائل بالا می‌برند، اما پیشنهاد می‌کنیم که پس از مشورت با معلم خود این تمرین‌ها را حل کنید.

گام نهایی

یک کتاب مستقل شامل:

الف) خلاصه هر فصل شامل تمام تعریف‌ها و مفاهیم مهم

ب) مسائل و پرسش‌های امتحان‌های نهایی و مشابه آن‌ها با بارم‌بندی

پ) پاسخ کلیدی شبیه امتحانات آموزش و پرورش برای آموزش شما از نحوهٔ نوشتن راه‌حل برای گرفتن نمرهٔ کامل

پاسخ تشریحی

حل تمام مسائل و تمرین‌ها به طور کاملاً تشریحی

در آخر باید بگیم این کتاب

«تمام آن چیزی است که شما برای ۲۰ گرفتن لازم دارید»

در پایان وظیفهٔ خود می‌دانیم از گروه ویراستاری نشر الگو برای ویراستاری علمی کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی و مریم احمدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم ستین مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

شیدا شاداب – پریسا طلوعی

فهرست مطالب

فصل ششم: حد و پیوستگی

فصل هفتم: آمار و احتمال

فصل هشتم: پاسخ‌های تشریحی

فصل نهم: گام نهایی

درس اول

آشنایی با برخی از انواع توابع

تابع

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. هر تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد.

نمایش رابطه و شرط تابع بودن آن

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب

یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب مانند $(a\,,b)$ است که $a\in A$ و $b\in B$.

شرط آنکه این رابطه تابع باشد، این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ اول یکسان نداشته باشند.

در واقع اگر در یک رابطه دو زوج مرتب مؤلفهٔ اول یکسان داشته باشند، این رابطه می‌تواند تابع باشد به شرط آنکه مؤلفه‌های دوم این دو زوج مرتب نیز یکسان باشند.

مثال

توجه کنید که رابطهٔ $\{(a,b),(c,d),(a,e)\}$ با شرط $b\neq e$ تابع نیست. زیرا دو زوج مرتب (a,b) و (a,e) مؤلفهٔ اول برابر و مؤلفهٔ دوم نابرابر دارند.

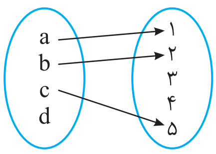
نمودار پیکانی (نمودار وِن)

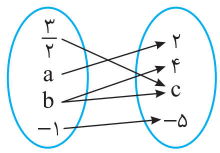
اگر ارتباط میان اعضای دو مجموعهٔ A و B را با پیکان نشان دهیم، نمودار پیکانی رابطه به‌دست می‌آید.

شرط آنکه این رابطه تابع باشد، این است که از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان به یکی از اعضای مجموعهٔ B رسم شود.

مثال

نمودارهای پیکانی زیر را در نظر بگیرید.

الف)


ب)


الف) تابع نیست، زیرا از عضو d در مجموعهٔ اول پیکانی خارج نشده است.

ب) تابع نیست، زیرا از عضو b در مجموعهٔ اول به دو عضو متمایز از مجموعهٔ دوم پیکان خارج شده است.

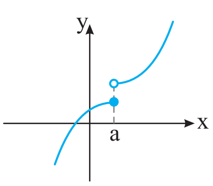
نمودار مختصاتی

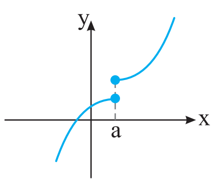
هر زوج مرتب از عددها را می‌توان مختصات نقطه‌ای در صفحهٔ مختصات در نظر گرفت، به‌طوری که مؤلفهٔ اول آن طول این نقطه و مؤلفهٔ دوم آن عرض این نقطه باشد. با توجه به این موضوع اگر نمایش زوج مرتبی یک رابطه را داشته باشیم، می‌توانیم نمودار مختصاتی آن را رسم کنیم.

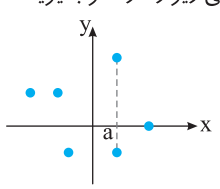
شرط آنکه این رابطه تابع باشد، این است که هر خط موازی محور y (هر خط عمودی) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال

نمودارهای مختصاتی زیر را در نظر بگیرید.

الف)


ب)


پ)


الف) تابع است، زیرا هر خط موازی محور y (هر خط عمودی) نمودار مختصاتی را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) تابع نیست، زیرا خط عمودی $x=a$ نمودار مختصاتی را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

پ) تابع نیست، زیرا خط عمودی $x=a$ نمودار مختصاتی را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

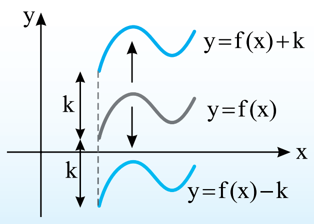
انتقال عمودی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>۰$.

● برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم.

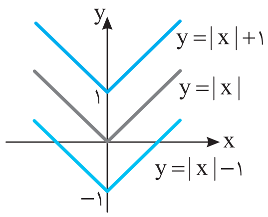
● برای رسم نمودار تابع $y=f(x)-k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به پایین منتقل کنیم.

بنابراین نقطهٔ $(x_۰, y_۰ \pm k)$ از نمودار تابع $y=f(x)\pm k$ متناظر با نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ از نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع‌های $y=f(x)$ و $y=f(x)\pm k$ یکسان است.



مثال

نمودار توابع $y=|x|+۱$ و $y=|x|-۱$ را از روی نمودار تابع $y=|x|$ رسم می‌کنیم.



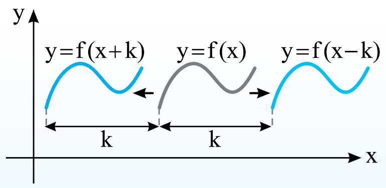
انتقال افقی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>۰$.

● برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به سمت چپ منتقل کنیم.

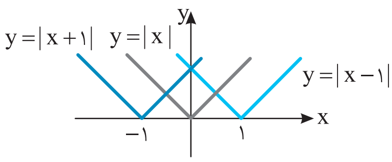
● برای رسم نمودار تابع $y=f(x-k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به سمت راست منتقل کنیم.

بنابراین نقطهٔ $(x_۰ \mp k, y_۰)$ از نمودار تابع $y=f(x\pm k)$ متناظر با نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ از نمودار تابع $y=f(x)$ است. برد تابع‌های $y=f(x)$ و $y=f(x\pm k)$ یکسان است.



مثال

نمودار توابع $y=|x-۱|$ و $y=|x+۱|$ را از روی نمودار $y=|x|$ رسم می‌کنیم.

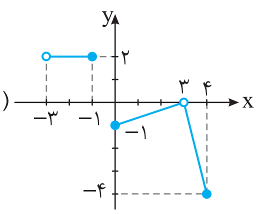


دامنه و برد تابع

به مجموعهٔ مؤلفه‌های اول تابع f دامنهٔ تابع گفته می‌شود و آن را با D_f نشان می‌دهند و به مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم f برد تابع گفته می‌شود و آن را با R_f نشان می‌دهند.

مثال

پ)



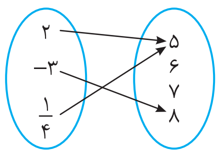
$D=(-۳,-۱]\cup[۰,۴]-\{۳\}$

$R=[-۴,۰)\cup\{۲\}$

ب) $f=\{(-۱,۴),(۰,۰),(۷,۲)\}$

$D_f=\{-۱,۰,۷\},\quad R_f=\{۴,۰,۲\}$

الف)



$D=\{۲,-۳,\frac{۱}{۴}\},\quad R=\{۵,۸\}$

نمایش جبری یا ضابطه‌ای تابع

به رابطهٔ بین اعضای دامنه و برد تابع f نمایش جبری یا ضابطهٔ تابع f می‌گوییم. در این نمایش، تابع f قانونی است که به هر عضو مجموعهٔ A (دامنهٔ تابع) مانند x یک و تنها یک عضو از مجموعهٔ B (برد تابع) مانند y را نظیر می‌کند، y را با $f(x)$ نیز نشان می‌دهند، یعنی $y=f(x)$.

مثال

نمایش ضابطه‌ای تابعی که هر عدد را به مکعب آن نظیر می‌کند به شکل $f(x)=x^۳$ است.

انواع تابع

تابع خطی، تابع همانی و تابع ثابت

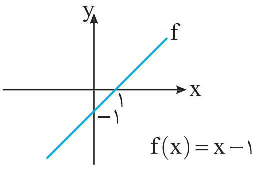
۱) تابع خطی: هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را تابع خطی می‌گوییم.

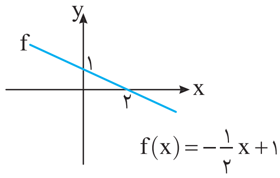
۲) تابـع همانـی: تابـع f را تابـع همانی می‌گوییم هرگاه دامنه و برد تابع برابر باشـند و هر عضو دامنهٔ f دقیقاً به همان عضو در برد تابع f نظیر شـود. اگر دامنهٔ تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، ضابطهٔ تابع همانی به شکل $f(x)=x$ است و نمودار آن نیمساز نواحی اول و سوم است.

۳) تابع ثابت: تابع f را تابع ثابت می‌گوییم هرگاه برد آن فقط یک عضو داشـته باشـد. ضابطهٔ این تابع به‌صورت $f(x)=k$ اسـت که در آن k عددی حقیقی و ثابت است و نمودار این تابع خطی موازی محور x (خطی افقی) است.

مثال

تابع‌های مقابل خطی هستند:

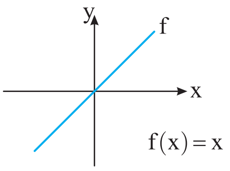


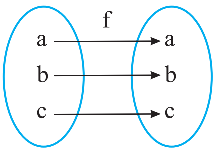


مثال

تابع‌های مقابل نمونه‌هایی از تابع همانی هستند.

$f=\{(-۲,-۲),(۰,۰),(\sqrt{۲},\sqrt{۲})\}$

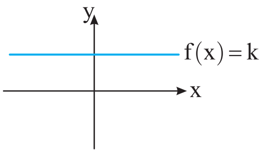


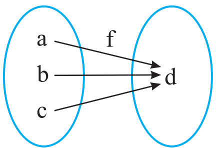


مثال

تابع‌های مقابل همگی تابعی ثابت هستند.

$f=\{(-۲,۳),(\sqrt{۳},۳),(-\frac{۲}{۳},۳)\}$





توابع گویا

تابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

مثال

تابع‌های روبه‌رو همگی گویا هستند:

$f(x)=\frac{۱}{x},\quad g(x)=\frac{x-\sqrt{۲}}{x^{۲}+x},\quad h(x)=\frac{\frac{۱}{۲}x^{۳}-۱}{۷x+۴}$

اما تابع $s(x)=\frac{\sqrt{x}}{۲-x}$ تابعی گویا نیست، زیرا $\sqrt{x}$ چندجمله‌ای نیست.

نکته

هر تابع چندجمله‌ای را می‌توان یک تابع گویا در نظر گرفت که مخرج آن ۱ است.

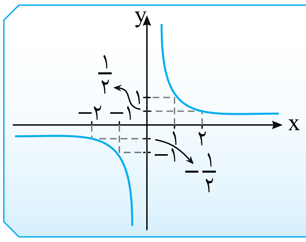
مثال

تابع‌های $f(x)=-۳$ و $g(x)=\sqrt{۲}x+۳$ نمونه‌هایی از تابع گویا هستند.

نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$

معروف‌ترین تابع گویا تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ است که نمودار آن به شکل روبه‌رو است.

x	$\cdots$	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	تعریف نشده	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\cdots$



ویژگی‌های تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ از روی نمودار آن

۱) چون تابع فقط در $x=0$ تعریف نشده است، دامنهٔ آن به شکل $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ است.

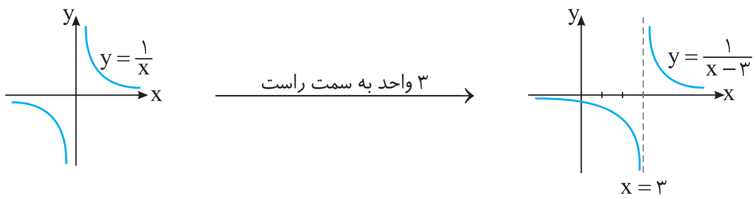
۲) نمودار تابع محور y را قطع نمی‌کند، اما به اندازهٔ دلخواه به محور y نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

۳) نمودار تابع محور x را قطع نمی‌کند، اما به اندازهٔ دلخواه به محور x نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

۴) چون نمودار تابع محور x را قطع نمی‌کند، پس برد آن به‌صورت $R_f=\mathbb{R}-\{0\}$ است.

مثال

نمودار تابع $y=\frac{1}{x-3}$ را به شکل زیر رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $y=\frac{1}{x-3}$، کافی است نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را به اندازهٔ ۳ واحد به سمت راست انتقال دهیم.



دامنهٔ توابع گویا

از سال‌های گذشته به‌خاطر داریم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطهٔ یک تابع گویا را صفر می‌کنند، (یعنی ریشه‌های مخرج) عضو دامنهٔ این تابع نیستند. به عبارت دیگر اگر f تابعی گویا باشد، آن‌گاه $D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$. پس برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع گویا، مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های مخرج را (در صورت وجود) از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم.

مثال

دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{3}{x-4}$ برابر $D_f=\mathbb{R}-\{4\}$ است.

مسئله ۱

دامنهٔ تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x-2}{x-2}$ ب) $g(x)=\frac{\sqrt{3x}}{x^2-5x+6}$ پ) $h(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ت) $k(x)=\frac{2}{3}x-4$

راه‌حل

الف) $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

ب) $x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=2,\ \ x=3 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{2,3\}$

پ) $x^2+1=0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow D_h=\mathbb{R}$

ت) واضح است که ضابطهٔ این تابع به‌صورت $k(x)=\dfrac{\frac{2}{3}x-4}{1}$ است که مخرج آن مخالف صفر است. پس $D_k=\mathbb{R}$.

مسئله ۲

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{3x-2}{2x^2+ax+b}$ به شکل $\mathbb{R}-\{-1,3\}$ باشد، مقدار $a+b$ را بیابید.

راه‌حل دامنهٔ تابع‌های گویا به شکل $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است. بنابراین $x=-1$ و $x=3$ ریشه‌های مخرج تابع f هستند.

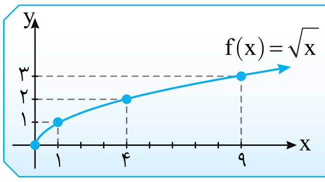
$$\begin{cases} x=-1 \xrightarrow[\text{در مخرج تابع}]{\text{جایگذاری}} 2(-1)^2+a(-1)+b=0 \\ x=3 \xrightarrow[\text{در مخرج تابع}]{\text{جایگذاری}} 2(3)^2+a(3)+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-a+b=0 \\ 18+3a+b=0 \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا به‌دست می‌آید $a=-4$ و $b=-6$. بنابراین

$a+b=-4+(-6)=-10$

توابع رادیکالی (توابع ریشهٔ دوم)

تابع رادیکالی



ساده‌ترین تابع رادیکالی تابعی است که به هر عدد نامنفی، ریشهٔ دوم نامنفی آن عدد را نسبت می‌دهد. بنابراین ضابطهٔ این تابع به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ و دامنهٔ آن مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی است. نمودار این تابع به‌صورت مقابل است: $D_f=[۰,+\infty)$

مثال

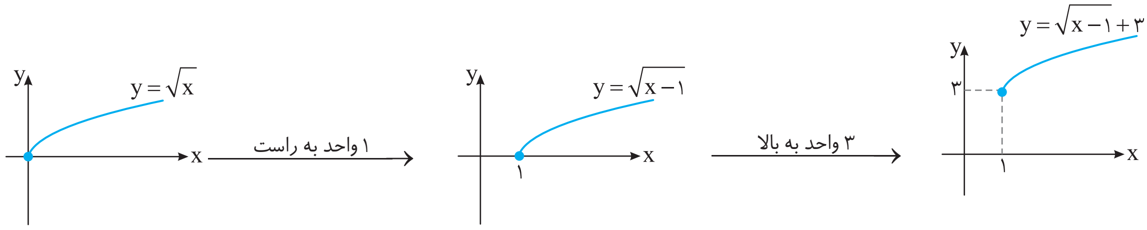
فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$. در این صورت $f(۱۶)=\sqrt{۱۶}=۴$ و $f(۰/۲۵)=\sqrt{۰/۲۵}=\frac{۱}{۲}$.

رسم نمودار برخی توابع رادیکالی

به کمک انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ می‌توان نمودار برخی از تابع‌های رادیکالی را رسم کرد.

مثال

نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱}+۳$ را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم. نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ابتدا ۱ واحد به سمت راست و سپس ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱}+۳$ به‌دست بیاید.

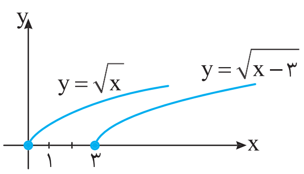


مسئله ۳

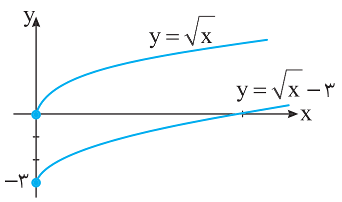
نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید، سپس دامنهٔ آن‌ها را از روی نمودار مشخص کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-۳}$ ب) $g(x)=-۳+\sqrt{x}$ پ) $h(x)=\sqrt{x+۱}+۲$

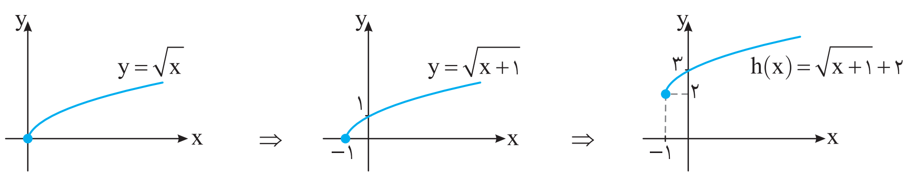
راه‌حل الف) نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را در راستای محور x سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. با توجه به نمودار $D_f=[۳,+\infty)$.



ب) نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را در راستای محور y سه واحد به پایین انتقال می‌دهیم. با توجه به نمودار $D_g=[۰,+\infty)$.



پ) ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را در راستای محور x یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را در راستای محور y دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع h به‌دست بیاید. با توجه به نمودار $D_h=[-۱,+\infty)$.



مسئله ۴

نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را به اندازهٔ ۲ واحد در راستای محور x به سمت چپ و ۳ واحد در راستای محور y به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست آید.

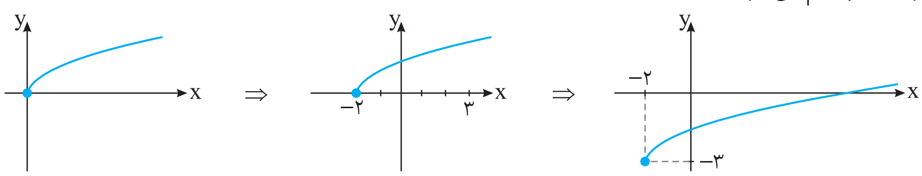
الف) ضابطه، نمودار و دامنهٔ تابع f را مشخص کنید.

ب) نمودار این تابع محورهای مختصات را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

راه‌حل الف) ضابطهٔ تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}}y=\sqrt{x+۲}\xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}}f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$$

نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود:



$y=\sqrt{x}$ ⇒ $y=\sqrt{x+۲}$ ⇒ $y=\sqrt{x+۲}-۳$

با توجه به نمودار، $D_f=[-۲,+\infty)$.

ب) طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور x جواب معادلهٔ $f(x)=۰$ است. توجه کنید که

$$f(x)=۰\Rightarrow\sqrt{x+۲}-۳=۰\Rightarrow\sqrt{x+۲}=۳\xrightarrow{\text{توان ۲}}x+۲=۹\Rightarrow x=۷$$

بنابراین نمودار تابع f محور x را در نقطهٔ $(۷,۰)$ قطع می‌کند. از طرف دیگر، عرض نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور y برابر است با

$$f(۰)=\sqrt{۰+۲}-۳=\sqrt{۲}-۳$$

بنابراین نمودار تابع f محور y را در نقطهٔ $(۰,\sqrt{۲}-۳)$ قطع می‌کند.

دامنهٔ توابع رادیکالی

دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ برابر است با $D_g=\{x|x\in D_f,\ \ f(x)\geq ۰\}$

مسئله ۵

دامنهٔ هریک از تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{۲-۴x}$ **ب)** $g(x)=\sqrt{x^۲+۲x-۸}$ **پ)** $h(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}$ **ت)** $k(x)=\sqrt{\frac{۲x-۱}{۱-x}}$

راه‌حل الف) توجه کنید که

$$۲-۴x\geq ۰\Rightarrow ۴x\leq ۲\Rightarrow x\leq\frac{۱}{۲}\Rightarrow D_f=(-\infty,\frac{۱}{۲}]$$

ب)

$$x^۲+۲x-۸\geq ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x^۲+۲x-۸=۰\Rightarrow(x+۴)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۴\\x=۲\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۴		۲		$+\infty$
$x^۲+۲x-۸$		+	۰	−	۰	+	

$\Rightarrow D_g=(-\infty,-۴]\cup[۲,+\infty)$

پ) توجه کنید که

$$h(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}$$

چون به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $(x-۱)^۲\geq ۰$، پس $D_h=\mathbb{R}$.

ت) باید داشته باشیم $\frac{۲x-۱}{۱-x}\geq ۰$ و $۱-x\neq ۰$. پس عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\\۱-x=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}\Rightarrow$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
$۲x-۱$		−	۰	+		+	
$۱-x$		+		+	۰	−	
$\frac{۲x-۱}{۱-x}$		−	۰	+	تعریف نشده	−	

در نتیجه $D_k=[\frac{۱}{۲},۱)$.

تساوی دو تابع

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر می‌نامیم به شرطی که

۱) دامنهٔ دو تابع برابر باشند، یعنی $D_f = D_g$.

۲) ضابطهٔ دو تابع برابر باشند، یعنی برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم $f(x)=g(x)$.

نکته

دامنهٔ هر تابع را قبل از ساده کردن ضابطهٔ آن مشخص می‌کنیم.

مثال

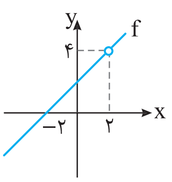
فرض کنید $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ و $g(x)=x+۲$. می‌خواهیم تساوی این تابع‌ها را بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا تساوی دامنهٔ آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

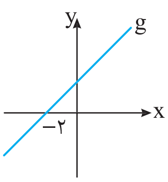
توجه کنید که در تابع f، $x=۲$ ریشهٔ مخرج است. بنابراین دامنهٔ این تابع به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$ است. از طرفی g تابعی چندجمله‌ای است و دامنهٔ آن برابر $D_g=\mathbb{R}$ است. واضح است که دامنه‌های دو تابع برابر نیستند $(D_f \neq D_g)$، پس دو تابع f و g با هم برابر نیستند.

توجه کنید که ضابطهٔ تابع f پس از ساده کردن به‌صورت مقابل است:

$$f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)}=x+۲$$

ضابطهٔ تابع f با ضابطهٔ تابع g برابر است، اما چون شرط اول تساوی دو تابع (برابری دامنه‌ها) برقرار نیست، پس این دو تابع برابر نیستند. نمودار این دو تابع به‌صورت مقابل است:





توجه در مثال بالا، به وضوح نمودارهای دو تابع f و g بر هم منطبق نیستند. اگر دو تابع با هم برابر باشند، نمودارهای آن‌ها کاملاً بر هم منطبق‌اند.

مسئله ۶

تساوی تابع‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\frac{x}{x},\quad g(x)=۱$

ب) $f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱},\quad g(x)=\sqrt{x^۲-x}$

پ) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ x+۳ & x=۳\end{cases},\quad g(x)=x+۳$

راه‌حل

الف) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\},\quad D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f\neq g$

ب) توجه کنید که برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع f باید اشتراک دامنهٔ تابع‌های $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt{x-۱}$ را مشخص کنیم:

$$\begin{aligned} y=\sqrt{x} &\xrightarrow{x\geq ۰} D=[۰,+\infty)\\ y=\sqrt{x-۱} &\xrightarrow{x-۱\geq ۰} D=[۱,+\infty)\end{aligned} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[۱,+\infty),\ D_g: x^۲-x\geq ۰\Rightarrow x(x-۱)\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x^۲-x$		+	۰	−	۰	+	

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)$$

چون $D_f\neq D_g$، پس $f\neq g$.

پ) با توجه به ضابطهٔ تابع f واضح است که $D_f=\mathbb{R}$، همچنین $D_g=\mathbb{R}$. پس $D_f=D_g$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{(x-۳)}=x+۳,\quad x\neq ۳\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۳ & x\neq ۳\\ x+۳ & x=۳\end{cases}$$

در نتیجه $f(x)=x+۳$. چون ضابطهٔ تابع g هم به‌صورت $g(x)=x+۳$ است، پس ضابطه‌های دو تابع نیز برابرند. بنابراین تابع‌های f و g با یکدیگر برابرند.

توابع پله‌ای و جزء صحیح

تابع پله‌ای

به تابع چندضابطه‌ای که ضابطهٔ هر قسمت آن، تابعی ثابت است، تابع پله‌ای گفته می‌شود.

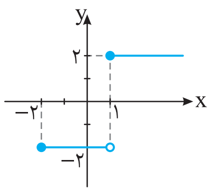
مثال

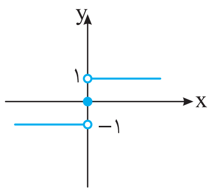
تابع‌های زیر همگی پله‌ای هستند.

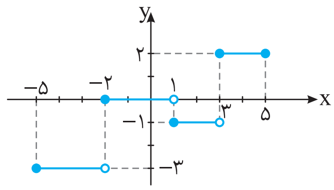
الف) $f(x)=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ -۲ & -۲\leq x<۱ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases} -۳ & -۵\leq x<-۲ \\ ۰ & -۲\leq x<۱ \\ -۱ & ۱\leq x<۳ \\ ۲ & ۳\leq x\leq ۵ \end{cases}$





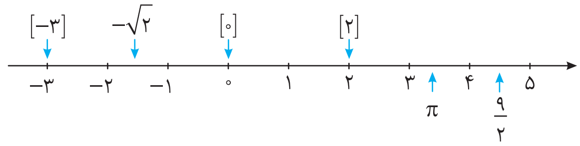


جزء صحیح عدد حقیقی

جزء صحیح هر عدد غیرصحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد. جزء صحیح هر عدد صحیح با خود آن عدد برابر است. جزء صحیح عدد x را با $[x]$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که جزء صحیح هر عدد حقیقی، برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچک‌تر یا با آن برابر است.

مثال

برای پیدا کردن جزء صحیح عدد غیرصحیح، باید مشخص کنیم این عدد بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. در این صورت عدد صحیح کوچک‌تر، برابر جزء صحیح عدد موردنظر است.



الف) $[۲]=۲$

ب) $[-۳]=-۳$

پ) $[۰]=۰$

ت) $[\frac{۹}{۲}]=[۴/۵]\xrightarrow{۴<۴/۵<۵}[\frac{۹}{۲}]=۴$

ث) $[-\sqrt{۲}]=[-۱/۴]\xrightarrow{-۲<-۱/۴<-۱}[-\sqrt{۲}]=-۲$

ج) $[\pi]=[۳/۱۴]\xrightarrow{۳<۳/۱۴<۴}[\pi]=۳$

مسئله ۷

مقدار عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $[\frac{۵۱}{۳۱}]$ **ب)** $[\sqrt{۵}-\sqrt{۲}]$ **پ)** $[-\sqrt{۲}+۱]$

راه‌حل

الف) $۱<\frac{۵۱}{۳۱}<۲\Rightarrow[\frac{۵۱}{۳۱}]=۱$

ب) توجه کنید که $\sqrt{۵}\simeq ۲/۲$ و $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$. بنابراین $\sqrt{۵}-\sqrt{۲}\simeq ۰/۸$. در نتیجه

$۰<\sqrt{۵}-\sqrt{۲}<۱\Rightarrow[\sqrt{۵}-\sqrt{۲}]=۰$

پ) توجه کنید که $-\sqrt{۲}\simeq -۱/۴$. بنابراین $-\sqrt{۲}+۱\simeq -۰/۴$. بنابراین

$-۱<-\sqrt{۲}+۱<۰\Rightarrow[-\sqrt{۲}+۱]=-۱$

نکته

اگر $[x]=a$، آن‌گاه $a\leq x<a+۱$. $(a\in\mathbb{Z})$

مثال

الف) $[x]=-۱\Rightarrow -۱\leq x<۰$ ب) $[x]=۵\Rightarrow ۵\leq x<۶$

نکته

اگر x عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x\pm n]=[x]\pm n$.

مثال

الف) $[\frac{1}{2}-5]=[\frac{1}{2}]-5 \xrightarrow{0<\frac{1}{2}<1} [\frac{1}{2}]-5=0-5=-5$

ب) $[-\sqrt{2}+7]=[-\sqrt{2}]+7 \xrightarrow{-2<-\sqrt{2}<-1} [-\sqrt{2}]+7=-2+7=5$

پ) $[\pi+\sqrt{3}]\neq[\pi]+\sqrt{3}$

نکته

فرض کنید x عددی حقیقی باشد، در این صورت $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$.

مثال

الف) $4\in\mathbb{Z}\Rightarrow[4]+[-4]=0$

ب) $\sqrt{3}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[\sqrt{3}]+[-\sqrt{3}]=-1$

مسئله ۸

حاصل $[1-\sqrt{2}]+[\sqrt{2}+3]$ را به‌دست آورید.

راه‌حل توجه کنید که

$$[1-\sqrt{2}]+[\sqrt{2}+3]=1+\underbrace{[-\sqrt{2}]+[\sqrt{2}]}_{-1}+3=1+(-1)+3=3$$

حل معادله‌های شامل جزء صحیح

اگر k عددی حقیقی و f یک تابع باشد، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[f(x)]=k$ برابر مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های دوگانهٔ $k\leq f(x)<k+1$ است.

مسئله ۹

معادله‌های زیر را حل کنید و حدود x را به‌دست آورید.

الف) $[x]=0$ **ب)** $[3x]=\frac{1}{5}$ **پ)** $[x+2]=-8$ **ت)** $[2x-1]=14$ **ث)** $[x]+[-x]=4$

راه‌حل الف) توجه کنید که $[x]=0\Rightarrow 0\leq x<1\Rightarrow x\in[0,1)$

ب) این معادله جواب ندارد، زیرا حاصل جزء صحیح همواره عددی صحیح است ولی $\frac{1}{5}$ صحیح نیست.

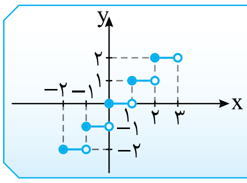
پ) $[x+2]=-8\Rightarrow[x]+2=-8\Rightarrow[x]=-10\Rightarrow -10\leq x<-9\Rightarrow x\in[-10,-9)$

ت) $[2x-1]=14\Rightarrow[2x]-1=14\Rightarrow[2x]=15\Rightarrow 15\leq 2x<16\Rightarrow\frac{15}{2}\leq x<8\Rightarrow x\in[\frac{15}{2},8)$

ث) توجه کنید که $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. پس معادلهٔ $[x]+[-x]=4$ جواب ندارد.

تابع جزء صحیح

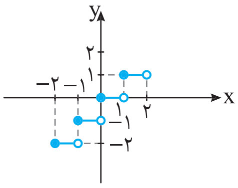
تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نام دارد. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=[x]$ است. نمودار تابع جزء صحیح به‌صورت مقابل است. توجه کنید که تابع جزء صحیح تابعی پله‌ای است. $D_f=\mathbb{R}$



مثال

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ و دامنهٔ $[-۲,۲)$ به‌صورت زیر رسم می‌شود. چون این تابع، تابعی پله‌ای است، کافی است دامنهٔ آن را به بازه‌هایی به صورت $[k,k+۱)$ که در آن k عددی صحیح است، تقسیم کنیم و مقادیر تابع را روی این بازه‌ها مشخص کنیم:

$$D_f=[-۲,۲): -۲\le x<-۱ \Rightarrow f(x)=[x]=-۲$$
$$-۱\le x<۰ \Rightarrow f(x)=[x]=-۱$$
$$۰\le x<۱ \Rightarrow f(x)=[x]=۰$$
$$۱\le x<۲ \Rightarrow f(x)=[x]=۱$$



مسئله ۱۰

نمودار تابع‌های زیر را در دامنهٔ خواسته شده رسم کنید و برد هر تابع را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=[x+۳]$ ، $D_f=[-۳,۳)$

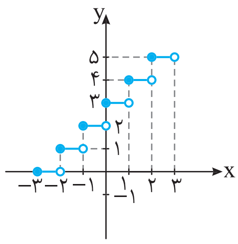
ب) $g(x)=۲-[x]$ ، $D_g=[-۱,۳]$

پ) $h(x)=۲[x]-۱$ ، $D_h=[-۲,۲]$

ت) $k(x)=[x]+[-x]$ ، $D_k=[-۲,۲]$

راه‌حل الف) توجه کنید که $f(x)=[x+۳]=[x]+۳$.

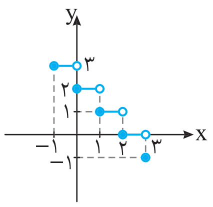
$$D_f=[-۳,۳): -۳\le x<-۲ \Rightarrow [x]=-۳ \Rightarrow f(x)=-۳+۳=۰$$
$$-۲\le x<-۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲+۳=۱$$
$$-۱\le x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow f(x)=-۱+۳=۲$$
$$۰\le x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow f(x)=۰+۳=۳$$
$$۱\le x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow f(x)=۱+۳=۴$$
$$۲\le x<۳ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow f(x)=۲+۳=۵$$



با توجه به نمودار $R_f=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$.

ب) توجه کنید که

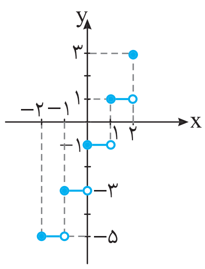
$$g(x)=۲-[x]=-[x]+۲$$
$$D_g=[-۱,۳]: -۱\le x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow -[x]=۱ \Rightarrow g(x)=۱+۲=۳$$
$$۰\le x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow -[x]=۰ \Rightarrow g(x)=۰+۲=۲$$
$$۱\le x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow -[x]=-۱ \Rightarrow g(x)=-۱+۲=۱$$
$$۲\le x<۳ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow -[x]=-۲ \Rightarrow g(x)=-۲+۲=۰$$
$$x=۳ \Rightarrow [x]=۳ \Rightarrow -[x]=-۳ \Rightarrow g(x)=-۳+۲=-۱$$



با توجه به نمودار $R_g=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$.

پ) توجه کنید که

$$h(x)=۲[x]-۱,\quad D_h=[-۲,۲] \Rightarrow -۲\le x<-۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow h(x)=-۴-۱=-۵$$
$$-۱\le x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow h(x)=-۲-۱=-۳$$
$$۰\le x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow h(x)=۰-۱=-۱$$
$$۱\le x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow h(x)=۲-۱=۱$$
$$x=۲ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow h(x)=۴-۱=۳$$

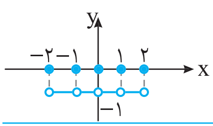


با توجه به نمودار $R_h=\{-۵,-۳,-۱,۱,۳\}$.

ت) توجه کنید که $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$. بنابراین

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x=-۲,-۱,۰,۱,۲ \\ -۱ & x\in(-۲,-۱)\cup(-۱,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,۲) \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



درس اول

تمرین‌های تشریحی

۱۸۶ کدام‌یک از توابع زیر گویاست؟

الف) $f(x)=-۶$ ب) $f(x)=\frac{۲}{۳}x-۶$ پ) $f(x)=\frac{x-۳}{x+۶}$ ت) $f(x)=\frac{۲x}{x-۳}$

ث) $f(x)=\frac{x-۴}{x-۴}$ ج) $f(x)=\frac{\sqrt{۵}x-۳}{x+۷}$ چ) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-۴}{x+۱}$

۱۸۷ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=-۰/۳$ ب) $f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{x}$ پ) $f(x)=\frac{x}{۰/۶-x}$ ت) $f(x)=\frac{۵x+۶}{۵x+۶}$

ث) $f(x)=\frac{۲x^۲-۱۸}{۲x-۶}$ ج) $f(x)=\frac{۲x-۰/۸}{x^۲+۸}$ چ) $f(x)=\frac{۲x-۶}{x^۲+x+۲}$ ح) $f(x)=\frac{x^۲-۴x}{۲x^۲-۵x+۳}$

۱۸۸ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\frac{۱}{x+۴}$ ب) $y=\frac{۱}{x-۲}$

۱۸۹ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش $\mathbb{R}-\{-۳\}$ باشد.

۱۹۰ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش $\mathbb{R}-\{-۱,۵\}$ باشد.

۱۹۱ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش $\mathbb{R}$ باشد.

۱۹۲ حدود m را چنان بیابید که دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-۴}{x^۲+mx+m}$ برابر $\mathbb{R}$ شود.

۱۹۳ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲x-۳}{x^۲+ax+b}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۳,۷\}$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۱۹۴ تابع $f(x)=\frac{x+۳}{x^۲-ax+b}$ مفروض است. اگر دامنهٔ آن مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲\}$ باشد، مقدار $a+b$ را بیابید.

۱۹۵ نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $[-۳,۳]-\{۰\}$ را رسم کنید.

۱۹۶ نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x^۲-۲x}{x-۱}$ را رسم کنید.

۱۹۷ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{-x-۳}$ ب) $f(x)=x\sqrt{x}$ پ) $f(x)=\sqrt{۶-۳x}$

ت) $f(x)=۲-\sqrt{۳x+۴}$ ث) $f(x)=\sqrt{۲x^۲-x-۳}$

۱۹۸ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt{x-۴}$ ب) $y=-۳+\sqrt{x+۱}$ پ) $y=۲+\sqrt{x+۲}$

۱۹۹ دامنهٔ توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\frac{\sqrt{۸-x}}{\sqrt{x+۳}}$ ب) $y=\sqrt{\frac{۲x-۸}{۳-x}}$

۲۰۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) توابع $y=۳x-\sqrt{۶}$ و $y=\dfrac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲x-۳}}$ گویا هستند.

ب) دامنهٔ تابع $y=\dfrac{۱}{(x+۲)(x^{۲}-۶)}$ شامل سه عدد حقیقی نیست.

پ) نمودار تابع $y=\dfrac{x-۴}{x}$ محور x را قطع نمی‌کند.

ت) بی‌شمار تابع گویا با دامنهٔ $\mathbb{R}$ وجود دارد.

۲۰۱ کدام دو تابع با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\dfrac{x}{x^{۲}},\quad g(x)=\dfrac{x^{۳}}{x^{۴}}$

ب) $f(x)=x,\quad g(x)=(\sqrt{x})^{۲}$

پ) $f(x)=\sqrt{x^{۲}},\quad g(x)=(\sqrt{x})^{۲}$

ت) $f(x)=(\sqrt{x})^{۲},\quad g(x)=\sqrt{x|x|}$

ث) $f(x)=۱,\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۲}}}{|x|}$

ج) $f(x)=\sqrt{x^{۳}},\quad g(x)=x\sqrt{x}$

چ) $f(x)=\dfrac{x^{۴}-۱}{x^{۲}+۱},\quad g(x)=x^{۲}-۱$

ح) $f(x)=\dfrac{۱}{x+۲},\quad g(x)=\dfrac{x+۲}{x^{۲}+۴x+۴}$

خ) $f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=\sqrt[۴]{x^{۲}}$

د) $f(x)=\dfrac{|x|}{x},\quad g(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$

ذ) $f(x)=\dfrac{۲x}{|x|},\quad g(x)=\dfrac{۲|x|}{x}$

ر) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۲x},\quad g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۲}$

۲۰۲ حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $[\pi]$

ب) $[۳/۳]$

پ) $۲[-۶/۴]$

ت) $[\dfrac{-۱۳}{۵۱}]$

ث) $[-۳]$

ج) $[\dfrac{۴۱}{۳۷}]$

چ) $[-\dfrac{۲۱}{۴۵}]$

ح) $[-\sqrt{۷}-۳]$

خ) $[۲\sqrt{۳}-۵]$

د) $[۲/۵+\sqrt{۲}]$

۲۰۳ مجموعهٔ جواب‌های معادلات زیر را بیابید.

الف) $[x]=۳$

ب) $[x]=-۱$

پ) $[x+۳]=۴$

ت) $-۲[x-۱]=۸$

ث) $[۲x-۳]=۰$

ج) $۲[x-۴]=۷$

چ) $[\dfrac{x+۲}{۳}]=-۲$

ح) $۲[x]+[-x]=۳$

۲۰۴ نمودار تابع $f(x)=[x+۳]$ با دامنهٔ $D=[-۲,۲)$ را رسم کنید.

۲۰۵ نمودار تابع $y=۲[x]-۳$ را روی بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم کنید.

۲۰۶ اگر $x=-\dfrac{۳}{۲}$، حاصل عبارت $|[۷x]|-[|۳x|]$ را به‌دست آورید.

۲۰۷ دامنهٔ تابع $y=\dfrac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{[x]-۳}$ را بیابید.

۱۸۶ الف) گویا است. ب) گویا است.

پ) گویا است. ت) گویا است.

ث) گویا است (دقت کنید حتی پس از ساده شدن ضابطه نیز تابع گویاست).

ج) گویا است (دقت کنید اعداد می‌توانند زیر رادیکال باشند).

چ) گویا نیست (متغیر نباید زیر رادیکال باشد).

۱۸۷ توجه کنید که دامنهٔ توابع گویا به شکل $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است. پس ابتدا ریشهٔ مخرج هر تابع را به‌دست می‌آوریم، بعد آن‌ها را از مجموعهٔ $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم.

الف) چون این تابع، تابعی ثابت است و مخرج آن به‌ازای هیچ مقداری صفر نمی‌شود، دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است. $D_f=\mathbb{R}$

ب) $x=۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

پ) $۰/۶-x=۰\Rightarrow x=۰/۶\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰/۶\}$

ت) $۵x+۶=۰\Rightarrow x=-\frac{۶}{۵}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{۶}{۵}\}$

(توجه کنید که قبل از ساده کردن ضابطهٔ تابع، دامنه را می‌یابیم)

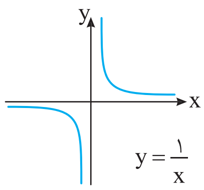
ث) $۲x-۶=۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$

ج) $x^۲+۸=۰\Rightarrow$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

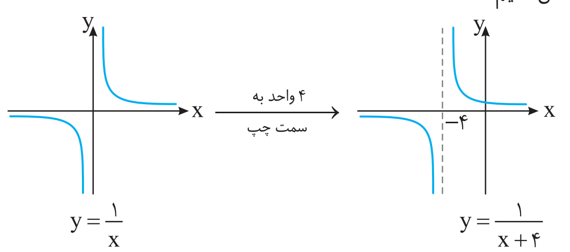
چ) $x^۲+x+۲=۰\Rightarrow \Delta<۰\Rightarrow$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

ح) $۲x^۲-۵x+۳=۰\Rightarrow x=۱,\ x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱,\frac{۳}{۲}\}$

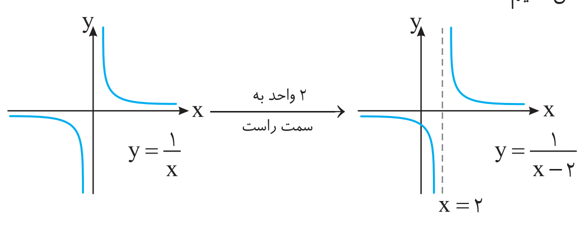
۱۸۸ توجه کنید که نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ به‌صورت مقابل است و نمودار توابع داده شده را می‌توان از روی این نمودار رسم کرد.



الف) $y=\frac{۱}{x+۴}$: کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم.



ب) $y=\frac{۱}{x-۲}$: کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم.



۱۸۹ کافی است تابعی گویا مثال بزنیم که $x=-۳$ ریشهٔ مخرج آن باشد و مخرج تابع ریشهٔ دیگری نداشته باشد. بنابراین $x+۳$ باید عاملی از مخرج تابع باشد. مسئله بی‌شمار جواب دارد، مثلاً: $y=\frac{۱}{x+۳},\quad y=\frac{۱-۴x}{۲(x+۳)},\quad \cdots$

۱۹۰ کافی است تابعی گویا مثال بزنیم که $x=-۱$ و $x=۵$ ریشه‌های مخرج آن باشند و مخرج تابع ریشه‌های دیگری نداشته باشد. بنابراین $x+۱$ و $x-۵$ باید عاملی از مخرج تابع باشند. مسئله بی‌شمار جواب دارد، مثلاً:

$$y=\frac{۱}{(x-۵)(x+۱)}=\frac{۱}{x^۲-۴x-۵}$$

$$y=\frac{۲x+\sqrt{۳}}{۲(x-۵)(x+۱)}=\frac{۲x+\sqrt{۳}}{۲x^۲-۸x-۱۰}$$

۱۹۱ کافی است تابعی گویا مثال بزنیم که مخرج آن ریشه نداشته باشد. مثلاً:

$$y=۰/۳,\quad y=\frac{۱-۴x}{۳},\quad y=۵x+۲,\quad y=\frac{x}{۱+x^۲},\quad \cdots$$

۱۹۲ برای آنکه دامنهٔ این تابع گویا $\mathbb{R}$ باشد باید مخرج آن ریشه نداشته باشد. چون مخرج تابع، چندجمله‌ای درجهٔ دوم است، پس باید $\Delta<۰$. توجه کنید که

$$\Delta=b^۲-۴ac=m^۲-۴(۱)(m)<۰\Rightarrow m^۲-۴m<۰\Rightarrow m(m-۴)<۰$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
m(m−۴)		+	۰	−	۰	+	

$m\in(۰,۴)\Rightarrow ۰<m<۴$

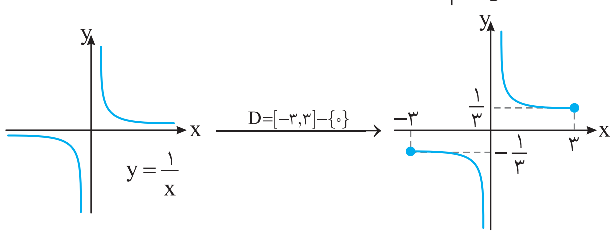
۱۹۳ چون دامنهٔ توابع گویا به شکل $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، با توجه به دامنهٔ داده شده، یعنی $\mathbb{R}-\{-۳,۷\}$، می‌توان گفت $x=-۳$ و $x=۷$ ریشه‌های مخرج هستند. پس $x=-۳$ و $x=۷$ باید مخرج را صفر کنند:

$$x^۲+ax+b=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\Rightarrow ۹-۳a+b=۰\\ x=۷\Rightarrow ۴۹+۷a+b=۰\end{cases}$$

با حل دستگاه $\begin{cases}۹-۳a+b=۰\\ ۴۹+۷a+b=۰\end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=-۴$ و $b=-۲۱$.

۱۹۴ چون دامنهٔ تابع گویا به شکل $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، با توجه به دامنهٔ داده شده، یعنی $\mathbb{R}-\{-۲\}$، می‌توان گفت $x=-۲$ ریشهٔ مخرج است و چون مخرج چندجمله‌ای درجهٔ دوم است، باید $x=-۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد. در نتیجه، چون ضریب $x^۲$ در مخرج برابر ۱ است، پس مخرج باید $(x+۲)^۲$ باشد. بنابراین $x^۲-ax+b=(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴$ در نتیجه $a=-۴$ و $b=۴$، پس $a+b=۰$.

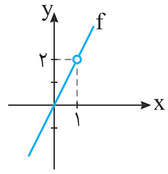
۱۹۵ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم. سپس دامنهٔ آن را به بازهٔ داده شده محدود می‌کنیم.



۱۹۶ ابتدا توجه کنید دامنهٔ تابع داده شده مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۱\}$ است. اکنون ضابطهٔ تابع مورد نظر را تا حد امکان ساده می‌کنیم، سپس با در نظر گرفتن دامنه، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x^۲-۲x}{x-۱}=\frac{۲x(x-۱)}{x-۱}=۲x,\quad x\neq ۱$$

بنابراین نمودار تابع f خط $y=2x$ است که در $x=1$ توخالی است. (توجه کنید نقطهٔ $(1,2)$ روی نمودار خط $y=2x$ است، اما روی نمودار تابع f نیست)



۱۹۷ الف) $-x\ge0\Rightarrow x\le0\Rightarrow D_f=(-\infty,0]$

ب) $x\ge0\Rightarrow D_f=[0,+\infty)$

پ) $6-3x\ge0\Rightarrow 3x\le6\Rightarrow x\le2\Rightarrow D_f=(-\infty,2]$

ت) $3x+4\ge0\Rightarrow 3x\ge-4\Rightarrow x\ge-\frac{4}{3}\Rightarrow D_f=[-\frac{4}{3},+\infty)$

ث)

$2x^2-x-3\ge0\xrightarrow{\text{پیدا کردن ریشه}}\Delta=b^2-4ac=1-4(2)(-3)=25$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1+5}{4}=\frac{3}{2}\\ x=\frac{1-5}{4}=-1\end{cases}$

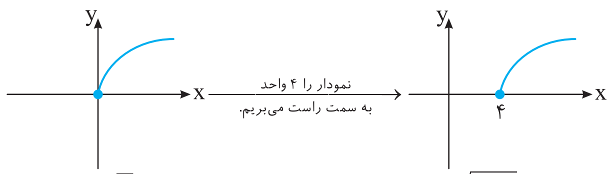
تعیین علامت →

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2-x-3$		+	0	−	0	+	

$D_f=(-\infty,-1]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$

۱۹۸ با انتقال یا قرینه کردن نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار توابع خواسته شده را رسم می‌کنیم.

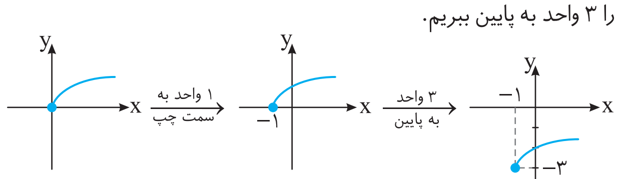
الف) $y=\sqrt{x-4}$



$y=\sqrt{x}$ $\quad$ $y=\sqrt{x-4}$

ب) $y=-3+\sqrt{x+1}$

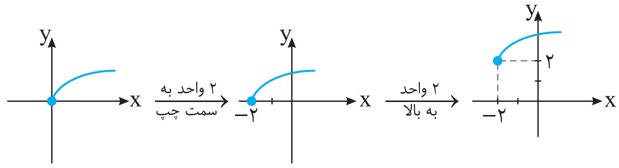
کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۱ واحد به سمت چپ، سپس نمودار حاصل را ۳ واحد به پایین ببریم.



$y=\sqrt{x}$ $\quad$ $y=\sqrt{x+1}$ $\quad$ $y=-3+\sqrt{x+1}$

پ) $y=2+\sqrt{x+2}$

کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به سمت چپ، سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به بالا ببریم.

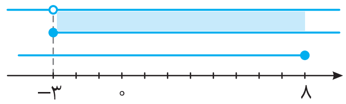


$y=\sqrt{x}$ $\quad$ $y=\sqrt{x+2}$ $\quad$ $y=2+\sqrt{x+2}$

۱۹۹ الف) دامنهٔ هریک از عبارت‌های رادیکالی را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که مخرج کسر نباید صفر باشد. در نهایت اشتراک نواحی به‌دست آمده دامنهٔ تابع مورد نظر است.

$$y=\frac{\sqrt{8-x}}{\sqrt{x+3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}8-x\ge0\Rightarrow x\le8\\ x+3\ge0\Rightarrow x\ge-3\\ \sqrt{x+3}\ne0\Rightarrow x\ne-3\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}D=(-3,8]$$



ب) دامنهٔ $y=\sqrt{f(x)}$ از $f(x)\ge0$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که مخرج عبارت گوید هم نباید صفر باشد.

$$y=\sqrt{\frac{2x-8}{3-x}}$$

$\frac{2x-8}{3-x}\ge0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$2x-8$		−		−	0	+	
$3-x$		+	0	−		−	
$\frac{2x-8}{3-x}$		−	ت	+	0	−	

$3-x\ne0\Rightarrow x\ne3\xrightarrow{\text{اشتراک}}D=(3,4]$

۲۰۰ الف) نادرست. تابع $y=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x-3}}$ گویا نیست. (متغیر x نباید زیر رادیکال باشد.)

ب) درست.

$$D:(x+2)(x^2-6)\ne0\Rightarrow\begin{cases}x\ne-2\\ x^2\ne6\Rightarrow x\ne\pm\sqrt{6}\end{cases}$$

$$D=\mathbb{R}-\{\sqrt{6},-\sqrt{6},-2\}$$

پ) نادرست. محل تلاقی با محور x نقطه‌ای است که عرض آن نقطه صفر باشد:

$$\frac{x-4}{x}=0\Rightarrow x=4$$

نمودار تابع محور x را در نقطهٔ $(4,0)$ قطع می‌کند.

ت) درست. کافی است مخرج تابع ریشه نداشته باشد. مثلاً:

$$y=2-x,\quad y=\frac{1}{x^2+2},\cdots$$

۲۰۱ دو تابع وقتی برابرند که دامنه‌هایشان برابر و ضابطه‌هایشان نیز برابر باشد. در نتیجه برای بررسی تساوی دو تابع ابتدا دامنه‌ها را مقایسه می‌کنیم. در صورت برابری دامنه‌ها، برابری ضابطه‌ها را هم بررسی می‌کنیم.

الف)

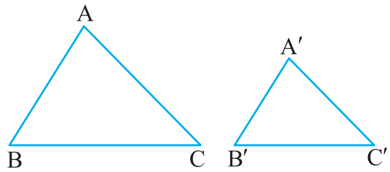
$$\left.\begin{array}{l}D_f:x^2\ne0\Rightarrow x\ne0\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}\\ D_g:x^4\ne0\Rightarrow x\ne0\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0\}\end{array}\right\}\Rightarrow D_f=D_g$$

همچنین، $f(x)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x},\quad g(x)=\frac{x^3}{x^4}=\frac{1}{x}$

چون دامنه‌ها برابرند و ضابطه‌ها نیز برابرند، پس تابع‌های f و g برابرند.

قضیهٔ (ض ض ض)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$$

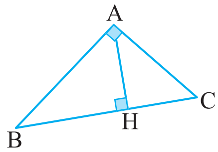


اگر دو مثلث متشابه باشند:

الف) نسبت ارتفاع‌های نظیرشان برابر با نسبت تشابه مثلث‌هاست.

ب) نسبت محیط‌هایشان برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌هایشان برابر با مربع نسبت تشابه مثلث‌هاست.

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه: اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ ارتفاع وارد بر وتر را رسم کرده و پای عمود را H بنامیم، آن‌گاه



۱) $AB^2=BC\times BH$

۲) $AC^2=BC\times CH$

۳) $AH^2=BH\times CH$

۴) $BC\times AH=AB\times AC$

۵) $AB^2+AC^2=BC^2$ (قضیهٔ فیثاغورس)

خلاصهٔ فصل سوم

تبدیل نمودار تابع

- انتقال افقی $(a>0)$:
  - $y=f(x+a)$: نمودار تابع f به اندازهٔ a واحد به سمت چپ انتقال می‌یابد.
  - $y=f(x-a)$: نمودار تابع f به اندازهٔ a واحد به سمت راست انتقال می‌یابد.
- انتقال عمودی $(a>0)$:
  - $y=f(x)+a$: نمودار تابع f به اندازهٔ a واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.
  - $y=f(x)-a$: نمودار تابع f به اندازهٔ a واحد به سمت پایین انتقال می‌یابد.
- انبساط و انقباض عمودی:
  - $y=kf(x)$: عرض تمام نقاط نمودار تابع f را k برابر می‌کنیم. (انبساط)
  - $y=\frac{1}{k}f(x)$: عرض تمام نقاط نمودار تابع f را بر k تقسیم می‌کنیم. (انقباض)
- قرینه نسبت به محور x: $y=-f(x)$

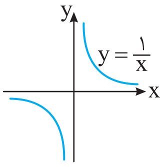
ویژگی‌های تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ از روی نمودار آن

۱) چون تابع فقط در $x=0$ تعریف نشده است، دامنهٔ آن به شکل $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ است.

۲) نمودار تابع محور y را قطع نمی‌کند، اما به اندازهٔ دلخواه به محور y نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

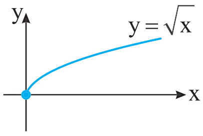
۳) نمودار تابع محور x را قطع نمی‌کند، اما به اندازهٔ دلخواه به محور x نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

۴) چون نمودار تابع محور x را قطع نمی‌کند، پس برد آن به‌صورت $R_f=\mathbb{R}-\{0\}$ است.



دامنهٔ تابع گویا: اگر f تابعی گویا باشد، آن‌گاه $D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$. پس برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع گویا، مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های مخرج را (در صورت وجود) از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم.

تابع رادیکالی: ضابطهٔ این تابع به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ و دامنهٔ آن مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی است. $D_f=[0,+\infty)$



دامنهٔ توابع رادیکالی: دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ برابر است با $D_g=\{x\,|\,x\in D_f,\ f(x)\geq 0\}$

تساوی دو تابع: دو تابع f و g را برابر می‌نامیم به شرطی که

۱) دامنهٔ دو تابع برابر باشند، یعنی $D_f=D_g$.

۲) ضابطهٔ دو تابع برابر باشند، یعنی برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم $f(x)=g(x)$.

تابع پله‌ای: به تابع چندضابطه‌ای که ضابطهٔ هر قسمت آن، تابعی ثابت است، تابع پله‌ای گفته می‌شود.

جزء صحیح عدد حقیقی: جزء صحیح هر عدد حقیقی، برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچک‌تر یا با آن برابر است. جزء صحیح عدد x را با $[x]$ نشان می‌دهیم.

ویژگی‌های جزء صحیح

۱- اگر $[x]=a$، آن‌گاه $a\le x<a+1$. $(a\in\mathbb{Z})$

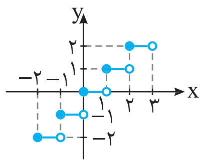
۲- اگر x عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آن‌گاه
$[x\pm n]=[x]\pm n$

۳- فرض کنید x عددی حقیقی باشد، در این صورت

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

حل معادله‌های شامل جزء صحیح: اگر k عددی حقیقی و f یک تابع باشد، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[f(x)]=k$ برابر مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های دوگانهٔ $k\le f(x)<k+1$ است.

تابع جزء صحیح: تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نام دارد. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=[x]$ است. $D_f=\mathbb{R}$



وارون تابع: با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به‌دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

تابع وارون‌پذیر: اگر رابطهٔ f تابع باشد و وارون رابطهٔ f نیز تابع باشد، f را وارون‌پذیر می‌نامیم. در این صورت $(a,b)\in f\Leftrightarrow(b,a)\in f^{-1}$
همچنین $D_f=R_{f^{-1}}$ و $D_{f^{-1}}=R_f$.

نمودار وارون یک تابع: برای رسم نمودار وارون تابع f، کافی است قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) رسم کنیم.

تابع یک‌به‌یک: به تابعی که در زوج مرتب‌های متفاوت خود مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک‌به‌یک می‌گوییم.
تابع f وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر یک‌به‌یک باشد.

تشخیص یک‌به‌یک بودن تابع از روی نمودار
تابع f یک‌به‌یک است به شرطی که هر خط موازی محور x، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

یک‌به‌یک بودن تابع درجهٔ دوم
تابع درجهٔ دوم f با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ و دامنهٔ $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ یا هر زیرمجموعه از این دو بازه، یک‌به‌یک است.

به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون: برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون تابع یک‌به‌یک f، از تساوی $y=f(x)$، x را بر حسب y پیدا می‌کنیم و سپس با جابه‌جا کردن x و y، ضابطهٔ تابع f^{-1} را به‌دست می‌آوریم.

اعمال جبری روی توابع: فرض کنید f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند. در این صورت؛

الف) تابع مجموع دو تابع f و g را با $f+g$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

ب) تابع تفاضل دو تابع f و g را با $f-g$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

پ) تابع حاصل‌ضرب دو تابع f و g را با $f.g$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$(f.g)(x)=f(x).g(x),\quad D_{f.g}=D_f\cap D_g$$

ت) تابع حاصل‌تقسیم تابع f بر g را با $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$$

خلاصهٔ فصل چهارم

تبدیل رادیان و درجه به یکدیگر $\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}$

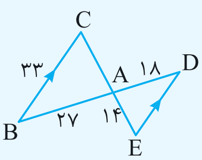
- برای تبدیل سریع رادیان به درجه کافی است به جای π قرار دهیم 180°.
- برای تبدیل سریع درجه به رادیان کافی است زاویهٔ داده شده را در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ضرب کنیم.
- هر ۱ رادیان تقریباً 57° است.

طول کمان: در دایره‌ای به شعاع r و زاویهٔ مرکزی α رادیان، طول کمان برابر است با $l=r\alpha$.

امتحان جامع (۱)

صفحات پاسخ: ۳۴۳ و ۳۴۴

امتحان نهایی: **ریاضی ۲**	رشته: **علوم تجربی**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	بارم
۱	**درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.** **الف) دو خط** $x-۲y=۱$ **و** $y=۲x-۳$ **بر هم عمود هستند.** **ب) هر تابع درجهٔ دوم، تابعی یک‌به‌یک است.** **پ) به‌ازای هر عدد حقیقی** a **رابطهٔ** $\log_a ۱=۰$ **برقرار است.** **ت) واحد واریانس همان واحد داده‌هاست.**	۱
۲	**جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.** **الف) برای رسم نمودار وارون یک تابع، کافی است قرینه نمودار را نسبت به** .... **رسم کنیم.** **ب) فاصلهٔ نقطهٔ** $A(۷,-۳)$ **از خط** $x=-۶$ **برابر است با** .... **پ) حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ** $۲x^۲-x=۶$ **برابر است با** .... **ت) اگر تمام داده‌های آماری، با هم برابر باشند، ضریب تغییرات آن‌ها** .... **است.**	۱
۳	**فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط** $۳x-y+m=۰$ **برابر** $۲\sqrt{۱۰}$ **است. مقدار** m **را بیابید.**	۱
۴	**معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۲ برابر ریشه‌های معادله** $۲x^۲+x-۴=۰$**، باشند.**	۱/۲۵
۵	**اگر** $\frac{b}{۷+b}=\frac{a}{۹+a}$ **. مقدار** $\frac{b}{a}$ **را به‌دست آورید.**	۰/۵
۶	**معادلات زیر را حل کنید.** **الف)** $\frac{۴}{x^۲}-۲۰=۰$ **ب)** $۲[x]+۴=۰$ **پ)** $۲\log_۳ x$	۱/۵
۷	**در شکل مقابل** $BC\|\|DE$ **. اندازهٔ پاره‌خط‌های** DE **و** AC **را به‌دست آورید.** 	۱/۵
۸	**آیا توابع** $f(x)=\sqrt{x^۲-x}$ **و** $g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱}$ **با هم برابرند؟ چرا؟**	۰/۷۵
۹	**دو تابع** $f(x)=\frac{x+۱}{x-۳}$ **و** $g(x)=\sqrt{x+۴}$ **را در نظر بگیرید.** **الف) مقدار** $(f+g)(۰)$ **را به‌دست آورید.** **پ) دامنهٔ تابع** $\frac{g}{f}$ **را تعیین کنید.**	۱/۷۵
۱۰	**نمودار توابع زیر را رسم کنید.** **الف)** $y=۲\cos x-۱\ ;\ [-\pi,\pi]$ **ب)** $y=۲^x-۳$	۱/۵
۱۱	**حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.** **الف)** $\tan ۱۳۵^\circ-\cot ۱۲۰^\circ$ **ب)** $\sin(\frac{-۷\pi}{۶})$	۱/۲۵

۱۲	اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴$ مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید. $\log \frac{۲۵}{۹} - \log \sqrt[۴]{۶}$	۱/۵
۱۳	حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. الف) $\lim\limits_{x \to ۱} ۲\sqrt{۱-x}$ ب) $\lim\limits_{x \to ۱/۵} (x-[x])$ پ) $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{۲x^۲-۳x+۱}{۱-x^۲}$	۲
۱۴	اگر تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار m را بیابید. $f(x)=\begin{cases} ۲x+m & x<۱ \\ ۱-[x] & x \geq ۱ \end{cases}$	۱
۱۵	احتمال قبولی علی در آزمون رانندگی ۰/۸ و احتمال قبولی رضا در این آزمون ۰/۶ است. احتمال آن را بیابید که فقط رضا در این آزمون قبول شود.	۱
۱۶	ضریب تغییرات و میانه داده‌های ۵، ۵، ۱، ۴، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۸ و ۸ را به‌دست آورید.	۱/۵
	موفق و پیروز باشید مجموع بارم	۲۰

پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱)

۱ الف) نادرست. (۰/۲۵) اگر شیب خط $x-۲y=۱$ را با $m_۱$ و شیب خط $y=۲x-۳$ را با $m_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه

$$x-۲y=۱\Rightarrow -۲y=۱-x\Rightarrow y=\frac{۱-x}{-۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow m_۱=\frac{۱}{۲}$$

$$y=۲x-۳\Rightarrow m_۲=۲,\quad m_۱\times m_۲=\frac{۱}{۲}\times ۲=۱$$

چون حاصل $m_۱\times m_۲$ برابر -۱ نیست، دو خط بر هم عمود نیستند.

ب) نادرست. (۰/۲۵) نمودار تابع درجهٔ دوم به‌صورت  یا  است. واضح است که هر خط موازی محور x، نمودار این تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع یک‌به‌یک نیست.

پ) نادرست. (۰/۲۵) زیرا در تابع $f(x)=\log_a x$، همواره $a>۰$ و $a\neq ۱$.

ت) نادرست. (۰/۲۵) واحد واریانس، مربع واحد داده‌هاست.

۲ الف) خط $y=x$ یا نیمساز ربع اول و سوم (۰/۲۵)

ب) ۱۳ (۰/۲۵) با توجه به معادله خط $ax+by+c=۰$، می‌توان نوشت

$$x=-۶\Rightarrow x+۶=۰\Rightarrow a=۱,\quad b=۰,\quad c=۶$$

اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $x=-۶$ را با d نشان دهیم. آن‌گاه

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\xrightarrow[y_۰=-۳]{x_۰=۷}d=\frac{|۱\times(۷)+۰\times(-۳)+۶|}{\sqrt{۱^۲+۰^۲}}=۱۳$$

پ) -۳ (۰/۲۵)

$$۲x^۲-x=۶\Rightarrow ۲x^۲-x-۶=۰$$

حاصلضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}=-\frac{۶}{۲}=-۳$

ت) صفر (۰/۲۵).

۳ فاصلهٔ مبدأ مختصات $(۰,۰)$ از خط $۳x-y+m=۰$ را d می‌نامیم و از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\xrightarrow[x_۰=۰,y_۰=۰,d=۲\sqrt{۱۰}]{a=۳,b=-۱,c=m}$$

$$۲\sqrt{۱۰}=\frac{|۳\times(۰)+(-۱)\times(۰)+m|}{\sqrt{(۳)^۲+(-۱)^۲}}\ (۰/۲۵)\Rightarrow ۲\sqrt{۱۰}=\frac{|m|}{\sqrt{۹+۱}}\ (۰/۲۵)$$

$$۲\sqrt{۱۰}=\frac{|m|}{\sqrt{۱۰}}\Rightarrow |m|=۲\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}\Rightarrow |m|=۲۰\ (۰/۲۵)\Rightarrow m=\pm ۲۰\ (۰/۲۵)$$

۴

معادلهٔ قدیم: $۲x^۲+x-۴=۰\xrightarrow{\text{α و β ریشه‌های معادلهٔ قدیم}}$

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵)\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۴}{۲}=-۲\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

معادلهٔ جدید: $x^۲-S'x+P'=۰\xrightarrow{\text{۲α و ۲β ریشه‌های معادلهٔ جدید}}$

$$\begin{cases}S'=۲\alpha+۲\beta=۲(\alpha+\beta)=۲S=۲\times-\frac{۱}{۲}=-۱\ (۰/۲۵)\\ P'=(۲\alpha)(۲\beta)=۴(\alpha\beta)=۴P=۴\times-۲=-۸\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

معادلهٔ جدید: $x^۲+x-۸=۰$ (۰/۲۵)

۵

$$\frac{a}{۹+a}=\frac{b}{۷+b}\xrightarrow{\text{طرفین - وسطین}}a(۷+b)=b(۹+a)\ (۰/۲۵)$$

$$۷a+\cancel{ab}=۹b+\cancel{ab}\Rightarrow ۷a=۹b\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{۷}{۹}\ (۰/۲۵)$$

۶ الف)

$$\frac{۴}{x^۲}-۲۰=۰\Rightarrow\frac{۴}{x^۲}=\frac{۲۰}{۱}\Rightarrow ۲۰x^۲=۴\Rightarrow x^۲=\frac{۴}{۲۰}=\frac{۱}{۵}\ (۰/۲۵)$$

$$x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۵}}\ (۰/۲۵)\xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}}x=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

ب) $۲[x]+۴=۰\Rightarrow ۲[x]=-۴\Rightarrow [x]=-۲\ (۰/۲۵)\Rightarrow -۲\le x<-۱\ (۰/۲۵)$

پ)

$$۲\log_۳ x=۱\Rightarrow \log_۳ x^۲=۱\Rightarrow ۳^۱=x^۲\ (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases}x=\sqrt{۳}\ \text{ق.ق}\ (۰/۲۵)\\ x=-\sqrt{۳}\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

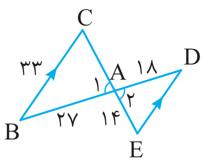
۷

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ \hat{C}=\hat{E}\end{cases}\xrightarrow{(\text{زز})}(۰/۲۵)\ \triangle ABC\sim\triangle ADE\ (۰/۲۵)$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AE}\ (۰/۲۵)\Rightarrow\frac{۲۷}{۱۸}=\frac{۳۳}{ED}=\frac{AC}{۱۴}\ (۰/۲۵)$$

$$۲۷\times ED=۳۳\times ۱۸\Rightarrow ED=۲۲\ (۰/۲۵)$$

$$\frac{۲۷}{۱۸}=\frac{AC}{۱۴}\Rightarrow ۲۷\times ۱۴=۱۸\times AC\Rightarrow AC=۲۱\ (۰/۲۵)$$



۸ خیر. چون

$$f(x)=\sqrt{x^۲-x}\Rightarrow D_f:x^۲-x\ge ۰\Rightarrow D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)\ (۰/۲۵)$$

$$g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱}\Rightarrow D_g:x\ge ۰\ ,\ x-۱\ge ۰\Rightarrow x\ge ۱$$

$$D_g=[۰,+\infty)\cap[۱,+\infty)\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)\ (۰/۲۵)$$

$$D_f\neq D_g\Rightarrow f(x)\neq g(x)\ (۰/۲۵)$$

۹ الف)

$$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=\frac{۰+۱}{۰-۳}+\sqrt{۰+۴}=-\frac{۱}{۳}+۲=\frac{۵}{۳}\ (۰/۲۵)$$

ب)

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}\ (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases}D_f:\mathbb{R}-\{۳\}\ (۰/۲۵)\\ D_g:x+۴\ge ۰\Rightarrow x\ge -۴\Rightarrow D_g=[-۴,+\infty)\ (۰/۲۵)\\ f(x)=۰\Rightarrow\frac{x+۱}{x-۳}=۰\Rightarrow x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

$$D_f\cap D_g=[-۴,+\infty)-\{۳\}\ (۰/۲۵)$$

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}=[-۴,+\infty)-\{۳\}-\{-۱\}$$

$$D_{\frac{g}{f}}=[-۴,+\infty)-\{۳,-۱\}\ (۰/۲۵)$$